

ANTVERPIÆ
APUD HENRICUM & CORNELIUM VERDUSSEN. ANNO. MDCCVII.
cum gratia & privilegio

R·P· ANDREÆ

TACQUET

ANTVERPIENSIS,

E SOCIETATE JESU,

MATHESEOS PROFESSORIS

OPERA MATHEMATICA,

Quorum Elenchus in fine Præfationis Typographi ad Lectorem exhibetur.

Opera ſanè aurea in Lucem publicam & uſum Eruditæ Poſteritatis Gratulantibus Litteratorum Genijs edita.

Editio Secunda Priori Nitidior & Emendatior.



ANTVERPIÆ,

Apud HENRICUM & CORNELIUM VERDUSSEN. Anno M.DCC.VII.

AD COMPACTOREM.

SChematismi buius operis ita impressi sunt: ut omnes simul iuncti ad calcem totius operis affigi possint, ita ut singuli folio albo affixi, ac deinde explicati, toti extra librum in conspectum veniant, complicati autem semel, præcisè intra libri margines recipiantur, eo servato schematismorum ordine, qui est librorum boc opere contentorum. Quis ordo servari debeat inter schematismos spectantes ad eumdem librum, ex ordine figurarum sese numeraliter subsequentium facilè patebit. Ubi verò hic numeralis ordo interturbatus subinde est, quia aliter laminæ figuras non satis commodè capiebant, quod in Opticâ accidit, tenendus est ordo in ipso titulo schematismorum expressus.

Si tamen difficile judicetur tot schematismos, operi simul subjungere, poterunt eodem servato modo & ordine, suis quique libris subnecti.

Vel denique poterunt seorsim in libellum compingi. Emptor eligat.

Schematismi qui nullum titulum præferunt nisi SCHEMATISMUS, ad Cylindrica & Annularia spectant.

TOT DEN BINDER.

DE placeten van desen boeck sijn soo ghedruekt, dat sy allen te saemen gevoeght connen worden op het laeste vanden boeck, in sulcker voeghen, dat het bladt open gevauden sijnde de witte syde blyve binnen den boeck, ende de andere met de figuren gansch buyten den boeck gesien worden: ende eens gevouden wesende effen binnen den boeck ghesloten worden: houdende dat selve oordre der placeten, t'welck is der boecken alhier vervat. Wat oordre men moet volgen inde placeten van ieder boeck, salmen verstaen uyt het oordre van de ghetallen der figuren; daer nochtans dit oordre der ghetallen onderbroken is (het welck geschiet is inde figuren van Optica, om dat de placeten de figuren niet ghevoeghelyck en vervattede) sal menvolgen het oordre, het welck den tytel der placeten aenwyst.

Indien nochtans dat het moeyelyck schynt, soo veele placeten achter den boeck by een te binden, sullen connen die van ieder boeck, achter ieder boeck, daer sy toe hooren gevoeght worden.

Ofte vvel ten laesten connen die alle te samen in een besonder boecxken gebonden vvorden.

Alles naer beliefte der coopers.

De placeten daer geenen anderen tytel en staet dan SCHEMATISMUS, dienen voor de Cylindrica, en Annularia.

AU RELIEUR.

LEs Schematismes, ou lames de ce livre, sont tellement imprimées, qu'elles puissent toutes ensembles, estre liées à la fin du livre, en sorte, que la fueille estant dépliée, toute la figure, passe la tranche du livre, & paroisse ainsi entierement: & la mesme n'estant qu'une fois pliée, se remette precisement dans le livre. Observant en les lames l'ordre des livres en cette œuvre contenus. Quel ordre se doive observer, en les lames appartenantes au mesme livre, pourra t'on facilement remarquer, hors de l'ordre des figures, se suivantes en nombre. Mais, ou cet ordre des nombres est aucunement interrompu, à cause des lames, lesquelles autrement, ne comprendoient pas assez commodement les figures (ce qui est arrivé en les figures de l'Optique) on doit observer l'ordre prescrit, en le tiltre mesme des lames.

Si on juge neantmoins difficile de joindre, à l'œuvre ensemble, tant de figures, observant la mesme fazon & ordre, on les pourra joindre chasque à son livre.

Ou enfin, on en pourra faire un livre particulier.

Que l'acheteur choisisse.

Les lames, lesquelles n'ont autre tiltre que celuy de SCHEMATISMUS appartiennent aux Cylindriques & Annulaires.

Si cui visum fuerit adhuc aliter laminas compingere, quàm in admonitione ad Compactorem explicuimus: poterit id fieri servato semper hoc quod de figurarum extra librum explicatione istic monuimus, in hunc modum.

ASTRONOMIÆ.

Lamina 1	inseratur ad paginam 8
2	41
3	56
4	60
5	84
6	104
7	113
8 & 9	131
10	152
11	166
12	180
13	194
14	198
15	205
16	217
17	229
18	236
19	247

GEOMETRIÆ PRACTICÆ.

Lamina 1.2.3	Pag. 294
4.5.6.7	322
8.9	340

OPTICÆ.

Schema 1.2.3.	Pag. 354
4	356
5.6.7	362
8.9.10.11.	364
12.13.14	367
15	373
16	375
17	377
18.19.20	390

CATOPTRICÆ.

Schema 21	Pag.394
22	400
23	405
24.25	409
26	414
27.28.29	422

ARCHITECTURÆ MILIT.

Schema 30	Pag.429
31	434
32	437
33.34	440
35.36	442
37.38	445

CYLINDRICORUM ET ANNULARIUM.

Schismatismus I	Pag.452
II	456
III	459
IV	462
V	465
VI	471
VII	475
VIII	482
IX	483
X	485
XI	487
XII	491
XIII	495
XIV.XV	496
XVI.XVII	498
XVIII	538

CYLINDRICORUM ET ANNULARIUM lib.V.

Figura XIX	Pag.524
XX	532
XXI	536

PRÆFATIO TYPOGRAPHI AD LECTOREM.

EN tibi, Candide Lector, Opera Mathematica Patris Andreæ Tacquet Geometræ, scriptis suis jam pridem clari. Virum non commendo, quem & sua in inveniendo subtilitas, & in explicando claritas omni commendatione fecit majorem. Cylindricorum & Annularium quinque, quos conscripsit libros, & quæ jam eduntur opera posthuma, consule; dictis meis fidem facient. Certè Stephanus de Angelis Ordinis Iesuatorum, insignis Geometra, in præfatione ad ea, quæ de in infinitis parabolis solerter inventa edidit, typis Venetis anno 1659, *non dubitavit Tacquetij nostri Cylindrica & Annularia* OPUS AUREUM *nuncupare. Acutissimus verò ille & cùm Elementis suis tetragonismicis, tum septem de Cycloïde subtilissimis vulgatis libris, atque usque ad Adversariorum non vulgarium notam invidiam ingeniosis, Antonius Lalouera è Societate Nostrâ in præfatione sua ad lib. suum VI. de Cycloïde ita censet :* Serò, quod ægrè ferimus, venerunt in manus nostras R.P. Tacquet libri IV. Cylindricorum & Annularium, OPUS CENSEMUS ABSOLUTISSIMUM, ATQUE SUO MERITO NUMQUAM INTERITURUM, ejusque Auctori, qui primus hac de re suas lucubrationes vulgavit, istam coronam debitam esse cognoscimus &c. *Quintum ejusdem operis librum hic Author nondum viderat, qui seorsim editus anno* 1659 *cùm priores quatuor vulgati fuit anno* 1651; *hos simul junctos jam damus editione altera. Nec dubito, Candide Lector, quin judicaturus sis cum his præstantissimis Geometris, & ejusdem nota alijs pluribus, quorum vulgata typis de Authore nostro judicia in promptu mihi est proferre. Hoc puto futurum ut admireris, tantum Geometram eò se demisisse, ut tirones manu duceret. Elementa conscripsit; nosti illa, credo : jam ter prælum nostrum fatigarunt. Quantus etiam in Elementis Geometra emicuit! Sed quid elementa dico, quibus illa miscuit & addidit quæ sublimes etiam animos detineant? ab elementis per universam, quanta quanta est, mathesin*

thesin animum explicuit, illa methodo eam traditurus, qua ista conscripserat; non tam sui nominis commendandi, quàm disciplinarum Mathematicarum & discere cupientium causa. Totam itaque Astronomiam, rem sanè pulchram sed arduam, in octo libros ordine scientifico, quod nemo hactenus, ita digessit, ut jam etiam, sine magistro perdisci possit, in quam non nisi admodum difficulter, quamvis praeunte doctore, dabatur penetrare.

Geometriam practicam, Opticam, Catoptricam, scientias jucundas & ingeniosas stylo, ad eundemq; finem elucubravit. Diopticam dum tractat, iturus porrò per omnes, quas Geometriæ scientias subalternas dicimus, egregios conatus mors intercepit, ea ætate qua sanè immatura, ad quam tamen mirandum inter difficilia studia, & afflictissimam valetudinem pervenisse. Quos jam enumeravimus limati ingenij labores tibi Lector exhibemus. Adjunximus & ejusdem Authoris Architecturam Militarem, non quia illam prælo destinarat, sed quia Authoris stylo, materia & compendio existimavimus placituram ijs, quos juvat hisce studijs initiari. Boni consule studia Authoris & jam vita functo benè precare, qui tuo & Matheseos bono se totum mancipavit, ita tamen, ut nec suum nomen, nec tuam scientiam, sed divinæ Sapientiæ in abditissimis veritatibus recondita majorem gloriam ac manifestationem, suorum laborum, tuiq; studij finem esse voluerit. Quo si etiam spectaveris, na tu feliciter ex ipsius voto, & tuo bono te studijs Mathematicis tum denique profuturis, & laudabilibus impenderis. Sequitur Elenchus Tractatuum, in hoc Opere, ordine quo dispositi sunt, contentorum.

Quid singulis Libris contineatur sequens syllabus indicabit.

SYLLA-

SYLLABUS
CAPITUM ET NUMERORUM ASTRONOMIÆ.

ASTRONOMIÆ LIBER I.
DE MOTU SOLIS.

CAPUT I.

Definitiones primæ, quibus primus ad Astronomiam aditus aperitur.

Numerus I. *Sequuntur definitiones singulæ.*

CAPUT II.

Figuræ cæli & terræ. Terra ad cælum puncti instar. Locus terræ.

Num. II. *Figura cæli sphærica est, & motus astrorum circularis.*
III. *Figura terræ sphærica est.*
IV. *Superficies maris, imò cujusvis humidi quiescentis sphærica est.*
V. *Unde fiat ut Terra & mare quamvis sint sphærica, appareant esse plana.*
VI. *Consectaria ad rotunditatem terræ & aquæ.*
VII. *Sphæra cujus semidiameter est distantia oculi nostri à centro Firmamenti, se habet ad firmamentum puncti instar, quemcumq; dederis Terræ locum in universo.*
VIII. *Terra quoad sensum est in centro firmamenti.*

CAPUT III.

Per hypothesim duplicis motus Solis dantur causæ eorum, quæ circa varietatem dierum ac noctium & tempestatum anni ubivis gentium observantur.

Num. IX. P*Hænomena communia, hoc est quæ in omnium oculos incurrunt.*
X. *Prima hypothesis Astronomiæ de duplici Solis motu proponitur.*
XI. *De motibus compositis.*
XII. *Qualis sit motus qui ex Solis motu primo ac secundo componitur, quemq; Sol non ex hypothesi, sed verè & realiter percurrit.*
XIII. *Quem circulum quoad sensum Sol quotidie percurrat.*
XIV. *Notantur quædam ad sequentia.*
XV. *Causæ dantur eorum, quæ apparent in sphæra rectâ.*
XVI. *Causæ eorum, quæ apparent in sphæra obliqua.*
XVII. *Causæ eorum, quæ apparent in sphæra obliqua, cujus dies longissima 24 horas æquat vel excedit; & eorum denique quæ in sphæra parallela contingunt.*

CAPUT IV.

De parallaxi, de refractione Astronomicâ, de crepusculis.

XVIII. D*Efinitiones parallaxeos altitudinis.*
XIX. *Affectiones primæ parallaxes altitudinis.*
XX. *Affectiones primæ refractionis Astronomicæ.*
XXI. *De crepusculis quædam breviter indicata.*

CAPUT V.

De inæqualitate motus secundi sive annui, & quâ hypothesi salvetur.

XXII. Q*Uæ circa inæqualitatem motus annui Solis sint ab Astronomis observata.*
XXIII. *Statuitur hypothesis, quâ Solis annui motus inæqualitas explicatur.*
XXIV. *Definitiones ad hypothesim Eccentrici pertinentes, quarum pleræque non tantùm Soli, sed etiam Lunæ cæterisque planetis conveniunt.*
XXV. *Proprietates Eccentrici referuntur ac demonstrantur.*

CAPUT VI.

A fundamentis traditur modus supputandi motum Solis tum medium, tum verum, ad tempus datum.

XXVI. L*Ineam meridianam, & instans meridiei invenire.*
XXVII. *Altitudinem poli & æquatoris invenire.*
XXVIII. *Meridianam, vel non meridianam Solis altitudinem invenire.*
XXIX. *Diem solstitij invenire.*
XXX. *Horam & momentum solstitij invenire.*
XXXI. *Obliquitatem, seu maximam declinationem Eclipticæ invenire.*
XXXII. *Rejicitur mutatio obliquitatis Eclipticæ.*
XXXIII. *Momentum æquinoctij invenire.*
XXXIV. *Parallaxis Solis in motuum cælestium determinatione tutò contemnitur.*
XXXV. *Anni solaris medij quantitatem invenire.*
XXXVI. *Ex anno solari medios Solis motus, annuos, menstruos, diurnos &c. invenire.*
XXXVII. *Locum aliquem Solis verum observando cognoscere.*

SYLLABUS CAPITUM

ASTRONOMIÆ

LIBER II.

De Motu Lunæ.

CAPUT I.

Qui motus in Luna, & quomodo sint observati.

CAPUT II.

Proponuntur hypotheses Lunæ in longitudinem.

CAPUT III.

A fundamentis traditur, quo artificio motus Lunæ æquales inveniantur.

CAPUT IV.

Modus investigandi verum motum & locum Lunæ in Syzygijs.

CA-

ET NUMERORUM.

CAPUT V.

Modus investigandi verum motum & locum Lunæ extra Syzygias.

CAPUT VI.

Motus Lunæ in latitudinem investigatur.

CAPUT VII.

Inquiritur latitudo Lunæ.

CAPUT VIII.

De inventione Lunæ in gradu Eclipticæ nonagesimo ab Horizonte: atque ea occasione rudimenta quædam doctrinæ sphæricæ.

ASTRONOMIÆ
LIBER III.

De Solis & Lunæ parallaxi, refractione, diametro apparenti, distantia, magnitudine.

CAPUT I.

Dimensio temporis vibrationibus perpendiculi.

CAPUT II.

Modus inveniendi parallaxim Lunæ in circulo altitudinis & ex eâ distantiam Lunæ à centro terræ.

ã 3 CA-

SYLLABUS CAPITUM

CAPUT III.

Inquiritur distantia Solis à Terra, & ex ea parallaxis.

CAPUT IV.

Modus investigandi refractiones Solis & Lunæ.

CAPUT V.

Inquiruntur apparentes diametri Solis ac Lunæ.

CAPUT VI.

De magnitudine Solis & Lunæ.

CAPUT VII.

Modus inveniendi parallaxes longitudinis & latitudinis.

ASTRONOMIÆ

LIBER IV.

De Eclipsi Solis ac Lunæ.

CAPUT I.

Quo artificio vera Novilunia ac Plenilunia, tam præterita, quàm futura inveniantur.

diam Syzygiam est horarum circiter 14: sed inter quadraturam veram & mediam horarum circiter 18.

XII. *Invenire tempus, quo Sol vel Luna in dato Zodiaci loco erit.*

CAPUT II.

Umbræ Lunam obscurantis dimensio.

XIII. *Exponitur & definitur Eclipsis Lunæ cum umbra Terræ & Atmosphæra.*

XIV. *Ad tempus datum angulum & axem, tam umbræ Atmosphæræ quàm umbræ terrestris ficta, invenire.*

XV. *Reperire semiangulum umbræ terrestris veræ.*

XVI. *Umbræ terrestris veræ axem inquirere.*

XVII. *Luna Eclipsatur ab umbra, non Terræ, sed Atmosphæræ.*

XVIII. *Quantùm Terræ sol ultrà hemisphærium illuminet.*

XIX. *Umbræ terrestris Atmosphæricæ in loco transitus Lunæ diametrum tam veram, quàm apparentem invenire ad tempus datum.*

CAPUT III.

Eclipses Lunæ tam præteritas, quàm futuras invenire.

XX. *Terminos Ecliptícos reperire tam possibiles, quàm necessarios.*

XXI. *Ecliptica Plenilunia tam præterita, quàm futura invenire.*

XXII. *Quantitatem Eclipsis Lunæ invenire.*

XXIII. *Lunaris Eclipsis momentum medium, seu maximæ obscurationis, ejusque distantiam à momento Ecliptici Plenilunij invenire.*

XXIV. *Lunaris Eclipsis non centralis, initium, finem, durationem ac durationis partes invenire.*

XXV. *In Eclipsi centrali eadem reperire, & quanta sit Eclipsium Lunæ duratio maxima.*

XXVI. *Utrùm in loco dato Eclipsis spectanda sit, invenire.*

XXVII. *Quibus in Terris Eclipsis Lunæ spectanda sit invenire.*

CAPUT IV.

Via sternitur ad Eclipsium Solis.

XXVIII. *Defectum Solis causat Luna inter solem & visum nostrum interposita.*

XXIX. *Luminarium Synodus visa seu apparens quæ sit.*

XXX. *Exponitur umbra & penumbra Terræ, ex qua species variæ defectuum solarium.*

XXXI. *Eclipsis Terræ visa ex Luna ejusque connexio cum Eclipsi Solis.*

CAPUT V.

Lunaris umbræ & penumbræ dimensio.

XXXII. *Angulum & axem umbræ Lunaris ad tempus datum reperire.*

XXXIII. *In Ecliptico Novilunio inquirere, an umbra Lunæ ad Terram pertingat, an ultra porrigatur.*

XXXIV. *In Eclipsi Solis totali magnitudinem umbræ Lunaris in Terram projectæ metiri.*

XXXV. *In Solis Eclipsi magnitudinem penumbræ Terram infuscantis invenire.*

XXXVI. *Terræ ex Luna visæ apparens semidiameter est Lunæ parallaxis Horizontalis.*

XXXVII. *Umbræ Lunaris in Terram incidentis, ex Luna spectatæ apparens semidiameter habetur quam proximè, si dimidius angulus coni Lunaris apparenti semidiametro Lunæ subducatur.*

XXXVIII. *Lunaris penumbra ex Luna visæ semidiameter apparens æqualis est summæ semidiametrorum apparentium Solis & Lunæ, cum semisse circiter parallaxeos Solis Horizontalis.*

CAPUT VI.

An & qualis, & quantæ durationis futura sit Eclipsis Solis, independenter à parallaxi invenitur.

XXXIX. *Terminos Synodi Ecliptica tam possibiles, quam necessarios invenire.*

XL. *An fuerit vel futura sit Eclipsis Solis, & cujus speciei, inquirere.*

XLI. *Durationem Eclipsis Terræ ex Luna visæ, atque inde durationem integram Eclipsis Solaris invenire.*

CAPUT VII.

Quibus in Terris Eclipsis Solis apparitura sit, independenter à parallaxi definitur.

XLII. *Invenire positionem puncti in superficie Terræ, cujus ad certum tempus innotuerint distantia ab Ecliptica, & longitudo seu locus in Ecliptica.*

XLIII. *Invenire punctum Terræ, in quod tempore veræ Synodi incidit centrum penumbræ.*

XLIV. *Invenire punctum Terræ, in quod momento medio Eclipsis terrestris incidit centrum penumbræ.*

XLV. *Invenire punctum Terræ, in quo penumbra Terram primò contingit, & punctum in quo ultimò.*

XLVI. *Invenire punctum Terræ, quod à penumbræ centro primum insidebitur, & punctum quod ultimò.*

XLVII. *Quibus in Terris defectus Solis appariturus sit invenire.*

XLVIII. *Quibus in Terris Solis defectus centralis spectandus sit reperire.*

XLIX. *Qualis linea sit, quam in Terra Lunaris penumbræ centrum describit.*

L. *Penumbra Lunæ absolutè movetur ab Occasu in Ortum: unde Occidentaliores citiùs vident Eclipsim Solis, quam Orientaliores.*

LI. *Primo Solaris Eclipseos spectatori Sol ad Eclipsis initium oritur, spectatori ultimo occidit ad finem Eclipsis.*

CAPUT VIII.

Qui tempus, duratio, quantitas Solaris Eclipsis reperiantur in loco dato.

LII. *Motum horarium apparentem seu visum Lunæ à Sole in Novilunio invenire.*

LIII. *Synodi veræ ac visæ intervallum.*

LIV.

CAPUT IX.

Reliqua ad Solis ac Lunæ Eclipses pertinentia.

CAPUT X.

De modo observandi Eclipses tam Solis, quàm Lunæ.

ASTRONOMIÆ

LIBER V.

De Stellis Fixis.

CAPUT I.

De locis & motu Fixarum.

CAPUT II.

De fixarum magnitudine, distantia, lumine, numero, speciebus, formis.

CAPUT III.

De Ortu & Occasu stellarum.

XLIII.

CAPUT IV.

Problemata nonnulla circa stellas.

ASTRONOMIÆ
LIBER VI.

De Motu quinque minorum Planetarum in longitudinem.

CAPUT I.

Præambula & phœnomena.

CAPUT II.

Proponitur & exponitur hypothesis Ptolematica ♄, ♃, ♂ in longitudinem.

CAPUT III.

Proponitur & exponitur hypothesis nova ♄, ♃, ♂, in longitudinem.

CAPUT IV.

Utraque inæqualitas ♄, ♃, ♂ investigatur.

CAPUT V.

Veneris & Mercurij phœnomena & hypotheses.

CAPUT VI.

Mercurij & Veneris utraque inæqualitas investigatur.

ASTRONOMIÆ

LIBER VII.

De latitudine cæterisque passionibus Planetarum quinque minorem.

CAPUT I.

De latitudine quinque minorum Planetarum.

CAPUT II.

De directione, stationibus, & retrogradatione quinque minorum Planetarum.

CAPUT III.

De distantijs Planetarum à Terra.

CAPUT IV.

Planetarum figura illuminatio, comites.

CAPUT V.

De magnitudine Planetarum.

CAPUT VI.

De Ortu & Occasu Planetarum.

XLI. *Saturno, Iovi, Marti, qui Ortus Occasusque, quando, & quo ordine conveniant.*
XLII. *Mercurio & Veneri qui Ortus Occasusque, quando, & quo ordine conveniant.*
XLIII. *De Ortu & Occasu signorum sive arcuum Zodiaci.*
XLIV. *De intervallo Ecliptico emersionis & occultationis planetarum & stellarum.*

CAPUT VII.

De Aspectibus Planetarum.

XLV. *Attingo quadam, atque unico hoc numero ex vanitatibus Astrologicis me expedio.*

ASTRONOMIÆ LIBER VIII.

Varios Tractatus complectens.

TRACTATUS I.

DE HYPOTHESI TERRÆ MOTÆ.

CAPUT I.

Duplex Terræ Motus exponitur.

Num. I. *Totum caput uno numero expeditur.*

CAPUT II.

Quomodo per duplicem Terræ Motum phænomenis satisfiat.

II. *Restantur phænomena primi Mobilis & varietas tempestatum anni.*
III. *Salvantur phænomena planetarum.*

CAPUT III.

Quid de veritate absoluta Motus Terræ sentiendum.

IV. *Porismata ad sequentia.*
V. *Demonstratio contra motum Terræ proponitur.*
VI. *Paralogismus ostenditur.*
VII. *De alijs contra Terræ motum argumentis.*
VIII. *Statuitur nihilominus immobilitas Terræ.*

TRACTATUS II.

DE COMETIS ET NOVIS STELLIS.

CAPUT I.

Quæ circa Cometas & novas stellas sint observata.

I. *Phænomena Cometarum.*
II. *Novarum stellarum phænomena.*

CAPUT II.

Modus inquirendi distantiam Cometæ vel novæ stellæ à Terra.

Complectitur hoc caput numeros octo.

CAPUT III.

An Cometæ & novæ stellæ, quæ ab anno 1572 apparuerunt, suprà vel infrà Lunam extiterint.

XI. *Satis constat novam stellam, qua anno 1572 in Cassiopæa apparuit, longe supra Lunam extitisse.*
XII. *Satis etiam constat stellam novam, qua ab anno 1600 usque ad 1621 & forte ultra, in cygno apparuit, & illam qua anno 1604 visa est in Serpentario, parallaxi sensibili caruisse, adeoq; supra Lunam fuisse.*
XIII. *De sede Cometarum, qui ab anno 1577 apparuerunt.*

TRACTATUS III.

DE LUCE ET MACULIS SOLIS AC LUNÆ.

I. *De Lumine primario Lunæ.*
II. *Modus quo Luna & Planetæ lumen Solis ad nos transmittunt.*
III. *De lumine secundario Lunæ.*
IV. *Lunarium macularum phænomena.*
V. *Luna non est æqualis, sed aspera montibus, vallibusque distincta.*
VI. *Multiplex libratio Lunæ per maculas detecta.*
VII. *Macularum solarium phænomena.*
VIII. *De motu macularum & facularum.*
IX. *Maculæ sunt in ipso Sole aut prope eum.*

APPENDIX.

Trigonometria Sphærica.

SUMMARIUM GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER I.

De Linearum rectarum Dimensione.

CAPUT I.

De Mensuris.

CAPUT II.

Quid sinus tangentes secantes, & quomodo inveniantur.

Porismata tria

Probl. 1. *Sinum arcus 45 graduum invenire.*
Probl. 2. *Sinus arcuum gr. 60. & 30 invenire.*
Probl. 3. *Sinum 36 grad. invenire.*
Probl. 4. *Sinum grad. 12 invenire.*
Probl. 5. *Sinus omnium arcuum quadrantis uno se minuto superantium invenire.*
Probl. 6. *Secantes & tangentes quascumque invenire.*
Probl. 7. *Sinum unius vel plurium secundorum invenire.*
Probl. 8. *Invenire sinum arcus qui præter grad & minuta etiam secunda contineat.*
Probl. 9. *Dato sinui arcum assignare.*
Scholium. *Quo sinuum theoria amplius exponitur.*

CAPUT III.

Triangulorum rectilineorum analysis.

Annotationes quædam in gratiam tyronum.

Analysis trianguli rectanguli.

Probl. 1. *Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.*
Probl. 2. *Datis basi & acuto uno, reliqua latera invenire.*
Probl. 3. *Datis uno latere & acuto uno, reliquum latus & basim invenire.*
Probl. 4. *Datis basi & uno latere, acutos angulos & reliquum latus invenire.*
Probl. 5. *Datis lateribus basim & acutos angulos invenire.*

Analysis trianguli obtusanguli.

Probl. 6. *Datis omnibus lateribus, lateris segmenta facta à perpendiculari ex opposito angulo ducta, & ipsam perpendicularem invenire.*
Probl. 7. *Datis omnibus angulis laterum rationem invenire.*
Probl. 8, *Datis omnibus lateribus angulos invenire.*
Probl. 9. *Datis duobus angulis & latere uno, reliqua latera invenire.*
Probl. 10. *Datis duobus lateribus & angulo iis contento, reliquos angulos & latus reliquum invenire.*
Probl. 11. *Datis duobus lateribus & angulo iis non contento, reliquos angulos, & latus reliquum invenire.*

CAPUT IV.

Fabrica instrumenti mensorij & scalæ.

Fabrica circuli & quadrantis.
Artificiosa inventio minutorum, licet in instrumento descripta non sint.
Scalæ constructio.
Alterius scalæ exactioris constructio.

CAPUT V.

Distantiarum & altitudinum dimensio.

Definitiones.
Porisma 1. *Altitudinis angulum invenire.*
Porisma 2. *Distantiæ angulum invenire.*
Porisma 3. *Intervalli angulum invenire.*
Schol. *Iudicium de instrumentis.*
Probl. 1. *Distantiam inaccessam montis vel turris per duas stationes metiri.*

Scholia.

I. *Sub angulo altitudinis valde parvo, incerta est distantiæ dimensio.*
II. *Quantum esse debeat intervallum stationum.*
III. *Quæ sit proportio altitudinis ad distantiam sub variis angulis.*
IV. *Quanta distantia possit praxi jam traditâ mensurari.*
V. *Vtrum rotunditas terræ officiat huic mensurationi distantiæ.*
Probl. 2. *Distantiam inaccessam aliter per duas stationes metiri.*

Scholia.

I. *Cur etiam hic magno opus sit stationum intervallo.*
II. *Cur expediat, ut angulus quem stationum intercapedo facit cum radio visuali, sit rectus, aut recto proximus.*
III. *Quanto sit opus stationum intervallo, ut intervalli angulus existat debita magnitudinis.*
IV. *Longè minori opus est stationum intervallo, dum una statio lateralis est, quam dum utraque directa.*
V. *Ad quantam distantiam mensurandam hoc problema se extendat.*

VI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ.

Scholia.

Scholia.

CAPUT VI.

Qua arte investigetur ambitus & diameter orbis terræ.

CAPUT VII.

Ex inventa semidiametro, terræ, prodigiosæ quorumdam montium altitudines demonstrantur,

CAPUT VIII.

Quo artificio Lunæ à terra distantiam Astronomi investigarint.

CAPUT IX.

Quâ viâ indagari possit distantia Solis à terra.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER II.

De superficie plana.

CAPUT X.

Problemata, quorum usus ad sequentia.

CAPUT XI.

Figurarum rectis lineis comprehensarum dimensio.

SUMMARIUM.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER III.

De Corpore.

Probl. 17.

SYLLABUS PROPOSITIONUM

OPTICÆ

LIBER I.

DE APPARENTIIS RERUM SIMPLICIBUS AC DIRECTIS.

XI.

XI. *Oculo positione dato, reperire altitudinem, ex qua data longitudo appareat æqualis minori longitudini datæ.*

XII. *Oculo positione dato, altitudinem reperire, ex qua latitudo data appareat æqualis minori datæ latitudini.*

XIII. *Oculo positione dato, reperire longitudinem, quæ ex datâ altitudine appareat parvitatis datæ.*

XIV. *Oculo positione dato latitudinem reperire, quæ ex altitudine datâ, appareat datæ parvitatis.*

XV. *Parallelorum intervallorum non semper quod remotius est apparet minus.*

XVI. *Datæ sint duæ parallelæ, & oculus extra eas, sed in eodem plano. Oporteat invenire intervallum, quod ex omnibus parallelis intervallis maximum appareat.*

XVII. *Determinato intervallo quod apparet maximum, datoq; alio intervallo à maximo quantumvis remoto, oporteat huic ad partem alteram intervalli apparentis maximi, aliud intervallum apparentiâ æquale invenire.*

XVIII. *Intervallum parallelarum indefinitè utrimq; protractarum, duobus locis apparet maximum; ab usque duobus locis cuicumq; diverso intervallo, tria intervalla alia apparent æqualia.*

XIX. *Fieri potest ut objecto ab oculo recedente vel accedente, apparentia unius partis assiduò crescat, alterius verò decrescat. Rursum fieri potest, ut quamvis objecti totius apparentia assiduè decrescat: partis tamen longè maximè apparentia assiduè crescat.*

XX. *Data sit objecti cujuspiam longitudo, & parallela ipsi linea infinita: oporteat in hac invenire punctum, in quo data objecti longitudo appareat maxima.*

XXI. *Data sit objecti alicujus longitudo, extraq; eam lineam infinita non parallela; quæritur in quo hujus rectæ puncto maxima appareat data longitudo.*

XXII. *Iisdem positis dato puncto quantumvis remoto à maximæ apparentiæ loco, reperire ad partem alteram punctum, in quo data longitudo apparet æque magna, ac in dato puncto quantumvis remoto, à maximæ apparentiæ loco.*

XXIII. *Iisdem positis ac constructis, quæ in duabus præcedentibus; si data longitudo sit perpendicularis ad lineam infinitam extra eam, data longitudo in duobus locis apparet maxima: & dari possunt infinita puncta ad unam rectam, in quibus appareat æquè magna tribus diversis locis, ac apparebat in puncto, in præcedente propositione dato.*

XXIV. *Cur parallelæ longitudines oculo inter eas posito, sensim coire videantur.*

XXV. *Plana horizontalia infrà oculum posita videntur in fine attolli, posita supra oculum deprimi: & terminus elevationis ac depressionis est recta linea per oculum horizonti parallela.*

XXV. *Templorum frontispicia ac turres ad perpendiculum extructæ propè aspectanti videntur antrorsum inclinare.*

XXVI. *Subtensa in circulo per totum segmenti arcum, diameter verò per totam circuli circumferentiam æqualis apparet.*

XXVII. *Recta circulo inscripta per totam peripheriam circumducta, semper æquè magna apparet oculo in aliquo peripheriæ puncto persistenti.*

XXVIII. *Forma theatris aptissima, est circuli segmentum, in quo arcus spectatoribus, subtensa spectaculis tribuitur.*

XXIX. *Fieri potest ut ad objectum per spatium longissimum accedas, vel recedas, & tamen æquè magnum semper appareat.*

XXX. *Quivis arcus maximi in cælo circuli, duplo major apparet in terrâ quam in cælo.*

XXXI. *Datur locus quem videri totum est impossibile.*

XXXII. *Diameter sphæræ per totam sphæræ superficiem æqualis cernitur.*

XXXIII. *Maximus sphæræ circulus per totam sphæræ superficiem æqualis apparet.*

XXXIV. *Circuli quantumvis obliquè visi, omnes diametri æquales apparent ex distantiâ à centro, quæ semidiametro sit æqualis. Non tamen circulus eo casu apparet ut circulus directè spectatus.*

XXXV. *Circulus obliquè visus ex distantiâ à centro majore vel minore quam semidiameter apparet alterâ parte longior: non tamen ut ellipsis directè spectata.*

XXXVI. *Quemadmodum circulus quantumvis obliquè visus, numquam apparet ut ellipsis, ita nec ellipsis quantumvis spectetur obliquè apparebit unquam ut circulus directè spectatus.*

XXXVII. *Quò longius abes à sphærâ, eò majorem partem conspicies; eò minorem quò propius, sed quò pars conspecta fuerit major, eò apparebit minor, quò minor eò major apparebit.*

XXXVIII. *Sphæra pupillâ minoris dimidium videri nequit oculo uno: videbitur autem dimidium, si pupillæ æqualis fuerit, & plus quàm dimidium, si major.*

XXXIX. *Cùm sphæræ diameter major est utriusq; oculi intervallo, ne quidem utroque oculo hæmisphærium integrum videri potest: potest autem si sphæræ diameter sit intervallo oculorum par, & plusquam hemisphærium si minor.*

XL. *Sol plus illuminat quàm dimidium terræ, Luna minus dimidio. Fieri potest ut Luna numquam minor portio illuminetur quàm dum nobis apparet plena. Sol numquam minorem terræ partem illuminat quam æstate mediâ, numquam majorem quàm mediâ hyeme.*

XLI. *Cylindro & oculo positione datis, portionem Cylindri uno oculo visam exhibere.*

XLII. *Detur conus quispiam, cui alter sit oppositus ad verticem, uterq; infinitus, si oculus ponatur in quovis puncto superficiei coni oppositi, vel quovis puncto intra eam, spectabitur totus conus datus.*

XLIII. *Cono atque oculo positione datis, portionem coni uno oculo visam exhibere.*

XLIV. *Per coni verticem ducatur recta utrimque infinita, basi non æqui distans, oculus incedens per dictam infinitam, ab una a vertice coni parte, eamdem semper portionem coni intuebitur, incedens verò per partem alteram spectabit semper portionem quæ complementum est prioris.*

XLV. *Si oculus fuerit infrà lineam quæ per coni verticem ducitur basi parallela, quò radius ab oculo ad coni verticem emissus, majorem cum axe angulum effecerit, eò plus de cono intuebitur. Si autem fuerit suprà parallelam & extra conum oppositum, quò radius ab oculo ductus ad verticem, cum axe producto majorem fecerit angulum, eò spectabit de cono minus.*

XLVI. *Oculus à cono recedens per lineam basi parallelam infra verticem, quò recedit longius, eò plus de cono intuebitur, eò autem minus quò recedet longius per basi parallelam suprà verticem.*

XLVII. *Oculus à cono dato versus conum sibi oppositum*

tum ascendens, quò ascenderit altius, eò plus de cono dato intuebitur.

XLVIII. *Data sint duæ hyperbolæ opposita, ex quarum centro sit erecta perpendiculariter recta quæpiam potens quartam partem figuræ: hyperbolæ quantumcumque productæ atque ab invicem divaricatæ, si conspiciantur ex termino dictæ rectæ potentis quartam partem figuræ, æquidistantes apparebunt.*

XLIX. *Phases Lunæ exponere.*

OPTICÆ

LIBER II.

DE PERSPECTIVA,

SIVE PROJECTIONIS SCENOGRAPHICÆ THEORIA ET PRAXI.

CAPUT I.

Definitiones & hypotheses ponuntur & explicantur.

CAPUT II.

Projectionis Scenographicæ Theoria.

Prop. I. R*Ei projectio, sive imago in vitro expressa eodem modo apparet quo res ipsa.*

II. *Omnium directarum linearum inter se parallelarum, sive infrà oculum, sive suprà existentium imagines concurrunt in eo vitri puncto, in quo linea ab oculo directis ipsis æquidistans vitrum secat.*

III. *Si a puncto distantiæ ducatur in plano horizontali recta directis parallela occurrens sectioni, & ex puncto occursus in vitro ducatur perpendicularis ad sectionem & æqualis altitudini oculi, extremum ejus punctum erit in centro projectionis.*

IV. *Directarum perpendicularium imagines ad reliquas radialium partes, eam habent proportionem, quam directa ipsa ad distantiam oculi.*

V. *Directarum obliquarum tam suprà quàm infrà oculum existentium imagines, ita se habent ad reliquas radialium partes, ut distantia extremi puncti directæ à vitro, ad distantiam oculi à vitro.*

VI. *Altitudo vera est ad apparentem, ut distantia ejusdem à sectione, cum distantiâ oculi, ad distantiam oculi.*

CAPUT III.

Projectionum Scenographicarum Praxis.

VII. P*Avimenti projectio.*

VIII. *Planorum lateraliter erectorum & tabulati projectio.*

IX. *Directarum longitudinum projectio.*

X. *Intervallorum transversis lineis contentorum projectio.*

XI. *Intervalla transversis lineis contenta aliter projicere.*

XII. *Projectio lapidum pavimenti.*

XIII. *Porticum nullis datis scenographicè delineare in tabulâ aut plano dato.*

XIV. *Cujusvis planæ superficiei perspectivam describere.*

XV. *Cujuscumque solidi perspectivam delineare.*

XVI. *Datæ projectionis centrum invenire.*

XVII. *Ex datâ oculi distantia a sectione, rei projectæ longitudinem invenire.*

XVIII. *Ex datâ longitudine rei projectæ, distantiam oculi a sectione invenire.*

XIX. *Efficere ut data porticus duplo, imo decuplo appareat longior quam sit.*

XX. *Projectio scenographica in planum suprà oculum horizonti parallelum.*

CAPUT IV.

De Projectionibus monstrosis.

XXI. D*Emonstratur quomodo recta quæpiam in partes quotcumque & qualescumque secta & ad planum subjectum projectionis recta tota cum suis partibus projiciatur, datis altitudine oculi & distantiâ.*

XXII. *Demonstratur quomodo parallelogrammum aliquod rectangulum dato plano rectum, in minora sectum parallelogramma, sive cancellatum, totum cum singulis parallelogrammis minoribus projiciatur in datum planum, datis altitudine oculi & distantiâ.*

XXIII. *Datam lineam utcumque sectam ex datâ distantiâ, in datam longitudinem cum suis partibus projicere.*

XXIV. *Datum parallelogrammum rectangulum in quotvis rectangula sive quadrata sectum, ex datâ distantiâ & situ in figuram datæ longitudinis projicere.*

XXV. *Monstrosam in dato plano figuram delineare, quæ certo spectata loco, formosæ instar imaginis appareat.*

XXVI. *Datam imaginem in dati coni convexâ superficie deformare & reformare.*

XXVII. *Imaginem datam in convexâ superficie conicâ, aliter ita deformare, ut ex certo puncto reformata appareat.*

XXVIII. *Datam imaginem in concavâ coni superficie deformare & reformare.*

OPTICÆ

LIBER III.

DE PROJECTIONE ASTRONOMICA.

CAPUT I.

Exponitur ac demonstratur artificium generale projectionis Astronomicæ oculo in sphæræ superficie constituto.

Prop. I. H*Emisphærij oculo oppositi projectura est maximus sphæræ circulus in projectionis plano existens, circa hunc verò undequaque in infinitum extenditur projectura hemisphærij oculum continentis.*

II. *Linea recta per oculum transiens projicitur in punctum, in quo occurrit plano projectionis.*

III. *Circuli maximi per oculum transeuntis medietas oculo opposita, projicitur in suam & sphæræ diametrum,*

trum medietas verò altera in rectas ad utramque diametri partem infinitè extensas.

IV. *Circuli maximi per oculum transeuntis, & graduum ejus projecturas describere.*

V. *Circuli projectionis plano paralleli projectura circulus est, cujus centrum idem est cum centro sphæra, in quod primitivi circuli centrum projicitur, & partes projectura sunt primitivi circuli partibus proportionales.*

VI. *Dati in sphærâ circuli projectionis plano paralleli, & in partes, seu gradus secti projecturam describere.*

VII. *Circuli ad projectionis planum non paralleli projectura etiam circulus est, cujus centrum diversum à puncto in quod primitivi circuli centrum projicitur.*

VIII. *Situm obliqui in sphærâ circuli determinare.*

IX. *Dati in sphærâ circuli ad planum projectionis non paralleli ejusque centri ac polorum projecturam describere.*

X. *Projecturas graduum maximi in sphærâ circuli ad projectionis planum non paralleli, describere.*

XI. *Projecturas graduum non maximi in sphærâ circuli & ad projectionis planum non paralleli describere.*

CAPUT II.

Projectio sphæræ in planum æquatoris oculo in alterutro polorum constituto; sive descriptio Astrolabij Polaris ad datam altitudinem poli.

XII. M*eridianum loci, cæterosque meridianos & horarios circulos in planum projicere.*

XIII. *Æquatorem, Tropicos, & Eclipticam ejusque polos projicere.*

XIV. *Horizontem obliquum datum cum suo polo, sive Zenith, & circulos altitudinum horizonti parallelos projicere.*

XV. *Gradus tam obliqui horizontis dati, quàm Ecliptica projicere.*

XVI. *Circulos Azimutales, seu Verticales projicere.*

XVII. *Circulum crepusculinum projicere.*

XVIII. *Stellas fixas projicere.*

XIX. *Planisphærium, seu Astrolabium polare ad datam poli altitudinem construere.*

CAPUT III.

Usus Astrolabij Polaris ad datam poli altitudinem constructi.

XX. S*tellæ & puncta graduum Ecliptica, licet diurno motu circumferantur, in Rete proportionaliter ad diurnum cæli motum circumacti puncta semper eadem projiciuntur.*

XXI. *Si rete Astrolabij ab ortu per meridiem in occidentem circumagatur, motus diurnus cæli & omnium astrorum repræsentabitur.*

XXII. *Qua horâ sol oriatur & occidat, item diei ac noctis quantitatem quotidie invenire.*

XXIII. *Quantitatem diei longissimi ac brevissimi invenire.*

XXIV. *Reperire anni diem qua sol dato tempore oriatur vel occidat.*

XXV. *Qua plagâ horizontis sol oriatur & occidat quotidie, invenire,*

XXVI. *Ortum & occasum solis Borealissimum & Australissimum invenire.*

XXVII. *Diem anni reperire qua sol in datâ horizontis plagâ oriatur vel occidat.*

XXVIII. *Qua horâ quotidie crepuscula incipiant manè, vesperi finiantur; durationem quoque atque omnem earum varietatem cognoscere.*

XXIX. *Ascensionem rectam dati Ecliptica puncti, sive gradum Æquatoris qui cum dato Ecliptica puncto Horizontem rectum & meridianum attingit, invenire.*

XXX. *Obliquam dati Ecliptiia puncti ascensionem & descensionem, sive quis gradus Æquatoris cum dato Ecliptica puncto suprà horizontem obliquum ascendat invenire.*

XXXI. *Ascensionem rectam Solis, sive cum quo gradu Æquatoris Sol ad horizontem rectum ac meridianum appellat, quolibet anni die reperire.*

XXXII. *Obliquam ascensionem ac descensionem Solis quolibet anni die inquirere.*

XXXIII. *Ascensionum & descensionum proprietates per Astrolabium explicare.*

XXXIV. *Altitudinem Solis meridianam, ejusque declinationem ab Æquatore quolibet anni die invenire.*

XXXV. *Ascensionem rectam cujusvis stella in Astrolabio descripta, sive cum quo Æquatoris gradu illa ad horizontem rectum & meridianum appellat, invenire.*

XXXVI. *Cujusvis stella in Astrolabio descripta ascensionem ac descensionem obliquam, sive cum quo Æquatoris puncto supra horizontem obliquum ascendat ac descendat invenire.*

XXXVII. *Stella cujuslibet in Astrolabio descripta altitudinem meridianam & declinationem invenire.*

XXXVIII. *Qua hora stella qualibet in Astrolabio signata dato anni die oriatur, culminet, occidat.*

XXXIX. *Qua horizontis plaga stella in Astrolabio notata oriantur & occidant.*

XL. *Cùm quo gradu Zodiaci stella oriantur, culminent, occidant reperire.*

XLI. *Quo anni die stella in Astrolabio descripta cosmicè oriantur & occidant invenire.*

XLII. *Quo anni die stella in Astrolabio notata acronicè oriantur & occidant invenire.*

XLIII. *Quo anni die stella in Astrolabio signata heliacè oriantur & occidant, reperire.*

XLIV. *Qua stella numquam occidant, qua per Zenith quotidie pertranseant, qua præcisè ad horizontem usque ascendant, ex Astrolabio cognoscere.*

XLV. *Quovis momento Astrolabium cælo conformare.*

XLVI. *Astrolabio ad cælum conformato quam multa simul conspectu exhibeantur.*

XLVII. *Horam interdiu ex Sole cognoscere.*

XLVIII. *Horam noctu ex stellis cognoscere.*

XLIX. *Altitudines Solis suprà horizontem ad singulas horas & momenta quolibet anni die reperire.*

L. *Quantum murus ab Ortu vel Occasu versùs Austrum vel Aquilonem declinet cognoscere.*

LI. *Horologium solare debito situ collocare, quamvis linea meridiana non habeatur.*

LII. *Astrolabium particulare hactenus explicatum, quoad plerosque usus Catholicum efficere.*

CA-

CAPUT IV.

Projectio sphæræ in planum Coluri Solstitiorum, oculo in principio Arietis vel Libræ constituto.

LIII. *Colurum Æquinoctiorum, Æquatorem, Parallelos, ac Meridianos, projicere.*

LIV. *Tropicos, Polares circulos, & Eclipticam projicere.*

LV. *Ecliptica gradus ac signa & figurorum parallelos projicere.*

LVI. *Horizontem ad datam poli altitudinem projicere, & in gradus distribuere.*

LVII. *Circulos longitudinum, & Parallelos Ecliptica projicere.*

LVIII. *Verticales & horizonti Parallelos projicere.*

LIX. *Astrolabium Æquinoctiale catholicum construere.*

Unum atque alterum specimen usus ejus.

CAPUT V.

LX. *Sphæram projicere oculo in Zenith constituto.*

CAPUT VI.

Projectionis ortographicæ fundamenta.

LXI. *Linea recta ad projectionis planum perpendicularis projicitur in punctum quo ipsa planum secat.*

LXII. *Recta linea projectionis plano non perpendicularis projicitur in rectam, à perpendicularibus extremis in plano projectionis comprehensam.*

LXIII. *Projectura data rectæ maxima est, cùm fuerit plano projectionis parallela.*

LXIV. *Plana superficies ad projectionis planum recta projicitur in rectam lineam qua projectionis planum secat.*

LXV. *Circulum plano projectionis rectum cum suis gradibus orthographice projicere.*

LXVI. *Circulus projectionis plano parallelus in aqualem sibi circulum projicitur; obliquus in Ellipsim.*

LXVII. *Circulum projectionis plano non parallelum cum suis gradibus orthographicè projicere.*

LXVIII. *Ellipsis projicitur in Ellipsim; sed uno casu in circulum.*

CAPUT VII.

Orthographica projectio sphæræ in planum Coluri Solstitiorum.

LXIX. *Colurum Æquinoctiorum, Horizontem quemcumque, Æquatorem, Tropicos, Polares Eclipticam ortographice projicere.*

LXX. *Parallelos signorum & graduum Ecliptica projicere.*

LXXI. *Parallelos per singulos Coluri, & meridianos per singulos Æquatoris gradus projicere.*

LXXII. *Horarios circulos projicere.*

LXXIII. *Circulos Almucantarath, Crepusculi, & Verticales projicere.*

LXXIV. *Stellas orthographicè projicere.*

LXXV. *Astrolabium universale orthographicum construere.*

Aliquot specimina usus hujus organi.

ELENCHUS PROPOSITIONUM CATOPTRICÆ. LIBER I.

DE FUNDAMENTIS CATOPTRICÆ.

Prop. I. *Radius in quamvis superficiem perpendiculariter incidens, in seipsum reflectitur.*

II. *Planum projectionis ad speculum quodcumque rectum est.*

III. *Ad planam superficiem anguli incidentia & reflexionis aquales sunt.*

IV. *Non solum ad planam superficiem, sed etiam ad sphæricam tam convexam quàm concavam, radius incidens & reflexus, cum reflectente lineâ constituunt æquales angulos.*

V. *Cùm superficies curva (sive convexa ea sit sive concava) est ejusmodi ut aquales ad reflectentem lineam anguli sint impossibiles, reflexio fit per aquales ad tangentem angulos.*

VI. *Ad planam superficiem reflexio à puncto dato in punctum datum, brevissimâ fit viâ.*

VII. *Etiam ad convexam quamcumque superficiem, reflexio à puncto dato in punctum datum brevissimâ fit viâ.*

VIII. *Ad concavam superficiem sphæricam reflexio à puncto in punctum via fieri potest longissimâ.*

IX. *In planam quampiam superficiem incidat ex puncto aliquo species, sive lux sub figurâ quacumque, qua reflectatur per viam solidam. In peripheria basis incidentia, sume quodvis punctum, per quod & per punctum ex quo propagatur species: seca solidam reflexionis viam plano ad superficiem in quam species incidit recto. Dico in via solida superficie gigni, lineas qua cum lineâ, ex eadem sectione in plano reflectente genitâ faciant aquales angulos.*

X. *Qua hactenus demonstrata sunt de superficiebus aquabiliter extensis, tam planis, quam curvis, cujusmodi sunt Sphærica, Conica, Cylindrica, Elliptica, Parabolica, Hyperbolica & alia infinita, eadem omnia particulis superficierum asperarum conveniunt.*

XI. *Radius obliquè in quodvis speculum incidens, ad majoris anguli partes reflectitur, ultra perpendicularem, ex incidentia puncto erectam.*

XII. *Punctum reflexionis in quovis speculo existet, inter incidentia ac reflexionis perpendicula.*

XIII. *In speculo quocumque angulus ab radio incidente & reflexo comprehensus secatur bifariam ab eâ qua ad reflexionis punctum perpendicularis est speculo.*

XIV. *Ab uno speculi cujusvis puncto non possunt reflecti duo radij ad punctum unum.*

XV. *Radius unus in speculo quocumq; non reflectitur in duo puncta.*

XVI. *In planis & convexis speculis non possunt ex puncto uno duo radij reflecti ad punctum unum. Sivo non possunt duo puncta reflecti ad invicem a pluribus speculi plani aut convexi punctis, quàm ab uno.*

XVII. *In planis & convexis speculis, si plura puncta ad unam incidentiæ Cathetum existentia ad unum visum reflectantur, punctum a speculo remotius reflectetur à speculi puncto distante minus à visu, quam punctum à quo reflectitur punctum speculo vicinius.*

XVIII. *In planis & convexis speculis si lineæ cujuspiam extremitates reflectantur ad visum a speculi duobus punctis, tota linea reflectetur ad visum, à tota lineâ recta quæ inter dicta puncta interjicitur.*

XIX. *In omni speculo plano ac convexo recta linea ad speculum perpendicularis est imaginis suæ in directum.*

XX. *In omni speculo plano & convexo unumquodque punctum objecti, apparet in suâ Catheto incidentiæ.*

XXI. *In omni speculo, objecti punctum unumquodque apparet in radio reflexo.*

XXII. *In omni speculo plano & convexo objecti punctum unumquodq; non alibi apparet, quam in concursu radij reflexi cum catheto incidentiæ.*

CATOPTRICÆ

LIBER II.

DE PLANIS SPECULIS.

AFFECTIONES PRIMÆ PLANORUM SPECULORUM.

Prop. I. *In planis speculis unius objecti tantùm una est imago, non solùm respectu unius oculi, sed etiam utriusque.*

II. *Objectum eo post planum speculum apparet intervallo, quo distat ante speculum.*

III. *In plano speculo distantia imaginis ab oculo, viæ reflexionis æqualis est.*

IV. *Imagines in planis speculis sunt objectis æquales & similes, & similiter positæ.*

V. *In planis speculis dextra apparent sinistra & contra.*

VI. *Objecti plano speculo perpendiculariter obversi, punctum speculo vicinius apparet etiam vicinius post speculum, quam punctum objecti remotius.*

VII. *In plano speculo ad angulum semirectum inclinato, teipsum videbis horizonti parallelum.*

VIII. *Fieri potest ut in plano speculo teipsum quasi volantem conspicias.*

IX. *In speculo ad angulum semirectum inclinato, objecta quævis suprà terram erecta, apparent terræ parallela.*

X. *In plano speculo ad angulum semirectum inclinato, oculo infra ejus planum consistente superficies terræ apparet perpendiculariter erecta sursum, oculo autem supra speculi planum existenti cælum & laquearia apparent erecta deorsum.*

XI. *In duobus planis speculis videbis teipsum in oppositas partes eodem tempore moveri.*

XII. *In reflexione planâ perpendicula incidentiæ sunt ipsorum a reflexionis puncto intervallis proportionales.*

XIII. *Datis puncto, oculo, lineâ rectâ reflectente, punctum reflexionis invenire.*

XIV. *Partem plani speculi reflectentem determinare.*

XV. *Radij a plano speculo in unum punctum reflexi, si post speculum producantur, concurrunt cum perpendiculo incidentiæ in eodem puncto.*

XVI. *Radij a superficie plano speculo parallelâ incidentes, suis quiq; reflexis sunt proportionales.*

XVII. *Cum longitudo plano speculo parallela, ad unum punctum reflectitur, linea reflectens ad ipsam eam habet proportionem, quam radius quilibet reflexus ad suam reflexionis viam.*

XVIII. *Cùm species superficiei plano speculo parallela, ad unum punctum reflectitur, proportio superficiei reflectentis, ad ipsam est duplicata proportionis, quam habet radius quivis reflexus ad reflexionis viam.*

XIX. *Ut in plano speculo teipsum a vertice ad pedes contemplari possis, ejus longitudo debet esse tua dimidia.*

XX. *Longitudines etiam aliorum objectorum plano speculo parallelorum, & æqualem cum oculo distantiam a speculo habentium, ut tota apparere possint in speculo, debet hujus longitudo esse illarum dimidia.*

XXI. *Cùm teipsum aliaq; objecta speculo parallela, & eodem intervallo dissita, quo tu, tota vides in speculo, portio specularis reflectens objecti subquadrupla est.*

XXII. *Cùm teipsum in aliquo speculo vides præcisè totum, sive accedas, sive recedas, perges te semper totum videre.*

Pari modo si objecta, quæ tecum æqualiter à speculo remota vides tota, tecum accedant vel recedant, perges semper videre tota.

XXIII. *Ponatur objectum præcisè totum ab oculo videri in speculo. Si objectum manente oculo propius ad speculum parallele admoveatur, desines videri totum ab oculo; & quò eris propinquius, eò pars ejus videbitur minor: semper tamen major dimidiâ longitudinis, & major quam quartâ superficiei.*

XXIV. *Iisdem positis, quæ in præcedenti: Si oculo manente objectum longius removeatur, poterit in eodem speculo apparere totum licet augeretur in infinitum.*

XXV. *Ejusdem determinati speculi objectum adæquatum, si objecti augeatur distantia, fit quocumque dato majus; imminutâ verò distantiâ etiam ipsum minuitur quidem, semper tamen manet speculo majus.*

XXVI. *Datis oculo, speculo, & objecti longitudine, quæ longitudine speculi sit major, locum reperire in quo longitudo data fiat objectum speculi adæquatum in longitudinem.*

DE REFLEXIONE AD MULTA PLANA.

XXVII. *Planis quotcumque positione datis, dato quo-*

quoque reflexionis principio ac termino, puncta reflexionis invenire.

XXVIII. Distantia apparens objecti per reflexionem ad unum vel plura specula plana visi, toti via reflexionis aequalis est.

XXIX. Cùm res per plures reflexiones cernitur dextra apparent sinistra, si numerus reflexionum sit impar, si autem par fuerit dextra apparent dextra.

XXX. Si in polygono quocunque ordinato, ex latere alicujus medio puncto objecti species, aut pila quapiam dirigatur, in lateris vicini medium punctum, ad omnia latera polygoni reflexa, redibit in punctum idem, eritque reflexionis via polygonum simile ordinatum priori inscriptum.

XXXI. Oculo & objecto positione datis, datum numerum speculorum ita disponere, ut objectum ad omnia specula reflexum in uno speculo videatur.

XXXII. Oculo & objecto positione datis efficere, ut distantia imaginis ab oculo sit multiplex, ad libitum distantiae datae oculi ab objecto.

PLANORVM SPECVLORVM ÆQVIDISTANTIVM AFFECTIONES.

XXXIII. Si duo plana specula sibi fuerint parallela; in singulis apparent unius objecti inter specula constituti duae series recta imaginum infinitarum in longitudinem infinitam excrescentes.

XXXIV. Iisdem positis dico quamlibet imaginum supradictarum tanto intervallo distare ab oculo, quanta est tota via reflexionis suae.

XXXV. Iisdem positis stet loco quopiam homo facie conversus ad speculum quod intueatur: ostenditur ubi imagines sint futurae conversae ad oculum, ubi aversae; sive ubi appariturae sint facies, ubi tergum.

XXXVI. Iisdem positis ostenditur quae facies sint futurae conversae ad invicem, quae aversae.

XXXVII. Iisdem positis, ostenditur quid accidat si objectum moveatur versus unum speculum.

AFFECTIONES PLANORVM SPECVLORVM INCLINATORVM SIVE DE REFLEXIONE INTRA ANGVLVM.

XXXVIII. Intra rectum angulum vel obtusum plures fieri reflexiones non possunt quam duae.

XXXIX. In duobus planis speculis ad angulum rectum constitutis, si oculus existat extra rectam lineam, quae ab anguli vertice ducitur per punctum objecti datum, semper tres puncti dati imagines apparent, & non plures.

XL. In duobus planis speculis ad angulum rectum positis, si oculus existat in recta per verticem & punctum datum transeunte duae solùm possunt puncti imagines apparere.

XLI. Acuto angulo & binis intra eum punctis positione datis, maximum numerum reflexionum, quibus puncta ad invicem possunt reflecti, cùm primus radius in latus sinistrum incidit, invenire.

XLII. Iisdem positis, quae in praecedenti, invenire maximum reflexionum numerum primâ incidentiâ factâ in latus anguli dexterum.

XLIII. Intra acutum angulum punctis positione datis, datum reperire numerum reflexionum, sed maximo minorem.

XLIV. Duo plana specula se mutuò tangant sub angulo acuto, cujus latera ultra verticem sint producta infinitè; intra angulum sit positione datum alicujus objecti punctum: oculus autem intra angulum sit ubivis.

Oporteat demonstrare quot in binis bisce speculis punctis dati imagines appareant: item loca imaginum, & quot singula reflexionibus videantur exhibere.

XLV. Pilam in anguli acuti latus ita ex puncto intra angulum dato immittere, ut per datum numerum reflexionum, qui maximo non sit major ad punctum idem redeat.

XLVI. Pilam ex puncto intra acutum angulum dato in latus anguli ita dirigere, ut post aliquot reflexiones versùs anguli verticem peractas eadem viâ regrediatur.

CATOPTRICÆ

LIBER III.

De speculis curvis.

CONVEXORVM SPHÆRICORVM AFFECTIONES PRÆCIPVÆ.

Prop. I. In speculis sphaericis convexis unius objecti, uni visui apparet imago tantùm una.

II. Sola portio sphaerae conspicua radios sibi incidentes potest ad oculum reflectere.

III. Cathetus infinita portioni conspicuae specularis sphaerae insistens apparet intra sphaeram tota, & minor quartâ parte diametri.

IV. V. VI. Sphaera specularis per oculum & centrum secta reflexionis plano exhibeat circulum reflectentem, cujus ac sphaerae idem sit centrum, eumque tangant ductae ab oculo rectae infinitae. Eundem circulum ex oculo ita secet recta quapiam, ut intercepta intra circulum sit aequalis sphaerae radio, sive lateri hexagoni; deinde in arcus abscissi punctum quodvis incidat cathetus infinita tangentem secans.

Ostenditur quae catheti partes appareant, quae non appareant, quae intra, quae extra speculum appareant, quae cathetus omninò non appareat.

VII. Quae objecta intra specularem sphaeram appareant, quae extra, determinare.

VIII. Quò puncta in eadem catheto existentia à speculo distant longius, eò imagines ipsorum ad speculi centrum propius accedunt, nullius tamen objecti quantumlibet distantis imago ad quartam diametri partem speculi sphaeram ingreditur.

IX. Limitem imaginum intra convexum speculum assignare.

X. Cur res in convexis speculis parvae appareant.

XI. Cur recta in speculis convexis curva appareant.

XII. Data sint duo puncta quaecumque a speculo sphaerico sive convexo, sive concavo ad se mutuo reflexa, si illis tamquam polis describatur Ellipsis speculi circulum contingens: Dico reflexionis punctum idem esse quod contactus.

AFFECTIONES PRÆCIPVÆ SPHÆRICORVM CONCAVORVM.

XIII. Ostenditur quando duo puncta positione data intra datum circulum, à dato peripheriae puncto reflectantur ad invicem, quando non reflectantur.

CATOPTRICÆ LIBER III.

ELENCHUS CAPITUM
ARCHITECTURÆ MILITARIS.

PARS I.

De Munitione Regulari.

CA-

ELENCHUS CAPITUM.

CYLINDRICORUM ET ANNULARIUM

LIBER PRIMUS.

Hujus primi libri argumentum est Portio Cylindri non Circularis tantum, sed Elliptici etiam, Parabolici, Hyperbolici, quia etiam ex cujusvis figura plana recto ductu procreari. Ordinis gratiâ in quatuor partes distinguitur.

LIBER II.

Superficies portionis abscissa à Cylindro cujuscumque figura plana recto ductu procreato, hujus secundi libri argumentum erit; quem qui cum primo contulerit, mirabilem ac propè perpetuam inter portionem soliditatem & superficiem analogiam reperiet.

LIBER III.

Hic tandem aggredior potissimam operis hujus partem, annularia nimirum corpora non circularia tantùm, sed Elliptica etiam, Parabolica, Hyperbolica, imò ex figura cujusvis plana circulari ductu procreata. Hæc præcipuè conatum iste noster spectavit; atque horum maximè gratiâ priores libros conscripsi. Quod enim portio per latus & basis diametrum abscissa est in Cylindro, hoc in circulari annulo sphæra genitoris circuli, in Elliptico, genitricis Ellipseos, sphæroïs in Parabolico & Hyperbolico, Parabola aut Hyperbola genitricis conois est.

LIBER IV.

Ab annulorum soliditate gradum facio ad superficiem. Hic (quod ad Lectorem præfatus sum) mirabilis annulares inter superficies ac corpora hunc cum priori libro conferenti analogia sese offeret. Quod si Archimedes tanti fecit Cylindrum inscripta sibi sphæra non soliditate tantùm, sed etiam superficie sesquialteram esse, ut ejus inventi symbolum tumulo opponi suo voluerit; eris fortasse, quod in annulis admisemur magis, in quibus soliditatem inter ac superficiem non una sed multiplex, ac propè perpetua proprietatum analogia, subinde etiam absoluta identitas reperietur.

CYLINDRICORUM ET ANNULARIUM.

LIBER V.

PARS I.

Demonstratur quamvis planam superficiem, quocumque situ circa axem quovis, aut nullo, ab ea distantem intervallo, in orbem ductam, producere rotundum solidum, aquale solido recto, quod fit ab eadem superficie ducta in altitudinem parem circumferentia à centro gravitatis descripta.

PARS II.

Demonstratur quamvis perimetrum, quocumque situ circa axem ab eo quomodocumque distantem, in orbem ductam, gignere rotundam superficiem aqualem superficiei recta, qua fit ab eadem perimetro, ducta in altitudinem aqualem circumferentia à gravitatis centro descripta.

PARS III.

Corporum rotundorum à Parabola genitorum affectiones quadam illustriores deducuntur.

PARS IV.

Via multiplices ac nova ad circuli quadraturam.

PARS V.

Solido annulari ab Hyperbola genito sphara exhibetur aqualis. Hinc nova ad Hyperbola quadraturam via aperiuntur; & reperitur sphara aqualis integro annulo, producto à figura, qua ex segmento circuli, & segmento Hyperbola composita est. Deinde Cylindri Hyperbolici partes quadam absolutè cubantur: unde alia rursum ad quadraturam Hyperbola panduntur via.

PARS VI.

Proportio Hyperbola ad circulum theorematicè exhibetur.

Regulam universalem centri gravitatis, quam prima & secunda parte demonstrandum suscepi, primus, quod sciam proposuit adhibuitá, Paulus Guldinus è Societate Iesu lib. 2. Centrobaricorum cap. 8. pag. 147. his verbis expressam: quantitas rotunda in viam rotationis ducta producit potestatem rotundam uno gradu altiorem. *Quo licet ille egregiam laudem promeruisset: regulam tamen, quod maxime petitur, non demonstravit.*

DISSERTATIO PHYSICO-MATHEMATICA DE CIRCULORUM VOLUTIONIBUS.

FACULTAS R. P. PRÆPOSITI

Vice-Provincialis Provinciæ Flandro-Belgicæ Societ. JESU.

EGo infra-scriptus Societatis Jesu per Provinciam Flandro-Belgicam Præpositus Vice-Provincialis, potestate mihi factâ à P. N. Thyrso Gonzalez Generali ejusdem Societatis, concedo *Henrico & Cornelio Verdussen* Typographis Antverpiensibus facultatem typis mandandi Librum, cui titulus: OPERA MATHEMATICA R. P. ANDREÆ TACQUET Societatis nostræ Sacerdotis à tribus ex eadem Societate Patribus ad id deputatis olim examinatum & approbatum. In quorum fidem has manu meâ subscriptas, officij mei sigillo muniendas curavi. Antverpiæ 20. Novembris 1705.

IOANNES BAPTISTA ARENDTS.

APPROBATIO CENSORIS.

OPERA MATHEMATICA R. P. ANDREÆ TACQUET *Societatis* Jesu, poterunt typis excudi & publicari, utpotè nihil continentia, quod Fidei Orthodoxæ Romanæ adversetur. In quorum fidem hisce subscripsi Antverpiæ XXVI. Iunij M.DC.LXVIII.

AUBERTUS VANDEN EEDE *I. V. L. Proton. Apost. Can. & Archidiac. Antverp. Librorum Censor.*

SUMMA PRIVILEGII REGII.

CArolus Dei Gratiâ Hispaniarum, &c. Rex Catholicus, Dux Brabantiæ, &c. Serenissimus Belgarum Princeps, Diplomate suo sanxit, ne quis *Opera omnia Mathematica R. P. Andreæ Tacquet Societatis Iesu, Matheseos Professoris*, præter voluntatem HENRICI & CORNELII VERDUSSEN Typographorum Antverpiensium ullo modo in Belgio intra novem annos proximos imprimat, aut alibi locorum impressa in has inferioris Germaniæ ditiones importet, venaliáve habeat, qui secus fixit Exemplarium Confiscatione & aliâ gravi pœnâ mulctabitur, uti latiùs patet in litteris datis Bruxellis 12. Februarij 1707.

signat LOYENS.

ANDREÆ
TACQUET
E SOCIETATE JESU,
ASTRONOMIA
METHODO SCIENTIFICA
OCTO LIBRIS
A FUNDAMENTIS EXPLICATA
AC DEMONSTRATA.

PRÆFATIO
AD LECTOREM,

Quâ mens & scopus Authoris exponitur.

INter Mathematicas disciplinas, quæ Geometriæ, & Arithmeticæ subalternantur, sive objecti dignitatem, sive tractationis ipsius subtilitatem modumq; spectes, principem locum Astronomia obtinet. Id ego, si hoc loco adstruendum mihi sumpsero, meritò videar actum agere: adeò clara in luce, atque omnium in oculis manibusque est hujus scientiæ præstantia, varietas, acumen, jucunditas, usus. Illud potiùs curandum mihi video, ut artis tam præclaræ perdiscendæ viam, si possim, faciliorem planioremque aperiam. Dolui enim persæpè ad nobilissimam scientiam, adeò perplexos tyronibus esse aditus, tam difficiles accessus, ut ex illis non pauci vel desperent in ipso limine, vel si ultrà tetenderint, nisi peritus instructor ad manum sit, ferè tantùm in superficie hæreant, nunquam ad fundamenta ipsa, atque intima scientiæ penetralia perventuri. Hæc à me ita dici erit fortasse qui mirabitur. Quid enim? excultâ tot jam sæculis Astronomiâ, tot libris vastissimis doctissimisque in lucem editis, quis addiscere volentibus, modò ingenium adsit, non satis credat esse prospectum? equidem fateor monumenta Astronomorum & plurima extare, & eximia prorsus; ipsamque adeò Astronomiam ad eam hoc tempore perfectionem esse deductam, quâ sperari haud multò major possit. Nihilominus ut hanc artem tyrones absq; magno labore perdiscant, quid adhuc desiderari videatur, dicam paucis.

Vt à principe omnium Ptolemæo incipiam, extat magna ipsius constructio, seu Almagestum verum Astronomiæ seminarium, cui sese illa, qua modò fruimur, tanquam fonti, totam debet: opus admirabile, & immortalitate dignissimum; sed ejusmodi tamen quod sua difficultate etiam doctum (ita Ioannes de Monte Regio) & ingenio præstanti lectorem deterrere consueverit. Is itaque, quem modò dixi, Ioannes de Monte Regio Ptolemæi Almagestum doctissimis commentarijs exponere, & illustrare aggressus est. Verùm neque hic discentium sese captui submisit satis; adeò multis locis vel brevis, vel obscurus est, tam multa scitu necessaria prætermittit: planè ut alio ipse commentatore opus habeat. Deinde ex illo Astronomiam non novam, sed veterem illam multis refertam erroribus addisces, cùm illa cæli arcana, quæ & plurima, & maxima tubi Optici artificio detecta sunt, penitus ignoraverit. Ex Alphonsinis, ex Arabibus, aliísque scriptoribus Ptolemæum inter & Copernicum intermedijs, longè adhuc minùs tyrones proficient. Successere tandem Nicolaus Copernicus, novus sui sæculi Ptolemæus, & Tycho Brahæus Astronomiæ instaurator præcipuus, Longomontanus, Keplerus, Lansbergius, Bullialdus, aliíque multi, quorum ingenio, labore, industria, eam perfectionem Astronomia adepta est, quam hoc tempore videmus omnes & admiramur. Sed magnis illis viris cura fuit præcipua Astronomiam priorum temporum vel inscitiâ vel negligentiâ propè collapsam, novis observationibus, & hypothesibus instaurare, & pro tabulis motuum cælestium Ptolemaicis, & Alphonsinis, jam à cælo immanè quantùm dissentientibus, novas substituere: de methodo illâ Mathesi propriâ, de facilitate, claritate, adjungendis ubique demonstrationibus, quibus facilis, & expedita docendi, discendique ratio continetur, minùs solliciti fuere. Quare visi sunt non tam discentes instruere, quàm peritos, & in hoc studio jam provectos perficere voluisse. Ex illis certè nullum reperio, qui à primis fundamentis ordine, ac serie continuâ, & nusquam interruptâ,

aliud

aliud semper ex alio deducendo demonstrandóque, astrorum cursus explanaverit. Vnde fit, ut tirones eorum scripta legentes, si nuda praxi, & calculo contenti esse nolint, hæreant penè ad singula, ac tandem desperatione victi, pulcherrimum studium abjiciant, qui, si ordo ille geometricus servaretur, ad intima scientiæ adyta facilè, nullo etiam duce magistro penetrassent. Hanc porrò methodum adeò laudatam, ne ille quidem vir doctissimus è Societate nostrâ Ioannes Baptista Ricciolus, qui omnium novissimè, ac copiosissimè de Astronomia scripsit, quamvis multò cæteris sit clarior, usquequaq; sibi tenendam esse judicavit. Molitus hic est Almagestum novum, Astronomiam veterem novámque complectens, in tres tomos distributum, quorum primus in duo prægrandia volumina divisus in lucem jam prodijt: opus eximium amplissimumque, omni eruditione Astronomica, historica, chronographica refertum: quo non suas tantùm, sed omnium Astronomorum sententias, observationes, hypotheses complexus est, ut meritò non tomum unum, sed integram in uno tomo Astronomiæ Bibliothecam edidisse videatur. Hunc ego quanti faciam, qui mea legerit manifestò intelliget; neque enim alium in hoc tractatu vel adhibeo frequentiùs, vel sequor. Sed tamen tanta vastitas, & amplitudo scriptionis quàm Astronomiæ universim prodest, tam parùm est discentibus accommodata, quos & moles voluminum terret, & rerum varietas ac multitudo confundit. Adhæc scriptori clarissimo, illi, quam dixi, methodo docentibus discentibusque tam necessariæ se astringere, non est visum. Quod igitur summi illi viri alijs ducti consilijs, & majora ac sublimiora spectantes non præstitere, id ego à me præstandum suscepi.

Quare hoc tractatu id agam inprimis, ut methodum geometriæ propriam, viamque pulcherrimam, quâ ad veritatem illa enititur, quàm proximè teneam. Itaque tironem Astronomicum à fundamentis ipsis sic instituam, ut posterius semper ex priore continuâ serie deducam: definiam res tractandas; statum quæstionis, nisi per sese pateat, exponam, quæ asseram, probem, ita praxim exhibeam, ut demonstrationem ubique a jungam, vel unde ea ex consequentibus absque vitioso circulo peti debeat, præcisè assignem: ita enim subinde expediet, ne si omnia suis avulsa locis exhibeantur, res inconcinna appareat. Denique sic ordinare, & disponere omnia conabor, ut quantùm in me erit, nusquam hæreat lector, sed inoffenso pede ad ipsum scientiæ verticem per quosdam quasi gradus conscendat. Atque ita spero futurum, ut qui ad pulcherrimum hocce studium adjecerint animum, si eo, quo scripsi, ordine hæc nostra pervolvant Astronomiæ universæ & praxim, & theoriam etiamsi magistro careant, per sese ipsi addiscant.

Habetis Astronomiæ candidati rationem consilij mei, Vestrûm erit hunc qualemcumque laborem vestri gratiâ susceptum, æqui boniqùe consulere. Si fructus ex illo quàm amplissimos c[illegible]platis, nihil mihi accidere possit in vita jucundius. Sed illud quæso vobiscum statuite, Astronomos oportere vos esse non gentiles, sed Christianos; quos decet ita cælos, ac sydera contemplari, ut ex ijs ad cælorum, ac sydetum conditorem sese erigant seq; attollant. Hoc nisi præstiteritis, nullum vos ex conatu tanto operæ pretium laturos scitote. Quid Hipparcho illi, quid Ptolemæo profuit tanto ingenio, & labore Solis, ac Planetarum cursus observasse, atque in omni hoc studio posteritati principes, ac duces extitisse, qui ita Dei opera sunt contemplati, ut ex ijs, cùm possent, ipsum opificem Deum non agnoverint: aut si agnovere, non sicut Deum, quod ait Paulus, glorificaverunt. Infelix profectò studium, quo id sunt assecuti, ut laudentur ubi non sunt, crucientur ubi sunt, summo bono amisso, & cælo de quo tam subtilia, tam mira posteris prodidere, æternum exclusi. Vobis Astronomi Christiani alia mens sit oportet, alia cogitatio: eo fine Dei opera contemplemini, quo ea ipse molitus est; qui sanè non est alius, quàm ut ipsum ex illis ag-

agnoscentes omnibus viribus, totoque animo diligamus. Ita fiet ut cælos & astra quæ nunc ex longinquo speculamur, aliquando coram, & ex propinquo lustremus, imò erecti suprà illa, conditorem ipsum infinitum clarâ in luce, æternùm beati intueamur.

MONITA AD LECTOREM.

1. *Quamvis libri singuli in capita sint divisi, numeri tamen, ut facilior sit citatio, ordine non interrupto usq; ad finem uniuscujusque libri procedunt. Abstinui autem his vocibus,* Propositio, Problema, Theorema, *& pro his numeros substitui, quia multa intercurrunt, quibus nulla convenit vocum priorum.*

2. *Cùm locus citatur ex hâc Astronomiâ, littera minuscula* (n) *numerum designat, littera* (l) *librum. Cum liber non exprimitur, semper intellige librum, in quo tùm versaris. Quod etiam locum habet in citatione figurarum.*

3. *Elementa non alia cito, quàm ea, quæ ipse edidi. Cito autem sic; ut primus numerus propositionem, secundus librum designet:* ex. gr. *(per* 2. 6.) *hoc est per secundam sexti. Similiter cùm citatur Geometria Practica, nostram intellige.*

4. *Tabulas novas construere, aut ab alijs constructas huic operi inserere, non est visum. Modum verò quo supputatæ illæ sunt, aut supputari de novo possint, ex ijs quæ toto hoc opere tradituri sumus, abundè discet Astronomiæ studiosus, & per se ipse, qui voluerit, denuò supputabit. Quanquam labore tanto se fatigare non videtur operæ pretium, quando tot jam habentur tabulæ, à summis Astronomis elaboratæ, nimirùm à Tychone, Reinholdo, Longomontano, Keplero, Lansbergio, Vendelino, Bullialdo, Mulerio, Petavio, Reinerio, & brevi novas à Ricciolo promissas expectamus.*

ASTRO-

ASTRONOMIÆ

LIBER PRIMUS

DE MOTU SOLIS

CAPUT PRIMUM.

Definitiones generales, quibus primus ad Aſtronomiam aditus aperitur.

NUMERUS PRIMUS.

Definitio 1.

SPhæra, eſt corpus unâ ſuperficie contentum, in cujus medio eſt punctum, quod centrum dicitur, à quô omnes lineæ ad ſuperficiem ductæ, ſunt æquales.

Definitio 2.

Maximi ſphæræ circuli ſunt, qui producuntur ſphærâ per centrum ſectâ; non maximi, qui naſcuntur, ſectione non per centrum factâ.

Quomodòcumque *a* ſphæram ſecueris, ſectio ſemper circulus eſt, cujus peripheria in ipsâ ſphæræ ſuperficie exiſtit.

a Theodoſ. lib.1.prop. 1.

Definitio 3.

Dati in ſphærâ circuli polus eſt, illud in ſuperficie ſphæricâ punctum, quod æqualiter diſtat à quovis puncto circumferentiæ dati circuli.

Fig. 1. Circulus ſphæræ ſit XBFCG, & punctum A eſto ejuſmodi, ut omnes rectæ AB ad circumferentiam BFCG ductæ, ſint æquales: punctum A vocatur polus circuli BFCG.

Definitio 4.

Gradus, eſt pars circumferentiæ treecenteſima ſexageſima.

Dividunt Aſtronomi circumferentiam circuli in partes æquales, ſive (ut loquuntur) in gradus 360. ob inſignes hujus numeri commoditates; quarum non poſtrema, eſt quod plurimas habeat partes aliquotas, quas vide cap. 4. Geometriæ noſtræ practicæ.

Definitio 5.

Minutum, ſive ſcrupulum, eſt pars ſexageſima unius gradus: ſecundum (ſubintellige ſcrupulum) eſt pars ſexageſima unius ſcrupuli: tertium, eſt pars ſexageſima unius ſecundi: atque ita porrò in proportione ſexagecuplâ procedendo, exiſtunt quarta, quinta, ſexta, ſeptima &c.

Scribuntur ſcrupula hunc in modum: Scrupula prima, notantur uno accentu; ſecunda duobus accentibus; tertia tribus; quarta (IV); quinta (V); ſexta (VI); ſeptima (VII), & ſic deinceps. Quare ſi ex. gr. offerantur grad. 5. 3'. 5''. 7'''. 9''''. 4''''', ita leges: gradus 5, ſcrupula 3. ſecunda 5. tertia 7. quarta 9. quinta 4. Sed quia difficile eſt typographis ſcrupula accentibus ſignata exprimere, ſufficiet ea punctis ab invicem ſecernere: ipſe enim illorum ordo ſatis indicat, utrum prima ſint, an ſecunda, an tertia. Itaque ſi offerantur grad. 8. 15. 7. 4. 18. lege: gradus, 8. minuta 15. ſecunda 7. tertia 4. quarta 18.

Jam inde ab ipſis incunabulis Aſtronomiæ placuerunt Aſtronomis ſcrupula proportionis ſexagecuplæ, conſilio ſanè ad calculum perincommodo: qui multò facilior erit, ſi loco proportionis ſexagecuplæ, aſſumatur decupla, ſic ut ſcrupula prima, ſint partes decimæ unius gradus, ſecunda verò partes decimæ unius ſcrupuli primi, tertia partes decimæ unius ſecundi, & ſic deinceps, eâdem ſignorum notatione retentâ: Ita quippè tota logiſtica ſcrupulorum abſque ullâ reductione abſolvetur, perinde ac integrorum numerorum, quemadmodùm expoſuimus lib. 2. Arithmeticæ Practicæ.

His præmiſſis progredimur ad circulos, & puncta, quibus cælum Aſtronomi diſtinguunt, ob cauſas uſuſque pulcherrimos, qui poſtea aperientur. Inter circulos primo loco ſe offert Horizon, Latine Finitor; iſque duplex eſt, rationalis, & ſenſibilis.

Definitio 6.

Horizon rationalis, ſive Aſtronomicus, eſt circulus maximus ſphæræ cæleſtis, polos habens in vertice habitantis, & in puncto vertici oppoſito.

Fig. 3. Terræ centrum eſto A; habitator in M; punctum cæli vertici habitatoris directè ſuprapoſitum B; oppoſitum C. Circulus AFLGO pro centro habens ipſum terræ centrum A, polos autem puncta B, & C, eſt Horizon rationalis.

Punctum B, vertici habitantis M, directè imminens, Arabicè Zenith appellant, oppoſitum C, Nadir. Dicuntur etiam hæc puncta, B quidem vertex ſimpliciter, C imum.

Definitio 7.

Fig. 3. Horizon ſenſibilis (quem etiam apparentem, ſeu viſum, apello) eſt circulus Sphæræ cæleſtis non maximus (MKPIQ), parallelus Horizonti rationali (AFLGO), centrum habens in ſuperficiei terrenæ puncto (M), in quô habitator exiſtit.

Hic circulus propriè Horizon, ſeu finitor, eſt, cùm viſum finiat habitantis in M, & partem cæli viſam (PKBIQ), diſtinguat à non viſâ (PKCIQ): nihil quippè infrà circulum AKPIQ exiſtens, ſpectari in M poteſt. Intelligatur enim cælum, ac terra, & Horizon uterque plano ſecari per Zenith (B), & Nadir (C), habitantis in M: ex quâ ſectione oriatur in

Fig. 4.

Fig. 4. in cælo circulus BFCG, in terrâ circulus TMV, in Horizonte sensibili diameter KMI, in rationali diameter FAG. Quoniam Horizontis sensibilis diameter KMI, tangit in M peripheriam TMV, in terrenâ superficie existentem, nullus radius infrà tangentem KM existens (ex. gr. RM) pertingere potest ad oculum positum in contactu M, quin prius intersecet peripheriam, ac proinde penetret soliditatem terræ, ut patet ex 16. 3 element. Ergò nihil infrà Horizontem sensibilem existens, potest speciem sui propagare ad oculum in M. Circulus ergò [a] APKQI visum habitantis in M, absolutè finit, partemque cæli visam à non visâ discriminat. [a] Fig. 3.

Non est porrò oculus habitantis concipiendus terræ affixus in M, sed aliquantulùm suprà eam elevatus: quæ elevatio, quia respectu semidiametri terrestris (AM), insensibilis est, in schemate non exprimitur.

Fig. 4. Notanda insuper sunt ista. Horizon sensibilis dividit cælum in partes inæquales; minor pars ea est, quæ videtur, major quæ non videtur. Nam quia horizon sensibilis per firmamenti centrum A, non transit, pars visa KBI, est minor hemisphærio FBG, pars verò non visa KCI, hemispherio major est. Latitudo differentiæ est semidiameter terræ AM.

Fig. 3. Deindè tot sunt horizontes diversi, quot puncta diversa in terræ superficie signari possunt. Quemadmodùm enim respectu habitantis in M, rationalis horizon est ALFOG, sensibilis MPKQI; ita respectu habitantis in alio terræ puncto, alius est tam rationalis horizon, quàm sensibilis. Atque hæc quidem in rigore mathematico intellige: locorum enim, sive punctorum modicè distantium, horizon quoad sensum unus est.

Denique præter horizontes rationalem, atque sensibilem, tertius est horizon; nempè terrestris, qui determinat quanta terræ portio ab oculo suprà terram elevato, conspici possit. De hoc ex professo egi Probl. 5. cap. 6. Geometriæ Practicæ.

Definitio 8.

Fig. 2. Axis mundi, est una ex mundi diametris (XZ), circa quam mundi Sphæra circumagitur.

Definitio 9.

Fig. 2. Poli mundi sunt duo puncta (X, & Z) in quibus axis sphæræ superficiem tangit; sive poli mundi sunt axeos extrema duo puncta.

Polus boreus, sive septemtrionalis, est (X) qui nobis semper conspicuus est.

Polus australis est (Z) qui à nobis nunquàm videtur.

Omnia superficiei sphæræ mundanæ moventur, præter polos; qui, quòd sint axis extremitates, soli immobiles sunt.

Definitio 10.

Fig. 2. Æquator, seu æquinoctialis, quem prisci cingulum mundi appellarunt, est circulus maximus sphæræ cælestis (HDLE) cujus poli sunt iidem cum polis mundi (X, Z.)

Æquinoctialem dixerunt, quia sole eum attingente (quod bis in anno contingit) dies nocti per totum mundum æqualis est. Hic circulus est mensura illius motus, quo cælum, & omnia astra 24 horis circumaguntur, ut exponetur infrà.

Definitio 11.

Fig. 5. Meridianus dati loci (G) est circulus maximus sphæræ cælestis (MXNZ,) transiens per mundi polos (XZ,) & per Zenith (M,) ac nadir (N) habitantis in loco dato.

Ita vocatur, quòd sole eum attingente sit meridies in loco dato. Quamvis autem uniùs loci tantùm unus sit meridianus, tamen respectu diversorum sunt diversi: per quælibet enim æquatoris puncta (O,P &c.) intelligi possunt transire meridiani (XOZ, XPZ &c.) Unde quivis circulus transiens per polos mundi (X & Z) est meridianus omnium sub ipso degentium.

Meridiani generatim accepti sunt maximi circuli per polos mundi transeuntes. Vocantur etiam *declinationum circuli*. Vide defin. 18.

Definitio 12.

Quatuor cæli plagæ in dato horizonte (BDCE) sunt quatuor puncta (B, C, & E, D,) in quibus meridianus (BMCN,) & æquator (HDLE) horizontem intersecant. Fig. 6.

Dicuntur vulgò Septemtrio, Auster, Oriens, Occidens. Punctorum (B, C,) in quibus (BMCN) meridianus secat horizontem (BDCE,) illud Septemtrio est, hoc Auster; punctorum verò (E, D) quibus horizontem secat æquator, illud est Oriens, hoc Occidens.

Recta BC, quâ planum meridiani BMCN secat planum horizontis est linea meridiana, sive linea septemtrionis, & austri; recta verò ED, quâ planum æquatoris secat planum horizontis, est linea ortus, & occasus.

Definitio 13.

Altitudo poli suprà horizontem est meridiani arcus (XB) à polo ad horizontem (BDCE) interceptus. Fig. 6.

Ea semper æqualis est distantiæ verticis (M) ab æquatore, quæ est arcus (ML) à vertice ad æquatorem (HDLE) interceptus, & appellari solet latitudo loci. Cùm enim tam arcus MB, quàm arcus LX sint quarta pars circuli, ac proinde inter se æquales, si ab æqualibus demas communem arcum MX, qui remanent, XB & ML, etiam æquales erunt.

Definitio 14.

Altitudo æquatoris (HDLE) suprà horizontem, est meridiani arcus (LC,) ab æquatore ad horizontem interceptus. Fig. 6.

Ea semper æqualis est complemento altitudinis poli. Complementum [a] altitudinis poli (BX) est arcus (XM) à polo ad verticem, sive Zenith loci; est enim arcus BXM quadrans integer. Huic arcui XM æqualis est arcus LC. Cùm enim tam arcus MB, quàm MC sint quadrans circuli, ac proinde æquales, si ab his demas arcus ML, XB, quos defin. præced. ostendi esse æquales, etiam residui arcus MX, LC æquales erunt, quod erat ostendendum. [a] *Vide defin.* 28.

Definitio 15.

Ecliptica, est circulus maximus (GQIOG) obliquè intersecans æquatorem (HDLE,) cujus poli (T, X) tantùm distant à polis æquatoris, sive mundi (X, Z) quanta est maxima solis declinatio ab æquatore, hoc est gradibus 23 cum dimidio. Fig. 2.

Per hunc circulum, vel potiùs sub eo, solem ferri motu annuo ab occasu in ortum, Astronomi concipiunt, ut dicetur infrà. Dicitur & ecliptica, quòd eclipses non fiant, nisi ambo luminaria sint in plano hujus circuli, aut propè illud.

Borealis eclipticæ pars est (QIO) quæ ad polum boreum (X) vergit, australis (OGQ) quæ ad austrinum (Z.)

Definitio 16.

Puncta æquinoctialia sunt (Q, O) in quibus æquator (HQLE) & ecliptica (GQIO) se mutuò secant. Fig. 2.

Inter-

Interfectio illa (Q) quam sol verno tempore attingit, estque (ut dicam defin. 20.) principium Arietis, sectio verna dicitur, & ab hac sumitur initium numerandi gradus eclipticæ; altera (O) sectio autumnalis dicitur, estque principium Libræ. Porrò ea puncta vocantur æquinoctialia, quòd sole in ijs posito, dies nocti toto orbe æqualis sit.

Definitio 17.

Fig. 2. Puncta Solstitialia sunt eclipticæ (G Q I O) duo puncta (I & G,) quæ maximè recedunt, seu declinant ab æquatore (H Q L E.)

Ex his alterum (I) est boreale, & æstivum, in quo (ut dicam defin. 20.) est initium Cancri: hoc ubi sol attigerit, longissima dies est, nox brevissima; alterum (G) australe, seu brumale, estque initium Capricorni, quod sol cùm attingit, dies est brevissima, nox longissima.

Vocantur Solstitialia, quòd sole in ijs posito per aliquot hebdomadas vix ulla dierum inæqualitas percipiatur, ac proinde sol quasi stare, & consistere in ijs punctis videatur.

Definitio 18.

Fig. 2. Declinationis circuli, vocantur omnes circuli maximi per mundi polos transeuntes.

Et declinatio sideris, aut puncti O, est circuli maximi (A O E B), per mundi polos (A, B) & punctum datum (O) transeuntis arcus (O E,) à puncto dato usque ad æquatorem (C D) numeratus.

Fig. 2. Inter omnia eclipticæ puncta maximam ab æquatore declinationem habent puncta Solstitialia (I, G,) ut dixi defin. 17. graduum nempe 23. 30, ut ostendam n. 31. Reliquorum declinationes eò minores sunt, quò longiùs distant à Solstitialibus; æquinoctialium verò (Q & O) cùm in ipso æquatore sint, declinatio est nulla.

Definitio 19.

Fig. 2. Zodiacus, est fascia, sive Zona cælestis, secta bifariam ab ecliptica (G Q I O G) in duas partes, quarum singularum latitudo est 8. aut 9. graduum, quanta nimirùm est maxima planetarum ab ecliptica deviatio, ac proinde tota latitudo est graduum 16, aut 18.

Definitio 20.

Fig. 2. Signum, est duodecima pars Zodiaci, seu eclipticæ, facto divisionis initio à sectione verna (Q.)

Denominantur signa ab astris, quorum configurationes ob quamdam similitudinem referunt hominum, aut animalium, aut rerum aliarum.

Signa sunt 12. & unumquodque complectitur gradus 30. eclipticæ. Eorum nomina, & characteres hic subjicio.

Sex signa Borealia.

Aries.	Taurus.	Gemini.	Cancer.	Leo.	Virgo.
♈	♉	♊	♋	♌	♍

Sex signa Australia.

Libra.	Scorpius.	Sagittarius.
♎	♏	♐
Capricornus.	Aquarius	Pisces.
♑	♒	♓

Fig. 2. Distributio signorum per Zodiacum, & eclipticam fit ab occasu in ortum, initio facto à sectione verna (Q,) in quâ est principium Arietis, quem sequitur Taurus, hunc Gemini; illos Cancer, cujus initium est in Solstitio Boreali, seu æstivo (I): tum Leo, Virgo, Libra, cujus initium est in sectione autumnali (O): inde Scorpius, Sagittarius, Capricornus, cujus principium est in Solstitio austrino, seu brumali (G.) Sequuntur exinde Aquarius, ac demum Pisces, quorum finis, orbe jam absoluto, est ipsa rursum verna sectio (Q.)

Borealia signa sunt, quæ per Borealem eclipticæ partem (Q I O) sunt distributa: Australia signa, quæ per australem (O G Q).

Ascendentia signa sunt, quæ distributa sunt à Solstitio brumali (G) per sectionem vernam (Q) ad Solstitium æstivum (I): Descendentia verò, quæ porriguntur ab æstivo Solstitio (I,) per sectionem autumnalem (O) ad brumale Solstitium (G).

Sex signa ascendentia.

Capricornus.	Aquarius.	Pisces.
♑	♒	♓
Aries.	Taurus.	Gemini.
♈	♉	♊

Sex signa descendentia.

Cancer.	Leo.	Virgo.
♋	♌	♍
Libra.	Scorpius.	Sagittarius.
♎	♏	♐

Priora dicuntur ascendentia, quòd Sol ea percurrens, quotidie altiùs suprà horizontem nostrum ascendat: Illa descendentia, ob causam contrariam.

Definitio 21.

Duplex est Zodiacus & ecliptica: visibilis, & invisibilis, seu rationalis.

Visibilis est in firmamento, & movetur sensim unà cum firmamento, motu quodam lentissimo ab occasu in ortum, quo singulis (ut dicetur lib. 5. n. 14.) 72. annis unum gradum absolvit.

Invisibilis, seu rationalis concipitur in supremo cælo, quod suprà firmamentum Astronomi imaginantur. Hic Zodiacus, & hæc ecliptica unà cum cælo suo, unico tantùm motu cietur, ab ortu nempe, in occasum, quem motum omnibus cælis inferioribus, atque astris communicat. Et quamvis planè imaginarius sit, ac proinde nullæ in eo sint stellæ, tamen 12. partes æquales, in quas divisus concipitur, etiam ipsæ vocantur signa per analogiam cum signis Zodiaci stellati visibilis. Quare in Zodiaco, & eclipticâ invisibili concipiendâ sunt eadem signa, Aries, Taurus, Gemini &c. eodemque ordine, quo in Zodiaco & ecliptica visibili.

Atque hic diligenter observare debent Astronomiæ studiosi, cùm de Zodiaco, & eclipticâ agunt Astronomi, eos semper intelligere hunc, de quo agimus, invisibilem nempe, seu rationalem, nisi (quod rarò accidit) ex subjectâ materiâ aliud colligatur. Itaque cùm nominatur sectio verna, seu initium Arietis, semper intellige eclipticæ invisibilis: & cùm Sol vel aliud sidus dicitur ingressus ex. gr. Taurum, aut esse in tali gradu eclipticæ, subintellige eclipticæ invisibilis, & sic de alijs. Solam quippè eclipticam illam primi mobilis invisibilem ad determinandos secundos motus astrorum adhibent, cùm ad hoc visibilis stellata, utpotè duplici motu agitata, sit inepta. Quare etiam nos (nisi cùm contrarium expresse monuerimus) deinceps, cum de Zodiaco, eclipticâ ejusque signis,

signis, ac gradibus agitur, semper rationalem illam volumus intelligi: deque eâ definitiones 15, 16, 17, 18, 19, 20, potissimum intelligendæ sunt.

Quod attinet ad situm utriusque inter se, initium Arietis eclipticæ stellatæ, ab initio Arietis eclipticæ rationalis hoc tempore versùs ortum distat gradibus paulò amplius quàm 28, ac proinde initium Arietis eclipticæ stellatæ modò est sub gradu 29, Arietis eclipticæ rationalis: unde nunc Aries eclip. stellatæ ferè totus est sub Tauro eclip. rationalis. Id verò ita accidit. Quadringentis circiter ante Christum annis, quô tempore ab Astronomis primùm ecliptica excogitata fuit, unam statuerunt in firmamento visibilem, ac stellis distinctam, alteram prorsus imaginariam in alio, suprà firmamentum, cælo imaginario existentem. Quæ duæ eclipticæ ita fuerunt constitutæ, ut existerent in eodem plano, & signa similia sibi mutuò responderent, hoc est Aries ecl. stellatæ esset sub Ariete eclipticæ rationalis, & sic de alijs signis. Interim, ecliptica rationali manente immobili, firmamentum cum suâ ecliptica processit in ortum singulis 72, annis gradu uno, adeoque ab anno ante Christum 400, ad annum post Christum 1657. hoc est annis 2056, initium Arietis eclipticæ stellatæ, ab initio Arietis eclipticæ rationalis, recessit in ortum gradibus $28\frac{1}{3}$. Inde factum, ut signa utriusque eclipticæ non amplius conveniant; quæ discrepantia continuò augebitur, donec evoluto spatio annorum 25920, si tam diu cælorum motus continuabitur, integro uno orbe confecto, in statum primum restituantur. Porrò initium ♈ eclipticæ invisibilis in utroque æquinoctio visibile redditur, cùm in ipso tunc existat centrum Solis. Imò quovis anni tempore ejus in cælo locus facilè designabitur, cùm nota sit ipsius distantia à stellis fixis.

Definitio 22.

Fig. 2. Colurus æquinoctiorum, est circulus maximus (X Q Z O) per æquinoctialia puncta (Q, O, & mundi polos (X, Z) descriptus.

Colurus Solstitiorum I Z G X, est circulus maximus transiens per puncta Solstitialia (I, G, & mundi polos (X, Z.)

Inde consequens est, ut etiam transeat per polos eclipticæ (T, X.)

Definitio 23.

Circuli verticales, seu altitudinis circuli sunt è maximis transeuntes per loci verticem, sive Zenith; & singula puncta horizontis. Verticalis primarius dicitur, qui transit per puncta ortus, & occasus.

Definitio 24.

Fig. 2. Tropicus cancri, est (MPIK) circulus non maximus, parallelus æquatori (H Q P O) transiens per (I) punctum Solstitij æstivi, sive initium Cancri; proinde tantùm distans ab æquatore, quanta est solis declinatio maxima; hoc est grad. 23. 30.

Tropicus Capricorni, est circulus non maximus (G R N S) parallelus æquatori, transiens per (G) punctum Solstitij brumalis, sive initium Capricorni.

Definitio 25.

Fig. 2. Polares circuli (T V, Y X) sunt duo circuli non maximi, ad æquatorem paralleli, distantes à mundi polis (X, Z) gradibus singuli 23. 30.

Quantùm videlicet tropici ab æquatore. Horum unus, boreus seu arcticus, alter austrinus, seu antarcticus est.

Hactenus præcipuos circulos enumeravimus quibus cælestem sphæram Astronomi distinguunt: qui omnes etiam in terræ globo similiter descripti intelliguntur. Verum cùm præter illos alij quidam supersint tum circuli, tum arcus, atque alia insuper nonnulla, quorum frequens in Astronomia sit usus, reliquum est, etiam ea breviter exponamus.

Definitio 26.

Fig. 2. Zonæ in cælo, ac potissimùm in terrâ, sunt vulgò quinque, sed commodiùs statuuntur sex, duæ torridæ, duæ temperatæ, duæ frigidæ.

Torrida borea continetur æquatore (H Q L O) & tropico Cancri (M P I K); Austrina æquatore, & tropico Capricorni (G R N S.)

Temperata borea continetur tropico cancri (M P I K) & circulo arctico (T V); austrina tropica Capr. (G R N S) & circulo antarctico (Y A). Singularum latitudo est grad. 43.

Frigida borea terminatur circulo arctico (T V) austrina antarctico (Y X.)

Definitio 27.

Triplex est positio sphæræ cælestis, recta, obliqua, parallela.

Fig. 7. Recta sphæræ positio ijs est, quorum horizontem (O M) perpendiculariter intersecat æquator (B C) adeoque transit per Zenith eorum, horizon verò (O M) per mundi polos (X, Z.)

Fig. 8. Obliquam sphæræ positionem habent ij, ad quorum horizontem (O M) æquator (B C) obliquus est, & supra quorum horizontem (O M) est polus borealis (X) dicitur sphæra obliqua borealis; suprà quorum horizontem (O M) est polus australis (Z,) vocatur sphæra obliqua australis.

Fig. 9. Positionem sphæræ parallelam habent illi, quorum horizon (O M) est ipsæ æquator (B C) Zenith verò, & Nadir sunt ipsi poli mundi.

Quæ trinam hanc sphæræ positionem consequantur, exponetur infrà.

Definitio 28.

Complementum alicujus arcus quadrante minoris, est ejus defectus à quadrante.

Ut si detur arcus grad. 60. ejus complementum est arcus grad. 30. quia additus dato arcui grad. 60. cum eo facit gradus 90. hoc est quadrantem circuli.

Definitio 29.

Fig. 10. Longitudo alicujus in terra loci (O) est arcus (C E) in æquatore (C E D, à primo meridiano (A C B) versus ortum, usque ad meridianum loci (A O B) numeratus.

Quoniam in sphærâ nihil primum, nihil postremum est, quod primum esse velis, ipse determines oportet. Itaque Geographi plerique primum meridianum esse statuerunt eum, qui ducitur per Picum montem altissimum insulæ Tenariffæ, quæ est una ex Canarijs, atque ab illo versùs ortum locorum longitudines numerant.

Definitio 30.

Fig. 10. Latitudo alicujus in terrâ loci (O) est arcus (E O) meridiani (A O B) inter æquatorem, & locum interjectus.

Latitudo duplex est; borea, & austrina.

Datis longitudine, & latitudine alicujus urbis, datur ejus locus verus in superficie terræ: ut si longitudo fuerit 30. grad. latitudo borea grad. 37. in æquatore (C D) à meridiano primo (A K B) numera gradus 30. ex C in E. Deinde in meridiano per E ducto, numera gradus 37. ex E in O. Punctum O est locus urbis datæ.

Latitudinem loci semper esse æqualem altitudini poli, demonstravi defin. 13.

Ratio autem cur loci alicujus distantia à meridiano primo versùs ortum, vocetur longitudo, distantia verò

verò ab æquatore, latitudo, alia non est, quàm quòd terra habitabilis longius extendatur ab occasu in ortum, quàm ab æquatore versùs polos.

Definitio 31.

Fig. 11. Circuli longitudinis, seu latitudinis sydèrum sunt maximi circuli (C F L) per polos (C I) eclipticæ (G K) & per ipsa sydera transeuntes.

R Q est æquator, A & B poli æquatoris, & mundi.

Definitio 32.

Fig. 11. Longitudo cujusvis astri, seu puncti in cælo dati (O) est arcus (G F) in ecliptica (G K) ab Arietis initio (G) versùs ortum usque ad longitudinis circulum (C O I) numeratus.

Juxta hanc definitionem, astrum quodvis (O) dicitur esse in eo eclipticæ puncto (F) in quo circulus longitudinis astri (C O I) eclipticam secat, vocaturque hic locus astri eclipticus.

Definitio 33.

Fig. 11. Latitudo astri, seu puncti in cælo dato (O) est arcus (F O) in circulo latitudinis (C O I) ab ecliptica (G K) usque ad astrum seu punctum (O) numeratus.

Latitudo duplex est; borea altera, altera australis.

Definitio 34.

Fig. 10. Almincantarath, sive paralleli altitudinem sunt circuli non maximi ad horizontem paralleli.

In schemate 10. horizontem jam repræsentet C D, Circuli G L, K R &c. ad horizontem paralleli, sunt almincantarath, sive altitudinum circuli.

Definitio 35.

Fig. 10. Altitudo astri suprà horizontem (C D) est arcus (E O) verticalis (A O B) per astrum ducti, inter horizontem, & astrum interceptus.

Altitudo meridiana solis, vel astri est arcus meridiani ab astro, vel sole usque ad horizontem.

Definitio 36.

Fig. 10. Amplitudo ortiva astri, est arcus horizontis ab astro oriente, usque ad æquatorem.

Amplitudo occidua, est arcus horizontis ab astro occidente, usque ad æquatorem.

Amplitudo ortiva, vel occidua, sideris alio sensu est arcus horizontis, inter ortum ejus, vel occasum borealissimum, & australissimum interceptus.

Definitio 37.

Fig. 10. Azimuthum sideris, aut cujusvis in cælo puncti, est arcus horizontis, inter meridianum loci, & verticalem per sidus, aut datum punctum transeuntem, interceptus.

In schemate 10. circulus A C B D jam referat meridianum loci, & sidus datum sit Q: verticalis per sidus transiens, sit A Q B: horizon C D: polus in K: arcus C F est azimuthum sideris, seu puncti Q.

Definitio 38.

Fig. 10. Ascensio sideris, aut puncti eclipticæ, est arcus æquatoris computatus à sectione vernâ, seu initio Arietis versùs ortum, sive secundùm ordinem signorum, usque ad punctum illud æquatoris, quod simul cum illo sidere, aut eclipticæ puncto suprà horizontem, motu diurno primi mobilis ascendit.

Descensio autem sideris, aut puncti eclipticæ, est arcus æquatoris computatus à sectione vernâ secundùm ordinem signorum usque ad illud punctum æquatoris, quod simul cum illo sidere, aut puncto eclipticæ infrà horizontem descendit.

Ascensio, vel descensio recta sideris, aut puncti eclipticæ, est quæ fit in sphærâ rectâ.

Ascensio, vel descensio sideris, obliqua est quæ fit in sphæra obliquâ.

Ascensionalis differentia, sive differentia inter ascensionem sideris rectam, & obliquam, est arcus æquatoris, interceptus inter punctum æquatoris, sideri supra obliquum horizontem cooriens, & declinationis circulum per sidus ductum.

Quæ omnia ex adjecto schemate fient clariora. Æquator esto F B C O: Horizon ad æquatorem rectus, cumque secans in G, esto X G Z, qui proinde transit per mundi polos X, Z estque unus è meridianis, sive declinationum circulis. Sidus aut punctum ecl. suprà rectum horizontem oriens sit A: punctum æquatoris illi cooriens est G: sectio verna sit K. Æquatoris arcus K C O F G, computatus nempe è sectione vernâ K secundùm ordinem signorum, est ascensio recta sideris, aut puncti ecl. A. Fig. 12.

Ducatur deinde per idem sidus A horizon aliquis obliquus M A Q. Æquatorem C B F O secans in B: proinde sidus A, & punctum æquatoris B, suprà obliquum horizontem M A Q simul ascendunt. Arcus æquatoris K C O F B est ascensio obliqua sideris, aut puncti ecl. Ascensionalis differentia est arcus B G, differentia nempè ascensionum rectæ K C O F G, & obliquæ K C O F B sideris A.

Ascensio recta sideris seu puncti ecliptica, quoad rem nihil aliud est quam ejusdem ab initio ♈ distantia, seu longitudo æquatoria; quæ acceptio frequentissima est apud Astronomos. Sit igitur

Definitio 39.

Fig. 12. Ascensio recta, sive longitudo æquatoria sideris (A) est arcus æquatoris (K C O G) à sectione vernâ K, usque ad declinationis arcum (X G A) per sidus transeuntem, secundùm ordinem signorum numeratus.

Definitio 40.

Ascensio recta, seu longitudo æquatoria medii cæli, est arcus æquatoris à sectione vernâ, usque ad meridianum juxtà signorum ordinem numeratus.

Definitio 41.

Ascensio alicujus arcus eclipticæ, est arcus Æquatoris cum eo suprà horizontem ascendens sive est arcus æquatoris, cujus initium ascendit cum initio arcus eclipticæ, & finis cum fine.

CAPUT II.

Figura cæli, & terræ. Terra ad cælum puncti instar. Locus terræ.

NUMERUS II.

Figura cæli sphærica est, & motus astrorum circulares sunt.

Videlicet quoàd sensum.

Demonstratio 1. ubivis terrarum cælestis horizon visibilis apparet ut circulus.

Demonst. 2. Omnia astronomorum ratiocinia supponunt cælum esse sphæricum & motus astrorum circulares: & tamen ea ratiocinia sunt ejusmodi, ut ijs motus planetarum ac siderum definiant, solis ac lunæ eclipses prædicant, atque omnem rationem temporum rectè constituant; quæ fieri nequaquam possent, si cælum alterius esset figuræ, quàm sphæricæ. Idem supponitur in gnonomonicâ, quâ lineæ in dato plano horas absque sensibili errore monstrantes describuntur. Idem supponunt instrumenta astronomica: ea enim ferè omnia circularia cùm sint, supponunt

femitam, quam sol vel astrum aliud describit, esse circuli peripheriam, quoad sensum concentricam peripheriæ instrumenti. Cùm igitur observationes hujusmodi instrumentis peractæ cum motibus siderum ac cæli exactè conveniant, necesse est ut motus siderum sint circulares, & cælum figuræ sphæricæ quoad sensum.

Et sanè conveniebat, ut, quando Dei perfecta sunt opera, magnum istud opus aspectabilis mundi, perfectissima figurâ circumscriberet. Ea verò est sphærica pluribus de causis. Nam 1. Superficies sphæræ omnium superficierum sibi æqualium capacissima est; & (quod inde sequitur) sphæra maxima est omnium corporum æquali superficie contentorum. 2. Sphæra inter omnia corpora sibi æqualia minimâ superficie comprehenditur. 3. Superficiei sphæricæ partes omnes æqualiter distant à medio sive centro. 4. Ex quibus consequens est ut sphæra majori firmitate polleat adversùs omnem extrinsecam violentiam, quolibet alio corpore. 5. Superficies sphæræ sola inter omnes uniformis est, cujus nimirum pars quælibet lata per totum congruit. 6. Sola sphæra loco non mutato in omnem partem potest moveri, videlicet circa centrum.

NUMERUS III.

Figura terræ sphærica est.

NEmpè quoad sensum, si ex magnâ distantiâ, puta ex cælo spectaretur.

Demonstratio 1. Ea terræ pars, quæ sub aspectum liberum cadit, & horizon terrestris dicitur, ubivis terrarum apparet circulus; quod fieri non posset si terra alterius esset figuræ, quam sphæricæ. *Hæc demonstratio etiam mari convenit.*

Demonst. 2. Ubivis terrarum eclipsi lunari umbra terræ in lunam projecta eamque obscurans, est circularis. Ex quò manifestum est terram, à quâ talis umbra projicitur, esse circularem in omnem partem, hoc est sphæricam. *Hæc probatio convenit toti moli ex terrâ, & aquâ compositâ.*

Fig. 13. *Demonst.* 3. Terra, si à sphæricâ figurâ notabiliter deviaret, non magis esset usibus humanis apta, quàm clivus montis. Esto enim terra ABCE figuram habens à sphæricâ AFCG sensibiliter diversam. Experientiâ constat omnia gravia tendere deorsùm ad punctum unum, puta D. Unde si terra sit sphæra, cujus centrum sit punctum illud ipsum D, ad quod gravia diriguntur, manifestum est omnia ædificia ad perpendiculum exstructa, atque adeò homines terræ insistentes, æquales ex omni parte cum eâ efficere angulos HNF, HNC &c. Quarè ad superficiem ABCE à sphæricâ sensibiliter differentem, necessariò angulos constituent inæquales HKB, HKC. Unde non magis in terrâ ejusmodi ædificari posset, aut homines recti insistere, quàm in clivo montis. Quarè cùm ad usus hominum sapientissima illa Majestas hanc terram condiderit, dubitari non potest quin eam esse sphæricam voluerit.

Quod sub uno, quocumque meridiano, procedenti attollatur polus magis magisq; eâ proportione, quam exigeret figura terræ sphærica: item quod loco cuicumque magis orientali sol citiùs oriatur, & eclipses citiùs conspiciantur eâ proportione, quâ id accideret, si terra esset sphærica, etiam verè ex his terram esse sphæricam concluditur. Quòd verò montium cacumina, quæ priùs latebant, propiùs navigio accedentibus sensim altius atque altius supra maris superficiem eminere conspiciantur, inde solum probatur mare figurâ esse aliquâ rotundâ, cujusmodi etiam est sphæroidica. Quare hæc argumenta, & si quæ sunt ejusmodi alia, sciens prætermitto.

Quæres, an montes rotunditatem terræ non impediant? Respondeo minimè. Quamvis enim cap. 7. Geometriæ practicæ ostenderim prodigiosas esse quorundam montium altitudines; Æthna quippe, altus est milliaria Bononiensia saltem 5; Picus saltem 10; Casius 20; Athos 28; Caucasus circiter 50. nihilominùs quia terræ diameter (ut ostendi cap. 6. probl. 4. geom. pract.) æquat milliaria Bononiensia 8279. hoc est horaria 2759. ne quidem tantæ, quàm modò retuli, altitudinis montes, ejus rotunditatem sensibiliter turbant. Eleganter Ricciolus noster hoc metu laborantes sic compellat: noverint (inquit) tam vastæ staturæ esse hanc Cybelem, ut non modò turres, sed ne montes quidem milliarium 50. coronam ejus vertici incongruam circumponant.

NUMERUS IV.

Superficies maris, imò cujusvis humidi quiescentis, sphærica est.

DEmonst. Constat eam esse naturam omnis humidi, ut ex loco altiori, si non impediatur, defluat in demissiorem, hoc est centro, ad quod gravia tendunt, propiorem. Quò defluxu necesse est ut tandem omnes maritimæ superficiei partes æqualiter à dicto centro distent, ac proinde maris superficies sphærica existat, centrumque ejus sit punctum illud, ad quod gravia omnia diriguntur.

Potest hæc ratiocinatio sic ordinari, ut maris superficiem ex eo ipso quod sphæricam esse neges, directè probes esse sphæricam.

Si negas, ponamus superficiem maris non esse sphæricam. Ergo non omnes maritimæ superficiei partes æqualiter distant à centro. Ergò una est alterâ altior, hoc est remotior à centro. Ergò ex naturâ omnis humidi, eæ quæ sunt altiores, defluunt versùs minùs altas. Atqui ex tali defluxu oritur omnium partium superficiei maritimæ æqualis altitudo, hoc est æqualis à centro distantia, hoc est sphæricitas perfecta. Ergo superficies maris sphærica est.

Eadem demonstratio evincit cujusvis humidi superficiem esse sphæricam. Itaque superficies humidi vase aliquo contenti, est pars superficiei sphæricæ, quæ si perficeretur, ambiret orbem terræ, & centrum haberet idem cum terræ centro.

Plura ejusmodi demonstrationum exempla Geometrica variis locis dedi: in elem. Geom. l. 5. p. 35. l. 11. p. 4. lib. 9. p. 36. lib. 5. cylind. & annul. p. 4. Geom. pract. cap. 14. pag. 11. Adhæc Euclides lib. 9. prop. 12. Cardanus aliiq; similia exempla protulêre. Cum verò non deessent, qui negarent ratiocinia ejusmodi possibilia, adeoq; contenderent fieri non posse, ut ex falso, supposito tamquam vero inferatur directè ipsius contradictorium, ac proinde verum; dissertatiunculam ea de re in lucem emisi, & sub nomine appendicis elementis Geometriæ subnexui, ad quam lectores remitto. Porrò ex falso, supposito tamquam verò directè deduci posse contradictorium ejus, nihil est aliud, quam falsum à seipso evertì ac destrui: quod cùm naturæ falsi sit maximè consentaneum, nihil est, cur hoc aut incredibile aut cum ratione pugnans videatur.

Porrò globum unum ex terrâ, & aquâ componi liquet ex demonstratione secundâ num. 3. & ex natu-

naturâ gravitatis, quâ elementum utrumque prædi-tum est, satis colligitur.

Quare cùm terram deinceps nominabimus, sphæ-ram ex terrâ & aquâ compositam volo intelligi.

Scholium.

Fig. 15.

Ex rotunditate terræ consequens est eos, qui in oppositis terræ locis habitant, sibi mutuò antipodas esse, hoc est oppositis ex adverso pedibus insistere in B, & C. Nihilominus S. Augustinus lib. 16. de civit. cap. 9. cum Lucretio, & Lactantio antipodas esse negavit. In quo quidem quamvis ejus extra dubium sit error, non tamen eâ Cosmographiæ ignorantiâ laboravit, quam nonnulli, qui ejus verba non legerunt, sibi imaginantur. Non enim negat Augustinus terram esse sphæricam, sed contendit, quamvis sphærica esset, non esse tamen antipodas, quòd pars orbis nobis opposita, vel oceano tecta sit, vel si aquis careat, non potuerint eò homines ex Adamo progeniti per immensam Oceani vastitatem penetrare. Scio argumentationem istam modò non à peritis tantùm, sed etiam ab indoctis, & de vulgo nautis rideri. Verùm danda est illi ætati venia, cum navigandi ars acu magneticâ nondum repertâ omninò rudis, & imperfecta existeret.

Excusari etiam debet Zacharias Papa, qui urgente S. Bonifacio Episcopo Moguntino, Virgilium jussit à Divinis suspendi, non quia antipodas esse asseruit, sed quia sic putabatur asseruisse, ut plures mundos extra hunc affirmaret, uti ex ipsâ Zachariæ epistolâ manifestum est.

NUMERUS V.

Unde fiat, ut terra & mare, quamvis sint sphærica, appareant plana.

CAusa est magnitudo sphæræ, cujus pars non magna sub aspectum cadit. In Geom. practicæ cap. 6. probl. 5. Ostendi oculo 6. pedibus supra mare elevato semidiametrum horizontis marini non multùm excedere milliare unius horæ. Ambitus autem terræ (ut ostensum ibidem probl. 4.) continet milliaria horaria 8670. Quare licet horizontis semidiametro daremus milliaria duo, nequidem quatermillesima esset pars ambitus terræ, quæ proinde nullam sensibilem curvaturam habet.

Quòd si oculum altiùs supra maris terræve superficiem extuleris ex: gr: ad tertiam partem milliaris horarij sive uno milliari Italico Bonon. ostendi loco citato semidiametrum horizontis quam proximè futuram 30. milliariorum horar. quæ cùm terreni ambitus sit pars solum 289. nullum habebit flexum sensibilem, aut si quem aliàs habeat, is ipse ob oculi distantiam evanescet.

Quòd verò circumferentiæ pars ducentesima, nedum quatermillesima, sensibilem curvaturam non habeat, experimento disces, si funiculo longo pedes 63. extenso tamquam radio, circumferentiam circuli describas: erit enim illa pedum 194 [illegible] in quâ si particulam uni pedi æqualem designes, ea major erit unâ ducentesimâ, nec tamen ullam in ea sensibilem curvaturam advertes, ut nequeas à lineâ rectâ discernere.

Fig. 14.

Licebit quæsitum aliâ adhuc viâ declarare hunc in modum. Detur longitudo recta quantumvis magna CAD, ex. gr. 100. milliariorum. Exhiberi potest tanta circuli circumferentia, ut ejus pars, æqualis 100. milliarijs, insensibiliter differat à linea rectâ. Bisecetur longitudo data CD in A, ducanturque perpendiculares ad eam CI, AB, DK. Deinde in perpendicularibus CI, DK, sumantur duo intervalla æqualia CO, DN quantumvis parva, ac prorsùs insensibilia: Tum centro accepto in rectâ AB infinitè protractâ, per O, & N descripta intelligatur circumferentia, quæ rectam CD, tangat in A. Hujus arcus OAN major erit rectâ CAD, 100. milliariorum, & quoad curvaturam prorsùs insensibiliter differet à rectâ CD, cùm ejus extremitates O, & N, intervallis planè insensibilibus à rectâ CD distent. Quod erat propositum.

Observa denique fieri posse ut sphæricæ superficiei magna pars, imò propè dimidia sub aspectum cadat, neque tamen ulla protuberatio curvitatis percipiatur, ut fit in sole, lunâ, stellis, ob immanem distantiam oculi, quemadmodùm demonstratur in Opticâ.

NUMERUS VI.

Consectaria ad rotunditatem terræ, & aquæ.

Fig. 16.

CONSECT. I. *Si terræ superficies plana esset, non possent in eâ homines recti consistere.* Patet ex schemate 16. & demonstratione tertiâ numeri 3.

CONSECT. II. *Suprema mali pars plus itineris conficit, quàm inferior: & caput viatoris plus itineris, quàm pedes: & qui Antverpiâ Gandavum proficiscitur eques, plus viæ percurrit, quam si pedes.*

Fig. 17.

Demonst. Circulus BBF referat maris superficiem, cujus centrum A: altitudo mali sit CB. Quoniam malus CB, insistit perpendiculariter superficiei maris BBF, (aurâ nimirùm tranquillâ) liquet eum mente productum, transire per centrum A, quam directionem ad centrum toto cursu retinet, si mare non turbetur. Quando igitur navis pervenit ex Z, in X, inferior mali pars confecit arcum ZX, seu BB, qui minor est arcu CC, quem percurrit mali cacumen. Eadem erit demonstratio in reliquis.

Fig. 18.

CONSECT. III. *Siquis totam orbis terræ circumferentiam CAED peragrasset, iter à capite ejus confectum, superaret iter confectum a pedibus, circumferentiâ circuli, OBQN, cujus radius est ipsa hominis statura AB.*

Demonstr. Ducatur per centrum Z, diameter BAZDG. Manifestum est iter à capite confectum, esse peripheriam IBFG, maximo terræ circulo CAED concentricam. Jam hæc peripheria IBFG, est ad peripheriam CAED, [a] ut diameter BG ad diametrum AD. Rursùm eadem peripheria IBFG est ad peripheriam QBON, ut diameter [b] BG ad diametrum BN, hoc est, ad BA cum DG. Ergò peripheria IBFG, est [c] ad duas simul peripherias CAED, & QBON, ut BG est ad AD, unà cum BA & DG. Sed BG ipsis AD, BA, DG æqualis est. Ergò etiam peripheria IBFG à capite percursa, peripherijs CAED, QBON æqualis est; ac proinde peripheriam CAED confectam à pedibus,

a *Per p 7. selectorum ex arch.*
b *Per eand.*
c *Per 24. 5.*

dibus, excedit peripheriâ QBON, cujus radius AB, est ipsa hominis statura. Quod erat demonstrandum.

Fig. 19. CONSECT. IV. *Vas aquâ, seu alio humido plenum si perpendiculariter efferatur in altum, continuè quid effluet; & tamen manebit plenum.*

Demonst. Superficies aquæ, cùm primùm incipit attolli, esto CQD. Cùm jam aqua effertur in altum, ejus superficies continuè longiùs recedit à centro terræ. Quare cùm humidi vase contenti superficies, sit pars superficiei sphæricæ a transeuntis per vasis margines C, D, centrum habens idem cum centro terræ, manifestum est, quando vas attollitur, superficiem humidi vase contenti fieri partem majoris, ac majoris superficiei sphæricæ MOP, adeoque fieri minùs minusque curvam, & protuberantem; ac proinde descendere infrà superficiem primam: ut si prima superficies fuerit CQD, post elevationem aliquam jam superficies humidi sit COD. Effluxit ergò quidquid inter utramque superficiem COD, CQD continetur. Et tamen vas adhuc plenum est, cùm humidi eo contenti superficies adhuc transeat per margines C, D.

a Per consf. 3.

Hinc patet, si vas in altum fine termino sursùm evehatur, superficiem humidi eo contenti descensuram sine termino versùs planum per margines ductum, neque tamen umquàm ad illud perventuram.

Patet secundò vas plus humidi continere in pede montis, quàm vertice; plus in caveâ, quàm in conclavi.

Fig. 20. CONSECT. V. *Si vas humido plenum rectà deorsùm feratur, quamvis nihil effluat, desinet esse plenum.*

Demonst. Superficies humidi vase AGDB contenti, esto GCD, pars superficiei sphæricæ MCP, cujus centrum est terræ centrum. Manifestum est cùm vas descendit, hoc est propiùs accedit ad centrum terræ, superficiem humidi vase contenti, fieri partem minoris superficiei sphæricæ, adeoque magis curvæ, & protuberantis: quod fieri non potest, nisi superficies humidi posterior, in medio suprà primam GCD, assurgat in O, ad margines verò infrà primam descendat in I, & N; ita ut superficie primâ existente GCD, posterior post descensum jam aliquem sit ION. Nam si non descenderet in I, & N, sed pergeret transire per G, & D, postquàm in medio assurrexit in O, contineretur tum plus humidi in vase, quàm anteà, quod est absurdum, cùm nihil accesserit. Quod si dicas (quamquàm id ex alio capite absurdum esse, possit ostendi) posteriorem superficiem ita fieri magis globosam, ut ejus medium non assurgat suprà C, medium punctum prioris GCD, tunc multò magis manifestum est posteriorem, quæ minor & globosior est primâ GCD, necessariò occurrere vasi, infrà supremos margines G, D. Certum est igitur secundam superficiem IOD, suprà primam GCD attolli circa medium, deprimi verò infrà eam circa margines, in I, & N. Ergò, quamvis è vase nihil effluxerit, vas tamen desijt esse plenum. Nam spatium in eo vacuum est ab I, & N. usque ad margines supremos G, & D, quod novo humido affuso repleri potest, vase locum non mutante: tum verò humidi superficies esset GLD concentrica superficiei ION.

NUMERUS VII.

Sphæra, cujus semidiameter est (AB) distantia oculi nostri à centro firmamenti (A) se habet ad firmamentum puncti instar, quemcumque dederis terræ locum in universo. Fig. 21. 22.

STellæ, quæ videntur in punctis oppositis (D, & F) horizontis visibilis (DBF), apparent ab invicem (quantum sensu instrumentis adjuto assequi possumus) integro semicirculo distantes, hoc est gradibus 180; cùm tamen reverà distent minùs; eò quòd arcus (DGF) suprà horizontem visibilem (DBF) existens, minor sit semicirculo (CGF) ab horizonte rationali (CE) terminato. Ex quò liquet utriusque horizontis intervallum (CD), respondens oculi à centro firmamenti distantiæ (AB), insensibile esse. Neque refractio argumentum infirmat, sed potiùs rōborat; ea quippè, cùm sidera justo altiùs attollat, arcum DGF justo majorem facit.

Id ipsum paulò aliter sic ostendo. Brumali tempore vel autumnali, cùm noctes sunt 12 horis longiores, stella in æquatore posita, sub initium noctis spectata in horizontis visibilis puncto Orientali D, post 12 horas spectabitur in horizontis visibilis puncto Occidentali F. Ergò 12. horarum spatio stella (quantùm sensu assequi possumus) percurrit arcum æquatoris (DGF). Atqui arcus æquatoris, qui 12 horis percurritur, est medietas æquatoris, cùm horis 24, percurratur æquator totus. Ergò arcus (DGF) suprà visibilem horizontem (DBF) existens, quantùm sensu assequimur, est medietas æquatoris; cùm tamen reverà minor sit arcu (CGE), suprà horizontem rationalem (CAE) posito, qui est æquatoris medietas. Differentia igitur CD, hoc est BA, distantia oculi (B) à centro firmamenti (A), insensibilis est cum firmamenti radio (AG) collata.

Accuratiùs hoc demonstrabitur Astron. lib. 5. num. 1.

Demonstratâ insensibilitate intervalli AB, à fortiori habetur insensibilitas sphæræ, cujus AB radius est; cùm b sphærarum proportio triplicata sit proportionis diametrorum, seu radiorum. Unde c si radius AB sphæræ AO, est ad AG radium firmamenti ut 1 ad 100,000, erit sphæra AO, ad firmamenti sphæram ut 1 ad 1000(000,000(000,000.

b Per 18. 22. c V. deprobl. 14. cap. 21. Geom. pract.

Corollarium.

Hinc sequitur, si ex mente Copernici sol quiescat in centro mundi, terra verò evecta in cælum motu diurno, atque annuo circumagatur, non solùm terram, sed etiam totam sphæram illam, quam cælum solis, sive orbem magnum dicimus (cujus tanta magnitudo est ut d certò contineat terras 857, 375, 000, ferè certò 343, 000, 000, 000 vicibus) respectu firmamenti esse puncti instar.

d Per probl. 10. cap. 20. Geom. pract.

NUMERUS VIII.

Terra quoad sensum est in centro firmamenti. Fig. 22.

MAnifestum id est ex numero præcedenti non solùm in sententiâ communi, & verâ, sed etiam in Copernicanâ. Quamvis enim terra esset, in cælo (BO), ubi nos solem ponimus; nihilominùs, quia per num. præced. (BA) distantia terræ, existentis in B, à centro firmamenti insensibilis esset, liquet terram quoad sensum fore etiam tum in centro firmamenti.

CA-

CAPUT III.

Per Hypothesim duplicis motus Solis dantur causæ eorum, quæ circà varietatem dierum, ac noctium, & tempestatum anni ubivis gentium observantur.

NUMERUS IX.

Phænomena communia, hoc est, quæ in omnium oculos incurrunt.

Phænomenum 1.

SOl cum omnibus astris movetur ab ortu in occasum, donec redeat ad eundem meridiani semicirculum: à quò cœperat moveri. Una ejusmodi revolutio, diem naturalem constituit.

Phænomenum 2.

Præter hunc motum omnibus conspicuum, observatum est solem ab eâdem stellâ elongari quotidiè magis, magisque versùs Orientem. Nam si unâ horâ ex. gr. ante Solis ortum, stellam quampiam conspexeris in horizonte, eandem post dies aliquot conspicies unâ horâ ante Solis ortum, aliquot gradibus suprà horizontem elevatam; & post tres menses in meridiano tuo; post sex, in horizonte occiduo; post 12, rursum in horizonte ortivo, unâ semper horâ antè Solis ortum, conspicietur.

Phænomenum 3.

Ea omnia complectitur, quæ circà æqualitatem, & inæqualitatem dierum, ac noctium, circà æstates, ac hyemes, & alia his affinia in varijs terræ locis contingunt. Ea singula commodiùs recensebo infrà, cùm eorum causæ aperientur.

NUMERUS X.

Prima hypothesis Astronomiæ, de duplici solis motu, proponitur.

HYpotheses astronomicæ, sunt suppositiones quædam circà motus astrorum, quæ cum phœnomenis accuratè conveniunt; ita ut, si ea quæ supponuntur, existerent, eadem omninò in cælo apparerent, quæ jam apparent. Porrò eadem phœnomena salvari possunt per hypothesim non unam. Quæ enim num. præced. recensui, perinde explicabis, sive terram moveris, sive solem. Hoc igitur cùm evenerit, utra hypothesium sit vera absolutè, constare ex illis phœnomenis non potest. Atque hæc causa fuit cur ordinem, ac formam motuum quos astris tribuunt, hypotheses astronomi appellarint: quarum multæ, quamvis reverà non existant; id tamen earum ope assequuntur, ut motus syderum secundùm apparentiam irregulares, ac proindè immensurabiles, commento prorsus insigni, ad mensuram, & calculum revocent, ex quò uno tanquam fonte, omnes propemodùm Astronomiæ utilitates proveniunt.

Ad salvanda ergò phœnomena numero præced. recensita, sequens hypothesis excogitata est.

Fig. 2. Terra in firmamenti centro immobilis statuitur, Sol autem in cælo positus cum omnibus planetis, & stellis, ac firmamento, moveri ab Ortu in Occasum. Hunc verò motum ita concipiunt. Suprà firmamentum imaginantur aliam sphæram concentricam, cui motum jam dictum quasi proprium assingunt. Hanc igitur statuunt, dum ab Ortu in Occasum infinitâ propè celeritate fertur, firmamentum cum stellis, planetis, & sole secum unà abripere. Undè cælum illud fictitium, *primum mobile* appellatur, & motus ipse vocatur *motus primi mobilis*; *motus primus*, *motus æquinoctialis*; *motus diurnus*: atque una integra ejus revolutio diem primi mobilis, sive diem æquinoctialem, vigesima quarta ejus pars horam æquinoctialem constituit. Mensura hujus motus est æquator (HOLQH), & axis (XZ), circà quem motus hic peragitur, est ad æquatorem perpendicularis. Unde singulis horis gradus 15 æquatoris, (hoc est vigesima quarta ipsius pars) suprà horizontem ascendunt.

Fig. 2. Præter hunc omnibus astris communem, alium Soli motum tribuunt priori contrarium (sed obliquè) ab Occasu in Ortum sub primi mobilis ecliptica (QIOGQ), cujus maxima declinatio ab æquatore est grad. 23. 30. Hujus motus initium sumunt à principio Arietis (Q), atque eò statuunt à sole percurri uno die primi mobilis minuta circiter 48, hoc est ferè unum gradum eclipticæ; donec eclipticâ totâ secundùm ordinem signorum ♈, ♉, ♊, &c. peragratâ, ad principium Arietis redeat in Q. Vocari hic motus solet, *secundus*, & *annuus*. Quia autem contrarius est motui *primo*, fit, ut una revolutio Solis ab Ortu in Occasum (quæ dies solaris, seu naturalis dicitur) aliquantò tardiùs absolvatur, quàm una revolutio primi mobilis, seu æquatoris. Itaque una Solis revolutio diurna à semicirculo Ex. g. meridiani XLZ, donec redeat ad eundem, præter integram æquatoris revolutionem de secundâ revolutione ejusdem tantam partem requirit, quanta debetur particulæ illi eclipticæ, quam interim sol motu retrogrado percurrit: sive, una revolutio solis præter 24 horas æquinoctiales adhuc requirit tempus illud, quò particula eclipticæ à sole motu contrario percursa, meridianum XLZ pertransit. Est verò tempus illud ferè 4 minutorum. Quare dies solaris excedit diem primi mobilis, minutis 4.

Hæc prima Astronomiæ hypothesis est, quâ phænomena num. 9. recensita, atque omnia dierum, & noctium vicissitudo, ac varietas per causas demonstrabitur. Quod priusquam aggrediar, hypotheseos jam allatæ ulterior declaratio præmittenda est.

NUMERUS XI.

De motibus compositis.

QUoniam Astronomi plures motus Soli, alijsque astris tribuunt, nonnulla hic erunt circà motus compositos elucidanda.

Potest una res diversis, imò quotcumque motibus etiam oppositis, agitari. Ambulet enim quispiam in nave versùs Orientem, interim dum navis æstu fluminis defertur in Occidentem, vel aliam plagam. Homo in navi deambulans duobus motibus agitatur. Quod si tertius motor ipsum flumen cum terrâ totâ circumagat, jam qui deambulat in navi tribus motibus cietur. Atque ita si plures accedant motores, poterit idem homo quotcumque motibus diversis agitari.

Quando res una pluribus motibus afficitur, duo potissimùm in considerationem veniunt, primò terminus *à quo*, & terminus *ad quem*; secundò linea, sive semita, quam res pluribus affecta motibus describit, seu perambulat.

Fig. 23. Quod attinet ad terminum *à quo*, & *ad quem*, feratur mobile aliquod ex A versùs B, atque interim totum planum, in quo mobile est, moveatur in partem directè oppositam C. Si mobile eâdem celeritate moveat se versùs B, quâ movetur ab alio versùs C, manebit in eodem loco A. Si tardiùs sese moveat versùs B, quàm trahatur versùs C, absolutè feretur versùs C: si celeriùs se moveat ad B, quàm trahatur ad C, absolutè feretur versùs B; sed eâ utrobique celeritatis proportione, quâ motus versùs B superat tractionem versùs C, vel ab eâ superatur. Quòd si mobile se ipsum moveat versùs B, atque interim planum ipsum cum mobili feratur ab alio etiam versùs B, manifestum est mobile ferri celeriùs, quàm uno solum motu affectum, eâ proportione, quam habet uterque motus simul sumptus ad unum solum.

Quod attinet ad viam, sive semitam, quam res diversis affectæ motibus percurrunt, ea est modò recta linea, modò circuli circumferentia, modò aliqua sectionum coni, modò spira &c. Imò nullum genus linearum assignabitur, quod non à certis motibus inter se compositis, describi possit. Exemplum unum alterùmve tyronibus exhibeo.

Fig. 24. Esto parallelogrammum OBAD, cujus unum latus percurrat musca æqualiter ex A in B. Eodem autem tempore deferatur æqualiter latus AB cum muscâ, inter rectas BO, AD, usque in DO, sic ut latus, dum defertur, semper maneat sibi ipsi parallelum. Dico muscam geminâ illâ motione affectam, percurrisse viam obliquam AO, diametrum nempè parallelogrammi. Pervenerit enim musca ex A in C, ducaturque CB parallela ad AD, secans AO in R. Quo autem tempore musca percurrit AC, eodem latus AB delatum sit in KRL. Hac duplici motione musca ex A pervenit in R. Processerit deinde musca in latere AB usque in F, ducaturque FI parallela ad AD, & eódem tempore delatum sit AB latus in MIQ. Hoc motu duplici pervenit musca ex R in I, si demùm muscâ existente in B, latus AB fit in DO, jam musca erit in O, adeoque percurrit rectam totam AO.

Fig. 25. Aliud adjungo exemplum motus ex circulari, & recto compositi. Percurrat musca rectam BA motu æquali, hoc est æquabili, & eódem tempore recta BA, fixo manente puncto A in orbem circumagatur etiam æqualiter, donec redeat in locum undè cœpit moveri. Musca hoc gemino motu agitata percurret lineam spiralem BLMOPQA. Dividatur enim BA, in quotvis partes æquales ex. g. in sex, & circumferentia in totidem BE, EF, &c. Cum musca percurrit in BA, unam sextam partem, ipsa BA mota quoque est in AE, ac proindè musca pervenit ex B, in L. Rursum cum musca percurrit partem secundam rectæ BA, tunc ipsa BA mota est ex AE in AF, ac proindè musca tunc est in M. Eódem modò ostendam muscam pervenire in O, P, Q, A, ac proindè duplici illo motu ipsam percurrere spiralem BLMOPQA.

Porrò motuum compositorum contemplatio digna sanè est, quæ à Geometris excolatur. De solo motu volutionis conscripsi tractatum integrum, quem cum libris Cylindricorum, & Annularium in lucem dedi. De motu projectorum, qui & ipse compositus est, subtilissimi extant libri Galilæi, & Torricelli: & præter hæc, alia supersunt innumera, de quibus integra nova scientia condi possit.

Ex jam dictis liquet 1. eidem syderi plures motus, etiam oppositos, posse competere.

Liquet 2. ut salventur phænomena, necesse non esse, ut sydus de quo agitur, de facto pluribus motibus agitetur, sed ut motu unico percurrat eam lineam, sive semitam, quam percurreret, si reverà diversis illis motibus afficeretur.

Liquet 3. cùm solem, aut aliud astrum conspicimus certam lineam percurrere, nos scire non posse an unico tantùm motu, an pluribus moveatur, quandóquidem sive uno sive pluribus agitetur, nihil aliud visui offeratur, quàm sol dictam semitam, sive spiram percurrens. Ut in exemplo muscæ, si neque recta BA, neque circumferentia BEFGHI, videri posset, sed tantùm musca ipsa semitam spiralem BLMPQA percurrens, sciri profectò non posset utrùm musca feratur per BLMPQA immediatè motu unico, an duobus, recto videlicet, & circulari.

Liquet 4. cur plures cælos fingant Astronomi. Id enim eô consilio præstant, ut astro, vel cælo inferiori, possint competere motus diversi, qui à fictitijs illis cælis superioribus ipsi communicentur.

NUMERUS XII.

Qualis sit motus qui ex solis motu primò, & secundo componitur; quemque sol non ex hypothesi, sed verè, & realiter percurrit.

Motus Solis compositus ex *motu primò* ab Ortu in Occasum, qui ipsi communicatur à primò mobili, & ex *secundò* priori obliquè contrariò, quô sol fertur sub eclipticâ, est spiralis. Semita igitur quam sol gemino illo motu affectus verè percurrit, non est circuli circumferentia, sed spiralis quædam linea per sphæricam solaris cæli superficiem inflexa, & circumducta: estque spiralis ille motus ab Ortu in Occasum, aliquantò tardior motu primi mobilis.

Meridianus esto XBZC; æquatorem referat recta BC. Principium Arietis ponatur sub meridiano, quod proindè incidet in punctum B, quô æquator meridianum secat, atque ibidem etiam solem collocemus. Revolvatur deindè ecliptica, & sol cum eâ, motu primi mobilis. Si interim sol sub eódem eclipticæ punctô remaneret, nempè sub Arietis principio, rediret cum eô post 24 horas ad idem meridiani punctum B, & percurrisset ipsum æquatorem. Jam verò quia sol interim sub eclipticâ non quievit, sed ab initio Arietis processit obliquè versùs ortum ad minuta 48, manifestum est principio Arietis, reversô ad meridiani punctum B, à quô, abiverat, solem nondum ad meridianum appulisse, sed appellere aliquantò seriùs, nempe minutis 4 ferè, & quidem non ad idem punctum meridiani B, sed ad aliud borealius, puta ad E, illud videlicet ad quod appellit punctum eclipticæ, sub quô in fine unius revolutionis primi mobilis, sol existit: toto autem tempore hujus revolutionis sol sub eclipticâ procedens, continuò recessit magis, magisque ab æquatore BC, ità ut post horas 24, declinatio solis ab æquatore fuerit arcus BE. Ex quô liquidò apparet, solem unâ revolutione primi mobilis peractâ, percurrisse circumferentiam quandam non circularem, sed spiralem, positam inter æquatorem BC, & parallelum æquatori circulum ER, cujus principium sit in B, terminus in E. *Fig.* 26.

Pari modô de secundâ revolutione ratiocinaberis. Sole enim posito sub meridiani punctô E, si is sub eclip-

ecliptica non procederet, post 24 horas rediret ad idem meridiani punctum E. Nunc autem, quia perrexit interim sub ecliptica per alia 48 minuta, continuè sese elongans magis magisque ab æquatore B C, & parallelo E R, post 24 horas æquinoctiales, & 4 minuta, appellit ad punctum meridiani borealius N, ac proinde die illo percurrit spiram, inter duos parallelos E R, N S descriptam. Atque ita diebus sequentibus, aliam semper, atque aliam spiram perambulat, usque ad solstitium, quandò spiras rursùm easdem, sed ordine retrogrado, relegit usque ad æquinoctium autumnale. Eadem est spirarum ratio ad alteram æquatoris partem in semicirculo eclipticæ boreali.

Solem spiras jam explicatas percurrere, & quidem singulas horis æquinoctialibus 24, minutis 4; hoc est aliquantò tardiùs revolutione unà primi mobilis, & fixarum; non ex hypothesi, sed absolutè verum est. Utrùm verò sol per spiras illas sic incedat, ut unico solo per illas motu, sed aliquantulùm tardiore motu primi mobilis, feratur; an verò duplici motu circulari agitetur, uno primi mobilis, altero sub ecliptica, ex quorum mixturâ fiat ut realiter viam spiralem perambulet, nobis constare [b] nequaquàm potest: eòdem quippè modò apparebunt omnia, & phœnomenis æqualiter satisfiet, utrumlibet è duobus verum esse contigerit.

[b] *Vide n. præc.*

Neque tamen otiosè, aut frustra astronomi hypothesim duplicis solis motus excogitarunt. Sic enim motum illum spiralem, qui solus aspectui nostro patet, & sub mensuram non cadit, in duos motus circulares quasi in membra ex quibus ille alter componitur, resolverunt. Atque ita singulari artificio effectum est, ut spiralis solis motus, secundùm se immensurabilis, in duos motus circulares resolutus, ad mensuram, & calculum revocari [d] possit, sine quò, neque tempora constitui, neque reperiri novilunia, neque prædici eclipses possunt.

[d] *Hoc flet toto cap. 6.*

Quæ hoc numero, & præcedenti dicta sunt, etiam lunæ, & planetarum motibus proportionaliter conveniunt.

NUMERUS XIII.

Sol quoad sensum quotidie ab Ortu in Occasum percurrit illum parallelum, qui transit per punctum eclipticæ, sub quo sol principio ejus diei exiſtit: Eſtque ea ſolis per parallelum revolutio aliquantò tardior revolutione primi mobilis; ſic ut ſtellæ fixæ, ſolem quotidiè uno ferè gradu, anni verò unius ſpatio, una revolutione integrâ prævertant.

Fig. 26.

Axem mundi referat X Z, æquatorem recta B C, eclipticam recta K V, tropicos rectæ K T, Q V. Inter æquatorem B C, & tropicum Cancri K T, concipiantur tot paralleli ad æquatorem, quot sunt dies ab æquinoctio verno, usque ad solstitium æstivum, transeuntes per eclipticæ puncta, in quibus, sub initium cujusque diei, sol existit. In schemate repræsentantur solum tres paralleli E R, N S, I Y. Spiræ illæ, quas solem percurrere docui numero 12, sunt inter dictos parallelos inflexæ, sic ut initium primæ spiræ sit in ipso æquatore in B, terminus in proximo æquatori parallelo in E; initium secundæ spiræ in E, terminus in N, & sic de aliis spiris deinceps. Unde fit, ut, cum paralleli illi modico intervallo ab invicem distent, spiræ quoad sensum, à parallelorum circumferentiis, vix differant; ac proindè quoad sensum paralleli ipsi pro spiris assumi possint. Pari modo de spiris, & parallelis ad alteram æquatoris partem ratiocinare.

Quòd autem motus quotidianus solis per prædictas spiras, hoc est, jam quoad sensum, per parallelos, sit aliquantò tardior motu primi mobilis, & fixarum; inde fit, quòd motus solis ab Ortu in Occasum per spiras, seu parallelos, compositus sit ex motu primi mobilis ab Ortu in Occasum, & ex motu sub eclipticâ ab Occasu in Ortum; qui priori sic adversatur, ut per eum sol retrocedat versùs Ortum quotidiè minutis 48, hoc est, ferè gradu uno, anni verò unius spatio per integram eclipticæ circumferentiam. Atque ità fit, ut stellæ fixæ solem quotidiè uno ferè gradu, anni autem spatio unâ revolutione integrâ, præcedant, juxtà secundum phœnomenum. n. 9; cui proindè hac hypothesi plenè satisfactum est.

Reliquum est, ut hypothesi satis jam explicatâ, per eam tertij phœnomeni. n. 9. propositi (nam primo, & secundo satisfactum est) causas aperiamus.

NUMERUS XIV.

Ad intelligentiam eorum, quæ de dierum, ac noctium viciſſitudine dicturi ſumus.

Nota. I. Dies naturalis, est una solis revolutio ab ortu in occasum, donec redeat ad eundem meridiani semicirculum (X L Z) undè moveri cœperat. *Fig. 2.*

Nota II. Dies artificialis, est tempus, quò sol supra horizontem manet. Hanc intelligo, cùm diem simpliciter nomino.

Nota III. Quamvis paralleli ad æquatorem circuli, eò minores sint, quò magis ab æquatore distant, tamen una omnium revolutio, eòdem tempore absolvitur, nempè 24 horis.

In fig. 2. æquator est H Q L O; paralleli M P I K, T V, axis mundi X Z; meridianus X L Z H. Quemadmodùm horum circulorum puncta L, I, V, in principio motus simul stant sub eòdem meridiano, ità cælo circa axem X Z circumacto, simul redeunt ad eundem.

Nota IV. Inde sequitur solem, cuicumque parallelo percurrendo semper impendere horas 24: ac proindè moveri tardiùs, cùm minorem parallelum percurrit, quàm cùm majorem.

Nota V. Arcus diurnus, est circuli ad æquatorem paralleli à sole eò die percursi, ea pars, quæ suprà horizontem est; arcus nocturnus, illa quæ infrà horizontem.

In fig. 26. horizon sit O M; axis mundi X Z; æquator B C; paralleli E R, N S &c; tropici K T, Q V. Arcus diurni sunt B A, E P, N H &c; nocturni C A, R P, S H &c. *Fig. 26.*

Nota VI. Talis est proportio diei ad noctem, qualis est proportio arcus diurni ad nocturnum, sive tot de 24 horis cedunt diei, quot quindeni gradus continentur in arcu diurno; & de 24 horis tot cedunt nocti, quot quindeni gradus in arcu nocturno continentur. Nam gradus 15 sui paralleli percurrit sol unâ horâ; & gradum unum, minutis 4 unius horæ.

Nota VII. Quando arcus diurnus est major pars sui circuli (licèt circuli minoris) quàm diurnus arcus alius sit sui, etiam dies alter, altero die major est: cùm arcus diurnus pars sui paralleli minor est, dies minor est;

est: cùm diurni arcus sunt suorum parallelorum partes æquales, sive similes ex. gr. ambo partes dimidiæ, dies æquales sunt. Eadem de noctibus intellige.

Ratio patet ex not. 4. Cùm enim sol, cuilibet parallelo, impendat horas 24, manifestum est etiam illi arcui diurno plures horas de 24 impendere, qui major est pars sui paralleli; illi pauciores, qui minor sui paralleli pars est. Quòd si arcus diurni sint partes eædem, seu similes suorum parallelorum, ex. gr. ambo dimidiæ, patet utrique percurrendo, solem æquè multas horas impendere, ac proindè dies æquales efficere.

A notatione 6, & 7, omnis dierum, ac noctium æqualitas, & inæqualitas dependet.

Nota VIII. Ut causæ apparentiarum clarè percipiantur; exponenda paucis erunt schemata. 7. 8. 9. 27. 29. & inprimis 26, quô intellectô facilè cætera intelligentur. Quia difficile est tot circulos sphæræ maximos, & non maximos secundùm perspectivæ leges delineare, exhibentur ij in planum coluri solstitiorum orthographicè projecti. Colurus solstitiorum in fig. 26. sit X K Z V, transiens per mundi polos X, Z, per initia Cancri K, & Capricorni V. Manifestum est coluri polos esse ipsa puncta æquinoctialia. Itaque si utrimque ab æquinoctialibus punctis, nimirùm ab Arietis initio ex parte hâc, & ab initio Libræ ex parte oppositâ, demittantur perpendiculares, cæ utrimque incident in A centrum coluri, & mundi, ac proinde punctum A refert initia Arietis, & Libræ (hoc est puncta æquinoctialia) præter centrum mundi, ac terræ. Et quia K, & V sunt initia Cancri, & Capricorni, seu puncta solstitialia, patet eclipticam secare coluri planum rectâ V A K, ac proindè rectam V A K referre eclipticæ semicirculum ascendentem, nempè à Capricorni initio V, per Arietem A, usque ad initium Cancri K: eandemque rectam K A V referre alterum eclipticæ semicirculum descendentem, nempè ab initio Cancri K, per Libram A, usque ad initium Capricorni V; ac proinde rectam V A K A V totam eclipticam repræsentare. Pari modô, quia A refert initium Arietis, K Cancri, A rursùm Libræ, liquet rectam A K A referre semicirculum eclipticæ borealem, rectam verò A V A semicirculum eclipticæ australem. Expositâ projectione eclipticæ, clara erit reliquorum circulorum projectio. Nam posito mundi axe X Z, rectâ C A B per A ad axem perpendicularis, referet æquatorem; rectæ autem K T, V Q, cæteræque intermediæ, ad æquatorem B C parallelæ, tropicos, & parallelos ad æquatorem circulos repræsentabunt. Denique si ducatur recta O M, horizontem referens, paralleli in arcus diurnos, & nocturnos secti exhibentur. Similis fermè erit reliquorum schematum expositio.

NUMERUS XV.

Causa dantur eorum, quæ apparent in sphærâ rectâ.

Fig. 7.

Apparentia I. Qui degunt in sphærâ rectâ, habent toto anno dies æquales tum noctibus, tum inter se.

Cùm enim æquator (B C) ad illorum horizontem (O M) *a* perpendicularis sit, etiam paralleli, ad æquatorem circuli, inter utrumque tropicum (K T, Q V) interjecti, è quibus *b* quotidiè aliquem sol percurrit diurno motu, erunt horizonti (O M) perpendiculares, ac proindè ab eo omnes bifariam *c* secantur. Quare diurni arcus totius anni, nocturnis arcubus æquales erunt. Ergò per notationem 6 num. præced. dies noctibus toto anno æquales sunt.

a Per def. 27. n. 1. b Per num. 13. c Theodos. in sphær.

Deinde, cùm paralleli omnes ab horizonte secentur bifariam, erunt arcus diurni totius anni, similes partes suorum parallelorum circulorum, nempè omnes dimidiæ. Ergò per not. 7. etiam dies omnes, toto anno, inter se æquales erunt.

Apparentia II. Sol ijs bis in anno per diem totum verticalis est, ac proindè duas habent æstates, & duas hyemes; æstates quidem 21. Martij, & 22. Septembris; hyemes verò 21. Junij, & 21. Decembris.

Nam 21. Martij, sol ingreditur principium Arietis, & 23. Septemb. principium Libræ, per quæ duo eclipticæ puncta transit æquator, in ijs enim æquator, & ecliptica se *a* invicem intersecant. Ergò sol tam 21. Martij, quàm 23. Septemb. æquatorem motu diurno *d* percurrit. Quare cùm *e* habitantibus in sphærâ rectâ, æquator transeat per verticem (B) sol illis, utroque illo die, verticalis est, ac proindè ijs tunc æstas est media quæ tunc esse censetur, cùm sol tam est altus suprà horizontem, quàm esse potest. Duas igitur habitantes in sphærâ rectâ habent æstates.

o Def. 16. d Per num. 13. e Per def. 27.

Quòd etiam duas hyemes habeant, sic ostendo. In fig. 7. ut prius horizon sit O M; æquator B C; ecliptica K V; tropici K T, Q V; habitator, in A. Quia æquator *a* transit per zenith B, & nadir C habitantium in A, fit ut unus eclipticæ semicirculus A K A, illis Orientem respicientibus ad sinistram fit, alter A V A ad dextram; ac proindè tropicus Cancri K T, transiens per eclipticæ punctum K, ab æquatore B C, versùs boream maximè declinans, ijs etiam ad sinistram fit, tropicus verò Capricorni Q V, transiens per Q punctum eclipticæ; maximè declinans ab æquatore versùs austrum, fit ad dextram. Ergò bis in anno sol ab eorum zenith B recedit quàm longissimè potest, nimirum 21. Iunij, & 21. Decembris, quandò sol in eclipticæ punctis K, V existens, tropicos K T, Q V *b* percurrit. Atqui hyems media est cùm sol longissimè abit à vertice: Duas igitur habent hyemes.

Fig. 7. a Defin. 27. b Per num. 13.

Apparentia III. A 21. Martij, usque ad 23. Septembris, sol ijs septemtrionalis semper toto die est: per sex enim menses illos, sol percurrit eclipticæ semicirculum A K A, qui illis ad boream est. A 23. Septemb. usque ad 21. Martij sol ijs toto die australis est, quia per sex illos menses percurrit eclipticæ semicirculum A V A, qui illis ad austrum porrigitur.

Apparentia IV. Habent quatuor umbrarum differentias.

Sole æquatorem percurrente, nimirum 21. Martij, & 23. Septemb. toto antemeridiano tempore, umbræ objectorum horizonti perpendicularium totæ projiciuntur rectà in Occidentem, post meridiem verò rectà in Orientem. In ipso meridiei punctô umbræ eorumdem sunt nullæ.

Ratio horum est, quòd æquator, quem utroque illo tempore sol percurrit, illis *e* verticalis sit, & ad horizontem rectus. Quò fit ut umbræ objectorum horizonti perpendicularium toto die necessariò totæ incidant in eam lineam, quâ æquator horizontem secat. Quare, cum ea linea verum Ortum, & Occasum *f* designet, necesse est umbræ ante meridiem cadant rectà in occasum, post meridiem rectà in ortum. In ipso autem meridiei punctô umbra nulla

e Defin. 27. f Vide defin. 12.

nulla est, quia sol tunc eorum vertici directè imminet.

Fig. 7. Deindè, cùm sol est in (K) principio Cancri, 21. Iunij, umbræ meridianæ perpendicularium horizonti objectorum isthic rectà in austrum cadunt: Sole verò existente in (Q) initio Capricorni, 23. Decemb. umbræ meridianæ projiciuntur rectà in Aquilonem. Ratio est manifesta.

Fig. 7. APPARENTIA V. Semper vident utrumque polum mundi (X, Z) in ipso utrimque margine horizontis. Vident omnes stellas firmamenti: omnes enim 24. horarum spatio suprà horizontem ipsorum ascendunt. Quæ omnia patent ex ipsà definitione sphæræ parallelæ.

NUMERUS XVI.

Causæ dantur eorum quæ apparent in sphærâ obliquâ.

Fig. 2. APPARENTIA I. Dum sol ingreditur puncta æquinoctialia (Q, O) in quibus nempè ecliptica (QIOG), & æquator (QLOH) se mutuò intersecant (quod accidit circà 21. Martij, & 23. Septemb.) dies, & noctes toto orbe sunt æquales.

Tunc enim sol motu diurno percurrit ipsum æquatorem (QLOH), eò quòd hic motus fiat circa axem (XZ) qui ad æquatorem perpendicularis est. Quoniam verò tam horizon quivis, quàm æquator, circuli maximi sunt, sese illi [o] secant bifariam, ac proinde ubivis terrarum æquatoris media pars suprà horizontem est. Sic in fig. 2. æquatoris pars dimidia ELD existit suprà horizontem BDCE. Ergò tunc per notat. 6. num. 14, ubivis terrarum dies nocti æqualis est.

o *Theodos. in sph.*

Locum præcipuè habet hæc apparentia in sphærâ obliquâ. Quamvis etiam vera sit in sphærâ rectâ; sed isthic toto anno noctes, & dies æquales sunt: imò vera est & in sphærâ parallelâ, quia 21. Martij isthic dies incipit (ut ostendam infra) sex mensium, 23. Septemb. nox inchoatur sex item mensium, ac proindè æqualis diei.

Fig. 26. APPARENTIA II. In quâvis sphærâ obliquâ boreali (OXKM) 21. Iunij, dies longissima est, nox brevissima: 21. Decembris est nox longissima, dies brevissima. In sphærâ obliquâ australi (OVZM) omnia accidunt contraria: 21. Iunij dies brevissima est, nox longissima: 21. Decemb. dies est longissima, nox autem brevissima.

Ratio est, quia 21. Iunij sol est in eclipticæ puncto (K) maximè versùs polum boreum (X) declinante, ac proindè eò die [r] percurrit parallelum KT, per punctum K transeuntem (ipsum nempè tropicum Cancri), tunc autem arcus diurnus (hoc est, is, qui est suprà horizontem (OM) nempè arcus KD) est major pars sui paralleli (KT) quàm ulli alij arcus diurni (IG, NH &c.) sint suorum parallelorum (IY, NS &c.) Ergò dies illa omnium longissima est, per notat. 7. num. 14. Rursùm quia tum arcus nocturnus (TD) est minor pars sui paralleli, quàm alij ulli arcus nocturni (YG, SH &c.) sint parallelorum suorum (YI, SN &c.) erit tum per eandem not. 7. num. 14. nox omnium brevissima.

r *Per num. 13.*

Deindè 21. Decembris, sol est in eclipticæ puncto V, maximè ad polum austrinum (Z) declinante, adeoque percurrit [s] eò die parallelum (QV) per (V) ipsum tropicum Capricorni. Tum verò arcus diurnus, (QL) est minor pars sui paralleli (QV) quàm sint ulli alij diurni arcus parallelorum suorum. Ergò per not. 7. num. 14. dies illa omnium brevissima est. Quia verò tum arcus nocturnus (VL) est sui paralleli pars omnium maxima, etiam nox per not. 7. omnium erit longissima.

s *Per num. 13.*

Ex his facilè apparebit ratio eorum quæ accidunt in obliquâ sperâ australi.

APPARENTIA III. In omni sphærâ obliquâ boreali (OXKM) dies crescunt à 21. Decembris, usque ad 21. Iunij: decrescunt autem eòdem ordine, sed retrogado, à 21. Iunij, usque ad 21. Decembris. In obliquâ sphærâ australi (OVZM) contrarium accidit; nam à 21. Decemb. usque ad 21. Iunij, decrescunt dies; crescunt autem à 21. Iunij, usque ad 21. Decembris. Fig. 26.

Ratio est; quia 21. Decembris sol existit in eclipticæ puncto, (V) maximè ad austrum declinante; ubi est initium Capricorni: atque ab eâ die sol incipit decurrere motu proprio, eclipticæ semicirculum ascendentem (VK) à principio Capricorni (V) per Arietem (A) usque ad Cancri initium (K); ac proindè motu primi mobilis, percurrit [a] diebus singulis, singulos ordine parallelos, qui transeunt per eclipticæ puncta, in quibus die quolibet sol reperitur. Sic ipsà 21. Decemb. percurrit tropicum Capricorni (QV); 22. Decembris, parallelum 2, 7; 23. Decembris, parallelum 3, 8; & sic deinceps. Jam verò arcus 2, 5 major pars est sui paralleli, quàm arcus diurnus QL, sui paralleli QV; & arcus diurnus 3, 6 major pars est paralleli sui 3, 8, quàm arcus 2, 5 paralleli sui; & sic deinceps. Ergò *per notat. 7. num.* 14. dies respondens arcui 2, 5, major est die qui respondet arcui QL; & dies arcui 3, 6 debitus, major est die debito arcui 2, 5: & sic deinceps.

a *Per num. 13.*

Deindè quia à 21. Iunij, usque ad 21. Decembris sol decurrit eclipticæ semicirculum descendentem KV, (utrumque semicirculum eadem linea repræsentat, uti dictum not. 8. num. 14.) à principio Cancri (K) per Libram (A) usque ad Capricorni initium (V), fit ut parallelos eosdem, sed ordine retrogado, sol decurrat; nimirum 21. Iunij tropicum Cancri (KT), 22 parallelum IY; 23 parallelum NS; & sic deinceps. Quare, quò ordine dies anteà creverant, eòdem ordine, sed retrogrado, rursum decrescant necesse est.

Ex dictis facilè deducetur ratio eorum, quæ fiunt in obliquâ sphærâ australi (OVZM). Fig. 26.

APPARENTIA IV. In quâvis sphærâ obliquâ boreali (OXKM), à 21. Martij, usque ad 23. Septembris, dies noctibus sunt longiores: à 23. Septemb. usque ad 21. Martij, dies sunt noctibus breviores. In sphærâ obliquâ australi (OVZM) contrarium evenit; nam à 21. Martij, usque ad 23. Septemb. dies sunt noctibus breviores; & à 23. Septemb. usque ad 21. Martij, dies noctibus longiores sunt.

Ratio est: quia cùm à 21. Martij, usque ad 23. Septembris, Sol decurrat eclipticæ semicirculum borealem, quem refert [b] rectà AKA, liquet ex num. 13. eum motu diurno percurrere parallelos ER, NS &c. positos inter æquatorem (BC), & tropicum Cancri (KT). Atqui horum major semper pars est suprà horizontem (OM), minor infrà: Ergò toto eò tempore *per notat. 6. num. 14.* dies noctibus longiores sunt.

b *Vide expos. fig. 26. nu. 14. not. 8.*

Deindè, à 23. Septembris, usque ad 21. Martij, sol decurrit semicirculum eclipticæ australem [c] (AVA),

c *Vide expos. fig. 26.*

ac proindè motu diurno percurrit parallelos 4 ϖ; 3, 8 &c. positos inter æquatorem (BC) & tropicum Capricorni (QV). Atqui horum singulorum pars existens supra horizontem (OM) minor est parte infrà horizontem depressâ: ergò *per notat. 6. num.* 14. dies toto eo tempore sunt noctibus breviores.

Ex dictis facilè intelligitur ratio eorum quæ fiunt in sphærâ (OVZM) australi.

APPARENTIA V. In quàvis sphærâ obliquâ, duo quilibet dies in eôdem horizonte, æqualiter a solstitio distantes, sunt æquales. Similiter duæ quælibet noctes æquales sunt quæ æqualiter à solstitio distant.

Ratio est; quia parallelus quilibet secat eclipticam in duobus punctis æqualiter à solstitio remotis. Ergo unus idemque parallelus antè, & post solstitium decurritur à sole, dum existit in duobus punctis eclipticæ, æqualiter à solstitiali puncto distantibus; ac proindè unus utriusque diei arcus diurnus est, unus quoque nocturnus arcus utriusque. Ex quò liquet æqualitas tam utriusque diei, quàm noctis utriusque.

In *fig.* 26. duo puncta eclipticæ æqualiter à solstitiali puncto (K) Cancri initio remota, repræsentantur puncto ϖ. Consule expositionem schematis notat. 8. num. 14.

APPARENTIA VI. In quàvis sphærâ obliquâ quælibet dies (exceptis diebus solstitiorum) respectu ejusdem horizontis, æqualis est duabus noctibus sumptis singillatim, quarum una medio anno distat à die datâ. Similiter nox quælibet diebus binis, itidem singillatim sumptis æqualis est.

Fig. 26. Parallelus à sole percursus die datâ esto IY. Ad alteram partem æquatoris (BC) accipiatur parallelus 2, 7, æqualiter distans ab æquatore (BC), & æquinoctio verno, quod repræsentatur puncto *a* A. Parallelus 2, 7 æqualis est parallelo IY, & hujus arcus diurnus IG, arcui nocturno 7, 5 illius æqualis est; ac proindè dies *b* nocti æqualiter ab æquinoctio remotæ, æqualis est. Quia verò *per appar.* 5. nox quælibet æqualis est alteri nocti æqualiter secum distanti à solstitio: fit, ut quælibet dies data, duabus sigillatim noctibus, æqualis existat, quarum una semper invenietur distare medio anno à die cui æquales sunt: uti facilè est colligere ex spatio eclipticæ interjecto inter dictos parallelos. Similis est ratio partis secundæ.

a Vide expos. fig. not. 8. num 14.
b Per not. 6. num. 14.

Fig. 26. APPARENTIA VII. Quanta est dies in quàvis sphærâ boreali datâ (OXKM), tanta est eôdem tempore nox in sphærâ australi præcisè oppositâ (OVZM), & contrà. Ut si in sphærâ boreali habente altitudinem poli borei (OX) grad. 50, dies 21. Iunij sit 16 horarum; in sphærâ australi oppositâ, habente nimirùm altitudinem poli austrini (MZ) etiam 50 graduum; erit 21 Iunij nox similiter horarum 16.

Ratio est; quia idem ille arcus, (ex. gr. KD) qui 21. Iunij ex. gr. est in sphærâ boreali arcus diurnus, eâdem die 21. Iunij, est arcus nocturnus in sphærâ australi (OVZM) præcisè oppositâ. Ergò *per notat. 6. num.* 14. res liquet.

Fig. 26. APPARENTIA VIII. Dies quælibet (exceptis diebus Solstitiorum) in quàvis sphærâ boreali (OXKM) æqualis est duobus sigillatim diebus in sphærâ quàvis australi oppositâ (OVZM) quorum unus medio anno distat à die datâ; & contrà. Idem de nocte cum binis noctibus collatâ, intellige.

Parallelus à sole percursus die datâ esto NS. Post medium annum sol percurrit parallelum 3, 8, tanto intervallo ab æquatore (BC) distantem versùs austrum, quantùm distabat NS versùs boream: qui duo paralleli proindè æquales sunt; adeoque etiam arcus diurnus NH, in sphærâ boreali, æqualis est arcui diurno 8, 6 in sphærâ oppositâ: similiter & nocturnus arcus SH in hâc, nocturno arcui 3, 6 in illâ par erit. Ergò *per notat. 6. num.* 14. dies diei, & nox nocti æquabitur. Quia verò *per appar.* 5. arcui diurno 8, 6, respondent duo dies æquales, à Solstitio æqualiter dissiti, & arcui nocturno 3, 6 similiter duæ æquales noctes, fit ut dies data in sphærâ boreali æquetur duabus singillatim diebus in sphærâ oppositâ, & nox in sphærâ bor. duabus singillatim in noctibus in oppositâ.

Hæc apparentia non est eadem cum appar. 6.

APPARENTIA IX. In æquinoctijs Martij 21, & 23. Septemb. sol toto orbe oritur, & occidit in ipso Oriente, & Occidente verò: quia cùm tunc æquatorem motu diurno percurrat, necessariò oritur, & occidit in ijs punctis, quibus æquator horizontem secat, quæ puncta sunt *a* verus Oriens, & Occidens. *a Defin.* 12.

Altitudo autem solis meridiana suprà horizontem tunc est eadem, quæ Æquatoris.

APPARENTIA X. In quàvis sphærâ boreali obliquâ, ab æquinoctio verno, usque ad Solstitium 21. Iunij, sol oritur, & occidit in punctis horizontis quotidiè magis, magisque ab Æquatore versùs boream recedentibus. Altitudines autem meridianæ solis crescunt.

A Solstitio 21. Iunij usque ad æquinoctium autumnale 23. Septemb. ortus occasusque Solis ordine eôdem, sed retrogrado, remeant quotidiè magis, magisque à boreâ versùs Æquatorem. Altitudines verò solis meridianæ rursùm minuuntur.

Ab æquinoctio autumnali, 23. Septemb. usque ad Solstitium 21. Decemb. ortus occasusque Solis ab Æquatore versùs austrum quotidiè magis, magisque abeunt; & altitudines solis meridianæ pergunt diminui.

Denique à solstitio 21. Decemb. usque, ad æquinoctium 21. Martij, ortus occasusque Solis ab austro versùs Æquatorem remeant; & solis meridianæ altitudines crescunt.

Ratio horum omnium patet ex obliquitate eclipticæ, cujus una medietas (continens Arietem, Taurum, Geminos, Cancrum, Leonem, Virginem) vergit ad boream, quam sol percurrit à 21. Martij, usque ad 23. Septembris, sicut 21. Iunij, sit in Cancri initio, nempè in puncto maximè ad boream declinante: altera medietas (gerens Libram, Scorpium, Sagittarium, Capricornum, Aquarium, Pisces) ad austrum vergit, quam peragrat sol à 23. Septemb. usque ad 21. Martij, sicut 21. Decembris fit in principio Capricorni, puncto maximè ad austrum declinante.

Ex his non difficulter colliges quomodo hæc omnia sese habeant in sphæra obliqua australi.

APPARENTIA XI. In sphærâ obliquâ, cujus Zenith (ϖ) extrà tropicos est, sol nunquàm verticalis est: & borealibus quidem in meridie semper ad austrum est, ac proindè eorum meridianæ umbræ rectâ semper in Boream cadunt; nunquam in Austrum: australibus verò, sol semper in meridie ad boream est, adeoque eorum umbræ semper rectâ in austrum projiciuntur; numquam in septemtrionem. Ratio patet. *Fig.* 26.

Unam habent æstatem, quia sol ijs tantùm semel in anno fit vertici proximus; & unam hyemem, quia tantùm semel in anno sol à vertice fit remotissimus.

Ap-

Fig. 27. APPARENTIA XII. Degentibus in sphærâ obliquâ, cujus Zenith (a) est inter tropicos (KT, QV), quædam accidunt communia sphæræ rectæ.

PRIMÒ. Bis in anno sol in meridie ipsis verticalis est, nimirum quando percurrit parallelum (a S), per Zenith (a) transeuntem. Quilibet autem parallelus à sole bis percurritur, semel ante solstitium, & semel post.

SECUNDÒ. Duæ sunt illis æstates, & duæ hyemes, quarum una longior, & frigidior alterâ. Æstates duæ sunt, quia sol bis per annum ipsis in meridie verticalis est: tunc autem, & toties æstas est, quando, & quoties sol fit vertici proximus. Duæ etiam sunt hyemes, quia sol bis in anno longissimè recedit à Zenith, seu vertice (a), semel quidem cùm existens in (K) principio Cancri, percurrit motu diurno tropicum (KT); iterum verò cùm èxistens in (V) initio Capricorni, percurrit alterum tropicum QV. Tunc autem, & toties hyems est, quando, & quoties sol à vertice fit remotissimus. Quia autem recessus solis à vertice alter altero longior est, etiam hyems una longior, & frigidior alterâ est.

TERTIÒ. Unâ parte anni sol ijs in meridie borealis est, alterâ australis. Eclipticæ punctum esto N, per quod ductus parallelus SN a, transeat per Zenith a; meridianus verò sit O a M a. Quoniam sol positus in eclipticæ puncto N, adeoque percurrens eò die parallelum SN a, in meridie transit per Zenith a; manifestum est toto eo tempore, quô Sol peragrat partem eclipticæ NKN, ac proindè motu diurno percurrit parallelos inter parallelum verticalem a S, & tropicum cancri KT constitutos, in meridie solem habitantibus in A, esse ultra Zenith a versùs septemtrionalem polum X: Cùm verò peragrat eclipticæ partem NVN, meridianum solem existere ultrà Zenith X versùs polum australem Z.

QUARTÒ. Unâ parte anni umbræ meridianæ ijs rectâ ad austrum cadunt; alterâ in septemtrionem præcisè. Patet ex præcedenti.

APPARENTIA XIII. Quorum Zenith est in tropico Cancri, semel in anno solem habent verticalem, nimirùm quandò tropicum percurrit, quod fit 21 Iunij, vel 21 Decemb. & in meridie ejus diei, objecta horizonti recta nullam umbram projiciunt. Unam tantùm æstatem habent, & hyemem unam; neque sol meridianus ijs unquàm borealis est, ac proindè umbræ meridianæ nunquam australes. Quorum omnium ratio ex præcedentibus satis colligitur.

Hinc etiam facile intelliges, quæ accidunt ijs, quorum Zenith est in tropico Capricorni.

APPARENTIA XIV. In omni sphærâ obliquâ polus unus, & quædam stellæ nunquàm occidunt: polus alter, & quædam stellæ nunquam videntur: reliquæ omnes intrà 24 horas oriuntur, & occidunt.

Fig. 30. Horizon sit OM; æquator BC ad horizontem obliquus, poli X, Z: circuli ad æquatorem paralleli sint PO, ML: illius punctum imum tangat horizontem in O, summum verò hujus horizontem tangat in M. Manifestum est cælo circa axem XZ, qui ad hos circulos æquatori parallelos perpendicularis est, circumacto, parallelum PO semper extare totum suprà horizontem OM, parallelum verò ML, infrà horizontem semper totum deprimi. Ergò pars cæli OXP cum omnibus in eâ stellis, semper conspicua est; altera MZL, cum omnibus, quas habet, stellis perpetuò occulitur. Cæteras verò stellas omnes oriri, & occidere tum ex his, tum ex sæpè jam dictis liquet.

APPARENTIA XV. In omni sphærâ obliquâ quò major est altitudo poli suprà horizontem, eò Borealibus major erit dies longissima, & alia quælibet à 21 Martij usque ad 23 Septemb. dies autem brevissima, & alia quælibet à 23 Septemb. usque ad 21 Martij, eò erit minor: Australibus contrarium evenit.

NUMERUS XVII.

Dantur causæ eorum, quæ apparent in sphærâ obliquâ, cujus dies longissima 24 horas æquat, vel excedit; & denique eorum, quæ in ipsâ sphærâ parallelâ contingunt.

HOrizon sit OM; altitudo poli XO; Æquator BC; paralleli ER, NS, &c. Si concipiamus alium horizontem descendentem infrà O, extantem verò suprà M, major suprà hunc erit poli X altitudo, & parallelorum borealium ER, NS &c, quos sol percurrit à 21 Martij usque ad 23 Septembris, suprà hunc majores extabunt partes, quàm suprà priorem OM. Ergò *per notationem 6. num.* 14. quò major altitudo poli, eò &c. Deinde quia horizontis illius pars altera ascendit supra horizontem OAM, patet suprà illum parallelorum australium 4 π, 3 8, &c, quos sol percurrit à 23 Septemb. usque ad 21 Martij, minores extare arcus, quàm suprà horizontem AM. Ergò rursùm *per notat. 6. num.* 14, quò major est altitudo poli, eò dies brevissima &c. *Fig. 26.*

APPARENTIA I. Ubi tanta est altitudo a poli ut tropicus alteruter (KT) horizontem (OM) tangat, una est continua 24 horarum dies, & post annum dimidium una nox continua horarum 24. Id verò accidit in eò horizonte, suprà quem polus attollitur gradibus 66. 30. *Fig. 28. a Ea est gr. 66.*

Ratio est: quia cùm tropicus (KT), qui est solarium parallelorum ultimus, sit totus suprà horizontem (OM), eumque sol 24 horis absolvat, liquet solem 24 horis supra horizontem existere. Pari modo quia tropicus alter (QV) totus infra (OM) horizontem est, eumque percurrit sol horis 24, patet solem 24 horis infrà horizontem occuli. Quòd autem id eveniat ad poli altitudinem graduum 66. 30, perspicuum est; nam arcus (CX) ab æquatore (CB) ad polum (X) est grad. 90, & arcus (CT, sive CO) ab æquatore ad tropicum (KT), sive horizontem (MO) (tangunt enim se in puncto O, T) est grad. 23. 30. Ergò arcus (OX) qui est altitudo poli, erit graduum 66. 30.

APPARENTIA II. Ubi tanta est poli altitudo (excedens videlicèt gradus 66. 30) ut plures paralleli solares toti existant suprà horizontem (OM), dies longissima toties continebit 24 horas, quot paralleli suprà horizontem toti extant: & post annum dimidium, longissima nox continebit toties 24 horas, quot paralleli infrà horizontem toti delitescunt. *Fig. 29.*

Ratio manifesta est ex jam dictis, & notatione 6. num. 14.

APPARENTIA III. Denique in ipsâ sphærâ parallelâ, in quâ altitudo poli (X) suprà horizontem (OM) est graduum 90, una est dies continua 6 mensium & mensium totidem continua nox; proindè, annus ex unâ die, & nocte unâ componitur. Incipit porrò dies circà 21 Martij, nox circà 23 Septembris. *Fig. 9.*

Ratio horum omnium hæc est. Quià in sphærâ

a Defin. 27. num. 1. parallelâ polus a mundi (X) est in ipso Zenith, & æquator (BC) coincidit cum horizonte (OM), fit ut puncta æquinoctialia, quibus æquator, & ecliptica se intersecant, sint utrimque in ipso margine horizontis. Quia autem axis mundi (XZ) ad horizontem hic perpendicularis est, fit, ut dum circà axem (XZ) cælum circumagitur, æquinoctialia puncta, hoc est initia Arietis, ac Libræ per horizontis circumferentiam, moveantur. Ergò medietatum eclipticæ, inter puncta æquinoctialia existentium, altera cum omnibus parallelis suis semper totâ suprà horizontem extat, altera cum suis parallelis, semper tota infrà horizontem deprimitur. Ergò sol toto eò tempore, quò percurrit medietatem unam, hoc est anno dimidio, semper suprà horizontem est, ac proindè diem continuam 6 mensium efficit: toto verò eò tempore, quò percurrit medietatem alteram, perpetuò infrà horizontem occulitur, adeoque noctem efficit continuam mensium item sex.

Fig. 9. Apparentia IV. In sphærâ parallelâ umbrarum extremitates 24 horarum spatio, describunt integram circuli circumferentiam, majorem minoremve, pro majore minoréve solis altitudine.

Ratio est, quia 24 horis sol quotidiè quoad sensum percurrit unum parallelum integrum. Qui cum sit æquatori (BC), adeoque & horizonti (OM), qui cum æquatore coincidit, æquidistans, umbrarum circuitus necessariò quoad sensum circulares sunt.

Apparentia V. Degentibus in sphærâ parallelâ nullæ stellæ oriuntur, nullæ occidunt; sed unum, semper idemque hemisphærium (OXM) intuentur, altero (OZM) infrà horizontem perpetuò delitescente. Patet ex dictis apparentiâ 11.

Fig. 9. Apparentia VI. In sphærâ parallelâ nox quidem omnium longissima est; sed non omnium maximè obscura, aut densa: cum Solis maximus infra horizontem descensus tantùm sit grad. 23. 30, nimirùm usque ad tropicum semper latentem (QV). Si tamen nox dicenda est, & non potiùs crepusculum ferè perpetuum, quod (ut dicam infra n. 21.) plerique vel inchoari vel finiri volunt, sole 18, aut 20 gradibus infrà horizontem depresso.

Apparentia VII. Postremò non solùm in sphærâ parallelâ, sed in aliâ etiam quâcumque, totius anni dies omnes simul sumpti, omnibus noctibus simul sumptis æquales sunt. Quare ubivis gentium, dierum unius anni summa æqualis est.

Id quidem in sphærâ parallelâ, & sphærâ rectâ manifestum erit ex solâ inspectione schematum 9, & 7. In obliquâ verò patet ex apparentiâ VI. num. 16.

Ex his, cæterisq́, num. 15, 16, 17 explicatis infinita creatoris Dei sapientia elucet, qui unâ solaris curriculi obliquitate, tam admirabilem apparentiarum varietatem toto orbe terrarum effecit. Quam magnificata sunt opera tua Domine! omnia in sapientiâ fecisti. *Verè* cæli enarrant gloriam Dei, & opera manuum ejus annuntiat firmamentum. *Laudent te omnia opera tua Domine; sed inprimis te homines laudent, atque ament, quibus omnem hunc cæli, ac terræ ornatum, & copiam condidisti: tuæ sese illi obsequijs totos addicant, atque ex admirabilium tuorum operum contemplatione, ad cognitionem tui, amoremq́ conscendant.*

Scholium.

Quæ hactenus de dierum, ac noctium artificialium, quantitate dicta sunt, intelligi debent seclusâ Solis parallaxi, & præsertim refractione; quæ quidem aliquam, sed tamen in hoc negotio non æstimandam diversitatem efficit. Inæqualitas verò ipsorum dierum naturalium, quà in artificiales, quasi partes suas influit, de quâ a infrà, etiam ipsa, tanquàm in hoc proposito insensibilis contemnitur. a Num. 50.

Quæ autem de Solis motu primo & secundo, *de varietate dierum, ac noctium, cæterisq́ his affinibus, toto hoc capite dicta sunt, intelligè etiam suo modò debent de planetis reliquis, ac inprimis lunâ: omnibus enim præter motum* primum, *seu* diurnum *cunctis sideribus communem, convenit* motus secundus *sub Zodiaco. De quorum singulis tractabitur libris sequentibus.*

CAPUT IV.

De parallaxi: de refractione Astronomica: de crepusculis.

Parallaxibus, & refractioni tractatus integri debentur. Hic ea solùm delibabimus, quæ sequentibus intelligendis sunt necessaria; cætera, ubi opus fuerit, suis locis explicaturi.

NUMERUS XVIII.

Exponuntur definitiones parallaxeos altitudinis.

Inter multas parallaxium species præcipua est *parallaxis altitudinis*, seu *verticalis*, ex quâ dimanant cæteræ. Hanc unam, quantum præsenti instituto convenit, hic explicabimus.

Centrum cæli, & terræ sit A: oculus in superficie terræ in B: Zenith, sive vertex S: astrum quodcumque in C: verticalis per astrum transiens ZCO: alij insuper verticales SLR in supremo cælo, & XBX in terrâ, existentes in plano verticalis ZCO: horizon rationalis AR; horizon sensibilis BN. His ita constitutis. Fig. 87. Lib. 1. Geomet. Pract.

1. *Locus verus* astri C absolutè, est punctum illud, quò reverà astri centrum existit.

2. *Locus verus* astri C relativè ad supremum cælum, qui & intelligi plerumque debet, cum *verus* astri *locus* nominatur, est punctum L supremi cæli, in quò terminatur recta linea ACL, ex mundi centro A per astri centrum C, emissa.

3. *Locus visus*, seu *apparens* astri, est punctum F supremi cæli, in quò recta ex oculi centro B, per centrum astri C emissa terminatur.

4. *Linea veri loci*, est recta ex mundi centro per astri centrum emissa.

5. *Linea loci visi*, est recta ex centro oculi per astri centrum emissa.

6. *Parallaxis*, sive *diversitas aspectus*, est arcus (LF) inter verum (L), & visum (F) astri locum interjectus.

7. *Angulus parallacticus*, qui plerumque etiam simpliciter *parallaxis* vocatur, est angulus (BCA), quem in centro astri efficiunt lineæ loci veri, & visi; rectæ nimirum AC, & BC ex centris mundi (A), & oculi (B), ad astri centrum emissæ.

8. *Distantia vera astri* (C), à vertice (S) est arcus

s à vertice usque ad lineam veri loci (AL), quem metitur angulus SAL.

9. *Distantia visa*, seu *apparens astri à vertice*, est arcus à vertice usque ad (BF) lineam loci visi, quem metitur angulus SBF.

10. *Altitudo astri* (C) *visa*, est arcus inter horizontem visibilem (BN), & astri locum visum (F) interjectus, quem metitur angulus NBF.

11. *Altitudo astri* (C) *vera*, est arcus (RL) inter rationalem horizontem (AR), & verum astri locum (L), interceptus. Hanc metitur angulus RAL.

12. *Parallaxis horizontalis*, est parallaxis astri (O) in horizonte visibili (BON) apparentis: sive, *parallaxis horiz.* est angulus verticem habens in (O) centro astri, qui continetur radio terram tangente (BO), & altero (AO), ex terræ centro exeunte.

NUMERUS XIX.

Affectiones primæ parallaxeos altitudinis.

Fig. 87. Lib. 1. Geomet. Pract.

IIsdem positis quæ numero præcedente, fit

THEOREMA I. Angulus parallacticus (BCA), est differentia angulorum (SAL, SBF) distantias à vertice veram (SL), & visam (SF) metientium.

Demonstratio. Angulus SBF, sive SBC externus, *a* æqualis est duobus internis oppositis SAL seu BAC, & BCA. Ergò BCA est excessus, quò SBC metiens distantiam visam SF, excedit angulum SAC, qui metitur distantiam veram SL.

a Per 32.

THEOREMA II. Angulus parallacticus (BCA) etiam differentia est angulorum (RAL, NBF) altitudinem veram (LR), & visam (FN) metientium.

Demonstratio. Ducatur AT parallela ad BCF; erit angulus BCA *b* æqualis sibi alterno CAT, seu LAT. Sed LAT est differentia angulorum RAL, RAT. Ergò BCA etiam est differentia angulorum RAL, RAT. Atqui angulus RAT æqualis *c* est angulo NBF. Ergò etiam BCA parallacticus angulus, est differentia angulorum RAL, NBF altitudinem veram, & visam metientium.

b Per 37. 1.

c Facilè id ostendes ex 27. 1. productâ rectâ CB, TA donec concurrant cum RA etiam productâ.

THEOREMA III. Sydus in vertice (S) constitutum, nullam patitur parallaxim. Patet, quia locus verus, & locus visus in vertice coincidunt.

THEOREMA IV. Astrum in horizonte maximam subit parallaxim.

Demonstratio. Horizontem sensibilem referat recta DBO ad diametrum ZAP perpendicularis, astrum sit in O; parallaxis horizontalis BOA; alia quæcumque BCA. Ostendam BOA esse majorem. Producantur CB, CA, OA usque ad peripheriam oppositam in F, G, N; ducanturque rectæ FG, DN. Quoniam DBO longiùs à centro A abest, quàm FBC (cum DBO tangat circulum centro A descriptum, GB secet), erit DBO minor quàm FBC. Ergò segmentum DPO majus est segmento FPC. Angulus igitur *o* DNO existens in majori segmento DPO, minor est angulo FGC posito in minori segmento FPC, Atqui anguli NDO, GFC existentes ambo in semicirculo *d* sunt recti, ac proinde æquales. Ergò tertius angulus, O, major *e* est tertiò C: quod erat demonstrandum.

o Colligitur ex 21. 3.

d Per 31. 3.

e Patet ex 32. 1.

THEOREMA V. Inter parallaxes cæteras in eòdem verticali factas, ea minor est, quæ vertici propinquior est.

Demonstratio similis præcedenti.

THEOREMA VI. Duorum siderum (M, D) in eàdem altitudine verà existentium, ejus major est parallaxis, quod minùs distat à centro terræ.

Demonstratio, patet ex 32. 1. syderis enim M, vicinioris centro terræ parallaxis BMA, est angulus externus respectu anguli interni oppositi BDM, seu BDA, qui est parallaxis astri D, remotioris à centro terræ.

THEOREMA VII. Duorum syderum (O, Q) in eàdem altitudine visâ existentium, illius quoque parallaxis major, quod terræ vicinius.

Demonstratio eadem.

THEOREMA VIII. Parallaxis, distantiam astri ab horizonte, minuit; distantiam à vertice auget.

Astrum quippè verum locum habens in L, apparet in F, propiùs horizonti BN, & longiùs à vertice S.

NUMERUS XX.

Affectiones Primæ, refractionis Astronomicæ.

DE refractione universim tractandum est libro singulari. Quod attinet ad refractionem Astronomicam, hic pauca atquè obiter, solùm ut intelligi possint sequentia, monere visum est. Refractionis tot sunt species, quot parallaxium: sed quæ omnes dimanent ex unà, videlicet ex refractione altitudinis, hoc est, quæ fit in circulo altitudinis, seu verticali. Hanc unam hic attingam breviter, eamque semper intelligi volo, cùm refractionem nomino. Suppositis igitur quæ refractionis naturam spectant, effectus ejus in Astronomià, seu proprietates cæteris principaliores, ac scitu magis necessariæ sunt hæ.

PROPRIETAS I. Refractio locum sideris apparentem suprà verum attollit, adeoque auget distantiam sideris ab horizonte, distantiam à vertice minuit.

Fig. 32.

Mundi, ac Terræ centrum esto A: horizon rationalis AK, visibilis OB: astrum quodvis infrà horizontem visibilem OB, existat in E, per cujus centrum transeat Verticalis NEK, cui in Terrà respondeat Verticalis OD; in sphærà vaporum Verticalis LCF, quem secet diameter horizontis visibilis OB in C. Quia radius EC à sydere E emissus in C, ex æthere raro incidit in sphæram vaporum, seu Athmosphæram multò densiorem, non pergit rectà in I, sed frangitur versùs perpendicularem AC, sic ut pergat vià CO. Atque ita fieri potest, ut sidus adhuc infrà horizontem OB latens, conspiciatur. Jam, ea est natura visus, ut objectum appareat in eo radio rectà producto, qui oculum immediatè afficit. Quia ergò radius CO intrà sphæram vaporum refractus, ad oculum O immediatè pertingit, sidus E in radio refracto OC rectà producto apparebit. Atqui radius CO rectà productus, necessariò cadit suprà E, puta in B. Refractio igitur visum astri locum, suprà verùm E attollit, ac proindè distantiam astri ab horizonte auget, distantiam à vertice minuit.

Refractionis; & parallaxeos planè oppositi sunt effectus. Quare, ut altitudo vera astri suprà horizontem innotescat, altitudini visæ, seu apparenti, addenda est parallaxis, refractio auferenda. Ut verò nota fiat distantia vera à vertice distantiæ apparenti demenda est parallaxis, & addenda refractio.

PROPRIETAS II. Sidus in Zenith positum, nulli refractioni obnoxium est.

PROPRIETAS III. Sideris (E) in horizonte viso

viso (OB) apparentis, refractio est omnium maxima.

Tunc enim radius EC, qui ad oculum O refringitur, viâ CO in sphæram vaporum obliquissimè incidit. Refringitur porrò radius quivis tantò ampliùs, quantò incidit obliquius.

PROPRIETAS IV. Sideris 45 gradibus suprà horizontem elevati, nulla est sensibilis refractio.

Ostendam *Lib. 3. Astron. num. 18. Coroll. 4.*

PROPRIETAS V. Ab altitudinis gradu 45, quò sidus in eâdem à terrâ distantiâ horizonti propiùs est, eò magis refringitur. Propè, autem, horizontem magis præceps est in refractionis augmentum.

Patebit ex *lib. 3. Astron.*

Fig. 33. PROPRIETAS VI. Duorum siderum eandem veram altitudinem habentium, illud magis refringitur, quod Terræ vicinius est.

Sint enim duo sidera N, E, æquè alta, sed N terræ vicinius, E remotius; & ab utroque, in idem Athmosphæræ punctum O, incidant radij NO, EO. Patet radium NO obliquiùs in Athmosphæram incidere, quàm radium EO. Ergò magis refringitur NO, quàm EO.

NUMERUS XXI.

De Crepusculis quadam breviter indicata.

Crepusculum, est tempus inter apparentem Ortum vel Occasum Solis, & principium, aut finem lucis solaris, ab Athmosphærâ versùs Terram reflexæ.

Fig. 33. Terra sit ACQ: annulus Terram ambiens Athmosphæram repræsentet. Horizon rationalis sit AK, visibilis CE, Solem manè adhuc infrà horizontem visibilem CE depressum referat GF: radius primus incidens in Athmosphæram, & Solem tangens in F, Terram verò in Q, esto FIQ, qui intrà Athmosphæram pergens ulteriùs usque ad superficiem Athmosphæræ in O, ibidem reflectatur ad oculum in C. Tempus ab hujus primi radij appulsu ad oculum, usque ad Solis Ortum apparentem, est *Crepusculum Matutinum*. Simili modo exponitur *Vespertinum*. Hæc rudi Minervâ hic, alibi fortè tractabo accuratiùs.

Duratio crepusculi pendet ex altitudine Athmosphæræ, altitudine Solis infrà horizontem, & rectitudine ac obliquitate ascensus, vel descensus Solis.

Altitudo Solis infrà horizontem ad quam crepusculum incipit, ab Astronomis varia astruitur; à plerisque graduum 18. Ricciolus, ex observatis à se Bononiæ, reperit in Æquinoctijs manè gradus 16, vespere gradus 20: in Solstitio æstivo manè grad. 21. 25': in Solstitio hyberno manè grad. 17. 25'. Depressio porrò illa Solis infra horizontem visibilem (arcus nempe VE) vocatur *Arcus crepusculi*. Punctum V, centro Solis respondet.

Itaque cæteris paribus (nimirum densitate, & altitudine Athmosphæræ) longissimum crepusculum in quàvis Sphærâ, est in Solstitio æstivo aut hyberno; tunc enim Sol obliquissimè ascendit, & descendit, ac proinde ut Sol habeat profunditatem infra horizontem CE, ad durationem crepusculi requisitam, plurimùm requirit temporis. Imò ubi altitudo poli est graduum 48. 36, vel major, in Solstitio æstivo aut hyberno totâ nocte crepusculum est; quia Sol numquam isthic plus quàm 18 gradibus infra horizontem descendit.

In quàvis Sphærâ crepusculum ferè eò longiùs est, quò Sol magis ab Æquatore declinat. Tantò enim ascendit, vel descendit obliquiùs: non tamen crepusculum longissimum est in Solstitio brumali.

Ejusdem dici crepusculum eò longius est, quò sphæra est obliquior, hoc est, quò major est altitudo poli suprà horizontem. Imò (ut jam dixi) in Solstitio æstivo aut hyberno tota nox crepusculum est, ubi altitudo poli non est minor gradibus 48. 36. Ratio utriusque patet ex dictis.

Hæc de crepusculis breviter indicata, ad alia majoris momenti properantibus sufficiant.

CAPUT V.

De inæqualitate motus Secundi, sive Annui; & quâ hypothesi salvetur.

Hactenus de motu Solis *Primo* ac *Secundo* mixtim egimus, prout videlicet ambo simul juncti apparentias communes circa vicissitudines dierum, ac noctium, & tempestatum anni efficiunt. Deinceps de solo *Secundo*, sive *Annuo* tractaturi sumus. Eritque hæc hujus libri pars longè præcipua: quæ tota erit in eo posita, ut hic motus ad mensuram revocetur, atque locus Solis apparens, ad datum quodlibet tempus, reperiatur.

NUMERUS XXII.

Quæ circa inæqualitatem motus Annui Solis sint ab Astronomis observata.

OBSERVATIO I. Solis motum sub Eclipticâ Primi Mobilis Astronomi curiosiùs contemplati, observarunt inæqualem apparere; hoc est, inæqualibus temporibus, æquales arcus Eclipticæ, videri pertransire. Quod ita sunt assecuti. Primùm summâ industriâ explorarunt tempus utriusque Æquinoctij; cujus inventionis modus tradetur *num. 33.* Tum dies numerarunt, ab Æquinoctio verno, usque ad Æquinoctium autumnale, quibus Sol semicirculum Eclipticæ borealem peragrat: item dies ab autumnali, usque ad vernum, quos Sol Eclipticæ semicirculo Australi impendit. Repertumque est Solem semicirculo Boreali ab Ariete, usque ad Libram impendere dies 186, & horas 11, ut vult Ptolomæus, vel 18 ut Tycho, vel 14 ut Ricciolus, & adhuc aliquot minuta: Australi à Librâ ad Arietem dies 178, & horas 18 ut Ptolomæus, vel 11 ut Tycho, vel 15 ut Ricciolus, & minuta insuper aliquot. Quare Sol sub Eclipticæ semicirculo boreali plus octiduo hæret diutius, quàm sub Australi.

OBSERVATIO II. Non solùm semisses Eclipticæ, sed etiam quadrantes Sol apparet inæqualibus temporibus pertransire; id quod hoc modo compertum est. Præter tempus utriusque Æquinoctij, pari industria Solstitij utriusque tempus explorarunt, numeratisque diebus, inter singulos ingressus Solis in quatuor cardinalia puncta interjectis, prædicta inæqualitas innotuit. Deinde ipsa illa inæqualitas inconstans, atque instabilis reperta est. Nam ætate Ptolomæi Sol videbatur hærere diutius sub Eclipticæ primo quadrante (EK) ab initio Arietis ad initium Cancri, quàm sub secundo (KF) ab initio Cancri ad initium Libræ; in primo nempè diebus 94, horis 12; in secundo diebus 92, horis 12. Ætate verò Fig. 35. no-

nostrâ diutiùs hæret sub secundo (K F) quàm sub primo (E K): sub hoc enim, ex observatione Riccioli, moratur diebus 92, horis 23, minutis 52; sub secundo, diebus 93, horis 14, min. 56.

Observatio III. Imò partes etiam minores motus annui, inter se comparatæ, inæquales reperiuntur: ut si comparetur spatium quod uno die naturali, Sol conficit in Zodiaco, cum spatio quod absolvit die altero; hoc, illi inæquale, deprehendetur.

Observatio IV. Sol modò apparet major, modò minor. Nam circà 27 Iunij ejus diameter apparens est 31, 50': circà 27 Decemb. 33', 8"; circà Æquinoctia 30, 30', Ita Ricciolus, à quo cæteri non multùm dissident.

Observatio V. Quamvis ad stellas fixas pertineat, etiam nihilominus, ad intelligendum Solis cursum, inservit. Duorum fermè millium annorum experientiâ compertum est, stellas fixas, à sectione vernâ, seu principio Arietis Primi Mobilis, versùs Ortum, sive in consequentia, sensim magis, magisque elongari. Hipparchus annis ante Christum 128, observavit Regulum in Cancri grad. 29 50. Tycho deindè, anno post Christum 1585, eumdem nactus est in Leonis gradu 24, 5'. Igitur annis 1713 (tot enim inter utramque observationem intercedunt) processit Regulus in consequentia, gradus 24, 1' 5. Plures observationes, atque ipsum observandi artificium tradetur *libro* 5. *Astron.* Perindè est autem, ut salvetur phœnomenum, sive Fixas moveris in Ortum, sive Eclipticam Primi Mobilis, eadem tarditate in Occasum. Nos cum Astronomis ferè omnibus hunc motum Fixis tribuemus.

Quantitas ânnua hujus motus à Tychone statuitur 51 secundorum. Atque ita Fixæ annis 70 circiter unum gradum conficerent, & consequenter periodus tota absolveretur annis 25 806. A Tychone parum differt Ricciolus, cui motus Fixarum annuus est 50 secundorum; unde sequitur annis 72 unum gradum absolvi.

Observationes de mutatione maxima declinationis Ecliptica, de inæqualitate motus Fixarum, sive de præcessione Æquinoctiorum, atque inde exortâ anni solaris inæquali magnitudine; de mutatione Eccentricitatis Solaris, hic non attingo. Sunt enim fidei incerta & probabilius falsa. Quare tres illas inæqualitates, seu anomalias à Solis motu rejicimus infrà.

NUMERUS XXIII.

Statuitur hypothesis, quâ Solis annui motus inæqualitas explicatur.

Plurimæ sunt hypotheses ad salvandam motus apparentem irregularitatem non modò Solis, sed etiam Lunæ, ac reliquorum planetarum ab Astronomis tum veteribus tum recentioribus, excogitatæ. Quod ad Solem attinet, duæ cæteris faciliores, magisque usitatæ sunt. Prima, solo Eccentrico utitur, quam tamquam omnium simplicissimam, atque facillimam retinebo: altera constat Concentrico, & epicyclo. Ad hypotheseos primæ explicationem.

Fig. 34. 35. §. 1. Terræ, & Eclipticæ supremæ F K E M centrum esto A, per quod ductæ sunt diametri K M, F E, quæ supremam Eclipticam partiantur in 4 quadrantes E K, K F, F M, M E. Sumpto deinde puncto B, ex eo centro describatur circulus H N G P in plano Eclipticæ, qui quòd centrum habeat diversum ab A centro Terræ, & Eclipticæ, *Eccentricus* nominatur. Quanta porrò sit distantia centrorum A. B. infrà *a* investigabitur. Ducatur posthæc per utrumque centrum A, B recta C O, secans Eccentricum in C, & O: eritque punctum C per 7. 3. elem. remotissimum ab A, quod proindè *Apogeum* vocatur; O vicinissimum quod dicitur *Perigeum*. Si hunc Eccentricum G N H P anni spatio sub Eclipticâ E K F M, secundùm ordinem Signorum ex G per N, æquali motu Sol percurrat; atque insuper Apogeum C motu quodam tardissimo (qui determinabitur *b* infrà) circà mundi centrum A etiam secundùm Signorum ordinem unà cum Eccentrico, & Sole circumferatur: apparebit nobis existentibus in A, Sol inæqualiter moveri, & phœnomenis numero 22. observatis satisfiet. Quod sic ostendo:

a Num. 38.

b Num. 43.

Oculo in A constituto, Sol existens in Eccentrici puncto G, apparet sub E Arietis initio; existens in N. apparet sub K initio Cancri; existens in H apparet sub F initio Libræ: ac proindè Sol percurrens Eccentrici arcum G N H, existenti in A apparet percurrere semicirculum eclipticæ borealem E K F. Pari modo, dum Sol percurrit Eccentrici arcum H P G, videtur percurrisse semicirculum eclipticæ australem F M E. Atqui G N H, major est arcu H P G, eò quòd Eccentrici centrum B, sit suprà Eclipticæ centrum A. Ergò cùm Eccentricum æquali motu Sol percurrat, plus temporis impendit absolvendo arcui majori G N H, quàm minori H P G. Ergò etiam sol apparet hærere diutiùs in semicirculo Eclipticæ boreali E K F, quàm sub australi F M E. Quare, observationi primæ satisfactum est.

Deindè si Ptolomæi ætate statuamus Apogeum (C) in primo Eclipticæ quadrante (E K), ut in *fig.* 34. ætate verò nostrâ in quadrante secundo (K F), ut in *fig.* 35. satisfiet observationi secundæ. Nam in *figurâ* 34. Apogeo (C) posito in quadrante primo (E K), etiam Eccentrici centrum (B) in primo quadrante erit, ac proindè Eccentrici arcus G C N major est arcu N H. Ergò, quia Sol æqualiter movetur per Eccentricum, plus temporis impendit arcui G N majori absolvendo, quàm minori N H. Sed Sol percurrens arcum G C N, videtur percurrere Eclipticæ quadrantem E K, percurrens verò arcum N H, videtur percurrere Eclipticæ quadrantem K F. Ergò ætate Ptolomæi Sol videbatur plus temporis impendere percurrendo Eclipticæ quadranti primo (E K), quàm secundo (K F). Quòd si verò ætate nostrâ Apogeum (C), adeòque & Eccentrici centrum (B) (vide *fig.* 35) statuamus in quadrante secundo (K F), tunc arcus G N minor erit arcu N C H. Ergò Sol citiùs absolvet G N, quàm N C H, ac proindè minùs diu videtur jam hærere sub Eclipticæ quadrante primo (E K), quàm sub secundo (K F). Atque ità etiam, secundæ observationi per omnia est satisfactum.

Fig. 34.

Fig. 35.

Pro expositione phœnomeni tertij, adi num. 25.

Denique, quia Sol existens in (C) Apogeo Eccentrici, remotissimus est à Terrâ (A), in Perigeo verò (O) vicinissimus, apparet ratio cur modò major appareat, modò minor; quod requirebat observatio quarta.

Quare per hypothesim Eccentrici observationes numero 22 allatæ præstantur. Quod erat propositum. *Vide plura de his num.* 25. *propr.* 1, & 10.

§. 2. Quod attinet ad hypotesim alteram, quæ Epicyclo utitur, ea sic habet. Centrum Eclipticæ supremæ (quæ in figurâ non exprimitur) esto A. Ex eodem centro describatur in plano Eclipticæ Con-

Fig. 38.

centricus Q E P N, & tam hunc, quàm Eclipticam diametri binæ dividant in 4 quadrantes cardinales, sic ut P Q transeat per initia Arietis, & Libræ; E N per initia Canceri, & Capricorni. Centro deindè sumpti in peripherià Concentrici describatur circellus tanto intervallo, quantum in priore hypothesi erat intervallum, centrorum A mundi, & B Eccentrici. Circellus porrò iste *Epicyclus* nominatur. His igitur sic constitutis, ponatur centrum epicycli in Canceri principio in E, centrum verò Solis in peripheriæ epicycli puncto summo B. Si anni spatio, centrum epicycli motu æquali, secundùm ordinem Signorum ex E in Q, percurrat totum Concentricum E Q N P, atque eodem tempore centrum Solis motu item æquali, sed in partem contrariam ex B versùs D, absolvat epicyclum: satisfiet phœnomenis *num.* 22 observatis. Jungendus verò duobus jam dictis motibus, tertius ille lentissimus Apogei motus, qui in hâc hypothesi habetur æquivalenter, si Sol epicyclum aliquantò tardiùs percurrat, quàm centrum epicycli Eclipticam: ut si motus Apogei absolvat annuè grad. 0. 1. 1' 10", Sol annuè absolvat epicyclum demptis grad. 0. 1. 1'. 10", vide *num.* 19. *lib.* 2. Cæterùm qui satisfiat phœnomenis singulis, ex jam dictis cum inspectione schematis facilè colligetur. Plura de hypothesi epicyclica loco citato, ubi major illius usus erit.

Præter has, plurimæ sunt aliorum hypothesis aliæ; Kepleri, Eccentricitate bisectâ; Copernici Terram moventis, Keppleri, & Bullialdi Elliptica; Lansbergy &c. quas accuratè descriptas reperies apud Ricciolum lib. 3. Almagesti novi. Ego lubens prætereo: neque enim quidquam otiosius, & inutilius in Astronomico studio esse judico, quam discentium animos, in ipso præsertim scientiæ primo aditu, tot hypothesium tricis implicare.

NUMERUS XXIV.

Definitiones ad hypothesim Eccentrici pertinentes, quarum pleraque non tantùm Soli, sed etiam Lunæ, alÿsq; planetis conveniunt.

ECliptica suprema, seu Primi Mobilis, esto P C L K, & in ejus plano Eccentricus N F I G; centrum Eclipticæ, & mundi A; centrum Eccentrici B: Planetæ centrum in O: Initium ♈ in X. Ordo Signorum secundùm seriem litterarum X C L K.

I. *Motus in consequentia*, est qui fit secundùm ordinem Signorum; *in antecedentia* verò, qui contrà Signorum ordinem.

II. Illud in Zodiaco præcedere dicitur, quod ab initio ♈ minùs distat, numerando ab ♈ initio versùs ipsum in consequentia. Sic punctum D præcedit E, quia distantia ejus ab ♈ initio X C D, minor est distantiâ alterius X C E. Astronomi igitur in notione præcessionis attendunt terminum motus *à quo*. Aliàs si spectare voluerimus terminum *ad quem*, illud dicendum esset præcedere, quod longiùs ab ♈ principio distat.

III. *Motus æqualis*, est quando æqualibus temporibus æqualia spatia percurruntur: *inæqualis*, cùm temporibus æqualibus, spatia inæqualia, vel spatia æqualia temporibus inæqualibus.

IV. *Linea Apogei, linea Augium, linea Apsidum*, est recta C F B A G K per centra Eclipticæ (A), & Eccentrici (B) ducta.

V. *Eccentricitas*, est (A B) distantia centri Eccentrici à centro mundi.

VI. *Apogeum, Aux, summa Apsis*, est punctum (F) quod in Eccentrici peripheriâ, Apsidum linea, ultrà eccentrici centrum (B) designat.

VII. *Perigeum, Oppositum augis, Apsis ima*; est punctum (G) quod in eccentrici peripheriâ apogeo opponitur.

Inter omnia puncta Eccentrici à mundi centro (A) Apogeum distat maximè, Perigeum minimè per 7. 3. elem.

VIII. *Loca Apogei, & Perigei* in Zodiaco, sunt puncta (C, K) in quibus Apsidum linea Zodiaco occurrit.

IX. *Motus, distantia, longitudo Apogei*; est arcus eclipticæ ♈ C ab initio ♈, usque ad locum Apogei in consequentia numeratus.

X. *Linea veri motus* seu *veri loci* Solis, vel planetæ, est recta (A O D) ex mundi centro per planetæ centrum (O) ad Zodiacum emissa.

XI. *Locus verus* solis, vel planetæ est punctum (D) in Zodiaco à dictâ jam lineâ designatum.

XII. *Linea motus anomaliæ*, sive *linea anomalistica*. est recta (B O) ex centro Eccentrici, ad planetæ centrum directa.

XIII. *Linea motus medij*, est recta (A E) ex mundi centro ad Zodiacum extensa, & lineæ anomalisticæ (B O) parallela.

XIV. *Locus medius* Solis, vel planetæ, est punctum (E) in Zodiaco à dictâ jam lineâ designatum.

XV. *Motus verus*, seu *apparens*, est quo nobis circà mundi centrum existentibus, Sol, vel planeta Zodiacum, quamvis non illo, sed sub illo sit, videtur percurrere.

Hunc motum esse inæqualem patet ex num. præc. & ulteriùs ostendam num. sequenti. Dicitur verus, quia verè nobis apparet; motus autem medius, & motus anomaliæ, de quibus mox agam, sunt ficti, sive hypotheticè assumpti ad salvandam, & numeris explicandam inæqualitatem motus veri. Porrò nos, motus planetæ spectatores, supponimur esse in mundi, & eclipticæ centro, nulla habita ratione semidiametri Terræ, usque dum fuerit ad parallaxium disquisitionem perventum. Tunc enim oportebit distinguere motum planetæ respectu centri Terræ, & mundi, a motu planetæ respectu oculi nostri in superficie terræ existentis; & tum hic quidem apparens, ille verus (ut antè) appellabitur. Extra verò negotium parallacticum, & refractivum passim Astronomi appellationes veri, & apparentis motus solent confundere.

XVI. *Motus anomaliæ*, est motus æqualis, quo Sol, vel planeta Eccentricum percurrit. Initium ejus sumitur ab Apogeo.

Quæres, cùm motus ille æqualis sit, cur anomaliæ motus dicatur? Respondeo, quia facit ut nobis appareat planeta Zodiacum inæqualiter percurrere, uti ostendam num. seq. Quâ de causâ etiam circulus, in quo planeta movetur æqualiter, anomaliæ circulus dicitur.

XVII. *Motus medius*, est, quo Solis vel planetæ locus medius (E), atque ipsa medij motus linea (A E) Zodiacum eâ lege percurrit, ut planetæ centro (O) cum suâ lineâ anomalisticâ (B O) per Eccentricum moto, ipsa (A E) semper maneat ad lineam anomalisticam (B O) parallela.

Motum hunc medium, esse æqualem ostendam num. seq. Porrò medius dicitur, quia inter motum verum celerrimum, & tardissimum mediam celeritatem habet.

Atque ita definiuntur motus generaliter accepti. Sed præcipuus eorum usus est, prout referuntur ad tempus: & tunc solent Astronomi per motus vocabulum ipsa spatia decursa designare.

XVIII. *Motus verus dato intervallo temporis conveniens, sive debitus*, est arcus Zodiaci, quem dato temporis intervallo Sol, vel planeta percurrit.

XIX. *Motus anomaliæ dato temporis spatio respondens, sive debitus*, est arcus Eccentrici, vel circulus integer unus, aut plures cum aliquo artu, à Sole vel planetâ dato temporis spatio decursi.

Ut si planeta percurrit Eccentrici arcum FO die uno, arcus FO est motus anomaliæ unius diei, sive diurnus; si unâ horâ, est horarius; si uno anno, est annuus. Pari modo si planeta ex. grat. 2 annis, diebus 100 percurrit circulum integrum FOGNF cum arcu FO; motus medius annorum 2, dierum 100, est circulus integer sive grad. 360 cum arcu FO. Ex quo jam apparet, quid sit motus anomaliæ unius minuti, horæ, diei, mensis, anni, vel plurium minutorum, horarum, dierum, mensium, annorum. Atque hæc omnia etiam intellige tam de motu vero defin. præced. quàm de motu medio defin. sequ.

XX. *Motus medius dato intervallo temporis respondens*, est arcus eclipticæ, sive Zodiaci, vel circulus Zodiaci integer unus, aut plures, vel circulus integer unus, aut plures cum aliquo arcu, à loco planetæ medio, & lineâ medij motus dato temporis spatio decursi.

In sole, & planetis, demptâ lunâ, motus medius, & motus anomaliæ accipiuntur promiscuè, quia & æquales sunt ambo, ut ostendam num. 25. propr. 2, & velocitate insensibiliter differunt. vide num. seq. propr. 5.

XXI. *Longitudo vera, sive motus verus Solis, aut planetæ ad datum tempus*, est arcus Zodiaci (♈CD) ab initio ♈ primi mobilis (hoc est à sectione vernâ, sive puncto æquinoctiali) usque ad verum planetæ locum (D) in consequentia numeratus, pro tempore dato.

XXII. *Longitudo media, sive motus medius Solis aut planetæ ad datum tempus*, est arcus Zodiaci (♈CE) ab initio ♈ usque ad planetæ locum medium (E) in consequentia numeratus, pro tempore dato.

XXIII. *Argumentum medium*, sive *anomalia media Solis, aut planetæ ad datum tempus*, est arcus eccentrici (FO) ab apogeo, usque ad planetæ centrum (O) in consequentia numeratus; sive est arcus Zodiaci (CE) à lineâ apogei (KC) usque ad lineam motus medij (AE) in consequentia numeratus pro tempore dato.

Cum enim ob parallelas AE, BO, anguli ad centra a *EAC, OBF sint æquales, erunt* b *CE, FO arcus similes.*

a Per 27. 1.
b Per 33. 6.

XXIV. *Argumentum verum, sive anomalia vera, seu coæquata Solis, aut planetæ ad datum tempus*, est arcus Zodiaci (CD) à loco apogei, usque ad locum Solis verum in consequentia numeratus pro tempore dato.

XXV. *Æquatio*, seu *prosthaphæresis*, est angulus (AOB) quem in planetæ centro constituunt rectæ (AO, BO) ex centris mundi, & eccentrici prodeuntes.

Sive, est arcus (ED) quô differunt longitudo vera ♈CD, & media ♈CE; item quô differunt anomalia vera (CD), & media (CE).

Idcircò autem æquatio est tam angulus AOB, quàm arcus ED, quia ob parallelas AE, BO, angulus AOB æquatur angulo OAE, sive DAE, quem cum metiatur arcus DE, etiam DE metietur ipsum AOB.

XXVI. *Transitus medij* sunt puncta in eccentrico (I, & N) quæ designantur à rectâ (IAN) per mundi centrum ad lineam apsidum (CK) perpendiculari. Dicuntur etiam subindè *longitudines mediæ.*

Ratio appellationis est, quia (ut ostendam num. seq.) ad hæc puncta maximæ sunt æquationes, seu differentiæ motus veri a medio.

Longitudines porrò *mediæ* propriè vocantur duo puncta eccentrici, quæ 90 gradibus distant à lineâ apsidum.

XXVII. *Revolutio vera planetæ per Zodiacum*, est motus veri loci planetæ ab uno Zodiaci puncto ad idem.

Hæc in sole vocatur *annus solaris verus.*

Revolutionem veram unam non esse æqualem, seu æquè longam ac alteram, ostendam num. 48. esse tamen æquè longas quoad sensum, patebit ex num. 47.

XXVIII. *Revolutio media planetæ per Zodiacum*, est motus loci medij planetæ ab uno Zodiaci puncto ad idem.

Hæc in sole vocatur *annus solaris medius.*

Omnes revolutiones mediæ ejusdem planetæ sunt æquè longæ; quia locus medius movetur æqualiter, ut ostendam num. seq.

XXIX. *Revolutio*, vel *restitutio anomaliæ*, est motus planetæ ab uno eccentrici puncto ad idem.

Omnes anomaliæ revolutiones sunt æquè longæ inter se; quia planetæ motus per eccentricum æqualis est. Est tamen (ut ostendam num. seq.) revolutio anomaliæ longior revolutione mediâ, sensibiliter in Lunâ, in Sole & planetis reliquis insensibiliter, ut suo loco demonstrabitur.

NUMERUS XXV.

Proprietates eccentrici referuntur ac demonstrantur.

Iisdem positis quæ num. præced. sit

PROPRIETAS I. motus planetæ in suo eccentrico (NFIG) æqualis, spectatus ex (A) centro mundi, propè quod nos sumus, apparet sub Zodiaco (PCLK) inæqualis, non solùm si integri semicirculi inter se, aut quadrantes comparentur, ut num. 23; sed etiam si arcus quicunque æquales, sed inæqualiter ab apogeo distantes, inter se conferantur. *Vide propr. 11.*

Fig. 37.

Ratio est, quia motus æqualis respectu centri eccentrici (B) spectatur à nobis extrà illud centrum in mundi centro (A) constitutis. Res per se satis clara est. Geometricam ejus demonstrationem si voles, collige ex porismate demonstrando l.2.n.27.

PROPRIETAS II. Linea motus medij, adeoque locus ipse medius, per Zodiacum movetur æqualiter.

Linea motus medij (AE) processerit ex (C) loco apogei in E, & planeta ab apogeo (F) in O. Quia d AE semper manet in suo motu parallela ad BO, erunt anguli l EAC, OBF ad centra A, & B, æquales. Ergo arcus CE quem in Zodiaco confecit linea motus medij AE, similis m est arcui FO, quem intereà absolvit planeta in eccentrico. Eôdem modô ostendam ex lege quâ juxtà defin. 17. perpetuò movetur linea motus medij, semper arcum in Zodiaco confectum à lineâ motus medij, similem esse arcui, quem intereà in eccentrico planeta absolvit, utrumque à lineâ apogei numerando. Processerit deinde linea medij motus ex D, in M, & planeta interim ex O in I. Quia similes jam ostendi esse tam arcus CE, FO, quàm arcus CM, FI, etiam reliqui DM, OI similes erunt. Atque hoc etiam eôdem modô sem-

d Per def. 17.
l Per 27. 1.
m Per 33. 6.

per continget. Igitur arcus in Zodiaco confecti, à lineâ medij motus semper sunt similes arcubus intereà in eccentrico a planetâ decursis, sive conjunctim, sive divisim accipiantur. Quarè cùm ex hypothesi motus planetæ per eccentricum sit æqualis, etiam motus lineæ, motus medij æqualis sit necesse est.

PROPRIETAS III. Revolutio anomaliæ à quôvis planetâ longiori tempore absolvitur, quàm revolutio vera, & media.

Sit planeta in eccentrici quôvis punctô S, erit tunc locus ejus verus in R, medius in Q. Revolvatur deindè æquali motu per eccentricum planeta ab S, versùs F, donec redeat ad punctum idem S. Quoniam propter apogei motum eccentricus, unà cum planetâ lineisque A S R, A Q veri motus ac medij, circà mundi centrum A interim etiam versùs F lentè promovetur, ubi planeta redierit ad punctum S à quô abierat, jam illud punctum S non suberit ampliùs Zodiaci punctô R, cui suberat ad initium revolutionis anomalisticæ, sed alteri cuipiam Y, ubi etiam tunc erit verus planetæ locus. Quare eô tempore quô planeta redijt ad idem eccentrici punctum S, (hoc est absolvit revolutionem unam anomaliæ) locus verus confecit totum Zodiacum R C L K R unà cum arcu R Y. Ergò locus verus percurrit Zodiacum solum R C L K P R tempore minori, quàm sit tempus quô planeta confecit eccentricum: hoc est revolutio vera planetæ per Zodiacum brevior est revolutione anomaliæ. Eôdem modô idem ostenditur de revolutione mediâ.

Rationis summa est: quia planeta in eccentrico promovetur suo tantùm proprio motu: at in Zodiaco, promovetur motu duplici, & suo videlicet quô percurrit eccentricum, & alieno, nempe motu apogei, quô ipse cum eccentrico interim sub Zodiaco in easdem partes transfertur. Ex quo sequuntur proprietates IV & V.

PROPRIETAS IV. Tempus revolutionis anomaliæ, excedit tempus revolutionis mediæ, eô temporis spatio, quô motu medio planeta percurrit arcum in Zodiaco, quem apogeum interim absolvit.

PROPRIETAS V. Motus medius motum anomaliæ excedit motu apogei; hoc est; Motus medius horarius, diurnus, annuus &c. excedit motum anomaliæ horarium, diurnum, annuum &c. motu apogei horario, diurno, annuo, &c. Quare si à motu medio ex. gr. diurno demas motum apogei, habetur motus diurnus anomaliæ. Et sic in alijs speciebus.

Quia tamen motus apogei, in Sole, & planetis, demptâ lunâ, lentissimus est, ac proindè ad motum medium insensibilem habet proportionem, etiam differentia motus medij, & motus anomaliæ insensibilis erit. Quare motu medio licebit uti tanquam motu anomaliæ, si lunam (uti dixi) excipias.

Fig. 37. PROPRIETAS VI. In primo anomaliæ semicirculo (F I G), quando videlicet media anomalia est minor gradibus 180, æquatio est ablativa. Cum enim tunc motus verus (X C L) sit minor motu medio (X C M); auferenda est, à motu medio, æquatio (M L), ut ex medio habeatur verus.

In secundo semicirculo G N F, cum nimirùm anomalia est major gradibus 180, æquatio est additiva. Nam quia tunc motus verus (X P) major est motu medio (X V), ut ex medio innotescat verus, æquatio (V P) medio motui addenda est.

Ut ex motu vero eliciatur medius, contrarium faciendum: in primo nempe semicirculo addenda est æquatio motui vero; in secundo auferenda.

PROPRIETAS VII. Sole apsides (F, G) obtinente, prosthaphæresis evanescit. Tunc enim lineæ motus medij, & apparentis, coincidunt in lineam apsidum (C F G K), ac proindè motus verus à motu medio non differt. Fig. 37.

PROPRIETAS VIII. Æquatio, seu prosthaphæresis maxima habetur in punctis transituum mediorum (I, N) in quibus eccentricum secat recta (L P) per terræ centrum (A) ad lineam apsidum (F G) perpendicularis. Fig. 37.

Demonstrabitur ut Theor. 4. num. 19. solùm figura 31 34, quæ isthic adhibetur, invertatur, & sit B centrum terræ, A centrum eccentrici, & loco parallaxeos, intelligatur posthaphæresis.

PROPRIETAS IX. Æquationes eò majores sunt, quò Sol propinquior est transitibus medijs (I, N); eò autem minores, quò propinquior apsidibus (F, G).

Demonstrabitur ut theor. 5. num. 19.

PROPRIETAS X. Cum motus veri, seu apparentes dierum singulorum inter se comparantur, tardissimus est motus apparens circa Apogeum (F), celerrimus circà Perigeum (G), & in primo semicirculo (C L K) ab Apogeo (F) usque ad perigeum (G), quotidiè celerior fit; in secundo autem semicirculo (K P C) à Perigeo (G) usque Apogeum eodem ordine, sed inverso, fit rursùm quotidiè tardior. Circà transitus, seu longitudines medias (I, N) mediocris est. Fig. 39.

Demonstr. Ecliptica intelligatur divisa in tot partes æquales, quot sunt dies in anno. In schemate confusionis vitandæ causâ, solùm divisa est in 8 æquales arcus C D, D L, &c. Radij eclipticam dividentes (A D, A L &c.) intercipiunt [d] arcus inæquales eccentrici; sic ut maximi sint (F E, F T) Apogeo proximi; inde versùs perigeum fiant continuò minores, & minores; proximi autem Perigeo (O G, R G) omnium minimi sint. Cùm igitur Solis motus in eccentrico sit æqualis, tempora singulis eccentrici inæqualibus arcubus impensa, eam inter se proportionem habent, quam ipsi arcus. Unde maximum tempus impenditur maximis arcubus (F E, T F); minus tempus minoribus (E I, N T); adhuc minus adhuc minoribus (I O, R N): minimum minimis (O G, G R). Sed quo tempore percurruntur arcus inæquales eccentrici, nobis in (A) centro eclipticæ existentibus videntur percurri arcus æquales eclipticæ. Æqualium igitur eclipticæ arcuum ij, qui sunt Apogeo proximi (nempe D C, S C) nobis videntur percurri tempore maximo, hoc est tardissimè, minori verò tempore hoc est celeriùs, D L, P S; adhuc minori, sive adhuc celeriùs, L M, Q P, minimo tandem seu celerrimè (M K, K Q) Perigeo proximi. Motus igitur Solis apparens circà apogeum tardissimus, circà Perigeum celerrimus est, & crescit celeritas ab Apogei loco C per L usque ad Perigei locum K; inde per B ad C inverso ordine decrescit.

[d] *Patebit ex lem. num. 27. lib. 2.*

Hæc non pugnant cum propr. 8. & 9. Hic enim motus apparentes dierum singulorum inter se comparantur: isthic verò motus apparens comparatur cum motu medio, & quidem uterque semper ab Apogeo. Cum igitur comparationis termini sint diversi, non est mirum si diversa proprietates existant.

PROPRIETAS XI. Eccentricitas A B bisecetur in D, & ex D ducatur ad lineam augium perpendicularis, occurrens Eccentrico in punctis O, & Q. hæc sunt puncta distantiæ mediocris, seu mediæ Solis à centro Terræ: A. Fig. 36.

Du-

Fig. 37. Ducantur enim AO, BO. In triangulis ADO, BDO anguli ad D sunt recti, ac proindè æquales, latera quoque BD, DO æqualia sunt lateribus AD, DO. Ergo *a* AO distantia Solis à centro Terræ A, æqualis est BO radio eccentrici, quæ est distantia media, seu mediocris.

a Per 4. 1.

Enumeratæ jam proprietates Eccentrici non tantùm Soli, sed etiam Lunæ, aliisq; planetis conveniunt.

CAPUT VI.

A fundamentis traditur modus inveniendi motum Solis tum medium, tum verum, seu apparentem ad tempus datum.

PRæcipuum hujus primi libri opus est, quem locum in ecliptica Sol dato quovis tempore habuerit, vel habiturus sit, vel de facto habeat, invenire. Quare methodum, ac progressum hujus inventionis toto hoc capite exequemur.

NUMERUS XXVI.

Lineam meridianam & instans meridiei invenire.

Fig. 40. IN plano horizontaliter librato, describantur plures concentrici circuli, ex quorum centro (A) erigatur stylus perpendiculariter (AB). Tum horis circiter duabus antè meridiem, quando sol est extrà aleam refractionis, elevatus nimirùm suprà horizontem non minùs 45 gradibus, observa in cujus circuli peripheriâ terminetur umbra styli, & in quo peripheriæ puncto: quod acu vel stylo nota & sit C. Similiter post meridiem in eâdem peripheriâ punctum signa (D) in quod incidit umbræ styli terminus. Deinde arcu CD bisecto in F, duc rectam FA. Hæc est meridiana: & manifesta est demonstratio.

Ut accurata sit operatio, cautelas sequentes adhibe.

1. Planum, in quo erigitur stylus, album sit, ut umbra styli distinctiùs appareat.

2. Longitudo styli mediocris esto, aliàs umbræ terminus non satis distinguitur. Ricciolus semissem pedis Romani præscribit.

3. Stylus sit conicus, & apex illius non sit valdè acutus, sed nonnihil obtusior; sic enim terminus umbræ distinctior erit.

4. Eligatur dies serenus, aëre vaporibus libero; & quidem in solstitio æstivo, aut solstitio proximus. Nam in diebus à solstitio notabiliter distantibus, alia est Solis declinatio antè & post meridiem, ac proindè non eadem umbræ longitudo duabus ex. gr. horis antè meridiem, quæ duabus horis post meridiem. Sole enim percurrente semicirculum ascendentem, à Capricorno scilicet per Arietem ad Cancrum, umbra antemeridiana longior est pomeridianâ; contrà sit, in semicirculo descendente à Cancro nempe per Libram ad Capricornum.

5. Si antè, & post meridiem in pluribus circulis puncta notaveris, & ex arcubus inter ea interceptis, eadem semper provenerit linea meridiana, magno id indicio erit meridianam esse exquisitè inventam.

Instans porrò meridiei, repertâ Meridianâ, nullo negotio obtinetur; est enim ipsum illud, quo umbra styli ex aliquo Meridianæ puncto erecti, in ipsam Meridianam projicitur.

d Patebit ex lem. num. 27. lib. 2.

Plures modi sunt inveniendi Meridianam; sed omnes præter hunc unum, ex aliis ulterioribus, ipsam Meridianæ inventionem supponentibus, deducuntur: qui quamvis à vitioso circulo excusari possint, ut alibi videbimus, nobis tamen hic esse usui non poterant, quibus propositum est methodo Geometricâ, à primis fundamentis Astronomiam deducere.

Corollarium I.

Inventâ unâ Meridianâ, reperientur quotcunque aliæ, si in planis datis erigantur styli perpendiculares, & quo momento umbra styli in Meridianam anteà repertam inciderit, notentur in umbris stylorum reliquorum puncta singula: nam umbræ stylorum, ac proindè & rectæ quæ per punctum in umbrâ notatum, & basim styli ducuntur, sunt lineæ meridianæ. *Demonstratio* satis clara est.

Idem obtinebitur si in umbrâ perpendiculi quieti, duo puncta notentur, per quæ ducatur recta.

Corollarium II.

Instans meridiei invenire.

SUspende perpendiculum filare directè suprà Meridianam. Observa quando umbra fili congruat lineæ meridianæ; eo enim momento est meridies.

NUMERUS XXVII.

Altitudinem poli, & æquatoris invenire.

Fig. 41. PEr præced. inveniatur Meridiana AK; suprà statuatur perpendiculariter quadrans, qui tantus esse debet, ut non solùm gradus, & graduum minuta prima, sed etiam secunda, aut certè decades secundorum contineat. Tum nocte aliquâ 12 horis longiore, cujusmodi sunt antè, & post brumale solstitium, elige stellam è circumpolaribus aliquam, quæ sub noctis initium Meridianum attingat, & quanta tum ejus sit altitudo (KD) observa: quod obtinebitur, si quadrante suprà Meridianam (AK) anteà repertam perpendiculariter constituto, per dioptras regulæ stellam conspicias. Post horas deinde 12, cùm eadem stella Meridianum rursus attigerit, denuò illius altitudinem metire (KC). Semissis differentiæ (CD) altitudinum (KC, KD) minimæ & maximæ, addita ad minimam (KC) altitudinem, dabit (KB) altitudinem poli suprà horizontem (KN). Oportebit autem eum esse locum observationis, ut minima stellæ circumpolaris assumptæ altitudo (KC) sit non minor grad. 30, aut 20, ut refractio evitetur.

Demonstratio est manifesta; cùm enim stella circà axem (BI) circumagatur, patet eam eandem semper à polo (B) servare distantiam, ac proindè quantùm priùs in Meridiani puncto D suprà polum (B) attollebatur, tantùm deindè in Meridiani puncto C existens, infrà polum descendere. Quare polus (B) utriusque altitudinis differentiam (CD) secat bifariam. Altitudinum igitur differentiæ semissis (CB), addita minimæ altitudini (KC) constituit altitudinem poli (KB).

Inventâ poli altitudine, habetur altitudo Æquatoris (FN): hæc enim illius est complementum ad 90. gradus.

Erigatur enim ad horizontem (KN) perpendicularis

Fig. 36.

cularis AH: erit arcus BH complementum altitudinis poli (KB). Jam quia arcus BF, NH æquales sunt, sunt enim ambo circuli quadrantes, si auferatur communis arcus HF, remanet NF altitudo Æquatoris par arcui BH, complemento altitudinis poli.

Scholium.

Scio plures esse vias ad vestigandam altitudinem poli ab Astronomis usitatas; sed ex ijs deductas, quæ vel ipsam poli altitudinem aliundè notam supponant, ac proinde nobis ad principia Astronomiæ revocantibus, usui esse non possint; vel refractionibus, ac parallaxibus obnoxias, vel aliâ ratione fallaces. Modus verò jam traditus & omnium simplicissimus est, & impedimentis jam allatis caret. Hic enim neque refractio facessit negotium, cum observatio supponatur fieri eo loco, ubi minima assumpta circumpolaris stella altitudo (KC), sit non minor 30 aut 20 gradibus, ad quam altitudinem refractiones evanescunt: neque parallaxes se immiscent, quæ in Fixis sensibiles non sunt; cùm stella polaris à polo distantia ab Astronomis observatoribus ubivis terrarum, eadem reperiatur, quod fieri non posset, si parallaxim sensibilem pateretur. Est porrò hâc ætate stella polo proxima, ea quæ cynosura dicitur, estque ultima in caudâ Ursæ minoris: distatque à polo hoc exeunte anno 1655, grad. 2. 2'. 26", quæ hoc sæculo, & sequenti per annos singulos minuetur 20". Sed de his plura lib. 5, Astronomiæ nostræ num. 20.

NUMERUS XXVIII.

Meridianam, vel non meridianam Solis, aut alterius Astri altitudinem capere.

Fig. 41. a Per nu. 26.

INveniatur linea a meridiana (NK), & suprà eam perpendiculariter erigatur quadrans (AXP) in quo, si quid ad usus Astronomicos accurati desideras, non gradus tantùm, & minuta, sed etiam Secunda, aut certè Secundorum decades notentur. Tum in ipso meridiei puncto regulam ita versa, ut Solis positi in D radius, per utramque regulæ (AQ) dioptram transmittatur. Arcus XQ dabit Solis altitudinem meridianam.

Eâdem methodo, omisso tantùm usu lineæ meridianæ, altitudo Astri quovis diei tempore reperitur.

Verùm altitudines sic inventæ non semper sunt accuratæ: immiscent enim sese refractio, & parallaxis; hæc astri visum locum deprimit infrà verum, illa suprà verum attollit. Parallaxis ergò altitudini per instrumentum repertæ addenda, refractio subtrahenda, ut altitudo vera obtineatur. Sed nondum hic satis principiorum nobis est ut parallaxium, & refractionum quantitates determinemus. Alterius id loci c erit. Interim, aut evitandæ nobis illæ erunt, aut si evitari penitùs non possint, ita omnis erit instituenda deductio nostra, ut earum neglectus proposito interim negotio non officiat. Id nisi fiat, vitiosus circulus committetur, dum ex refractionibus, & præsertim ex parallaxibus motus Luminarium, & ex motibus parallaxes colligentur. In quo quidem evitando non parum ab Astronomis laboratur: sed & multi non satis hîc accurati sunt, neque sese ex hoc labyrintho, expediunt satis.

c Lib. 3. cap. 4.

Cæterùm quia firmissimis argumentis cum Ricciolo ostendam, d parallaxim Solis longè probabiliùs esse non majorem 30", hoc est minuto dimidio, ac fortasse nullam, sentio longè minùs tum hîc tum in sequentibus peccatum iri, si omninò contemnatur, quàm si incerta ejus quantitas assumatur.

d Lib. 3. num. 19.

Modum capiendi altitudinis angulum universim tradidi Geom. Pract. cap. 5.

NUMERUS XXIX.

Diem Solstitij invenire.

PEr dies aliquot ante & post diem Solstitio in Kalendario, aut Ephemeride aliquâ deputatam, observa b altitudines Solis meridianas; quo die ea fuerit maxima, Solstitium erit æstivum; hybernum, quo minima.

b Per præc.

Verùm difficile est discernere quænam inter meridianas altitudines circa Solstitium acceptas, maxima sit: cùm enim declinationum differentiæ tum vix sensibiles sint, etiam differentiæ altitudinum non facilè percipiuntur. Gradus Geminorum trigesimi principium, & Cancri gradus primi finis declinationem habent vix 15" Secundis deficientem à declinatione initij Cancri, cui respondet necessariò altitudinum differentia adhuc minor; quam proinde difficulter observes, quantumvis magnus quadrantibus utaris.

Solstitijs observandis gnomones perpendiculariter erectos non veteres solùm, sed etiam nonnulli recentiores adhibuêre. Observanda est in meridie gnomonis umbra: nam quo die ea fuerit maxima, seu longissima, brumale solstitium erit; æstivum, quo brevissima. Sed nisi gnomones admodum sint proceri, eâdem incertitudine laborabunt, quâ quadrantes. Quò enim gnomones, adeóque & umbræ eorum, fuerint minores, eò etiam minores erunt differentiæ umbrarum, & contrà. Longè autem facilius est erigere gnomones in sublime, (fit enim, si in pariete excelso tantùm foramen effeceris) quàm quadrantes tantæ molis construere. Quare his illi hoc in negotio videntur potiores. Hujusmodi gnomon ille fuit, quo (ut refert Gassendus in vitâ Peireskij) Pitheas Massiliensis jam inde ab Alexandri Magni tempore, solstitium observavit, reperitque umbram partium 213⅕, qualium gnomon erat 600. Sed & Gassendus ipse in eâdem urbe gnomone usus est alto pedes regios 52, invenitque in Solstitio æstivo umbram meridianam partium 31, 950, qualium gnomon erat 90, 000. unde collegit obliquitatem Eclipticæ nunc eandem esse quæ fuit ætate Alexandri Magni.

NUMERUS XXX.

Horam, & momentum Solstitij invenire.

PEr dies aliquot ante & post diem æstivo Solstitio in ephemeride aliquâ assignatam, maximis quadrantibus capiantur altitudines Solis meridianæ. Ex his si tres reperiantur, continuæ, quarum media duabus reliquis est maior, ac proindè capta ipso die Solstitij,

ſtitij, duæ reſiduæ vel æquales ſunt, vel non. Si ſint æquales, ſolſtitium incidit in punctum ipſum meridiei. Si verò inæquales; & ea quæ diem ſolſtitij præcedit major ſit alterâ, quæ ſolſtitio ſucceſſit, Solſtitium ante meridiem factum eſt: & contrà. Quod ſi duæ meridianæ altitudines continuæ reperiantur æquales, tunc ſolſtitium mediâ nocte factum eſt. Horum ratio ſatis manifeſta eſt rem utcumque conſideranti.

Porrò cùm trium continuarum altitudinum, quarum una ſit maxima, extremæ duæ inæquales ſunt, vix ulla exhiberi ratio poteſt, quâ Solſtitij momentum certò determinetur. Afficiuntur enim altitudines Solis, & ſiderum quorumcumque à parallaxi, ſi quæ ſit, & refractione, quorum hæc auferri debet, addi illa, ut altitudines ſint accuratæ. Et refractio quidem ſolum brumale ſolſtitium turbat, non æſtivum: tunc enim per totam Zonam Torridam, & Temperatam altitudo meridiana Solis gradibus 45 major eſt. At parallaxis Solis utrumque intricat, quæ licet, ut *num.* 34. oſtendam, in determinando motu Solis & Lunæ tutò negligatur; in hoc tamen negotio negligi nequaquàm debet: quandoquidem ſi vel tantillo eam majorem juſtò minorémve acceperis, ſtatim error notabilis in determinando Solſtitij momento committatur. Denique licet exactè cognoſci poſſet parallaxeos ſolaris quantitas, his tamen ex ijs, quæ adhuc præmiſimus, nondum ea cognitio haberi poteſt, ac proinde adhuc nobis eſſet ſolſtitiorum exactior determinatio in alium locum differenda: abſque tamen præjudicio ullo ſequentium propoſitionum quæ inde non dependent.

Cæterum nulla ſolſtitij obſervatio inſignior extat illâ Riccioli, habitâ Bononiæ anno 1646. Deprehenſa iſthic ab eo eſt ex ſtellis Circumpolaribus, obſervatione plus quàm quadrageſies repetitâ, altitudo poli grad. 44. 29'. 30''. Ex quâ elicitur Æquatoris altitudo grad. 45. 30. 30''. Accepit deinde 20, & 22 Iunij tribus magnis quadrantibus altitudinem Solis meridianam, quæ utroque die fuit eadem, nempe; grad. 68. 59'. 45''. At die 21 reperta fuit uno quidem quadrante maximo grad. 69. altero autem magno, grad. 69. 0'. 10''. Quantùm igitur conſequi licuit humanâ induſtriâ, ſolſtitium incidit in ipſum meridiem diei 21 Iunij.

NUMERUS XXXI.

Obliquitatem, ſeu maximam declinationem Eclipticæ reperire, quæ eſt graduum 23. 36 quàm proximè.

Ipſo die æſtivi ſolſtitij, qui reperitur per *num.* 29, & 30, capiatur exquiſitiſſimis organis altitudo Solis meridiana; à quâ ſi ſubtrahatur altitudo Æquatoris per *num.* 27. inventa, relinquetur Solis maxima declinatio, adeoque & obliquitas Eclipticæ.

Intrà Zonas Temperatam, ac Torridam altitudini Solis inventæ, utpotè 45 gradibus majori, nihil metuendum à refractione, ſi dies ſerena fuerit. Faceſſit tamen negotium parallaxis, quam ex hactenus demonſtratis hîc nondum definire poſſum. Sed quia ſuo loco demonſtrabitur, Solis parallaxim horizontalem, hoc eſt maximam, non excedere dimidium minutum (imò fortaſſis ea prorsùs inſenſibilis eſt) neque tam accuratâ obliquitatis Eclipticæ notitiâ adhuc opus eſt; licebit interim differentiolam illam ex parallaxi ortam diſſimulare, cujus neglectio non tantùm officit huic negotio, quantùm officit in momento ſolſtitij determinando. Quamquam etiam, ſi videbitur, parallaxim, poſtmodò independenter ab his quæ ex eâ pendent, determinandam, hic poterimus tutò aſſumere, altitudini meridianæ Solis viſæ addendam, ut vera proveniat.

Reliquum eſt, ut oſtendatur methodo jam explicatâ repertam eſſe hoc tempore obliquitatem Eclipticæ, grad. 23, 36 quàm proximè. Id verò conſtabit ex accuratiſſimis obſervationibus Tychonis, atque Riccioli.

Altitudinem poli Uraniburgi Tycho lib. 1. progymn. pag. 17. ſtabilivit grad. 55. 54. 30'. undè habetur ibidem altitudo Æquatoris grad. 34. 5'. 30''. Ex hâc, & ex accuratiſſimis meridianis altitudinibus ab eodem Tychone obſervatis, obliquitas Eclipticæ deducitur ea, quæ in ſequenti laterculo exprimitur. Obliquitas viſa eſt, in quâ parallaxis neglecta eſt; vera, cui adjecta eſt parallaxis. Eam aſſumpſi non Tychonicam, quam ſatis conſtat eſſe nimis magnam, ab eoque levi ac penè nullo (ut alio loco oſtendam) ex fundamento accepta fuit; ſed illam Riccioli 30' ſecundorum; quam adhuc ipſam, ſi peccat, exceſſu peccare, non defectu firmiſſimis rationibus alibi oſtendetur.

	Iunij	Anno	Obliq. ecl. viſa grad.	'	''	Obliq. ecl. vera grad.	'	''
Stylo	12	1586.	23.	30.	6	23.	30.	36
vete-	14	1587.	23.	29.	0	23.	29.	30
ri.	11	1593.	23.	29.	30	23.	30.	0
Stylo veteri. Anno 1589 Iunij 11			23.	29.	55	23.	30.	25
			23.	30.	15	23.	30.	45
			23.	30.	15	23.	30.	45
			23.	30.	20	23.	30.	50

Tres primæ obliquitates deductæ ſunt ex tribus ſelectis altitudinibus meridianis, à Tychone obſervatis, quas recenſet Longomontanus. Ad poſtremas quatuor eodem anno, ac die inventas, adhibitæ ſunt 4 ſelectiſſimæ altitudines meridianæ, ab eodem Tychone obſervatæ organis exquiſitiſſimis, & à P. Alberto Curtio, qui juſſu Cæſaris obſervationibus Tychonicis in lucem edendis præeſt, ad Ricciolum tranſmiſſæ.

Ricciolus obliquitatem ſuam Eclipticæ, altero ſubſequenti laterculo expreſſam, ſic deduxit. Altitudinem poli Bononienſis obſervatione plus quadrageſies repetitâ, ex circumpolaribus ſtellis deprehendit grad. 44. 29'. 30''. ex quâ elicitur altitudo Æquatoris grad. 45. 30. 30''. Altitudines verò meridianas Solis, ubi tres eidem diei reperiuntur adſcriptæ, accepit tribus diverſis quadrantibus, nimirùm maximo, magno, mediocri; ubi duæ; duobus diverſis, nempè maximo, & magno.

	Obliq. Ecl. viſa grad.	/.	//.	Obliq. Ecl. vera grad.	/.	//.
1643. Iun. 21	23.	29.	25	23.	29.	55
	23.	29.	25	23.	29.	55
	23.	29.	30	23.	30.	0
1644. Iun. 20	23.	29.	20	23.	29.	50
	23.	29.	20	23.	29.	50
	23.	29.	20	23.	29.	50
1645. Iun. 20	23.	29.	20	23.	29.	50
	23.	29.	20	23.	29.	50
1646. Iun. 21	23.	29.	30	23.	30.	0
	23.	29.	40	23.	30.	10

Ex his apparet obliquitatem Eclipticæ hoc fæculo esse, quàm proximè graduum 23, 30', sive parallaxeos rationem habeas, sive non : atque eam proinde ad usus Astronomicos tutò deinceps assumi posse.

Corollarium.

Distantia X, D polorum; ÆquatorisX, (vide fig. 8.) & Eclipticæ D, æqualis est maximæ declinationi Eclipticæ BK, ac proinde etiam ipsa est grad. 23. 30. Nam BK, XD, cum eodem arcu XK, efficiunt ambo circuli quadrantem BX, KD.

NUMERUS XXXII.

Rejicitur mutatio obliquitatis Eclipticæ.

VErùm an tanta semper fuerit Solis declinatio maxima, sive Eclipticæ obliquitas, & futura deinceps tanta sit, inter Astronomos controvertitur. Mutabilem opinantur Purbachius, Regiomontanus, Copernicus, Rheticus, Fracastorius, Maginus, Clavius, Tycho, Longomontanus, Snellius, Lansbergius, Bullialdus, Vendelinus, alijque. Immutabilem existimarunt, Ptolomæus, Albategnius, Thebith, Stevinius, Augustinus Riccius, Gassendus, Reinerius, Kepplerus, Galilæus, & accuratissimus omnium Ricciolus.

Qui mutabilem asserunt, in eam opinionem inducti sunt, quòd observationes ab Hipparcho, ad Copernicum usque perpetuum obliquitatis decrementum videantur exhibere. Eas ex astronomorum monumentis (quæ vide apud Ricciolum pag.162) deproptas subjicio,

	ANNI	OBLIQUITAS ECLIP.		
	Ante Christum.	*Grad.*	*I.*	*II.*
Aristarchus	280	24	0	0
Eratosthenes	230	23	51	20
Hipparchus	140	23	51	20
	Post Christum.			
Ptolomæus	140	23	51	20
Albategnius	880	23	35	0
Arzachel	1070	23	34	0
Almeon	1140	23	33	30
Thebith	1210	23	33	30
Prophatius	1300	23	32	0
Purbachius	1460	23	28	0
Regiomontanus	1460	23	28	0
Nonius	1500	23	30	0
Domin. Maria	1500	23	29	0
Io. Vernerus	1510	23	28	30
Copernicus	1525	23	28	24

Eclipticæ immutabilis assertores ferè satis habent veterum observationes habere suspectas : in quo ijs prævivit jam ab annis 800 Albategnius, qui etiam ipse observationes veterum in dubium revocavit. Unus Ricciolus fallaciæ radicem, in Eratosthenis observatione latentem, detexit; ostenditque etiam ætate Eratosthenis imò & Pitheæ Massiliensis obliquitatem Eclipticæ fuisse grad. 23. 30, eamdem videlicet quæ modò est.

Eratosthenes dimensurus orbem Terræ, assumpsit, 1. Syenem esse sub Tropico Cancri; isthic enim scribunt Cleomedes, Strabo & Plinius, in meridie Solstitij per 150 stadia in orbem gnomones nullam umbram projicere : addit Plinius puteum ejus rei gratiâ factum esse, qui in meridie Solstitiali totus à Sole illustretur. 2. Syenem & Alexandriam sub eodem Meridiano esse. 3. Distantiam inter Alexandriam, & Syenem esse stadia 5000. IV. Radios à Solis margine, & centro in Terram emissos, esse quoad sensum parallelos. His positis, (ut ex Cleomede tradunt Nonius *l. 2. de obser. pag.* 132, & Snellius in Eratosthene Batavo. l. 1. à c. 9) disquisitionem suam instituit hunc ferè in modum.

Centrum Solis esto D. centrum Terræ A: Meridianus Alexandriæ GBH : Syene in B, Alexandria in C; sunt enim ex assumpto 2 sub uno Meridiano. Hic scaphium ita collocavit, ut gnomon NC perpendicularis esset ad superficiem Terræ, adeoque productus transiret per terræ centrum A. est porrò Scaphium vas Hemisphæricum cavum, gnomonem habens CN, centrum apice suo attingentem; & quadrantes CM, CK, in 90 gradus, divisos. Tum in meridie Solstitiali observavit quantitatem arcus CO, adeoque & anguli CNO qui determinatur à radio (FNO) ab extimo Solis margine, per apicem gnomonis emisso; eumque reperit grad. 7; 12'. Jam quia Syene est sub Tropico Cancri, radium (DB) è Solis centro in Syenem in meridie Solstitij directum conclusit transire per (A) Terræ centrum, ibidemque concurrere cum gnomone (NC) Alexandriæ erecto. Quoniam igitur radios FNO, DBA, ex assumpto quarto quoad sensum parallelos secat gnomon productus NCA, fuit per 27. 1. elem. angulus in Terræ centro factus DAN, par angulo alterno ONA. Quare cùm ONA, seu ONC, fuerit grad. 7. 12', etiam BAN, seu BAC, adeoque & BC arcus meridiani inter Syenem & Alexandriam, fuit grad. 7. 12'. Erat autem ex assumpto tertio arcus BC stadiorum 5000. Hinc cùm BC, grad. 7. 12' conficiat stadia 5000, conclusit ex regulâ prop. gradus 360, hoc est, totum ambitum Terræ stadia conficere 250000.

Hæc ratiocinationis Eratosthenicæ summa est; quæ licet ingeniosa & subtilis sit, ac proinde à Plinio alijsque meritò laudetur : tamen in hoc peccat, quòd radios DBA, FNO putaverit esse quoad sensum parallelos; ostendit enim Ricciolus *lib. 3. Almag. cap. 27. num. 7.* non radium FNO, sed DNP, eum nempè qui ex Solis centro profluit, quoad sensum æquidistare radio DBA. Itaque angulus DAN non est æqualis angulo ONA, ab umbrâ gnomonis determinato, sed angulo PNA; ac proindè DAN superat angulum ONA graduum 7. 12'. angulo PNO, hoc est FND, quem subtendit semidiameter Solaris, adeoque est 15', aut 16' minutorum, ut suo loco *b* ostendam. Angulus igitur DAN, seu BAC, adeoque etiam arcus BC distantia Syenis ab Alexandriâ est grad. 7. 27', aut 28'. Atque hæc hactenus rectè observarunt Nonius & Snellius : quamvis nihil subodorati, quid indè in falsam Eclipticæ obliquitatem redundarit. Id verò egregiè notavit Ricciolus hunc in modum.

b Lib. 3. cap. 5.

Distantia (CS) verticis Alexandrini ab Æquatore à Ptolomæo tradita *l. 4. Geom. c.5. & lib.5. Almag. c.* 13, est grad. 30. 38'. Ab hac si demas meridiani arcum CB, distantiam Alexandriæ à Syene quam Eratosthenes falsò credidit esse grad. 7. 12', remanet arcus BS distantia Syenis ab Æquatore; hoc est (quia Syene sub Tropico Cancri est) ipsa Eclipticæ obliquitas, & maxima Solis declinatio graduum 23. 46', quæ 5 solùm minutis differt ab obliquitate Eratosthenicâ grad. 23. 51. 20". Quæ differentiola nobis

insinuat

insinuat Eratosthenem usum esse distantiâ verticis Alexandrini ab Æquatore, paulò majore quàm Ptolomeus, nempè graduum 31 3; ab hâc enim, dempto arcu C B, quem falsò credidit esse grad. 7. 12, remanet arcus B S, hoc est obliquitas Eclipticæ grad. 23. 51, quanta nimirum ferè ab Eratosthene inventa tradebatur.

Hoc erroris fonte in observatione Eratosthenis detecto, ostendemus etiam ævo Eratosthenis, Hipparchi, Ptolomæi, obliquitatem Eclipticæ eamdem fuisse quæ modò est, nempè grad. 23. 30. Distantia enim C S verticis Alexandrini ab Æquatore à Ptolomæo ipso, ut dixi suprà, traditur grad. 30. 58'. Ab hâc igitur aufer arcum C B, quem ex correctâ Eratosthenis observatione probatum jam est esse grad. 7. 28': remanet obliquitas Eclipticæ B S grad. 23. 30, quanta est modò.

Id ipsum ex tribus adhuc alijs observationibus confirmat Ricciolus *l. 3. Almag. pag. 164*; inter quas eximia est illa Pitheæ Massiliensis, qui floruit ævo Alexandri Magni. Is, ut ex vetustis Massiliensium monumentis refert Gassendus in vitâ C. I. Fabricij Peireskij, observavit Massiliæ umbram Solstitialem esse ad gnomonem ut 213 $\frac{1}{5}$ ad 600. Gassendus autem ipse cum Peireskio per foramen factum in pariete altum pedes regios 52, reperit umbram Solstitialem hujus gnomonis esse partium 31950, quarum gnomen erat 90000. Quæ proportio umbræ ad gnomonem, cùm eadem prorsus sit, cum illâ Pitheæ Massiliensis, rectè concluditur altitudinem Solis Solstitialem, ac proindè & obliquitatem Eclipticæ, eam fuisse olim, quæ est modò.

Totum igitur fundamentum pro obliquitate mutabili Eclipticæ ex antiquis observationibus desumptum corruit, cùm ex ijs ipsis ejusdem immutabilitas stabiliatur.

Quod affirmat Copernicus, quo tempore fuit maxima Solis Eccentricitas, & lentissimus Fixarum motus, nempe circa Christi ortum, eo quoque maximam fuisse obliquitatem Eclipticæ: imò proportionalia obliquitatis, atque eccentricitatis decrementa fuisse, nihil urget: ostendam enim cum Ricciolo nullam *b* esse necessitatem agnoscendi ullam Anomaliam in motu Fixarum; & verisimilius *c* immutabilem esse anni quantitatem; nihil *d* etiam cogere ut Eccentricitas mutabilis statuatur.

b *Num. 46. & lib. 5. Astron. num. 13.*
c *Num. 47.*
d *Num. 41.*

Schema obliquitatis ex mente Copernici laterculo sequenti exprimitur.

Obliq. Eclipt.	grad.	/.	//.		*Mot. annuus Anomaliæ obliquæ Ecliptica*	*Periodus hujus Anomaliæ*
					l. ll. lll. llll.	
Maxima	23	52'	0			
Media	23	40	0			*ann. Ægypt.* 3434
Minima	23	28	0	an. 1653.	6. 17. 24. 9	*Iulian.* 3431. *dier.* 244.

NUMERUS XXXIII.

Momentum Æquinoctij invenire.

Fig. 43.

1. Inveniatur *a* altitudo Æquatoris O S.

2. Die in ephemeride aliquâ Æquinoctio deputatâ, capiatur *b* altitudo meridiana Solis P S: quod ut accuratiùs fiat, expediet duobus instrumentis uti, Secundorum saltem decades continentibus, uno quod Solis altitudinem P S, altero quod Solis à vertice distantiam D P immediatè exhibeat: tunc enim, si subtractâ D P distantiâ Solis à vertice ex 90 grad. residuum conveniat cum altitudine Solis inventâ, ea sine scrupulo exacta reputabitur.

a *Num. 27.*
b *Num. 28.*

3. Quod si altitudo meridiana Solis sic inventa, sit æqualis altitudini Æquatoris jam repertæ, Æquinoctium incidit in ipsum illum meridiem: si major, Æquinoctium vernum factum est ante meridiem, autumnale pòst; si minor, vernum continget pòst, autumnale verò ante meridiem. Quorum omnium ratio est manifesta. Quot verò minutis altitudo Solis meridiana differt ab altitudine Æquatoris, tot horis ante vel post meridiem factum esse Æquinoctium pronunciabis. Hipparchus, & Ptolomæus Æquinoctia observarunt armillis æquatorijs. Earum methodum, & fallaciam quam ex refractione patiuntur, nisi Æquinoctium prope meridiem contingat, vide apud Ricciolum *Almag. l. 3. pag. 133.*

Illud ab Astronomis asservatur, autumnalia vernis esse tutiora, quòd aër tum caloribus præcedentibus excoctus, minùs sit refractioni obnoxius. Ut Æquinoctium sic inventum ad anni quantitatem, & Solis ac Lunæ Motus Medios ac Veros, absque errore notabili determinandos, inservire possit, satis erit si in Solis capiendâ altitudine evitetur refractio (evitabitur autem ubicumque altitudo Æquatoris fuerit 40, aut 45 grad.) licet parallaxis interim contemnatur. Ex tali enim Æquinoctio Solares motus ita determinabimus, ut ad datum tempus de loco Solis Vero citra errorem ullius momenti constare nobis possit, ut ex *num. seq.* patebit.

NUMERUS XXXIV.

Parallaxis Solis in motuum cælestium determinatione, tutò contemni potest.

Ego quidem (quod etiam *num.* 28. insinuavi) ita sentio, longiùs ab erroris periculo abfuturum, qui nullam parallaxeos Solaris rationem habuerit, quàm eum, qui incertam, & non satis exploratam ejus quantitatem assumpserit. Horizontalem parallaxim Solis in distantiâ mediocri à Terrâ ita quidem determinavêre Astronomi hic adscripti.

	grad.	/
Ptolomæus	2.	57
Albategnius	3.	7
Copernicus	3.	0
Tycho	3.	0
Longomont.	2.	40
Lansberg.	2.	18
Bullialdus	2.	21

At si cum Ricciolo nostro, & Vendelino viam Aristarchæam tenuerimus, ex Lunæ dichotomæ observationibus, ut ostendam *lib. 3. num. 16 & 19*, colligemus Solis à Terrâ distantiam numquam minorem 7000 semid. Terræ, atque inde parallaxim horizontalem numquam majorem 30 Secundis: quam etiam ex dichotomiæ observationibus adhuc minorem fecerat Vendelinus, videlicet non majorem 14. aut 15

Secundis. Priores illi parallaxim suam ex infidâ (sic eam vocat Kepplerus) Terræ umbrâ, quâ nihil lubrieum magis, nihil hoc in genere incertius est, deduxêre. Vendelinus autem atque Ricciolus Lunæ dichotomiam cum Aristarcho complexi sunt, viam in tam arcano scrutinio certissimam, & unicam, ad quam excolendam omnes Europæ Astronomos Kepplerus invitat. Quare cùm non modò verosimilius sit, sed etiam propè certum, parallaxim Solis horiz. esse non majorem Secundis 28 aut 30, hoc est unius minuti semisse, ac proinde fortassis omnino nullam, liquet eum, qui nullam parallaxeos habuerit rationem, vix sensibiliter erraturum; adeoque multò minùs, quàm Copernicus, Tycho aliique, qui parallaxim falsam assumendo, errorem trium minutorum, aut duobus minutis majorem commisêre. Atqui tamen cum isto, licet ex parallaxi falsâ, errore aliquot minutorum à Tychone, Reynoldo, Magino Longomontano, Lansbergio, Argolo, Bullialdo, Solis ac Lunæ motus ita sunt determinati, ut loca Vera Solis ac Lunæ ad tempus datum, Novilunia ac Plenilunia, & utriusque Luminaris eclipses, citra errorem sensibilem constanter cum cælo conveniant. Ergo omnia illa multò exactiùs cum cælo consentient, si parallaxeos ratio nulla habeatur. Parallaxis ergo Solis in motuum cælestium constitutione tutò contemnitur.

NUMERUS XXXV.

Anni Solaris Medij quantitatem invenire.

AD Medios Solis motus constituendos opus est ut nota sit quantitas anni Solaris non Veri, sed Medij, quia anni Veri, ut ostendam *num.* 49, aliquantillam inæqualitatem subeunt; Medij autem, ut patet ex *def.* 28. *num.* 24 *& ex propr.* 2. *num.* 25. omnes æquales sunt. Dicuntur Medij, quòd inter Veros maximos & minimos quantitatem mediam obtineant.

§. 1. Elige duo Æquinoctia verna, vel potius duo autumnalia (quia minùs refractioni obnoxia) quàm longissimo intervallo ab invicem distantia: sic enim, siquis error exiguus in toto illo plurimorum annorum intervallo committitur, is per singulos annos distributus, insensibilis evadet.

Eligemus ergo in hunc finem Æquinoctium autumnale, ab Hipparcho (ut scribit Ptolomeus *l.* 3. *Almag. c.* 2.) observatum Alexandriæ anno 21 tertiæ periodi Calippicæ, hoc est anno ante Christum 158, 27 Septembris, in ipso meridie; quod proinde non laborat suspicione refractionis: erat verò annus post bissextilem tertius.

Alterum Æquinoctium erit, à Ricciolo accuratissimè observatum Bononiæ anno 1643, die 22 Septemb. expletâ, nempe post illius meridiem & horis 21. 25′: hic quoque erat annus post bissextilem tertius.

§. 2. Jam circa Æquinoctia sic assumpta duo erunt præstanda. Primò, quia in diversis horizontibus observata sunt, tempus unius erit ad tempus alterius revocandum. Quare cùm Alexandria sit Orientalior Bononiâ horâ 1. 43′. Æquinoctij Hipparchæi tempus Bononiæ fuit die Septemb. 26 completâ, & horis 22. 17′. Secundò, à tempore Æquinoctij posterioris demendi sunt dies 10, ob dies 10 à Kalendarij reformatoribus adjectos ad elapsos, qui reverà elapsi non erant. Factâ igitur hunc in modum reductione in stylum veterem, Æquinoctium Ricciolanum accidit anno 1643, completis diebus 12 Septembris, horis 21. min. 25. Ricciolus ad temporis Hipparchæi Æquinoctij minuta 17, adjicit min. 30, ut fiant min. 47. Hoc idcirco fecit, quòd rationem habendam putaverit parallaxeos Solaris, quæ ipsi est 30 Secundorum, cui proinde 30 min. prima temporis debentur. At cùm sciri nondum possit parallaxeos quantitas, ea debet in hoc scrutinio prætermitti, & posse absque erroris sensibilis periculo prætermitti, jam *præced. num.* ostensum est. Quia tamen parallaxis 30 Secund. adeò parva est, ut eam sive ponas, sive omittas, ad præsens negotium intersit parum, nos quoque illam, ne Riccioli calculum turbemus, retinebimus, statuemusque cum illo tempus Hipparchæi Æquinoctij anno ante Christum 158, expletis diebus 26. Septemb. horis 22. min. 47. Bononiæ.

§. 3. Quod si annus Solaris, hoc est tempus medium inter duo ejusdem nominis Æquinoctia immediata, æqualis esset anno Juliano dierum 365, hor. 6, debuisset Æquinoctium posterius à Ricciolo observatum, incidere in eumdem prorsùs diem Septembris, & horam cum Hipparchæo, nempe in 26 Sept. H. 22. 47′. Nunc verò præcessit, atque incidit in 12 Sept. hor. 21. 25. ac proinde præcessio fuit dierum 14. h. 1. 22′. Quoniam igitur ab Æquinoctio Hipparchæo, usque ad Ricciolanum effluxerunt anni Solares integri 1800: manifestum est totidem annos Julianos; nempe 1800, excedere 1800 annos Solares diebus 14. H. 1. 22′.

§. 4. Quare cùm anni Juliani 1800, annos solares 1800 excedant diebus 14, H. 1. 22′. Unus annus Julianus, unum annum Solarem quo excessu superabit? Dies 14. H. 1. 22′, hoc est, Secunda 1214520, dividantur per 1800, proveniunt 674, $\frac{1320}{1800}$, hoc est min. 11′. 14″. 43‴; qui anni Juliani dierum 365. Hor. 6 supra Solarem excessus est. Quare si hunc demas à diebus 365. Horis 6, relinquetur annus Solaris dierum 365. H. 5. 48′. 45″, 17‴.

§. 5. Ut exploratior anni Solaris quantitas evadat, operationem totam hactenus expositam, expediet cum pluribus alijs Æquinoctijs longissimo itidem intervallo à se invicem distantibus, exercere. Ptolomæus *l.* 3. *Almagesti* refert ab Hipparchio Alexandriæ Æquinoctium observatum anno 20 tertiæ periodi Calippicæ, hoc est anno ante Christum labente 159, Sept. die 26 adhuc currente, sub Ortum Solis. H. 18. 41′. 15″. Quod eruditè probat Ricciolus in *Scholio pag.* 139. Bononiæ verò Sept. 26. H. 16. 28. 15″. Ricciolus autem Bononiæ maximis quadrantibus Æquinoctium observavit, anno 1646, Sept. 22 completâ, horâ 14, 56′. Cum his duobus Æquinoctijs procedendo ut supra, elicitur apparens, Solaris annus dierum 365, hor. 5. 48′, 46″, 32‴ à Superiori solùm differens Secundo. 1, & 15 Tertijs, quæ sanè illustris est nota veritatis. Calculus meus cum Ricciolano convenit. Porro inter quantitates jam inventas media est D. 365. H. 5. 48′, 45″. Quam ut veræ proximam retinendam censeo.

Annus Solaris.

Prior. D. 365. H. 5. 48′. 45″. 17‴.
Poster. D. 365. H. 5. 48′. 46″. 32‴.
Tycho D. 365. H. 5. 48′. 45″. 0‴, quam, inter has mediam, sequor.

Nota Ricciolum l. 3. *pag.* 138. *in exemplo suo* 2, *tempus Æquinoctij Hipparchei exprimere his verbis*, ante Christum 158. die 26 Septembris completâ & horis 22,

22, M. 47. *Tempus verò Æquinoctij à se observati, sic*: anno 1643 die 22 Septembris completâ, & post ejus meridem Hor. 22. M. 25. *Ubi videtur horas 22 sumere completas ut in Æquinoctio priori. Si autem accipiantur hora 22 completa, præcessio erit non hora. 1 22', sed hor. 0. 22'. ac proinde non proveniet anni quantitas. D. 365. H. 5. 48'. 45''. 17'''; sed alia priore major. D. 365. H. 5. 48'. 47''. 16''.*

Scholium.

a *Quid sit med. æquin. vide num. 45.*

Hæc anni Solaris Medij quantitas deducta est ex veris Æquinoctijs, cùm debuisset ex [a] *medijs. Nam quia intervallum temporis duobus Medijs Æquinoctijs terminatum, adequatè in annos medios resolvitur, anni autem Medij omnes inter se æquales sunt, manifestum est quantitatem annuam ex tali intervallo elicitam, esse justam, hoc est, eamdem semper sibi æqualem. Tempus autem duobus veris Æquinoctiis terminatum, non est æquale tempori terminato duobus medijs (ut ostendam num. 49) nisi Æquinoctium secundum fiat in eodem Anomaliæ puncto, quo primum, quod ob tardissimum Apogei motum non nisi post annos 22245 contingit. Quare anni medij quantitas omnino justa ex veris Æquinoctiis non habetur, si theoriam spectemus. Oportet ergo Æquinoctia vera in media convertere, quod fieri non potest, ut ex sequentibus patebit, nisi priùs Medij anni quantitas sit nota. Ad hunc nodum respondeo quantitatem annuam deductam ex Æquinoctiis veris, à deductâ ex Medijs paucis tantùm Secundis differre, uti num. 49 ostendam. Quare ea, quæ ex Mediis deducta est, absque ullo erroris sensibilis periculo, ad motus Solis medios deinceps constituendos adhibebitur.*

NUMERUS XXXVI.

Ex anno Solari, Medios Solis motus annuos, menstruos, diurnos &c. invenire.

Perficitur hoc regulâ proportionum. Nam si Solari anno Dierum 365 H. 5. 48'. 40'' (annus Riccioli est, quo hic utor exempli gratiâ) debentur gradus 360, seu Signa 12; anno civili, mensi, diei, horæ, minuto, quot gradus aut minuta Eclipticæ debentur? Itaque primo loco statuatur quantitas anni Solaris resoluta priùs in Secunda; secundo loco Zodiacus etiam in Secunda resolutus: tertio loco annus civilis, vel mensis, vel dies &c. etiam in Secunda resoluti. Ducatur deinde secundum in tertium, & productum dividatur per primum; quotiens dabit Signa, gradus, minuta, quæ debentur medio Solis motui, anno civili, menstruo, diurno &c. Termini porrò ad Secunda reducti sunt hi

Annus Tropicus, seu Solaris D. 365. h. 5. 48'. 40'' est Secundorum 31 (556,920'

Zodiacus, sive gradus 360. est 1 (269, 000' Secundorum.

Annus civilis dierum 366 est Secund. 31 (622, 400'.

Annus communis dierum 365 est Secundorum 31 (536, 000'

Dies naturalis est Secund. 86, 400'

Hora secund. 3600'

Minutum horæ 60' Sec.

Hàc methodo ex anno Tropico D. 365. h. 5. 48'. 40''. eliciuntur motus Medij, qui laterculo sequenti continentur.

Solis motus medij

	Signa	grad.	I	II	III	IV	V	VI
Anni dierum 365	11	29	45	40	50	38	0	0
Anni dierum 366	0	0	44	49	10	29	46	20
Diei	0	0	59	80	19	51	46	20
Horæ	0	0	2	2	50	50	0	0
Minuti	0	0	0	2	27	50	50	0
Secundi	0	0	0	0	2	27	50	50

Et quidem hi motus satis accurati sunt; nam in motu diurno hic posito conveniunt usque ad minuta tertia inclusivè Alphonsini, Reinholdus, Tycho, Longomontanus, Kepplerus, Lansbergius, Bullialdus, Vendelinus, Ricciolus: uno solùm Tertio discrepat Ptolomæus. Nota porro diebus 366 in tabellâ adscribi Signa. 0. grad. 0. 44' &c. quamvis reverà Sol interim motu medio absolverit Sig. 12. grad. 44'. &c. Solent enim Astronomi ex summâ Mediorum Motuum integrum circulum (hoc est Signa 12, seu grad. 360) abjicere quoties potest.

Quod si motus illi sibi addantur continuò, provenient motus annorum duorum, trium &c. dierum unius, duorum, trium &c. & sic deinceps in speciebus reliquis. Atque hunc in Modum conduntur tabulæ Mediorum Motuum, quas accurato studio jam supputatas apud Astronomos passim reperies.

Corollarium.

Tempus dato motui medio debitum sic invenies: oporteat ex. gr. reperire tempus quo Sol percurrit unum gradum.

Sol percurrit gradus 360 diebus 365, Horas. 5. 48'. 40''. Ergò gradum unum quot diebus absolvit? Duc secundum terminum in tertium; productum divide per primum: quotiens dabit tempus quæsitum.

NUMERUS XXXVII.

Locum aliquem Solis in Ecliptica ex observatione cognoscere.

Fig. 44.

SIt horizon KN, Meridianus KHNG, Æquator FG. Reperiatur per *num.* 28 altitudo Solis meridiana QN, & per *num.* 27 altitudo Æquatoris FN. utriusque altitudinis differentia QF, erit declinatio Solis eo momento ab Æquatore. Quare si in tabulâ declinationis punctorum Eclipticæ, inquiratur punctum similem declinationem habens, nempe in illo Eclipticæ quadrante, in quo ex tempestate anni constat Solem versari, illud ipsum Eclipticæ punctum est, sub quo Sol momento illo existit.

Declinationes porrò punctorum Eclipticæ singulorum ab Æquatore, ex declinatione maximâ Solis, quæ per num. 31. est grad. 23. 30, reperiuntur per *regulam trium.* Nam (ut demonstratum est à Clavio ad *prop.* 1. *l.* 1. *gnomon.* alijsque) ut sinus totus est ad sinum grad. 23. 30, declinationis nempe maximæ, ita sinus distantiæ puncti Eclipticæ dati ab Æquinoctio est ad sinum declinationis puncti dati.

NUMERUS XXXVIII.

Solis Excentricitatem, & locum Apogei in Ecliptica invenire.

INvenire Eccentricitas dicitur cùm ejus proportio ad radium Eccentrici exhibetur. Ex modis pluribus per Astronomos insignes excogitatis, proponam cæteris expeditiorem, qui est Riccioli *lib.* 3. *Almag. pag.* 154.

Fig. 45.

Ecliptica suprema sit BADP, ejus, & Terræ centrum T; initium Arietis D, Libræ B. Centrum Eccentrici esto C, linea Apogei AKCTVP; Apogeum K; locus Apogei in Eclipticâ A.

Oporteat primò invenire Eccentricitatem CT in partibus radij Eccentrici, hoc est quot partium sit CT, quarum CK radius est 100000. Secundò oporteat invenire distantiam Apogei A in Eclipticâ, ab Arietis principio D; hoc est quantitatem arcus DA.

§. 1. Ad hæc obtinenda requiritur observatio duorum *n* Æquinoctiorum se proximè consequentium, & unius loci veri *m* Solis, ex. gr. L, à Solstitio sufficienter distantis. Ducatur linea Æquinoctiorum DB, secans Eccentricum in N, M, & rectæ CN, CM; & TL secans Eccentricum in S, ac tandem recta CS. Observatum est à Ricciolo Bononiæ, 1646 Æquinoctium Autumni in B, D, 22 Septemb. horâ 14. 56'. post merid. Ibidem anno 1647 observavit Æquinoctium vernum in D, contigisse die 20 Martij, horâ post merid. 5. 56'. Ergò Sol moratus est in Eccentrici arcu MVN, ac proinde sub Eclipticæ medietate Australi BPD, diebus 178. h. 15. Nota est autem per *num.* 36, quantitas Medij Motus huic tempori debita, ac proinde (ut patet ex *def.* 20. *num.* 24) notus est arcus MVN, adeoque & angulus *o* MCN, nempe grad. 176. 3'. 41": quibus deductis à 180 gradibus remanet *a* summa angulorum M, N, grad. 3. 56'. 19". Quare cùm anguli M, N sint *b* æquales, unus M, est grad. 1. 58'. 9". 30"', grad. 2. 58'. 10'.

n Per num. 33. m Per num. 37. o Per 33. 6. a Per 32. 1. b Per 5. 1.

§. 2. Deinde anno 1646, observavit Ricciolus Bononiæ in meridie diei 28 Iulij Solem in L sub Leonis gradu 5. 14'. Quare arcus LD distantia veri Solis loci L ab Arietis initio D, adeoque & *c* angulus LTD notus est, nempe grad. 125. 14'. quibus subtractis à semicirculo DLB, remanent pro arcu LB, seu angulo *d* LTB, seu ITM grad. 54. 46'.

c Per 43. 6. d Per 32. 1.

§. 3. A meridie diei 28 Iulij, quo Solis locus verus L, observatus est, usque ad diem 22 Septemb. horam post merid. 14. 56', tempus nempe Æquinoctij autumnalis B, fluxerunt dies 56. h. 14. 56', quibus Sol motu Anomaliæ, sive Motu Medio (nam in Sole hi motus insensibiliter differunt, ut monui *num.* 24. *defin.* 20) percurrit arcum SM. Quare cùm Motus Medius dierum 56. h. 14. 56' reperiatur *e* esse graduum 55. 48'. 34", tantus erit arcus SM, angulusque SCM, seu SCI.

e Per num. 36.

§. 4. Jam angulo LTB, seu ITM §. 2 suprà invento grad. 54. 46', adde angulum §. 1 inventum M, grad. 1. 58'. 10': fit summa grad. 56. 44'. 10': pro externo TIC, qui utrique *f* M, & ITM æqualis est.

f Per 32. 1.

§. 5. Rursùs angulo TIC grad. 56. 44'. 10' subtracto à grad. 180, remanet *i* angulus SIC grad. 123. 15'. 50'.

i Per 13. 1.

§. 6. Denique in triangulo ISC, quia per §. 3. notus est angulus SCI grad. 55. 48'. 34". & SIC. grad. *m* 123. 15'. 50', innotescet *k* & tertius ISC, seu TSC, eritque grad. 0. 55'. 36", qui est *z* æquatio conveniens observato Solis loco L.

m Per §. 5. k Per 23. 1. z Defin. 25. num. 24.

§. 7. Repertis omnibus angulis requisitis, Eccentricitas TC, & arcus AD ita eruentur. Quia in triangulo CSI noti jam sunt omnes anguli, & radius CS datur 100000 partium; in ijsdem partibus *l* innotescet CI, eritque 1913⅓: quibus demptis à radio CM 100000, remanet MI partium 98086⅔. Cum latere MI, & angulis M *a* grad. 1. 58'. 10', ITM grad. *b* 54. 46', reperitur *q* IT partium 4084¼. Tandem ex lateribus jam notis IT, CI, & angulo TIC *c* suprà invento grad. 56. 44'. 10', eruitur *r* Eccentricitas TC partium 3431, quarum CK radius est 100000, & angulus ITC, seu LTA grad. 27. 47', 45": quo subtracto ab angulo LTD, invento suprà *n* grad. 125. 14', remanet angulus ATD, seu arcus AD, distantia Apogei A, ab initio Arietis D, grad, 97. 26'. 25". Quare anno 1646 die 28 Iulij Apogeum erat sub Cancri gradu 7. 26'. 15".

l Per probl. 9. cap. 3. Geom. pra. a Per §. 1. b Per §. 2. q Per eund. c Per §. 4. r Per prob. 10. cap. 3. Geometr. pract. n Per §. 2.

§. 8. Ex alio loco vero Solis observato Bononiæ ab eodem Ricciolo 1646, D. 4. Aug. in Leonis grad. 11. 56', 40', Æquinoctijs verò ijsdem, ratiocinando ut supra, reperitur Eccentricitas TC partium 3491, quarum prior erat 3431; arcus verò AD distantia Apogei veri ab initio Arietis grad. 97. 29'. 4". Quare Apogeum Solis fuit in Cancri grad. 7. 29'. 4".

§. 9. His, & alijs observationibus inductus Ricciolus medio electo, statuit Eccentricitatem partium 3460, quarum radius Eccentrici est 100000; Apogeum verò in Cancri grad. 7. 26'. ¼ vel in Cancri grad. 7. 26: quem virum observandi peritiâ mirabiliter excellentem libenter sequor.

NU.

NUMERUS XXXIX.

Temporis momento: quo Solis locus verus, seu apparens, per observationem est cognitus, motum Medium congruentem, invenire.

Fig. 45. *a Defin. 23. num. 24.*

LOcus Solis apparens per observationem cognitus sit L, in Leonis gradu 5. 14', ad quem ex centro Eclipticæ T ducatur recta T L, secans Eccentricum in S, & ab Eccentrici centro C recta C S, eique parallela T E, linea motus Medij. Sol igitur est in Eccentrici puncto S, & motus *a* ejus Medius est arcus D A E, Arietis initio existente in D. Apogeum esto in puncto K, & Apogei linea sit A K V P. His ita ordinatis.

b Per num. 38. o Per 27. 1. r Per 33. 6. s Defin. 23. num. 24.

Bononiæ anno 1646. Iulij 28 in meridie, observavit Ricciolus Solem sub Leonis gradu 5. 14'. Quare arcus L A D à vero Solis loco L, usque ad Arietis initium D, fuit grad. 125. 14'. Arcus autem A D, distantia Apogei veri A ab Arietis initio, inventa *b* tum fuit grad. 97. 26'. 15". Ergo si arcus D A auferatur ab arcu D A L, remanet arcus L A grad. 27. 47'. 45". Deinde angulus T S C, hoc est *o* L T E, hoc est *r* arcus L E, *num.* 38. §. 6. inventus, est grad. 0. 55'. 36". Quare totus arcus E A, nempe Anomalia *s* Solis media, est grad. 28. 43'. 21": cui si addatur arcus A D grad. 97. 26'. 15", preveniunt grad. 126. 9'. 36". pro arcu toto D A E, hoc est, pro Motu Solis Medio ad annum 1646. Jul. 28 in meridie, tempus observati veri Solis loci, L.

Ex uno motu Medio sic invento, omnium Solis motuum supputatio ducitur, ut patebit ex num. 53. 54. 56.

Aliter & universaliùs.

q Per num. 37. c Per num. 38. d Per Probl. 21. cap. 3. Geom. Pract. n Per 27. 1. p Per 33. 6.

OBserva *q* quovis tempore locum Solis verum, qui sit L. Ita notus erit arcus D A L. Supputetur deinde locus Apogej veri A *per num.* 44, qui ab his non dependet: ita notus erit arcus D A: quem si auferas ab arcu noto D A L, notus remanet arcus A L, sive angulus L T A, vel S T C. In triangulo igitur S C T, quia notus est angulus S T C, & duo latera T C, C S; Eccentricitas nimirum T C partium *c* 3460, quarum C S radius Eccentrici est 100000, ex his reperietur *d* angulus T S C, hoc est *n* L T E, hoc *p* est arcus L E. Quare si notus jam arcus L E addatur ad notum arcum L A D, totus arcus E A D, hoc est Motus Solis Medius, congruens observato Solis loco vero L notus erit. Quod erat quæsitum.

NUMERUS XL.

Æquationes ad singulos Anomaliæ gradus invenire.

Fig. 37. e Defin. 21. num. 24. d Per propr. 8. num. 25.

EClipticæ supremæ L C P K, centrum esto A, Eccentrici verò I F N G centrum sit B, Augium linea sit C F B A G K, ad quam per A centrum Eclipticæ ducta perpendicularis L I A N P, determinat longitudines *e* medias I, N, ad quas *d* Æquationes sunt maximæ B I A, B N A. Porrò æquationum inventio omnis ab Eccentricitate *numero prac.* jam inventâ dependet. Initium ducemus ab æquatione maximâ B I A.

In triangulo rectangulo B A I dantur duo latera, B I, Eccentrici radius partium 100000, & Eccentricitas A B 3460 earumdem partium. Ex quibus *e* elicitur prosthaphæresis maxima A I B, grad. 1. 59': item A I Solis à Terræ centro distantia innotescit, eâdem operâ in partibus radij B I.

e Per Probl. 4. cap. 3. Geomet. Pract.

Detur deinde arcus quivis Anomaliæ F O, ex. gr. graduum 46; & oporteat *o* prosthaphæresim A O B ei convenientem invenire. Quoniam datur arcus F O grad. 46, etiam dabitur semicirculi residuum O G, adeoque & angulus O B G, grad. 134. In triangulo igitur A O B, dantur angulus O B G, seu O B A grad. 134, & latera duo A B, B O, angulum continentia, nimirum A B, Eccentricitas 3460, quarum B O radius Eccentrici est 100000. Quare ex his *n* elicietur æquatio A O B grad. 1. 23'. 34"; itemque A O Solis distantia à centro Terræ ad datum Anomaliæ punctum O, in partibus radij B O.

o Defin. 25. num. 24. n Per Probl. 11. cap. 3. Geomet. Pract.

Inventis æquationibus unius semicirculi F I G, etiam alterius G N F inventæ erunt, ut patet ex *propr.* 10. *num.* 25. Quare si detur Anomalia F T H maior gradibus 180, accipienda est æquatio competens ejus ad grad. 360 complemento F H.

Corollarium.

Quantitas Anomaliæ F I, in cujus termino I fit maxima æquatio A I B, habetur, si ad gradus 90 addatur ipsa æquatio maxima grad. 1. 59'. Arcus enim F I similis est arcui C M, qui exceedit quadrantem C L arcu M L, seu angulo A I B, maximâ prosthaphæresi grad. 1. 59'.

NUMERUS XLI.

Mutatio Eccentricitatis rejicitur.

MUtari Eccentricitatem censuerunt Arzachel, Albategnius, Purbachius, Rheticus, Mæstlinus, Rheinholdus, Copernicus, Tycho, Maginus, Snellius, Lansbergius.

Immutabilem adstruunt Ptolomæus, Scaliger, Kepplerus, Longomontanus, Rheita, Bullialdus, Vendelinus, Ricciolus; quos sequor.

Et priores quidem non solùm mutari Eccentricitatem volunt, sed etiam motum hujus variationis statuunt apparenter inæqualem: quam inæqualitatem ut salvent, centrum Solis per circellum quemdam æquali motu circumferunt, eumque motum vocant *Anomaliam centri Solis*, cujus periodus Copernico est annorum 3431 ⅔, Lansbergio annorum 3000.

Fundamentum unicum est, quòd alia atque alia diversis sæculis Eccentricitas sit reperta, ut exprimitur laterculo sequenti.

	anni Christi	*Eccentricitas in partibus, quarum radius est 100000*
Ptolomæus	139.	4152. *corr.* 3648 ⅓
Albategnius	883.	3465 8/11
Tycho	1588.	3584 ¼
Ricciolus	1646.	3460.

Verùm, ut benè Ricciolus notat, differentia non admodùm magna harum observationum oriri potuit ex neglectu parallaxis, & potissimùm refractionis, vel etiam ex vitio aliquo, licet parvo, instrumentorum. Neque enim mutatio illa Eccentricitatis ullo solido argumento probatur, sive ex eclipsibus, & umbrarum in-

incremento vel decremento, ſive ex obſervationibus Solis, præſertim Solſtitialibus. Deinde loca Solis Vera, deducta ex tabulis eorum qui ſtabilem Eccentricitatem retinent, æquè aut meliùs cælo conveniunt quàm educta ex tabulis eorum, qui defendunt mutabilem. Poſtremò teſtatur Ricciolus, quo tempore ſecundùm adverſariorum hypotheſes debuit reperiri talis menſura, repertam eſſe à ſe & alijs longè diverſam. Unde hypotheſes illæ nec ſibi nec obſervationibus pluribus conſentiunt.

Nihil eſt igitur, quod Solis motum tantis intricemus moleſtijs, quantas inſtabilis illa Eccentricitas cauſat. Ea enim pro unâ Solis Anomaliâ, duplicem invenit, & proſthaphæreſim maximam a cæteraſque omnes continuè immutat, & motum Apogei a inæqualem reddit. Atque ita fit ut ſupputatio loci Solis plus quàm duplo prolixior, & intricatior evadat.

a *Patet ex num. 40, & 38, quia tam æquationes, quàm locus Apogei ab Eccentricitate pendet.*

NUMERUS XLII.

Rejicitur inæqualitas apparens motus Apogei.

MOveri Apogeum in o conſequentia omnino certum eſt, non ſolùm ex obſerv. 2. num. 22; ſed etiam ex Apogei locis b è cælo ipſo longo temporum intervallo deductis. Nam à Ptolomæo anno Chriſti 139, inventum eſt Apogeum circa Geminorum grad. 5. 30′. Anno autem 1646 repertum eſt à Ricciolo in Cancri gradu 7. 26′. Itaque annis 1507 Apogeum proceſſit ad gradus ferè 32. 56′.

o *Defin. 1. num. 24.*
b *Per num. 38.*

Sed quæſtio eſt, utrum motus hic inæqualis ſit reſpectu centri Eclipticæ, & Terræ. Eam primus movit Arzachel, quia cenſuit Apogeum non ſolùm inæqualiter moveri; ſed etiam modò progredi in a conſequentia, modò in antecedentia regredi. Ratio ſic opinandi hæc fuit. Albategnius anno Chriſti 883, invenit Apogeum in Gemin. grad. 22. 17′. Arzachel verò ipſe anno 1076, nempe annis poſt Albategnium 193, Apogeum nactus eſt in Gemin. grad. 17. 53′.

a *Defin. 1. num. 24.*

Sed omnino credibile eſt Arzachelem erraſſe aut in obſervando, aut in ſupputando, aut in conciliandis obſervationibus 402, quas teſte Regiomontano in hoc negotio habuit. Snellius in notis ad obſervationes Haſſiacas, concludit ab eo errorem in obſervando commiſſum. Geber autem ſuſpectos habet calculos Arzachelis: ſcribit enim repertam à ſe Eccentricitatem fuiſſe eandem quæ ab Albategnio, locum tamen Apogei longè diverſum. Alijs & Albategnius & Arzachel, ſive in obſervando, ſive in ſupputando ſuſpecti ſunt.

Nullo igitur ſolido fundamento, ſive regreſſus Apogei, ſive progreſſus inæqualis innitur. Quare rejicitur ab ijs omnibus qui Eccentricitatem immutabilem tuentur. Maneat igitur, Apogeum circa mundi centrum æqualiter moveri.

NUMERUS XLIII.

Quantitatem Annuam motus Apogei definire.

ELigantur duo Apogei loca quàm longiſſimo annorum intervallo obſervata. Nam ſi annorum ſumma inter utrumque Apogeum dedit motum Apogei graduum & minutorum tot; annus unus quantum dabit? Per regulam proportionum quæſitum obtinebitur.

Verùm difficultas tota in eo poſita eſt, ut binæ Apogei obſervationes ejuſmodi obtineantur. Si conſtaret uter Apogeum invenerit in Gemin. grad. 5. 30, Hipparchuſne an Ptolomæus, inter quorum obſervationes intercedunt anni 279, confecta res eſſet. At quia hoc non ſatis liquet; Longomontanus & Kepplerus aliam viam ſatis ingenioſam inverunt. Obſervatis Apogei progreſſibus, & Epochâ mundi conditi, collegerunt Apogeum ſub initium mundi fuiſſe proximum initio Arietis. Unde meritò ſibi viſi ſunt exiſtimare Apogeum in ipſo mundi exordio fuiſſe à Deo ſub Arietis initio conſtitutum. Longomontanus igitur, ſtatuens mundum conditum annis ante Chriſtum 3964, ex Apogeo à ſe anno 1590 obſervato in Cancri grad. 5. 30, collegit annuum Apogei motum. 1′. 50″. 14‴: Kepplerus verò exiſtimans mundum conditum annis ante Chriſtum 3993, ex Apogeo à ſe anno 1588 obſervato in Cancri gradu 5. 32′, motum annuum Apogei deduxit 1. 2″.

Laudat hoc inventum, & ſequitur Ricciolus noſter; ſed mundi conditi annum accuratiùs conſtituit. Aſſerit enim *Almageſti novi lib. 3. pag.* 158. ſe in libro ſuo Chronologico, (quem, dum iſta ſcribo, nondum vulgavit) planè eviciſſe, mundum nec ultra annum 4076 ante Chriſtum, nec poſt aut citrà annum 3993 conditum fuiſſe, & inter omnes annos latitudinis hujus intermedios, qui ſunt 83, annum 4063 videri fuiſſe mundo natalem. Ab hoc anno ad obſervatum ab ipſo Apogeum ſub Cancri grad. 7. 26′. 15″. anno 1646, die 28 Iulij, effluxerunt anni 5709: quibus cùm Apogeum ab initio Arietis progreſſum ſit grad. 97. 26′. 15″; igitur anno uno quantùm progreditur? per regulam proport. proveniunt 1. 1′. 10‴ pro motu annuo Apogei; quem ſe ait Ricciolus ſecurè retinere, donec meliora quis proferat.

Tycho minùs quàm oportuit, accuratus hic fuit, qui ex intervallo annorum ſolummodò 100 elicuit motum Apogei annuum 45″, juſto utique minorem. Hunc Tychonis proceſſum Longomontanus ejus aliàs ſtudioſiſſimus, etiam improbat in Commentario de Sole: & ſanè mirum eſt perſuadere ſibi potuiſſe ſummum Aſtronomum, ex 100 annis de motu tam lento certi quidpiam conſtitui potuiſſe, quando id ne ex annis quidem 280 Ptolomæus ſperavit.

Quantitates Annui motus Apogei hactenus deductas, tum ab authoribus hic citatis, tum ab alijs nonnullis, qui propiùs viſi ſunt ad veritatem accedere, exhibentur ſequenti laterculo.

AUTHORES.	MOTUS ANNUOS APOGEI.				PERIODUS ANNORUM.
	I.	II.	III.	IIII.	
Albategnius	0	59	4	0	30662
Longomontanus	1	1	50	14	20958
Kepplerus	1	2	0	0	20903
Lansbergius	1	7	30	$38\frac{1}{2}$	10255
Bullialdus	0	57	0	0	22737
Vendelinus	1	2	8	21	20864
Ricciolus	1	3	52	0	......
Idem & potius	1	1	10	0	21245

Ex omnibus hoc numero dictis manifeſtum eſt, annui motus Apogei quantitatem exactè definiri non poſſe. Satis tamen definita ea eſt ad finem hic intentum, qui eſt locum Solis ad datum tempus ſup-

ſupputare. Ut enim inde locum Solis error unius minuti inducatur, in Apogei loco error circiter unius gradus requiritur.

NUMERUS XLIV.

Locum Apogei ad tempus datum ſupputare.

INveniatur Apogei locus ad aliquod tempus; quod factum eſt *num.* 38. ubi 28 Iul. anno 1646 repertum eſt Apogeum in Cancri gradu 7. 26′. 15″. Deinde per *num. præcedentem* vide quantus motus debeatur ſummæ annorum mediæ inter 28 Iulij anni 1646. & tempus datum. Hunc motum adde loco invento Apogei, ſi tempus datum ſequitur 28. Iul. anni 1646; aufer, ſi præcedit; & habebis locum, ſive diſtantiam Apogei ab Arietis initio ad tempus datum.

Hoc modo ad initium annorum Chriſti reperitur diſtantia Apogei ab Arietis initio, Signorum 2. grad. 9. 28′. 45″.

Cùm tempus datum antecedit correctionem Kalendarij, quæ facta eſt anno 1582, 5. Octob. quæ dici juſſa fuit, 15 Octobris, abjiciendi ſunt à tempore dies 10 priuſquam ei motus Medius conveniens quæratur: quod in omni ſupputatione æqualium motuum ſervari debet.

NUMERUS XLV.

Dato tempore Æquinoctij veri, Æquinoctii Medii tempus invenire.

Fig. 46.

CEntrum Eclipticæ eſto T, Eccentrici autem C: initium Arietis D, Libræ B: linea Apogei AP. Per T ducatur ad D recta T D ſecans Eccentricum in puncto N, ad quod ex C ſit recta CN, cui ducatur parallela TR; quæ erit *a* linea motus Medij; & ſi Sol exiſtat in N ſub initio Arietis D, erit *b* punctum R locus Solis Medius, ſive Sol Medius. Pari modo ad partem alteram ducantur rectæ TMB, CM, & TQ parallela ad CM.

a *Per defin.* 13. *nu.* 24.
b *Per defin.* 14. *num.* 24.

Medium igitur Æquinoctium fieri dicitur, cùm linea motus Medij attingit initium Arietis D, vel Libræ, B; quemadmodum Æquinoctium verum contingit, lineâ motus veri initium Libræ, vel Arietis attingente.

Quoniam verò in primo Anomaliæ ſemicirculo KMV, linea motus Medij TQ antevertit lineam motus Veri TB; manifeſtum eſt quando linea motus veri TMB attingit initium Libræ B, lineam Medij motus TQ jam anteà illud pertranſiiſſe, adeoque Æquinoctium medium præceſſiſſe æquinoctium verum eâ temporis quantitate, quâ parallela TQ æquali ſuo motu percurrit arcum BQ, qui eſt proſthaphæreſis conveniens Soli in M, tempore veri Æquinoctij Autumnalis. Contra in altero ſemicirculo VNK, Æquinoctium Medium ſit ſeriùs quàm Verum, tanto tempore, quanto percurritur æquatio RD, Soli conveniens tempore verni Æquinoctij Veri.

Hoc præmiſſo, Problemati ita ſatisfiet. Primùm ſupputandus eſt *o* Apogei locus, hoc eſt, quantitas arcus AD, diſtantia ejus ab Arietis initio D, ad tempus datum. Deinde invenienda eſt proſthaphæreſis, debita dato Solis loco Vero. Quoniam Sol ex hyp. eſt in principio Arietis D, notuſque eſt arcus DA, diſtantia illius ab Apogeo, notus erit angulus ATD, ſeu CTN. Quoniam igitur in triangulo CNT, dantur angulus CTN, & duo latera CT, CN, nimirum Eccentricitas CT *c* 3460, quarum Eccentrici radius CN eſt 100000, *per Probl.* 11. *cap.* 3. *Geom. Pract.* nota ſit proſthaphæreſis CNT. Invento angulo proſthaphæretico CNT, notus etiam eſt *d* arcus RD, quo Æquinoctium Verum D, hic antevertit Medium R. Quare gradibus & minutis arcus RD *e* converſis in tempus, ſi illud addatur tempori Æquinoctij Veri D, habebitur tempus Æquinoctij Medij, quo nimirum Sol Medius R appellet in D, principium Arietis.

o *Per nu. præc.*
c *Per nu.* 38.
d *Defin.* 25. *nu* 24.
e *Per Corol. nu.* 36.

Ut habeatur tempus Æquinoctij Medij autumnalis Q, quoniam id eſt in primo ſemicirculo ac proinde id præcedit æquinoctium autumnale Verum B, oportet tempus debitum proſthaphæreſi BQ ſubtrahere à tempore Veri Æquinoctij; ſic enim proveniet tempus Medij.

NUMERUS XLVI.

Rejicitur apparens inæqualitas præceſſionis Æquinoctiorum, ſive motus firmamenti.

STellas Fixas moveri ſub Zodiaco inviſibili in conſequentia motu tardiſſimo, vel Zodiacum inviſibilem in præcedentia, dictum eſt obſerv. 5. *num.* 22. Qui motum illum Eclipticæ inviſibili tribuunt, præceſſionem Æquinoctiorum appellant, quòd illo fiat, ut æquinoctialia puncta in præcedentia hoc eſt contra Signorum ordinem moveantur.

De qualitate hujus motus varia ſunt opiniones Aſtronomorum. Ptolomæus, & poſt eum Albategnius, Alfraganus, Rabbi Levi, Albuaſſim Maurus, Abraham Zagutus, Aug. Riccius, alijque, ac demum Tycho, Kepplerus, Ricciolus, Bullialdus, & apud eum Perſæ, cenſuerunt motum firmamenti ſemper æqualiter ab Occaſu in Ortum, hoc eſt in conſequentia, procedere.

Arzachel, & Thebit putarunt Fixas non procedere in Ortum, niſi ad gradus aliquot; tum verò regredi in Occaſum. Et quidem Arzachel ſtatuit caput Arietis viſibilis à capite Arietis inviſibilis procedere in Ortum ad gradus 10 annis 750: inde per totidem gradus & annos in Occaſum ad caput Arietis inviſ. redire, & per alios 10 gradus ultra illud in Occaſum ferri, ſic ut tota longitudo motus ſit graduum 20; quam Thebit etiam facit majorem. Exiſtimat Riccius Arzachelem, & Thebit in hanc opinionem adductos fuiſſe, quod ferretur Hermes, qui ante Ptolomæum vixit annis 1985, reperiſſe *Vulturem cadentem* in grad. 24 Sagittarij, quem Ptolomæus poſtea invenit in gradu 17 Sagittarij, nempe Occidentaliorem: & Lucidam Hydræ in grad. 7. Leonis, quam Ptolomæus in grad. 30 Cancri.

Verùm ille Fixarum acceſſus, & retroceſſus, ut merum figmentum rejiciendus eſt. Jam pridem enim Fixæ limites ab Arzachele & Thebitio conſtitutos, in Ortum ſunt prætervectæ. Diverſitatem porrò illam inter obſervationes Hermetis & Ptolomæi, in æquivoca ſtellarum nomina Regiomontanus alijque conjiciunt. Plura contra hoc figmentum, Riccius, Regiomontanus, Ricciolus *lib.* 3. *Almag. pag.* 166. *num.* 6.

Alij igitur affirmant quidem Fixas numquam regredi, ſed continuò progredi in Ortum, at motu, quoad apparentiam, inæquali. Ad hanc inæqualitatem ſalvandam fingunt Eclipticam inviſibilem, adeoque & Æquinoctialia ejus puncta, ferri per gradum unum, & aliquot minuta, inde in Occaſum reverti

ad punctum unde motus cœperat, atque ultra illud per tantumdem spatij pergere in Occasum; sic ut tota longitudo hujus librationis sit 2 graduum, & aliquot minutorum. Est autem hic motus tardior motu Fixarum. Quia igitur librationis ille motus ab Ecliptica invisibilis sphæra firmamento communicatur, sit; ut motus Fixarum in Ortum modò tardior appareat, modò celerior, prout nimirum illi motus librationis adversatur, vel favet. Nunquam tamen Fixæ regredi videntur, quia motus librationis tardior est Fixarum motu. Copernicus motum omnem Fixis adimens, librationem Æquinoctiorum attribuit Terræ. Sive autem cælo tribuant, sive Terræ, mira est hypothesium & Periodorum hujus motus inter Copernicum, Maginum, Longomontanum, Lansbergium, aliosque diversitas; eas passim apud authores, & præsertim Ricciolum reperies. Mihi quidem, quando nullum in ijs fructum perspicio, recensere non lubet.

Hæc opinio longè est præcedenti probabilior. Fundamentum illius præcipuum est, quod Fixarum velocitas modò major, modò minor observata videatur. Nam (ita habet veterum observationum historia) Fixæ unum gradum absolverunt ævo Ptolomæi annis 100; ævo Albategnij annis 66; & his temporibus annis 72. Accedit (quod *num. seq.* examinabitur) videri annos Solares esse inæquales, id verò non videtur aliunde, quàm ex dictâ Æquinoctiorum libratione oriri.

Nihilominus sentio cum authoribus suprà citatis, inter quos è recentioribus præcipui sunt, Tycho, Kepplerus, Bullialdus, Ricciolus; motum præcessionis Æquinoctiorum, sive motum Fixarum semper esse æqualem.

1. Quia Antiquorum observationes tum alibi, tum hic meritò sunt suspectæ, utebantur enim Astrolabio & Armillis, in quibus non nisi decades minutorum erant notatæ, ut colligitur ex Ptolomæi Abaeo *lib. 7. cap. 5.* Deinde ad constituenda Fixarum loca, captabant distantiam Lunæ à Sole horizonti proximo, & noctu distantiam Fixæ alicujus à Lunâ, ut patet ex Ptolomæo *lib. 7. cap. 4.* & Copernicio *lib. 2. cap. 14.* Quo in negotio nulla ab ijs habita est ratio refractionis, quæ omissa distantiam Lunæ à Sole 30 circiter minutis à verâ diversam exhibuit. His adde, quòd Ptolomæo non fuerit exacta parallaxium Lunæ ac Solis notitia, imò ne ipsum quidem Solis motum satis accuratè constitutum habuerit. Quare meritò Ricciolus pronuntiat Fixarum loca ab ijs sic constituta, meritò de unius saltem gradus errore suspecta esse. Corruit igitur præcipuum hujus sententiæ fundamentum.

Similia suspicantur Stevinius, Nonius, Kepplerus, Gassendus, Bullialdus. Totam Astronomiam (inquit Kepplerus) susque deque fert hæc incertæ fidei prosthaphæresis Æquinoctiorum in calculum recepta; & Gassendus, videtur (inquit) res esse magis commentitia, quàm ut scrupulosius illam prosequamur.

2. Si antiquorum observationes tum inter se, tum cum Tychonicis, & Ricciolanis comparentur, colligetur motus Fixarum aliquando velox, quando juxta Copernicanas hypotheses lentus esse debuerat; & contra. Id est ostensum à Ricciolo *Almag. lib. 6. cap. 17*, & observatum à Tychone *tomo 1. progymn. pag. 254.*

Argumentum ab anni inæqualitate esse nullum, patebit ex *num. seq.*

Omnibus igitur in utramque partem pensitatis, sentio præclarè illos de Astronomiâ mereri, qui tribus Anomalijs, obliquitatis Eclipticæ, Eccentricitatis, & Apogei, jam rejectis, etiam quartam illam eliminant. Ita enim Astronomicus calculus ingenti molestia liberabitur, Æquinoctiorum videlicet prosthaphæresi, quæ aliàs in omni calculo longitudinis non tantùm Solis, sed etiam Lunæ, & Planetæ cujuscumque esset supputanda. Neque tamen certitudine minori siderum loca sic colligentur, quàm ex tabulis Prutenicis, Danicis, Lansbergianis, quæ Anomaliam illam supponunt, & Ricciolo teste aliquando minùs cum observationibus conveniunt, quam ea, quæ ex tabulis Anomaliâ dictâ carentibus deducuntur.

Periodus Anomaliæ Æquinoctiorum à Copernico statuitur annorum 1715. D. 303 vel 307, dimidia nempe Anomaliæ obliquitatis Eclipticæ, & Eccentricitatis.

NUMERUS XLVII.

Rejicitur annorum Solarium sensibilis inæqualitas.

Annos solares, sive Tropicos, esse inæquales, multi censuerunt: inprimis Arzachel, Thebit; deinde Purbachius, & Commentatores ejus plerique, Nonius, Copernicus, Rheinholdus, Mæstlinus, Clavius, Maginus, Scaliger, Tycho qui postea mutavit sententiam, Longomontanus, Lansbergius, Herigonius, alijque.

Hæc inæqualitas videtur probari. 1. Ex libratione punctorum Æquinoctialium: cùm enim annus constituatur ex revolutione Solis ad puncta Æquinoctialia, si ea modò in Ortum, modò in Occasum ferantur, necesse est Solem modò seriùs, modò citiùs ad illa redire, adeoque annum modò longiorem esse, modò breviorem. 2. Ex Anomalijs Eccentricitatis, & Apogæi. 3. Ex ipsâ anni Tropici quantitate, quæ, ut *num. 35.* traditur, ex Æquinoctijs deducta, non una semper atque eadem fuerit reperta.

Æqualitatem sensibilem tuentur Hipparchus, Ptolomæus, Albategnius, Rex Alphonsus mutatâ sententiâ, Riccius, Bullialdus, & apud eum Persæ, Vendelinus, Kepplerus, Rheita, Ricciolus, ac demum opinione mutatâ etiam Tycho.

Cum his sentio nullam esse annorum Solarium inæqualitatem sensibilem.

1. Quia nulla extat anni quantitas deducta ex Æquinoctijs magis distantibus, quàm illa à Ricciolo collecta *a* ex Æquinoctijs Hipparchæis, & ex Æquinoctio à se observato 1643, inter quæ anni intercedunt circiter 1800. Ea verò tum ex his Æquinoctijs, tum ex alijs mediâ electâ, colligitur. D. 365. H. 5. 48'. 46''; à quâ parum differt quam nos *num.* 49. eligemus. Ab hac porrò Riccioli quantitate annuâ, nulla post Ptolomæum ex Æquinoctijs deducta fuit, quæ minutis 4 differret. Nemo porrò est observandi peritus, qui non concedat hanc differentiam certè non magnam, sive fallaciæ observationum, sive parallaxi, aut refractioni vel omissæ vel perperam assumptæ adscribi debere potiùs, quàm inæqualitati veræ Solaris Periodi. Quantitates annuæ Hipparchæa & Ptolomaica, quæ Ricciolanam excedunt minutis circiter sex, non ex meris Æquinoctijs, sed ex cyclis Lunaribus, tanquam Solis cursui commensurabilibus, deductæ sunt, quam viam minùs accuratam esse ostensum est à Ricciolo *cap. 15. lib. 3. Almag.* & Ptolomæus ipse fatetur, posteris relinquens anni quantitatem ex longiori temporis intervallo constituendam.

a Vide num. 35.

2. Af-

2. Affirmat Ricciolus se ex quantitate anni D. 365. H. 5. 48'. 40" ita deducere Æquinoctia prætérita usque ad Hipparchum, ut ea non differant horâ unâ, rarissimè duabus, à tempore quo eadem à peritioribus Astronomis sunt observata. Differentiam verò tantillam potiùs in observationum defectus, incertitudinem parallaxeos, atque etiam subinde refractionis neglectum, quàm in veram annorum inæqualitatem refundi oportere, mihi quidem manifestum videtur. Præsertim cùm nulla hypothesis anni inæqualis, apud ejus assertores reperiatur, quæ Æquinoctiis hactenus observatis magis quàm nostra satisfaciat.

3. Corruit igitur principale firmamentum partis adversæ, prætendentis supra inæqualitatem Annuam ex observatione constare. Deinde Æquinoctiorum libratio, quæ inæqualitatem prædictam ferè una possit sensibilem efficere, fuperiore numero rejecta est. Neque est quod ab Anomaliis Eccentricitatis & Apogei metuamus, nequa ab iis difformitas in annos Solares derivetur, quando utramque etiam illam, tanquam nullâ solidâ ratione nixam, supra *b* rejecimus.

b Num. 41, & 42.

NUMERUS XLVIII.

Anni Solares tamen verè sunt inæquales, sed differentiâ insensibili.

Apparens inæqualitas motus Solaris per Eclipticam, & motus Apogei, licet is inæqualis non sit, Annos Solares inæquales, hoc est, modo breviores, modò longiores efficiunt differentiâ aliquot Secundorum: cùm enim Apogeum continuò moveatur, distantia principij Arietis ab Apogeo mutatur assiduè, unde fit ut intervallum temporis ab uno Æquinoctio verno ad vernum proximè sequens, sive secundum, non sit æquale temporis intervallo ab illo ad tertium, & sic deinceps. Primus videtur hoc advertisse Copernicus *lib. 3. cap. 13.* Sed neque ipse neque Kepplerus idem movens, neque Ricciolus hunc (ut ipse loquitur) profunditatis Astronomicæ locum *lib. 3. Almag. pag. 175* pluribus exponens, demonstravit, quomodò fieri possit, ut ex diversâ Æquinoctiorum ab Apogeo distantiâ, anni Solares inæquales evadant. Et sanè perobscurum est, quid eò conferat diversa Æquinoctiorum distantia ab Apogeo; quamvis inde fiat, ut Solis Annuus, & apparenter inæqualis per Eclipticam Motus ab alio semper atque alio tarditatis aut celeritatis gradu incipiat; ac proinde annis singulis incrementi, ac decrementi celeritatis tarditatisque novus atque alius ordo sit; nihilominus quia Sol annis singulis totam Eclipticam absolvit, adeoque tota inæqualitas motus singulis annis, licet ordine diverso, exhauriatur, profectò non apparet, qui inde possint Solares anni modò breviores esse, modò longiores. Omninò igitur id erit demonstrandum, quod præstare conabimur hunc in modum.

a Vide num. 35.

Fig. 46. Eclipticæ centrum sit T; Eccentrici C; linea Apogei AKP. Sol esto in N sub Arietis initio D; linea motus Medij sit TR. Annum *o* Verum, voco tempus ab uno Æquinoctio Vero ad aliud; annum verò Medium, *o* appello tempus ab uno Æquinoctio *a* Medio ad aliud.

o Juxta defin. 27. & 28. num. 24.

a Quid sit Æquinoctium Medium expositum num. 45.

His præmissis. Quoniam (ut patet ex *num. 45*) Æquinoctium Medium est, cùm linea motus Medij attingit principium ♈, patet annum Medium esse tempus, quo linea motus Medij ab initio ♈ digre-

diens, ad idem revertitur, sive est una integra revolutio lineæ motus Medij per Eclipticam. Atque hæ revolutiones omnes inter se æquales, seu æquè longæ sunt, cùm linea motus Medij motu *n* æquabili feratur. Ergo omnes anni Medij, inter se æquales, seu æquè longi sunt. Jam verò quantitas temporis, inter Æquinoctium Medium, ac Verum intercedens *b*, ea est, quæ habetur ex arcu Æquationis RD in tempus converso, sive ea est, quâ linea motus Medij æquali suo Motu arcum RD absolvit. Illa temporis differentia vocetur *a*. Itaque Æquinoctium Verum ex. gr. anni 1657 antecessit Medium tempore *a*. Interim quia Apogeum K continuò movetur in consequentia versus B, Q, manifestum est in fine anni, & principium Arietis D, & punctum, in quo Eccentricus secat rectam TD, distare ab Apogeo longius, quam sub anni initium. Quare etiam *d* æquatio DR jam est sub finem anni major, vel minor, quam sub anni initium. Quare cùm (ut ostendi suprà) æquatio in tempus conversa, sit intervallum temporis quo Æquinoctia Medium & Verum distant; liquet in fine anni Æquinoctium Verum secundum, præcedere secundum Æquinoctium Medium quantitate temporis majore minoreve, quàm fuerat tempus *a*, quo primum Æquinoctium Verum præcesserat primum Æquinoctium Medium. Ex quo patet annum Verum esse anno Medio inæqualem. Sit enim XZ (inspice figuram 22. l. 2) annus Verus, & AB annus Medius; AX verò sit tempus quo Æquinoctium Verum X, præcedit Medium A, & BZ tempus quo secundum Æquinoctium Verum Z, præcedit secundum Æquin. Medium B. Manifestum si AX sit majus minusve quàm BZ, etiam communi addito XB, annum Verum XZ fore majorem minoremve Medio AB. Hinc porrò facilè jam intelligitur, annos Veros insequentes, suis annis Medijs non solùm inæquales esse, sed etiam aliter atque aliter inæquales, eò quòd propter motum Apogei, distantia principij Arietis ab Apogeo, adeoque & æquationes perpetuò mutentur. Quare cùm annorum Mediorum una semper sit, eademque longitudo, ab his autem anni Veri aliter atque aliter differant, constat eos non solùm anno Medio, sed etiam inter se esse inæquales. Quod erat demonstrandum.

n Vide propr. 2. num. 25.
b Ostensum est nu. 45.
d Per propr. 9. num. 25.

Reliquum est ut ostendam hanc anni Veri ac Medij differentiam nullius esse momenti. Apogeum K, sive A, singulis annis promovetur in consequentia *m* non nisi grad. o. 1. 1'. 10". Quare etiam Anomalia *a* KVN, sub anni finem tantùm differt ab Anomaliâ sub anni principium grad. o. 1. 1'. 10". Hæc porrò tantilla Anomaliarum differentia insensibilem inducit differentiam in Prosthaphæresim TNC, seu RD, quæ est sub anni finem, ab eâ, quæ est sub anni principium. Quare cùm anni Veri, ac Medij differentia oriatur à differentiâ Prosthaphæresium, ut suprà jam ostendi, etiam illa insensibilis sit, necesse est.

Fig. 46.
m Per nu. 43.
a Def. 23. num. 24.

NUMERUS XLIX.

Anni Solaris Medij quantitatem ultimò determinare.

Quia *num.* 48 ostensum est annos Veros esse inæquales, frustra inquiritur exacta omninò eorum quantitas, una omnibus conveniens. Potest tamen reperiri quantitas mediocris conveniens omnibus quàm proximè, eaque jam est reperta *num.* 35 suprà.

Anni verò Medij quoniam omnes inter se e æquales sunt, unam admittunt quantitatem omnibus communem, quam hic indagandam suscepimus, non ex Veris Æquinoctijs, ut *num.* 35 factum, sed ex Medijs: aliàs enim non prodiret anni quantitas prorsus exacta, ut ostendi in Scholio *num.* 35.

e *Ostensum est nu.* 24. *defin.* 28.

§. 1. Centrum Eclipticæ esto T, Eccentrici verò C: initium Libræ B; linea motus Medij T Q. Igitur Æquinoctium Verum autumnale fit in B. Linea Apogei sit A K V P. Assume duo Æquinoctia Vera, observata ut docui *num.* 33. quæ distent ab invicem quàm longissimo temporis intervallo. Ex Verorum Æquinoctiorum tempore inventoreperi tempora, d quibus contingunt Æquinoctia Media Veris respondentia. Cum his Medijs Æquinoctijs si ita processeris, ut *num.* 35 proceditur cum Æquinoctijs Veris, quantitas anni Medij prodibit in lucem.

Fig. 46.

d *Per nu.* 45.

§. 2. Hæc ita universim dicta ut in opus conferantur, assumam cum Ricciolo duo Æquinoctia autumnalia, annis Iulianis 1804 distantia. Primum a ab Hipparcho observatum est Alexandriæ ante Christum labente anno 159 post merid. diei 26 Sept. horâ 18. 11. 15″ ut *in Scholio pag.* 139. *lib.* 3. egregiè probat Ricciolus. Cùm igitur Bononia sit Orientalior quàm Alexandria horâ 1. 43′, accidit Hipparchæum Æquinoctium Bononiæ post merid. diei 26 Sept. horâ 16. 18′. 15″. Alterum observavit Ricciolus Bononiæ anno 1646, completâ die 22. Septemb. hoc n est stylo veteri completâ Septemb. die 12. horâ 14, 56′.

a *Ptol. l.* 3. *c.* 2.

n *Vide dicta num.* 35. §. 2.

Ex noto tempore utriusque Veri Æquinoctij, elicies tempus utriusque Medij hunc in modum. Ex *num.* 44 reperies tempore Hipparchi, hoc est, anno ante Christum 159, Apogeum A fuisse in ♊ grad. 6; proinde principium ♎ distabat ab Apogeo A arcu B A graduum 114. Noto igitur arcui B A congruentem inveni Prosthaphæresim (ut *num.* 45. docui) hoc est quantitatem arcus Q B, quæ erit grad. 1. 56. Sol autem motu Medio gradum 1. 56. absolvit d horis 44. 30. 8″. His à tempore Veri Hipparchæi Æquinoctij (Sept. 26. H. 16. 28′. 15″) subductis (subduci o enim debent, cùm Æquin. sit autumnale, habetur tempus Æquinoctij medij, Sept. 24. H. 19. 58′. 7″.

d *Per coroll. num.* 36.
o *Vide num.* 45.

Pari modo quia anno 1646 Apogeum A erat circa ♋ m grad. 7, ac proinde ab initio ♎ distabat arcu A B grad. 83, huic noto arcui convenientem reperi æquationem (ut docui *num.* 45) ea erit grad. 1. 56′. quæ motu Medio percurruntur à Sole horis 46. 56′. His ergo à tempore Veri Æquinoctij recentis (quod erat Septemb. 12. H. 14. 56′) subductis, relinquitur tempus Æquinoctij medij, Sept. 10. H. 16.

m *Per nu.* 38.

Æquinoctium Medium.

Hipparchi. *Sept.* 24. H. 19. 58′. 7″.
Riccioli. *Sept.* 10. H. 16. 0. 0.

Jam cùm utriusque Æquinoctij annus fuerit secundus post bissextilem, si anni Juliani dierum 365. H. 6. æquales essent Solaribus, debuisset Æquinoctium posterius incidere in Septembris eumdem diem, horam &c. cum Hipparchæo. Nunc autem præcessit diebus 14. H. 3. 38′. 7″. uti patet, si tempus secundi Æquin. subducatur à tempore primi. Quare cùm inter utrumque Æquinoctium intercedant anni integri Iuliani 1804, hi totidem Solares excedunt D. 14. H. 3. 58′. 7″. Quod si ergo anni Juliani 1804, annos 1804 Solares excedant D. 14. H. 3. 58′. 7″: annus Iulianus unus unum Solarem quo excessu superabit? Per reg. proport. colligitur excessus ille Secundorum 678 $\frac{772}{1804}$, hoc est grad. 0. 11′, 18″. 25‴. 46⁗ $\frac{1444}{1803}$, sed fractio contemnitur. His igitur ab anno Iuliano dierum 365. H. 6. subtractis, relinquitur annus Solaris Medius D. 365. H. 5. 48′. 41″. 34‴. 14⁗. Ricciolus colligit, D. 365. H. 5. 48′. 41″. 34‴ deficiens 14. Quartis, quod inde accidit, quia in præcessione annorum Solarium 1804, quæ erat D. 14. H. 3. 58′. 7″. pro Secundis 7, ipse per errorem posuit Sec. 15.

§. 3. Ut anni quantitas certiùs innotescat, eliciemus eam ex binis adhuc alijs Æquinoctijs, inter quæ anni 1800 Iuliani intercedant. Primum observavit Hipparchus Alexandriæ, acciditque Bononiæ anno ante Christum 158. Septemb. 26. completâ, & horis 22. 47′. Hoc tempus Veri Æquinoctij convertes ut suprà, in tempus Medij, si ab illo subtrahas horas 44. 30. 8″: relinquetur enim tempus Medij Æquinoctij, Sept. 25. H. 2. 16′. 52″.

Alterum Ricciolus observavit Bononiæ 1643, *die* (inquit) 22 *Sept. completâ, & hor.* 22. 25′, quæ verba sonant horas 22 etiam sumi completas, cùm tamen in calculo sumat incompletas: à tempore enim Hipparchæi Æquin. Veri (Sept. 26. H. 22. 47′) subtrahendo tempus sui Æquin. Veri (Sept. 12 stylo veteri H. 22. 25′) residuum ponit. D. 14. H. 1. 22″; quod fieri non potest, si horæ illæ 22 sumantur completæ: tunc enim restarent. D. 14. H. 0. 22′. Tempus igitur Veri Æquinoctij Riccioliei præter annos Christi, sunt Septemb. dies 12 stylo vet. Horæ 21. 25′. Hoc convertes in tempus Æquin. Medij ut suprà §. 2, subtrahendo horas 46, 56′: relinquetur enim tempus Medij Æquin. Sept. dies 10, horæ 22. 29′.

	Septemb. D.	H.	′.	
	12	21	25	
sive —	10	68	85	
	0	46	56	*Subtrahe*
	10	22	29	*resid.*

His peractis à tempore Hipparchæi Æquinoctij Medij subtrahe tempus Æquinoctij Medij recentioris: relinquentur D. 14. H. 3. 47′. 52″, quibus intra annos 1800 Æquinoctium Medium recentiùs præcessit Medium Æquin. antiquum; hoc est quibus 1800 anni Iuliani

	Septemb. D.	H.	′.	″.	
	25	2	16	52	*Æquin. med.*
sive —	24	25	76	52	*Hippach.*
	10	22	29	0	*Æquin. Med. recens subtrahendum.*
	14	3	47	52	*Præcessio*
sive —	1223272	*Secunda.*			*ann.* 1800.

excedunt 1800 Solares. Unus igitur annus Julianus unum Solarem quo excessu excedet? Ex regulâ prop. proveniunt pro excessu illo Secunda 679 $\frac{8}{18}$ hoc est, grad. 0. 11′. 19″ $\frac{1}{18}$: quibus ab anno Iuliano D. 365. H. 6. subtractis, relinquitur annus Medius. D. 365. H. 5. 48′. 40″. 56‴. 40⁗.

D:

	D.	H.	/.	//.	///.	IV.	
	365	6	0	0	0	0	annus Iul.
five	365	5	59	59 $\frac{180}{180}$	. 0	0	
	0	0	11	19 $\frac{9}{180}$	0	0.	*præcessio. 1. anni subtrahe*
	365	5	48	40 $\frac{171}{180}$	. 0	0	annus Medius.
five	365	5	48	40	56	40	

Quantitates porrò annuæ. §. 2 & §. 3. jam inventæ, solùm differunt Tertijs 37‴, Quartis 20‴′, insigni profectò veritatis argumento.

Annus Solaris ex Medijs Æquinoctijs deductus	D.	H.	/.	//.	///.	IV.	
Annus *Prior.*	365	5	48	41	34	0	A
Annus *Posterior.*	365	5	48	40	56	40	B
Annus *Arithm. Medius*	365	5	48	41	15	20	C

Porrò annuæ quantitati C, respondent revolutiones Solis diurnæ 365. grad. 86. 40. 18″. 50‴.

Scholium I.

Irrepsit error in calculum Riccioli, quem ex duobus Æquinoctijs §. 3. à me relatis, instituit l. 3. pag. 138. in exemplo suo secundo. Nam ex annis 1800 collegit præcessionem D. 14. H. 4. 18′ justâ majorem, cùm eo tantùm sit, D. 14. H. 3. 47. 52″. Consequenter & præcessionem unius anni deduxit inde nimis magnam, grad. 0. 11′. 20″. 37‴: quâ subtractâ ab anno Iuliano collegit annum justo minorem, videlicet D. 365. H. 5. 48′. 39″. 23‴, colligi quippe debuisset B. Indicium erroris etiam hoc est, quod ex annis paucioribus, nempè ex 1800 præcessionem collegerit D. 14. H. 4. 18′, majorem eâ quàm collegerit ex annis pluribus, videlicet 1804: ex his enim præcessionem elicuit solummodò D. 14. H. 3. 58′. 25″. At proclive est errare in calculis: Scimus, & hanc veniam petimusq; damusque vicissim.

Scholium II.

Si anni Solaris quantitas ex Veris Æquinoctijs num. 35. deducta, conferatur cum eâ, quam hic deduxi ex Æquinoctijs Medijs, jam constabit hanc ab illâ modicissimè differre, Mediocris enim inter deductas ex Æquinoctijs Veris num. 35, erat A;

	Di.	Hor.	/.	//.	///.	IV.
A	365.	5	48	45	0	0
B	365.	5	48	41	15.	20
C	0	0	0	3	44	40

mediocris autem inter deductas Æquinoctijs Medijs, est B. utriusque differentia est C, minor 4 Secundis unius horæ. Licuit igitur ex annuâ quantitate A; *num.* 35 repertâ, motus Solis Medios; locum Apogei, Eccentricitatem, aliaque, citra errorem sensibilem derivare: ac proinde, quamvis ea, quæ ex Medijs Æquinoctijs reperta est, sit exactior, haud erit necesse illa omnia, quæ jam recensui, denuò calculare & ad incudem revocare. Neque tamen frustra ex Medijs Æquinoctijs anni quantitas tanto studio fuit deducta; hæc enim si reperta non fuisset, constare certò non poterat illam alteram ex Æquin. Veris derivatam, quàm proximè ad veritatem accedere.

NUMERUS L.

Inæqualitas dierum naturalium ostenditur.

§. 1. Dies alius est Solis, alius Primi Mobilis. Dies Primi Mobilis, est tempus quo punctum aliquod Æquatoris in supremo cælo ab uno Meridiani puncto, ab Ortu in Occasum revolvitur ad idem.

Dies Solis naturalis, est tempus quo Solis centrum ab uno Meridiani semicirculo, ad eumdem ab Ortu in Occasum revolvitur.

Dies Solaris longior est die Primi Mobilis. Nam quia Sol motu proprio ab Occasu in Ortum quotidie progreditur sub Eclipticâ; inde fit, ut unâ revolutione Æquatoris Primi Mobilis ab Ortu in Occasum peractâ, Sol nondum redierit ad eumdem ejusdem Meridiani semicirculum, sed ut redeat, de secundâ Æquatoris revolutione insuper requiratur tanta pars, quanta Meridianum pertransit cum illo arcu Eclipticæ, quem Sol interim (hoc est eo die Solari) motu proprio percurrit.

Porrò quemadmodùm Solares anni, ita & dies inter se sunt inæquales, differentiâ quidem in singulis permodicâ, sed notabili in multis. Hujus inæqualitatis duæ sunt causæ præcipuæ, obliquitas Eclipticæ, & Solis motus apparens inæqualis: quas hic breviter exponam.

§. 2. Prima causa inæqualitatis dierum naturalium, est Eclipticæ obliquitas ad Æquatorem. Cùm enim dies Solaris præter unam integram revolutionem Æquatoris Primi Mobilis contineat insuper revolutionem ejus arcus Æquatoris, qui cum arcu E-

clipticæ, quem Sol eo die percurrit, Meridianum pertransit: arcus autem à Sole quolibet die percursi, etiamsi omnes semper æquales essent, propter obliquitatem Eclipticæ diversum habeant situm respectu Æquatoris; fit ut etiam arcus Æquatoris, qui cum ipsis Æquatorem pertranseunt quotidie magnitudinis sint diversæ. Quare cùm appendix illa, quâ dies Solaris diem Primi Mobilis semper æqualem ac similem exeedit, fit quotidie magnitudinis diversæ, manifestum est etiam dies Solares diversæ magnitudinis necessariò esse.

Secunda causa est inæqualitas apparens motus Solis per Eclipticam. Is enim a circa Apogeum tardissimus apparet, circa Perigeum celerrimus: ab Apogeo autem ad Perigeum quotidie celerior fit, à Perigeo ad Apogeum ordine inverso, fit quotidie tardior, ut *propr.* 11. *num.* 25. demonstratum est. Quare cùm appendix illa, quâ dies Solis diem Primi Mobilis superat, ex motu Solis per Eclipticam proveniat, manifestum est eam modò majorem, modò minorem futuram, prout motus Solis per Eclipticam fuerit celerior aut tardior; ac proinde magis minusve motui Primi Mobilis contrarius fuerit.

a *Propr.* 11. *num.* 25.

Ex Anomaliis Æquinoctiorum, obliquitatis Eclipticæ, Eccentricitatis, motus Apogei, quando omnes illas jam rejeci, nullam agnosco in dies naturales inæqualitatem derivari. Sed neque ab annorum inæqualitate hic quidquam metuendum censeo: cùm inæqualitas annorum sensibilis rejecta sit *num.* 47; insensibilis autem, quam *num.* 48 asserui, si in annis ipsis sentiri nequeat, multò minus in diebus sentiri poterit.

Plures alias inæqualitatis hujus causas opinantur easque diversas, Tycho, Longomontanus, Kepplerus, Bullialdus; quos consule. Non videntur autem solidæ: quia iis neglectis, si duarum supra allatarum ratio habeatur, meliùs Eclipsibus satisfit, ut de observatis à se testatur Ricciolus.

§. 3. Cùm igitur Solis dies inæquales sint, oportebit eos ad æqualitatem reducere, hoc est, inter maximos & minimos medium reperire: quod ita fiet. Quoniam Sol sub Zodiaco quotidie motu proprio tendit contra motum Primi Mobilis, inde fit, ut ejus revolutio diurna sit aliquantò longior revolutione diurnâ Primi Mobilis, ac proinde singulis revolutionibus diurnis Solis, respondeat revolutio una Primi Mobilis, cum particulâ unius revolutionis. Unde accidit, ut quando Sol contra motum Primi Mobilis Zodiacum totum absolverit, hoc est unus annus Solaris effluxerit, revolutiones diurnæ Primi Mobilis sint unâ plures diurnis revolutionibus Solis. Cùm igitur uno anno Solari revolutiones diurnæ Primi Mobilis excedant revolutiones diurnas Solis, unâ suâ revolutione integrâ, hoc est gradibus 360: uno die Solari revolutio, seu motus Primi mobilis revolutionem, seu motum Solis quot gradibus vel minutis excedet?

a *Num.* 49.

Fiat ut annus Solaris, hoc est ut a dies Solares 365. H. 5. 48'. 41''. 15'''. 20'''', ad unum diem Solarem, sive horas Solares 24, ita gradus 360 (quibus unius anni revolutiones Primi Mobilis excedebant unius anni revolutiones diurnas Solares) ad quartum: prodibunt grad. 0. 59'. 8''. 20''' ferè, quibus unius diei Solaris spatio motus Primi Mobilis excedit motum diurnum Solis. Quare cùm uno die Solari Sol revolutionem unam integram, sive grad. 360 ab Ortu in Occasum absolvat, (tempus enim, quo talis revolutio una absolvitur, est dies ipse Solaris), liquet uno die Solari motum Primi Mobilis absolvere grad. 360. 59'. 8''. 20''': hoc est uno die Solari Meridianum pertransire Æquatoris grad. 360. 59'. 8''. 20'''. Hæc conversa o in tempus Primi Mobilis efficiunt horas 24. 3'. 56''. 32'''. 1''''. 20'''''. Dies igitur Solaris æquatur horis 24. 3'. 56''. 32'''. 1''''. 20''''', Primi Mobilis: atque hic est dies Solaris Medius, qui quærebatur.

o *Vide num. seq.*

Ex die Medio, seu æquali per reg. prop. reperies æquales horas, minuta &c.

Scholium.

Astronomi diei naturalis initium ducunt non ab Horizonte, sed à Meridiano, ut novas inæqualitates dierum naturalium, triplici aliàs ex causa obcessuras devitent. Prima est, quòd supra Horizontem obliquum, cum æqualibus Ecliptica arcubus, longè inæqualiores arcus Æquatoris ascendant, quàm cum iisdem Ecliptica arcubus cœlum medient, sive pertranseant Meridianum. Ex quo necessariò consequitur, multò majorem exsurgere inæqualitatem dierum, si dies ab Horizonte computetur, quàm ex causâ secundâ aliàs fuisset orta, si dies à Meridiano inciptat. Accedit, quòd illud ipsum inæqualitatis incrementum, pro variâ Horizontis obliquitate, varium sit atque diversum in locis diversis; ubi interim die à Meridiano computatâ, unus diei una semper ubivis Terrarum, atque eadem inæqualitas existit. Secunda est parallaxis Solis, quæ maxima est in Horizonte, & variatur secundùm variam Solis à Terrâ distantiam. Tertia est refractio, quæ etiam ipsa in Horizonte est maxima, & quidem ob vaporum inconstantiam inconstans, ac varia; atque inde ascensiones Solis & declinationes Solis variantur, unde nova rursum in diebus inæqualitas causatur.

NUMERUS LI.

Gradus, & Minuta Æquatoris in tempus tum Primi Mobilis, tum Solare convertere; & contra.

Dies Primi Mobilis (ut dixi §. 3. *num. præced.*) est una revolutio Æquatoris supremi, unde, cùm 360 gradibus Æquatoris debeantur horæ Primi Mobilis 24: uni gradui, uni primo, uni secundo, uni tertio &c. quot horæ aut horaria scrupula debentur? Et vicissim cùm horis Primi Mobilis 24, debeantur gradus 360: uni horæ, uni scrupulo primo horario, uni secundo, uni tertio &c. quot gradus aut graduum scrupula debentur? Utrumque adminiculo regulæ proportionum innotescet. Atque hunc in modum constructæ sunt tres tabellæ primæ sequentes.

Deinde cùm uno die Solari Medio Meridianum pertranseant Æquatoris gradus 360, 59'. 8''. 20''', ut ostendi §. 3. *num. præcedenti*, ac proinde cùm gradibus 365, 59'. 8''. 20''. debeantur horæ Solares 24 uni gradui, uni minuto primo, uni secundo, uni tertio, &c. quot horæ Solares & horaria scrupula debentur? Et è converso, cùm horis Solaribus 24 debeantur Æquatoris gradus 360. 59': 8''. 20''': uni horæ Solari, uni scrupulo primo horario, uni secundo, uni tertio quot gradus & grad. scrupula debentur? Utrumque, ut supra, regula proportionum patefaciet. Ita constructæ sunt tabellæ 4 & 5.

Æ-

I			II		III		
Æquatoris	In tempus Primi Mobilis.		Horæ Prim. Mobilis.	In gradus Æquatoris.	Temporis Primi Mobilis.	In partes Æquatoris.	
G	hor.	/			Min.	gr.	/
M	/	//			S	/	//
S	//	///			T	//	///
T	///	IV		grad.	Q	///	IV
1	0	4	1	15	1	0	15
2	0	8	2	30	2	0	30
3	0	12	3	45	3	0	45
4	0	16	4	60	4	1	0
5	0	20	5	75	5	1	15
10	0	40	6	90	6	1	30
15	1	0	9	135	10	2	30
30	2	0	12	180	20	5	0
60	4	0	15	225	30	7	30
90	6	0	18	270	40	10	0
180	12	0	21	315	50	12	30
360	24	0	24	360	60	15	0

IV.					V			
Æquatoris.	In tempus Solare.				Tempus Solare.	In partes Æquatoris.		
G	Hor.	/.	//.	///.	Ho.	gr.	/.	//.
M	/.	//.	///.	IV.	M	/.	//.	///.
S	//.	///.	IV.	V.	S	//.	///.	IV.
T	///.	IV.	V.	VI.	T	///.	IV.	V.
1	0	3	59	20	1	15	2	28
2	0	7	58	41	2	30	4	56
3	0	11	58	1	3	45	7	24
4	0	15	57	22	4	60	9	52
5	0	19	56	42	5	75	12	19
10	0	39	53	24	9	90	14	47
15	0	59	50	6	9	135	22	11
30	1	59	40	12	12	180	29	34
60	3	59	20	24	15	225	36	58
90	5	59	0	36	18	270	44	22
180	11	58	1	12	21	315	51	44
360	23	56	3	24	24	390	59	8

Corollarium.

Ex his patet, qui tempus Solare convertatur in tempus Æquatoris, & contra. Nàm tempus Solare datum per tab. 5. verte in partes Æquatoris, & has per tab. 1. in tempus Æquatoris, seu Primi Mobilis: erit hoc æquale Solari dato. Similiter tempus Primi Mobilis datum verte per tab. 2. in partes Æquatoris, has verò per tab. 4. in tempus Solare: erit hoc æquale dato tempori Primi Mobilis.

NU-

NUMERUS LII.

Ad datum tempus Solis Ascensionem [s] *Rectam, sive longitudinem Æquatoriam invenire.*

s *Desin.* 40. *num.* 1.

Fig. 49.

EAdem operâ inquiretur Solis declinatio, & angulus quem facit Ecliptica cum declinationis circulo.

Æquator esto M N: Ecliptica M B N D: Sol autem, seu punctum datum Eclipticæ, sit in primo quadrante, ut in A, arcus declinationis circuli, seu [n] Meridiani per A ducti, sit A F. In triangulo Sphærico A F M angulus ad [o] F rectus est, angulus autem acutus A M F est grad. [a] 23. 30, obliquitas nempe Eclipticæ, & latus A M distantia [m] Veri loci Solis ab initio Arietis datur. Ergo ex Analysi hujus trianguli innotescet [p] latus M F, dato acuto A M F adjacens, ipsa nempe Ascensio Recta [b] loci Veri Solis A, unà cum latere A F, quod est declinatio puncti A, & angulo M A F, facto ab Eclipticâ & circulo declinationis.

n *Vide desin.* 11. & 18 *num.* 1. o *Patebit ex nu.* 68. *lib.* 2. a *Per nu.* 31. m *Desin.* 21. *nu.* 24. p *Trigon. sph.* b *Desin.* 39. *nu.* 1.

Sit deinde Sol in quadrante secundo, in B, & arcus circuli declinationis sit B G. Motum Solis Verum M B datum aufer à grad. 180, nempè à semicirculo M B N, & notum erit in triangulo Sphærico B G N Rectangulo ad G, latus B N. Sed & acutus B N G datur grad. 23. 30. Ergo ut supra, innotescet latus N G; quod subtractum à grad. 180, nempè à semicirculo M N, dabit arcum M G Ascensionem [c] Rectam puncti B.

c *Desin.* 39. *num.* 1. d *Desin.* 21. *nu.* 24.

Si Sol aut punctum Eclipticæ detur in tertio quadrante, in C; à longitudine verâ [d] Solis data M N C, aufer grad. 180, & notus erit arcus N C. Unde per Analysim trianguli rectanguli C K N, innotescet arcus K N, cui si addantur N M, gradus 180, nota erit Ascensio Recta M N K puncti C.

Postremò si Sol aut Eclip. punctum detur in quadrante quarto. ♑ M, aufer Motum Solis Verum [i] M N D à grad. 360: remanebit arcus D M notus. Quare rursum per Analysim Trigoni rectanguli D O M, innotescet arcus M O: quo dempto à grad. 360, remanebit M N O Ascensio Recta puncti D.

i *Desin.* 21. *num.* 24.

Hunc in modum construitur tabula Ascensionum Rectarum pro singulu Ecliptica minutu.

NUMERUS LIII.

Radicem Motuum Solis ad quamvis Epocham constituere.

UT Motus [n] Medij, & ex illis [o] Veri ad datum tempus supputari possint, necesse est, ut sciatur quantus fuerit Planetæ motus Medius, sive quis fuerit [b] locus ipsius Medius in aliquo temporis momento; atque hic vocatur Radix motuum Planetæ, momentum verò ipsum Epocha dicitur: quamquam Astronomi non rarò etiam per Epocham intelligant radicem ipsam. Expediet autem Radicem constituere ad Epocham temporis non apparentis, hoc est inæqualibus diebus compositi, sed æqualis, seu Medij, quia inventio Mediorum Motuum *num.* 36 exposita, ex quibus omnis supputatio ducitur, supponit æqualia tempora, æquales nempe dies, horas, minuta &c. vide §. 4. num. 58.

n *Desin.* 22. *nu.* 24. o *Desin.* 21. *nu.* 24. b *Desin.* 14. *nu.* 24.

Radicem igitur motuum Solis reperies hunc in modum. Per *num.* 37. ad notum aliquod momentum ex. gr. ad horam 3. completam diei 30 Iunij, anni 1659, observa locum Solis [c] Verum, adeoque motum ejus [d] Verum; atque ex Motu Vero ad idem momentum collige Motum Solis Medium, ut docui *num.* 39: hic Motus Medius erit motuum Solarium radix ad Epocham, seu momentum, quo facta est observatio Veri loci Solis.

c *Desin.* 11. *nu.* 24. d *Desin.* 21. *nu.* 24.

Sed quoniam ex hypothesi hæc Epocha est temporis non æqualis, seu Medij, sed apparentis, oportebit hanc ad illam reducere: quod ita fiet. Ad Epocham, seu momentum temporis apparentis, quo facta est observatio loci Solis, inveni [i] Ascensionem Solis Rectam. Hæc si major est Motu Medio per *num.* 39. jam reperto, excessum in tempus Solare conversum adde tempori apparenti ipsius Epochæ; subtrahe defectum si minor est. Sic Epocham temporis apparentis converteris in Epocham temporis æqualis, uti *num.* 59. independenter ab his demonstrabitur.

i *Per num.* 52.

Atque hunc in modum Radix motuum Solis ad Epocham certam temporis æqualis constituitur; quæ quia nullam aliam supponens è cælo per observationem immediatè deducta fuit, tam ipsa quàm ejus Epocha, Primitivæ vocabuntur.

Porrò cùm Astronomi soleant ab Epochâ illustriori aliquâ Astrorum motus numerare, gentiles quidem ab exortu Nabonassari, vel Alexandri; Christiani à Natalitijs JESU CHRISTI Filij Dei & Salvatoris nostri, ijsdem nos vestigijs insistere æquum est. Fuerit igitur repertus ex. gr. Uraniburgi ad meridiem ultimæ diei Decembris completæ, anni 1600 tempore æquali, primitiva Radix, sive Medius Motus Solis Signorum 9. grad. 10. 4'. 32". Ex hac, Radicem aliam ad Christi Epocham tempore æquali sic elicies. Ab Epochâ primitivâ supradictâ (nempe ab anno 1600 completo in meridie ult. Dec.) numera antrorsum annos æquales 1600, omissis diebus 10 qui in Kalendario Gregoriano sunt adjecti ad præteritos, cùm nondum præterissent. Manifestum est ex hypothesi terminum hujus intervalli esse Epocham Christianam temporis æqualis, ad quam proximè (nam utrùm præcisè, jam non quæritur) natus sit Christus. Annis verò æqualibus 1600 minus 10 diebus per *num.* 36. reperies deberi Motum Medium Sign. 0. grad. 2. 33'. 20": quem, quia nova Epocha est ante primitivam, subtrahe à Radice primitivà Sign. 9. grad. 10. 4'. 32" (addi debuisset, si fuisset posterior): relinquetur Radix nova ad Christi Epocham tempore æquali, Sign. 9. grad. 7. 31'. 12". Demonstratio patebit ex *num. seq.* Eodem modo ad aliam quamcunque Epocham Radix motuum Solis statuetur.

In Radicibus porrò constituendis semper notanda sunt hæc tria. 1. Determinandus est Meridianus, seu longitudo loci, cui Radicem placet affigere. 2. Statuendum est unde velis anni principium ducere, utrùm à mediâ nocte, quæ est inter ultimam Dec. & primam Ian. an à meridie ultimæ Decembris, an verò à meridie primæ Ianuarij. 3. Habenda est ratio dierum decem, cùm inter Epocham & tempus datum annus correctionis Kalendarij intercedit.

Radix Medij motus Solis anno Christi 1. ineunte in meridie diei ultima Decembris Bononia tempore æquato.

	Sig.	grad.	′.	″.	‴.
Reinholdus	9	7	34	5	8
Tycho	9	7	38	55	10
Longomont.	9	7	37	59	42
Keppletus	9	7	50	48	40
Lansbergius	9	7	36	1	53
Ricciolus.	9	7	31	12	0

NUMERUS LIV.

a Def. 22. pa. 24.

Solis motum a Medium, seu longitudinem Mediam ad datum tempus supputare, quâ occasione exponitur modus addendi & subtrahendi in Zodiaco.

§. 1. DAtum sit ex. gr. tempus, apparens annus Christi 1659. Iunij 30. Hora post merid. 5, ad quod motum Solis Medium oporteat supputare.

Numera annos, & dies qui inter datum temporis momentum, & Epocham, quâ placuerit uti, intercedunt, quos intervallum nominabo. Deinde per num. 36, reperi motum Medium huic intervallo competentem; quem, si datum temporis momentum est posterius Epochâ, adde Radici ad assumptam Epocham *num. præced.* constitutæ; deme autem, si anterius est. Ita prodibit longitudo Solis media ad momentum datum, pro eo loco, cujus Meridiano Radix Epochæ fuit affixa.

Fig. 47.

Hæc operis summa, quam schemate apposito declarabimus. Ecliptica sit A D E Z: ♈ initium in A: ordo Signorum ex A versùs D. Radix Medij motus esto A D E. Motus Medius Epochæ & dati momenti intervallo debitus, sit grad. 170: hos, si datum momentum est posterius Epochâ, adde Radici A D E; hoc est gradus 170 numera in consequentia ex E versùs Z, A, & numerationis terminus esto in C. Locus Solis Medius ad datum momentum erit in C, motusque Solis Medius A D E C, eosdem verò gradus 170, si momentum datum est Epochâ anterius, subtrahe Radici A D E, hoc est eos numera in præcedentia ex E versùs D, A, & sit terminus numerationis in D: erit D locus Medius, & A D motus Medius ad momentum datum.

§. 2. Quia verò modus addendi & subtrahendi in Zodiaco varios casus complectitur, eos regulis sequentibus exponemus.

Regula I. A motu addendo vel subtrahendo abjice gradus 360 quoties possunt. Quod si nihil superfuerit, additio & subtractio omittuntur, & punctum in Zodiaco quæsitum idem est cum dato: si aliquid superfuerit, hoc addes, vel subtrahes.

Fig. 47.

Sit ex. gr. Radix, seu longitudo nota A D E, adeoque punctum E notam habeat in Zodiaco distantiam ab A initio ♈: veniat autem huic addendus vel subtrahendus motus Medius certo temporis intervallo debitus, putà graduum 720, ut sic aliud in Zodiaco punctum ab E diversum innotescat. Si abjectis à motu Medio gradibus 360 quoties possunt, nihil superfit, constat ipsum per grad. 360, hoc est per integros circulos, adæquatè mensurari. Quare sive illum in consequentia, sive in præcedentia ex E numeraveris, hoc est notæ longitudini A D E addideris vel subtraxeris, numeratio semper finietur in E unde cœperat. Quare frustranea erit tam additio, quàm subtractio, & punctum quod per additionem vel subtractionem quærebatur, idem erit cum puncto dato E, adeoque & longitudo quæsita eadem cum datâ A D E. Quod si verò abjectis gradibus 360, aliqui supersint, illi utique pauciores erunt 360 gradibus, ac proinde noto arcui additi vel subtracti, hoc est numerati ab E versùs Z, vel versùs D, terminabuntur alibi quàm in E, adeoque punctum quæsitum additione, vel subtractione innotescet.

Regula II. Si, postquam Radici, seu longitudini notæ A D E, addideris vel subtraxeris motum Medium alicui temporis intervallo debitum, summa tota, vel residuum sit graduum 360, aut per gradus 360 mensurabile, hoc est unde abjectis 360 quoties possunt, nihil remaneat; longitudo quæsita erit nulla, eritque tum Planeta in ipso ♈ initio A. Atque id quidem manifestò patet, illius enim summæ vel residui & principium est in A per hypothesim, & quia integris circulis constat, etiam finis erit in A.

Quod si autem summa, vel residuum non sit per grad. 360 mensurabile, ac proinde abjectis gradibus 360, sive integris circulis A D E Z A, quot possunt, aliquid superfit, putà A D, illud utique minus erit circulo integro, eritque ipsa longitudo quæsita.

Regula III. Quando id à quo fieri debet subtractio, est subtrahendo minus, addantur ipsi gradus 360, ab eoque sic aucto subtractio fiat.

Ex. gr. oporteat à Radice A D E graduum 180 subtrahere motum Medium, putà graduum 670 debitum intervallo temporis, quod effluxit à momento ante Epocham dato, usque ad Epocham, ut sic (quemadmodum §. 2. dictum est) innotescat longitudo media ad momentum datum. Quia motus Medius, intervallo debitus est grad. 670, major nempe integro circulo, priusquam illum subtrahas, abjice grad. 360 quoties possunt, juxta reg. 1; id enim quod restabit, nempe grad. 310, oportebit solum subtrahere. Sed quia illud, nempe grad. 310, adhuc Radice A D E graduum 180 majus est, Radici A D E adjice gradus 360, sive integrum circulum E Z A D E: ab hoc aggregato si subtrahatur residuum supradictum, nempe grad. 310, numerando eos in præcedentia ex E per D usque in Z, restabit ex toto quidem circulo arcus E Z, atque insuper Radix A D E, hoc est restabit arcus A D E Z, longitudo quæsita ad momentum datum.

Summa Regularum hæc est. In omni additione & subtractione Astronomicâ, quando motus superat gradus 360, illi abjiciuntur quoties possunt; cùm verò id, à quo debes subtrahere minus est subtrahendo, minori gradus 360 adjiciuntur, ab eoque sic aucto fit subtractio.

Scholium.

Motus Medius supputatus hic fuit ad tempus apparens, cùm ad æquale fuisset supputandus. Erit igitur, ut tempori Medio exactè respondeat, corrigendus. Si tamen, quod fit plerumque, motus Medius supputetur ut ex eo eliciatur Verus, satis erit motum Verum corrigere, ut num. 57. §. 2. tradetur, aut si correxeris Medium, non erit opus Verum corrigere. Perinde est enim utri correctio adhibeatur.

NUMERUS LV.

n Def. 11. num. 24. o Def. 21. num 24.

Locum o Solis Verum in Ecliptica, sive motum Solis Verum ad datum quodlibet tempus Geometricè supputare.

Fig. 48.

Eccentricus sit R G K, & centrum ejus B; Ecliptica suprema C E D F, & centrum ejus A; linea Apogei sit E F; Arietis initium in C: ordo Signorum ex C in S. Solis centrum dato temporis momento existat in G, ducanturque rectæ A G H, B G, & A I parallela ad B G. Igitur dato temporis momento locus Solis Verus est H, a Medius locus I, motus Verus C E H, motus b Medius C E I, æquatio c I H; Anomalia Media, seu d argumentum Medium E I; motus Apogei Veri C E. Pari modo si Sol tempore dato existat in K, vel N, ducanturque rectæ A K L, B K, & A M parallela B K; item rectæ A N O, B O, & A P parallela ad B O; erit tempore dato motus Solis Verus C E D L, vel C O; Medius C E D M, vel C P; Anomalia Media E D M, vel E D F P; Æquatio M L, vel P O. His ad claritatem præmissis, Problema solvetur hunc in modum.

a Vide defin. 11. num. 24. b Def. 21. num. 24. b Def. 22. ibid. c Def. 23. ibid. d Def. 23. ibid.

§. 1. Per *num.* 54, inveniatur motus Solis Medius ad tempus datum, quem referat, ut dixi, vel arcus C E I, vel C E D M, vel C P.

§. 2. Per *num.* 44. reperiatur motus Apogei C E ad tempus datum.

§. 3. Ex motu Medio & motu Apogei inveniatur Anomalia Media sic: Si motus Medius (C E I, vel C E D M) sit major motu Apogei C E, aufer motum Apogei C E à motu Medio: nota remanebit Media Anomalia E I, vel E D M: Si motus Medius (C P) sit minor motu Apogei C E, ad C P adjice gradus 360, hoc est integrum circulum C E D F C, ab eoque sic aucto subtrahe C E; remanebit C P, atque insuper ex integro circulo C E D F C, restabit E D F C: quæ simul juncta dabunt Anomaliam Mediam E D F C P.

§. 4. Ex Anomaliâ Mediâ jam notâ elicietur Æquatio, seu Prosthaphæresis H I, vel M L, vel P O per *num.* 40.

§. 5. Demùm Æquatio motui Medio jam invento subtracta vel addita, dabit motum Solis Verum ad tempus datum, hunc in modum; quando Anomalia (E I) est minor 180 gradibus, sive Semicirculo E D F, Æquatio I H à motu Medio C E I subtracta, dabit motum Verum C E H. Si motus Medius sit minor æquatione I H, principio ♈ ipsam æquationem dividente, subtractionem perage ut §. 3. Quando Anomalia (E D M, vel E D F P) est major gradibus 180, tunc æquatio M L, vel P O, addita motui Medio C E D M, vel C P dabit motum Verum C E D L, vel C O. Quod si contingeret motum Medium (C E D Q) tam propè abesse à gradibus 360, ut adjecta Prosthaphæresi Q S proveniat summa C E D Q C S major gradibus 360, abjice ex summâ grad. 360, sive integrum circulū C E D Q C, & notus relinquetur motus Verus C S pro eo loco, cujus Meridiano affixa fuit Radix Epochæ.

Cæterùm motui Vero sic invento, quia collectus est ad tempus datum apparens seu inæquatum, adhibenda est correctio, ut tradam *num.* 58. §. 2.

Scholium.

Quæcumque hactenus toto 5 & 6 capite à numero videlicet 22 ad hunc usque locum tradidimus, hujus potissimum problematis solvendi gratiâ fuêre præmissa. Adeò reconditi artificij fuit Solaris per Eclipticam motus apparentem inæqualitatem ad mensuram revocare. Pari artificio, vel etiam majori, opus erit, ut in Lunâ alysque Planetis idipsum præstetur. Verùm multa hîc cum Sole communia; cujus proinde cursu ritè stabilito atque percepto, cætera deinceps omnia intellectu faciliora jam erunt.

Quantis porrò molestiys ac tricis Solis calculum expediverimus, quando cum Bullialdo & Ricciolo Anomalias obliquitatis Eclipticæ, præcessionis Æquinoctiorum, & Eccentricitatis rejecimus, incommodo suo lector comperiet, si methodum Alphonsi, Copernici, Reinholdi, Lansbergij & aliorum experiri voluerit. Sanè ex omnibus Anomalijs istis, labor ingens, pretium operæ ferè nullum; cùm loca Solis ad quævis antecedentia sæcula ex nostrâ methodo inventa, æquè vel magis cum observationibus conveniant, quàm ea, quæ illorum methodo circuitu numerorum longissimo ac tædiosissimo eruuntur.

NUMERUS LVI.

Datum motum Verum (C E H, vel C E D L) in Medium convertere.

Quæratur dato Solis loco Vero ex. gr. H vel L, competens æquatio B G A, vel B K A, sive arcus Æquatorij H I, vel M L. Id verò factum est *num.* 39, & 45. Si distantia loci Veri ab Apogeo, arcus nempè E H est minor 180 gradibus, æquationem I H jam notam adde motui Vero dato C E H, & habebis motum Medium C E I ad tempus motus Veri: si distantia loci veri ab Apogeo est major gradibus 180, arcus nempe E D L, Æquationem M L aufer à motu Vero C E D L; prodibit rursùm motus Medius C E D M, ad tempus Veri motus dati. Reliquos additionis & subtractionis casus collige ex dictis *num. præcedenti.*

Fig. 48.

NUMERUS LVII.

Regula temporis æquandi & inæquandi.

Dies Solares esse inæquales *num.* 50 ostensum est. Tempus ex inæqualibus diebus compositum, dicitur apparens sive Verum, quia à motu Solis apparente, seu Vero constituitur. Tempus æquale, seu Medium est, quod constat diebus æqualibus seu Medijs, quos exhibui *num.* 51.

§. 1. *Tempus Apparens ad Medium revocare.*

Datum sit tempus Apparens ex. gr. annus Christi 1659. Hora post merid. 3. 15'. Inquire ad hoc tempus motum Solis tum *l* Medium, tum *m* Verum, & Veri Ascensionem *n* rectam. Si Ascensio recta est

l Per num. 44. m Per num. 55. n Per num. motui 52.

motui Vero æqualis, tempus datum per se æquale est, adeoque nullâ eget Æquatione. Si Ascensio recta est major motu Medio, differentiam in tempus Solare conversam, adde tempori Apparenti; deme, si minor. Ita tempus Apparens datum reduxeris ad Æquale, seu Medium.

Demonstratio regulæ non sic est obvia, quin tyronibus videatur aliquantò fusiùs exponenda. Quia motus Solis Apparens, seu verus per Eclipticam tendit contra motum Primi Mobilis, inde fit (quemadmodum ostendi *num.* 50) ut dies Solares sint longiores diebus Primi Mobilis. Quod si motus Solis per Eclipticam & æqualis esset, & per Æquatorem incederet, tunc, quia ille semper eodem modo, hoc est semper æqualiter motui Primi Mobilis adversaretur, dies Solares eodem semper excessu dies Primi Mobilis excederent, ac proinde omnes inter se æquales existerent. Nunc verò quia contrariatio Veri motus Solis per Eclipticam contra motum Primi Mobilis, duplicem inæqualitatem patitur, quarum prima oritur ex ipsa inæqualitate [a] motus Apparentis, seu Veri, altera ex obliquitate Eclipticæ (cujus partes cùm aliter atque aliter ad Æquatorem inclinentur, etiam motus Apparens per illam incedens, quotidie aliter atque aliter motui 1. Mobilis circa polos Æquatoris facti, contrariatur) necesse est ex duplici hoc capite dies existere inæquales. Concipiamus modò in Æquatoris plano descriptum esse Horologium & duos horarum indices ex Æquatoris centro eductos, quorum primus sit circuli declinationis [o] per Solem ducti sectio cum Æquatore, ac proinde designet [p] Ascensionem Solis Rectam, alter abscindat arcum Æquatoris (initio facto à principio ♈) æqualem motui Solis Medio. Si duo isti indices in Æquatoris plano ab Occasu in Ortum sic moveantur, ut primus semper comitetur locum Solis Verum designando semper in Æquatore Ascensionem Solis rectam, quam pro tempore aliam atque aliam Sol obtinet; alter verò eâdem semper velocitate feratur, quâ locus Solis Medius æqualiter procedit in Eclipticâ, atque insuper concipiatur eodem tempore uterque index (Horologij plano immobili permanente) ad motum diurnum 1. Mobilis circumagi ab Oriente in Occidentem, manifestum erit ex dictis, indicem primum in Horologio designaturum horas temporis Apparentis, indicem verò secundum horas ostensurum temporis Æqualis, ac proinde arcum Æquatoris inter utrumque indicem interceptum, differentiam temporis Apparentis & Æqualis efficere. Atqui arcus ille est differentia Ascensionis rectæ Solis, & Medij motus Solis. Ergo hic per *num.* 51. in tempus Solare conversus, est differentia inter tempus Apparens, & Æquale. Deinde quando Ascensio recta est major motu Medio, tunc index primus apparens tempus designans, est Orientalior indice secundo designante tempus Æquale. Quare cùm tempus diurnum adeoque & horarum ordo procedat ab Ortu in Occasum, liquet indicem temporis Apparentis minus in Horologio dicto tempus ostensurum, quàm ostendat index temporis Æqualis, ac proinde tempus Apparens futurum tunc minus tempore Æquali. Quando igitur Ascensio Recta major est motu Medio differentia Ascensionis rectæ & motus Medij addenda est tempori Apparenti, ut tempus Æquale obtineatur. Ex quo jam patet faciendum esse contrarium, si Ascensio Recta sit Medio motu minor. Atque ita regulæ superiùs allatæ plena demonstratio constat.

[a] *Vide num. 22. & num. 25. prop. 11.*

[o] *Def.* 18. *num.* 1.

[p] *Def.* 40. *num.* 1.

§. 2. *Tempus Medium in Apparens convertere.*

Ad tempus Medium, seu Æquale datum reperi motum Solis tum Medium, tum Verum & Veri Ascensionem rectam. Si Ascensio Recta est major motu Medio, differentiam subtrahe tempori Medio ut fiat Apparens; adde, si major est. Demonstratio patet ex præcedenti. §. .

Corollarium.

Tempus Apparens æquatione non indiget, cùm defectus motus Solis compensat excessum Ascensionis Rectæ, vel contra; quod bis in anno contingit: item quando Sol cum suo Apogeo est in aliquo punctorum Cardinalium.

Scholium.

Ratio æquandi tempus jam tradita à Ptolemæo ad Tychonem ab omnibus Astronomis usitata, duas supponit causas inæqualitatis dierum, videlicet inæqualitatem Apparentis motus Solis & obliquitatem Eclipticæ. Recentiores quia plures inæqualitatis dierum esse causas opinantur, alias æquandi temporis vias adinvenire conati sunt. Verùm cùm aliæ istæ inæqualitatis causæ sint vel incertæ vel minus probabiles, nihil est cur ab antiquâ æquandi temporis ratione recedamus: quâ quidem Eclipsibus à se observatis Ricciolus magis quàm aliâ ullâ fieri satis affirmat.

NUMERUS LVIII.

Quando & quomodo temporis æquatio sit adhibenda.

QUando ad tempus datum supputandus est motus Medius & ex illâ Verus, tempus Apparens reduci debet ad æquale, seu Medium; quia Mediorum motuum inventio *num.* 36 exposita, supponit æqualia tempora, dies videlicet, horas, scrupula &c. Temporis portò inter momentum datum & Epocham extremitas utraque æquanda est. Prior, nempe Epocha, æquata fuit *num.* 53, posterior, ipsum videlicet momentum datum, æquabitur ut *num. præc.* §. 1. docuimus. Itaque

§. 1. Si Lunæ vel alterius Planetæ (nam de Sole dicam seorsim) supputanda fuerit ad tempus datum Longitudo Media & Vera, vel Media tantùm, oportebit ante omnia, ut ipsa Epocha, ad quam Radix motuum est constituta, sit non apparens, sed (quod *num.* 53. præstiti) æquata. Deinde temporis momentum datum, ad quod Planetæ Longitudo quæritur, ex apparenti reducendum est ad æquale seu Medium, ut docui *num. præced.* §. 1. atque ad illud sic æquatum motus, seu Longitudo Planetæ supputabitur.

§. 2. In Sole, ne bis oporteat motum Verum & Medium inquirere, sic age. Suppositâ, ut priùs, Epochâ per *num.* 53 exæquatâ, motum Solis Medium & Verum [a] supputa ad tempus datum apparens,

[a] *Per num.* 54. & 55.

parens, seu inæquatum, sed motui Vero sic obtento tantum adde vel deme, quantum temporis æquationi *num. prac.* §. 1. traditæ, debetur: Differentiam videlicet Ascensionis Rectæ & motus Medij in tempus solare *b* converte, & debitum huic motum Medium inquire per *num.* 36; quem si Ascensio Recta est major motu Medio, motui Vero ad tempus datum obtento adde; si minor est, deme. Ita prodibit Solis motus, seu Longitudo Vera tempori æquali exactè respondens.

b Per nu. 51.

Licet eâdem viâ procedere etiam in Lunâ & Planetis.

§. 3. Cùm petitur motus æqualis dato temporis intervallo competens, æquandum est intervalli initium & finis, & intervallo sic æquato motus, qui ei debetur, colligendus.

§. 4. Si Epochâ, ad quam Radix motuum cujusvis Astri fuerit constituta, uti placuerit apparente, seu inæquatâ, quod fecêre Ptolomæus, Alphonsus Rex, Copernicus, Æquationem temporis ita perage. Inquire primò ad ipsam Epocham inæquatam Planetæ motum tum Medium, tum Verum, & Veri Ascensionem Rectam. Deinde ad datum momentum inæquatum rursùm inveni motum Planetæ tum Medium, tum Verum, & Veri Ascensionem rectam. Quibus habitis sume differentiam Ascensionum, & differentiam Mediorum motuum. Si hæ differentiæ sunt æquales inter se, nullâ temporis æquatione opus est. Si differentia Ascensionum major est differentiâ Mediorum motuum, excessum in tempus Solare convertes, & per *num.* 36 inquires quantus illi motus Medius conveniat, quem motui Vero ad datum momentum suprà invento, adjicies. At si differentia Ascensionum minor est Mediorum motuum differentiâ, defectum converte in tempus, & Medium motum illi debitum motui Vero ad datum momentum reperto, subtrahe. Sic prodibit motus Astri Verus tempori æquali exactè respondens.

§. 5. Longomontanus, Lansbergius, Bullialdus, Ricciolus, non probant radices motuum constitui ad Epochas apparentes, seu inæquatas. Rationem afferunt, quia sic non colligitur Planetæ Longitudo eadem ex unâ Epochâ, quæ ex alterâ; si verò Epochas adhibueris exæquatas, quamcumque assumpseris, eadem semper Longitudo Planetæ obtinebitur.

Scholium.

Æquatio temporis maximè necessaria est in Lunâ; in Sole minùs. In reliquis Planetis contemni potest; cùm enim nequeant horum loca supputari eâ præcisione, quâ Solis & Lunæ, operæ pretium non erit illas ex temporis æquatione minutias consectari.

Kristmannus, Vitichius, & in primis Vendelinus in Lampade arcanorum cælestium, & in Idea tabularum Atlanticarum reductionem temporis apparentis ad æquale, & æqualis ad apparens ne in Sole quidem & Lunâ esse necessariam existimant. Refragantur illis Bullialdus, & Ricciolus, qui benè contra Vendelinum urget, fieri non posse, quin ex causa necessaria inæqualitatis dierum (eam num. 50, & 57 exposuimus) effectus, hoc est dierum inæqualitas, consequatur.

NUMERUS LIX.

Quando tempus Æquale converti debeat in Apparens.

IAm dictum est ostensùmque *numero præcedenti* reducendum esse tempus Apparens ad Æquale, quando ad datum tempus aliquod motus, seu locus Planetæ supputatur. At si ex motibus supputandum sit tempus, quo phænomenum aliquod, ut Novilunium, Plenilunium, Eclipsis Lunæ Solisve, continget, vel jam contigerit, illud utique æquale, seu Medium proveniet; cùm enim motuum cælestium supputatio omnis ex Medijs, hoc est æqualibus Motibus derivetur, tempus inde collectum non poterit non esse æquale, seu Medium. Quare cùm nos tempora motu Solis, non Medio, sed Vero, seu Apparente metiamur, manifestum est phænomeni tempus, quod (ut dixi) ex ejusmodi calculo provenit æquale, oportere ad Apparens reducere. Modum reductionis habes *num.* 57. §. 2.

NUMERUS LX.

Motum Solis aut Planetæ cujusvis ad Meridianum unius loci inventum, cuivis Meridiano accommodare.

CUm motus Planetæ cujusvis Astri ad datum tempus fuerit inventus, is solùm conveniet Meridiano loci, ad quem Epocha Mediorum motuum fuerit constituta. Exemplo rem declaro.

Aliquis Antverpiæ existens cupiat motum Solis Verum ad annum 1657. Decemb. dies 2, horas 2. 6. Operando ut 55. *num.* præscriptum est, reperietur motus Solus Verus conveniens illi momento, quando est hora 2. Bononiæ, *a* ad cujus Meridianum Radix Medij motus fuit constituta. Quando autem Bononiæ est hora 2, tunc Antverpiæ, quæ Occidentalior est, nondum est hora 2. Itaque operando ut præscriptum est *num. præced.* prodibit motus Medius conveniens alij momento temporis, quàm dato. Quare ut obtineam motum convenientem illi momento, quando Antverpiæ est hora 2, scire debeo quanto intervallo hora 2 Bononiæ, anticipet horam 2. Antverpiæ, & motum Medium anticipationis intervallo debitum addere in hoc casu motui Vero anteà reperto. Hæc rei propositæ theoria. Praxim ita instituas.

a Num. 53.

Quære motum Verum convenientem illi momento temporis, quod in loco, ad quem constituta est Epocha, est dato tempori cognomine.

Inquire Longitudinem tum loci ad quem constituta fuit Epocha, tum loci dati, cui convenientem desideras motum Planetæ Verum.

Longitudinum differentiam converte in tempus Solare, ut tradidi *num.* 51.

Per *num.* 36, collige motum Medium debitum huic tempori.

Quem, si locus datus est Occidentalior loco Epochæ, adde motui Vero reperto suprà; si Orientalior est, subtrahe; atque ita habebis motum ad tempus datum in loco dato.

De-

Demonstratio patet ex dictis.

Nota porrò eodem recidere, sive motum Medium Epochâ intactâ revoces ad Meridianum datum, sive Epocham ipsam: & hoc postremum consultius est, nam Epochâ semel ad Meridianum datum reductâ, motus Medii, quotiescumque libuerit, reductione nom amplius repetitâ supputantur. Quod si Epocha non sit reducta, in singulis Mediorum motuum supputationibus, reductio est iteranda.

Scholium.

Differentia Meridianorum, seu Longitudinum, reperitur ex observatione Eclipsium Lunarium: *Observatum sit ex. gr. Eclipsis initium in loco A, horâ post merid. 9. in alio loco B horâ 10. temporis differentiam, quæ nunc est hora una, converte in gradum Æquatoris per tabellam 5. num. 51. Proveniunt grad. 15. 2'. 28", quibus locus B Orientalior est loco A. Verùm, quia Longitudinis locorum cognitio accurata Solis ac Lunæ motus plenè jam constitutos supponit, ad eos autem constituendos minimè ipsa sit necessaria, ejus tractationem in alium locum rejicio.*

FINIS LIBRI PRIMI.

ASTRONOMIÆ
LIBER SECUNDUS
DE MOTU LUNÆ
CAPUT PRIMUM.
Qui motus in Luna, & quo modo sint observati.

CUm in omni parte Matheseos tum vel maximè in Astronomiâ, uti initio hujus operis præfatus sum, magni interest, ut ordo scientiæ legitimus teneatur. In quo quia minùs accurati passim Astronomi fuêre, vix studiosi, si institutore careant, nisi labore permagno, ex eorum libris Astronomiam perdiscent. At si ordo scientificus, quo in Geometriâ utimur, accuratè servetur, & facile, & jucundum hujus scientiæ studium existet. Quod igitur in Sole, nisi fallor jam præstiti, idem in Lunâ conabor efficere: & quamvis Lunarium motuum Theoria, & dimensio sit implexior ac difficilior, quàm Solarium, perficiam tamen Deo juvante, ut qui Solis Theoriam *libro* 1. explicatam intellexerit, Lunarem pari facilitate, quâ Solarem, percipiat.

NUMERUS PRIMUS.

Lunæ motus Primus & Secundus, seu motus Lunæ Diurnus, & motus Lunæ in Longitudinem.

LUna, quemadmodum omnia sidera, movetur quotidie ab Ortu in Occasum, sive in antecedentia: qui motus vocatur Primus & Diurnus.

Præter hunc alio cietur motu sibi proprio ob Occasu in Ortum, sive in consequentia sub Zodiaco. Observatum est enim si cum aliquâ stellâ Fixâ Meridianum Luna hodie pertranseat, cras eâdem stellâ ad Meridianum reversâ, eam adhuc distare à Meridiano grad. 13. 10, 35"; hoc est unius horæ minutis 47'. 51". 25'", seriùs ad Meridianum appellere. Similiter si hodie Luna oriatur ex. gr. horâ quartâ; cras deprehendes oriri seriùs spatio ferè temporis jam dicto. Rursum Luna post Conjunctionem cum Sole ab eo quotidie elongatur magis magisque in consequentia, donec post mensem cum eo rursum conjungatur. Manifestus est ergo Lunæ motus in consequentia.

Quod autem sub Zodiaco, quamvis extra Eclipticæ planum, hic motus peragatur, hinc patuit, quod maxima declinatio Lunæ ab Æquatore deprehensa sit 5 gradibus, & aliquando 7, differre à declinatione maxima Solis, seu Eclipticæ. Reperitur autem declinatio Lunæ ab Æquatore, (vide *fig.* 44. *lib.* 1.) Exploretur *a* tum altitudo Meridiana Lunæ AQ, tum altitudo *b* Æquatoris NF: hàc enim demptâ ab altitudine Meridianâ Lunæ, relinquitur FQ declinatio Lunæ ab Æquatore.

a *Per num.* 28 *lib.* 1.
b *Per num.* 27. *lib.* 1.

Circulus igitur sub quo movetur Luna in Longitudinem, secat Eclipticam in duobus punctis, quæ Nodi vocantur. Porrò situs hujus circuli clariùs intelligetur *num.* 9. & 10. ubi de Lunæ motu in Latitudinem, & de motu Nodorum in præcedentia tractabitur.

Cæterùm ex motu Diurno & motu in Longitudinem inter se permixtis, in diebus artificialibus Lunæ habetur mensis spatio omnis varietas ea, quam oriri spatio unius anni in diebus artificialibus Solis *num.* 15. 16. 17. in libro primo demonstravimus. Diem Lunæ artificialem, voco, tempus quo supra Horizontem est.

NUMERUS II.

Motus Lunæ in longitudinem denominationes & species.

VAriè denominatur, prout à diversis initijs numeratur.

Motus in longitudinem Periodicus.

Si numeretur à stabili aliquo puncto Zodiaci, ex. gr. ab initio Arietis, vocatur *Motus* Lunæ *Periodicus in Longitudinem*, eoque Luna Zodiacum *c* absolvit diebus 27, horis 7. 43'. 4". percurrit autem quotidie grad. 13. 10. 35". Revolutio ejusmodi una Lunæ per Zodiacum, *Mensis Periodicus* appellatur.

c *Ostendam num.* 34.

Motus Lunæ à Sole.

Si numeretur à Sole, vocatur *Motus* Lunæ *à Sole*; *elongatio, longitudo, distantia* Lunæ *à Sole*. Elongatur autem Luna à Sole quotidie, *d* grad. 12, 11'. 26". 41'": ad Solem redit *d* diebus 29. H. 12. 44'. 3": quod spatium temporis dicitur *Mensis Synodicus*, & *Lunatio*. Est longior mense Periodico, quia quando Luna reversa est ad punctum Zodiaci, in quo Solem reliquerat, (hoc est mense Periodico jam elapso) ibi Solem non reperit, quòd is interim sit motu proprio in consequentia progressus. Quare ut eum Luna assequatur, debet adhuc unum ferè Signum percurrere.

d *Ostendam num.* 34.

Ab hoc motu omnis phasium Lunarium varietas oritur.

oritur. Lunâ enim Soli conjunctâ, Interlunium est, quia pars illuminata à nobis totaliter aversa est. Vocatur autem hæc phasis *Novilunium*, *Luna silens*, *Conjunctio cum Sole*, *Synodus Luminarium*, *Copula*, *Syzygia*. Duæ postremæ votes pluraliter sumptæ (Copulæ, Syzygiæ) Novilunium simul & Plenilunium designant. Novilunij Signum est ☌, Plenilunij ☍.

Deinde post unum vel alterum diem, paulò post Occasum Solis apparebit acutissimè corniculata, propè Horizontem Occiduum: atque hæc *Prima Lunæ Phasis*, seu *Apparitio* nominatur.

Die circiter quarto, cùm jam 60 gradibus recessit à Sole, pleniore cornu apparet.

Septimo circiter die, cùm integro quadrante à Sole distat, apparet semiplena, dimidiata, bisecta: quæ Phasis vocatur *Prima Quadratura*, ejusque Signum est □. Nobis tamen positis in superficie Terræ, Luna præcisè apparet bisecta paulò ante Quadraturam; nempe dum à Sole distat gradibus saltem 87, vel (quod probabilius) 89. ut alio *b* loco demonstrabitur.

b Num. 19. lib. 3.

Circa undecimum diem, cum à Sole distat gradibus 120, apparet gibbosa.

Circa diem decimum tertium adhuc multò gibbosior cernitur, & ferè plena.

Tandem 14 aut 15 die, Soli opposita, & rotunda ac plenè illuminata apparet.

Peracto Plenilunio eædem Phases, sed ordine inverso, restituuntur. A Novilunio usque Plenilunium pars Lunæ illuminatæ Occidentem spectat, sed cornua Orientem; à Plenilunio ad Novilunium contrarium accidit.

Motus Lunæ ab Apogeo, sive motus Anomaliæ.

Si motus in longitudinem numeretur ab Apogeo Eccentrici (assignabitur enim Lunæ circulus Eccentricus *num.* 13 & 16. ob inæqualitatem motus in Longitudinem, *num.* 3 & 4, exponendam) dicitur *motus Anomaliæ*; ejusque Periodus est *Mensis Anomalisticus*, dierum *i* 27. H. 13. 18'. 34". Est paulò longior mense Periodico, quia Apogeum (ut ostendam *num.* 7.) etiam, quamvis tardè, in consequentia movetur.

i Ostendam num. 34.

Motus Lunæ in Latitudinem.

Si denique numeretur à Nodis, hoc est ab alterutro punctorum, in quibus Lunæ orbita secat Eclipticam, motus in latitudinem appellatur: & diurnus quidem *m* est grad. 13. 13'. 45".

m Ostendam num. 52.

Periodus ejus vocatur *Mensis draconiticus*: absolvitur diebus 27. H. 5. 5'. 36". Est brevior mense Periodico, quia Nodi (ut dicam *num.* 10.) moventur sensim in præcedentia. Unde fit, ut ad Nodum, à quo abierat, Luna antè redeat, quàm totum Zodiacum absolverit. Sed de motu Latitudinis, & motu Nodorum agam iterum *num.* 9. & 10, & ex professo toto cap. 6.

Periodos horum motuum in Longitudinem singulis hic adscripsi solummodo in antecessum. Infra enim c artificium tradetur quo illæ sunt repertæ, & reperiri de novo possint. Sunt autem Periodi dictæ non secundùm motus Veros, sed secundum Medios acceptæ. Periodos enim motus Veri in longitudinem inæquales esse, ostendam num. sequente.

c Toto cap. 3. & 6.

NUMERUS III.

Motus Lunæ in Longitudinem inæqualitas prima.

Quemadmodum primus Solis, ita etiam Lunæ, per Zodiacum, seu potiùs sub Zodiaco motus est inæqualis. Id quod ex sequentibus observationibus exploratum fiet.

§. 1. Comparando Lunam cum Sole & stellis Fixis, ad quas appellit, evidenter comperies eam sub Zodiaco, imo sub eadem parte Zodiaci, nunc tardè, nunc velociter, nunc mediocri velocitate moveri; inæqualitate tam sensibili, ut ea tota neque in refractionem, neque in parallaxim refundi possit. Et quidem intra dies circiter 28 motus Lunæ semel est velocissimus, & semel (nempè post dies 14) tardissimus, bis mediocris. Unde patet primæ inæqualitatis Periodum esse menstruam. Porrò non solùm partes unius revolutionis, sed etiam revolutiones integræ inter se inæquales reperiuntur, ut patebit ex §§. sequentibus.

§. 2. Observetur conjunctio Lunæ cum aliquâ stellâ Fixâ, & tempus conjunctionis notetur. Deinde elapso circiter mense rursum nota tempus, quo Luna ad eandem stellam revertitur. Tempus inter utramque conjunctionem intercedens, est mensis Periodicus Verus, sive est tempus quo Luna motu Vero integrum Zodiacum percurrit. Hac observatione sæpius repetitâ, comperies integras Lunæ per Zodiacum revolutiones inæquali tempore absolvi, hoc est menses Periodicos esse inæquales. Ex quo manifestum est Lunæ motum in Longitudinem sub Zodiaco inæqualem existere. Quamvis autem parallaxis longitudinis (de quâ agam *lib.* 3. *cap.* 7.) hic interveniat: potuit illa tamen in hac rudiori indagine dissimulari, cùm inæqualitas quæ deprehenditur tanta sit, ut ea nequeat in parallaxim ullo modo tota refundi.

§. 3. Observetur præsidio tubi Optici quando Luna appareat bisecta, & cum quâ stellâ Fixâ conjuncta tum sit. Deinde post mensem circiter observa tempus quo iterum bisecta appareat. Hujusmodi observatione diversis temporibus sæpiùs repetitâ, comperies intervallum temporis inter duas Lunæ Bisectiones, sive Dichotomias interjectum, modò majus esse, modò minus, inæqualitate rursum adeo sensibili, ut in nullam aliam causam possis rejicere, quàm in irregularitatem motus Apparentis. Verùm quia in Quadraturis inæqualitati primæ admiscetur secunda, ut dicetur *num.* 5. sic propriè non innotescit inæqualitas mensis Synodici, qui est tempus ab uno ☌ ad aliud, sed inæqualitas mensis Quadratici, qui est tempus ab unâ Quadraturâ ad alteram unâ intermissâ. Sit ergo

§. 4. Ex intervallo duorum Eclipticorum ☍ elice mensem Synodicum hoc modo. Notum habeas numerum mensium Synodicorum, qui à primo Ecliptico ☍ ad secundum effluxêre, quem colliges ex numero Pleniluniorum quæ interim contigerunt. Ponamus intercessisse menses Synodicos, seu Lunationes 15. Notum quoque habeas tempus ab uno Ecliptico ☍ ad alterum, quod vocemus A. Cùm igitur 15 Lunationes efficiant tempus A; una Lunatio quantum tempus efficiet? per regulam proport. prodibit quantitas unius Lunationis, seu mensis Synodici. Si hunc in modum ex diversis Eclipsium paribus,

bus, mensem Synodicum sæpius elicueris, valde inæquales eorum quantitates reperientur: quod non contingeret, si omnes Synodici menses inter se æquales existerent.

Atque hæc hactenus est Lunæ inæqualitas prima, quæ infra num. 13. & 16. salvabitur per Eccentricum, ut in Sole. Quæ porrò hic rudiori Minervâ attentavimus, suis locis accuratiùs præstabuntur.

NUMERUS IV.

Locum Lunæ in Zodiaco observare.

Usus erit hujus Porismatis in secundâ Lunæ inæqualitate explorandâ.

Primus modus, quando Sol & Luna sunt ambo supra Horizontem.

Quadrante exquisito & amplo metire distantiam Lunæ à Sole in Eclipticâ; quod fiet, si per Dioptras lateris intromittas Radium Solis, sic enim latus instrumenti directum erit in Solis centrum; per Dioptras verò regulæ collimes in punctum illud marginis Lunaris, quod Soli proximum est, vel à Sole remotissimum: ita enim nota fiet distantia marginalis puncti Lunæ citimi, aut remotissimi à centro Solis: cui distantiæ auferendo vel addendo Lunæ Semidiametrum apparentem, distantia centri Lunæ à centro Solis innotescet. Ad finem porrò hîc intentum sufficit Diametri apparentis observatio *o* mediocriter exacta; imò satis erit mediam assumere inter maximam & minimam, qualis ferè est minutorum 32'. In quadraturis notitia Diametri non requiritur, cùm facilè tum possit in Lunæ centrum collimari.

o Praxim ab his independentem vide lib. 3. num. 30. mod. 1.
a Per num. 55. lib. 1.

Reperiatur deinde *a* ad idem tempus locus Verus Solis in Zodiaco. Cùm ergo nota sit distantia Lunæ à Sole, liquet etiam Lunæ in Zodiaco locum latere non posse.

Quoniam verò hîc intervenit parallaxis Lunæ à Sole in Longitudinem, ea evitabitur ferè tota, si observatio fiat cùm Luna est in gradu Eclipticæ nonagesimo ab Horizonte; tunc enim parallaxis longitudinis (quod patebit independenter ab his ex *num. 39. lib. 3. propr. 1.*) evanescit; aut cùm Luna in Meridiano posita prope Verticalis est, (quod in locis parvam habentibus Latitudinem contingit) tunc enim quia ferè nulla est parallaxis Altitudinis, etiam Longitudinis parallaxis, utpote minor alterâ, ferè nulla evadet, uti patebit ex. *num. 39. lib. 3. propr. 8.* Dixi, *ferè tota*, quia adhuc restat parallaxis Solis; sed cùm ea (ut ostendam *lib. 3. num. 19*) 30 Secundâ non excedat, contemni potest. Modus porrò reperiendi Lunam in Nonagesimo independenter ab his tradetur *lib. 2. num. 72.*

Modus secundus pro tempore nocturno.

Metire distantiam Lunæ ab aliquâ stellâ Fixâ in Zodiaco Longitudinis notæ. Docebimus porrò *a* alibi independenter ab hoc negotio stellæ datæ Longitudinem, & Latitudinem reperire. Cùm ergo nota sit Lunæ distantia à stellâ in Zodiaco Longitudinem habente notam, etiam Lunæ Longitudo innotescet.

a Lib. 5. num. 7. & 8.

In captanda distantia Lunæ à stella non requiritur notitia Diametri apparentis, cùm Lunæ, utpote lucentis, radius possit per dioptras intromitti, ac proinde latus regulæ tunc sit in centrum Lunæ directum.

Hæc praxis melior est præcedenti, tum quia non requiritur notitia Diametri apparentis, tum quia potest parallaxis in Longitudinem vitari tota, si capiatur tempus cùm Luna est in Eclipticæ gradu nonagesimo, aut ferè tota si observetur Luna, cùm magnam habet altitudinem Meridianam, ut dixi supra. Fixæ autem omni parallaxi carent.

NUMERUS V.

Secunda Lunæ inæqualitas exponitur.

§. 1. Luna tempore Syzygiarum, hoc est in ☌ & ☍ obnoxia est Soli inæqualitati primæ, quam *num. 3.* præsertim §. 1. & 4. exposui. At extra Syzygias præter Primam etiam Secundam patitur. Nam si eo, quem *cap. 3.* docebimus, modo reperiantur motus Lunæ Medij, atque ex his (ut docebitur. 4. c.) Eccentrici Eccentricitas, & Apogei locus, & Æquationes singulis Anomaliæ gradibus competentes: experientiâ constat tempore ☌ aut ☍ unam æquationem simplicem sic inventam sufficere, ut ex motu Lunæ Medio Verus eliciatur: Verus enim qui sic elicitur, convenire deprehenditur cum *a* observato; & Eclipses Solis ac Lunæ præsidio motuum unâ illâ simplici æquatione inventorum, accuratè prædicuntur. Quod si extra Syzygiarum tempus eâdem methodo locum Lunæ Verum supputaveris, is manifestò dissentiet ab eodem per observationem acquisito: eritque diversitas tantò major, quantò fuerit Luna Quadraturæ propinquior, & in ipsis Quadraturis maxima. Ex quo patuit Lunam extra Syzygias alterâ præter Primam inæqualitate involvi.

a Per num. 4.

§. 2. Cùm Syzygiæ incidunt in gradum *a* Anomaliæ 95 vel in 265, hoc est cùm Luna Soli conjuncta vel opposita ab Apogeo distat gradibus 95, vel 265, Primæ inæqualitatis æquatio, seu differentia, inter motum Medium & Verum, est maximarum minima, nempè graduum 5, ut ostendam *nu. 39.*

a Anomalia definitur lib 1. num 24. defin. 16.

§. 3. Cùm Quadraturæ incidunt in gradum Anomaliæ 97. 30, vel in gradum Anomaliæ 261. 30, hoc est quando Luna à Sole remota grad. 90, distat ab Apogeo Eccentrici grad. 97. 30, vel 261. 30, utriusque simul junctæ inæqualitatis æquatio, seu motus Veri ac Medij differentia, est maximarum maxima, ascenditque ad gradus 7. 30. ut *num. 41.* ostendam.

Ne Tyronum porrò in his phantasia turbetur, notare debent Novilunium, Plenilunium, Quadraturam, imò quamlibet Lunæ phasim, in quemvis Anomaliæ gradum posse incidere. Itaque cum §. 1. dixi inæqualitatem Secundam in Quadraturis esse maximam, id hunc in modum intelliges: in quodcumque punctum Anomaliæ Quadratura inciderit, major tum est Secunda inæqualitas, quàm sit, cùm alia quævis Lunæ phasis in eodem puncto contingit.

§. 4. Cùm Lunæ motus apparet tardissimus vel velocissimus, ac proinde cùm *b* est in Apogeo vel Perigeo sui Eccentrici, sive tum sint Syzygiæ, sive Quadraturæ, inæqualitas utraque evanescit: tunc enim inter motum Medium & Verum nulla diversitas observatur.

b Per propr. 11. num. 25. lib. 1.

Pro §. 5. Eccentricus Lunæ esto CHESVH, Apsidum linea EV, Mediæ Longitudines in punctis H, S, *quæ*

Fig. 5.

quæ determinat Recta H C S per Eccentrici centrum lineæ Apsidum perpendicularis.

§. 5. Quando ☌ vel ☍ contingit circa Medias Longitudines H, S, toto illo mense ferè nulla deprehenditur inæqualitas Secunda: quia necesse est mense illo Quadraturas incidere circa lineam Apsidum E V; ubi, ut dictum §. 4, Secunda inæqualitas, imò & Prima, evanescit. Cùm ergo tum Secunda inæqualitas in ipsâ Quadraturâ in quibus esse debet *c* maxima, sit nulla aut penè nulla, liquet à fortiori eam toto mense illo aut nullam, aut ferè nullam existere. Mensibus tamen consequentibus sensim ea crescit; quia dum ☌ & ☍ sensim à Medijs Longitudinibus recedunt, etiam Quadraturæ proximè sequentes recedunt sensim longiùs à lineâ Apsidum, ac proinde accedunt propiùs ad Longitudines Medias, circa quas tam Prima quàm Secunda inæqualitas sunt maximæ, ut dictum §. 2. & 3.

c Per §. 1.

§. 6. Periodus Secundæ inæqualitatis intra mensem bis tota absolvitur. Bis enim nulla est, in ☌ videlicet & ☍, & bis maxima, in utraque nimirum □. Absolvitur ergo Periodus una à ☌ ad ☍, altera à ☍ ad ☌.

§. 7. Duo modi sunt, *d* quibus extra Syzygias Lunæ Verus motus seu locus, ex Medio ad tempus datum, elicitur. Primus est hujusmodi. Locus Lunæ Verus ita supputatur ac si tum essent Syzygiæ, adhibendo nempè æquationem simplicem inæqualitatis Primæ; & locus Lunæ sic inventus vocatur *Primò æquatus*, quia adhuc secundò æquari debet, & *Fictus*, quia discrepat à loco per observationem acquisito. Inquiritur deinde æquatio altera, quæ loco Lunæ Ficto addita vel subtracta, exhibet locum Lunæ Verum ad tempus datum extra Syzygias, loco Vero per observationem acquisito consentientem. Locus Lunæ sic correctus, dicitur *Secundò Æquatus*. Alter modus, qui mihi clarior & expeditior videtur, unam æquationem utrique inæqualitati simul junctæ convenientem, inquirit. Si primo modo uti placuerit: Scito ex observationibus *e* compertum, æquationis Secundæ additionem vel subtractionem peragendam esse secundùm regulas sequentes.

d Traden- tur num. 46. & 47.

e à Bullialdo lib. 3. c.

Reg. I. Cùm eo temporis momento ad quod locus Lunæ Verus petitur, linea Synodica *i* A T, est in Anomaliæ quadrante quarto H E, vel primo E S, si tum Luna tendat à ☌ ad ☍, æquatio secunda subtrahenda est loco Lunæ Ficto, ut is correctus evadat; addenda verò si Luna tendat à ☍ ad ☌.

Fig. 5. i Vide de- fin. 4. num. 20.

Reg. II. Cùm lineâ Synodica secat Anomaliæ quadrantem secundum S V, vel tertium V H, tunc à ☌ ad ☍ æquatio secunda addenda est loco Ficto; à ☍ ad ☌ subtrahenda.

§. 8. Ex his sequitur locum Lunæ Verum extra Syzygias secundò Æquatum, subinde magis, & subinde minùs differre à loco Medio, quàm ab eodem differat locus primò Æquatus, seu Fictus, qui Syzygijs, si tum essent, competeret.

§. 9. Observatum est à Tychone in Append. to. 1. Progymn. ad investigandam æquationem secundam utendum esse potiùs motu Vero Lunæ à Sole, quàm Medio; sic enim locus Lunæ calculo inventus, evadit conformior observato. Alij tamen Astronomi utuntur Medio.

§. 10. Postremò insignis illa Secundæ inæqualitatis proprietas est: cùm Luna quadrata, seu 90 grad. à Sole distans, movetur tardissimè, hoc est cùm Quadratura incidit in Apogeum Eccentrici, distantiam habet à Terra majorem quàm aliàs unquam; cùm verò 90. grad. à Sole dissita, movetur celerrimè, hoc est cùm Quadratura incidit in Eccentrici Perigeum, distantia ejus à Terrâ est absolutè minima. Id quomodo ex parallaxium observationibus colligatur, dicam *lib. 3. num. 10.*

Ex his arbitror fore ut inæqualitatem Lunæ Primam & Secundam studiosi clarè intelligant; quam passim vel obscurè vel strictim Astronomi exponunt. Siquid adhuc obscuritatis adhæserit, id evanescet penitus, cum sequenti capite Lunæ Hypothesis exponetur. Porro quemadmodum ad explicandam Lunæ Primam inæqualitatem Eccentricum adhibituri sumus cum Eccentricitate semper eâdem, ita ad explicandam Secundam, quæ involvit Primam & aliquid amplius, Eccentricum cum Eccentricitate mutabili assumemus cap. seq. ac deinde cap. 4. & 5 docebimus quo artificio inveniantur æquationes, quæ unicuique Eccentricitati ad singulos Anomaliæ gradus debeantur.

NUMERUS VI.

Tertia Lunæ inæqualitas.

HAnc Tycho *tomo 1. Progymn. pag. 126*, Variationem Lunæ, Bullialdus *lib. 3. cap. 13*, Lunæ Reflexionem vocat. Detecta ea primùm est à Tychone, qui deprehendit extra Syzygias motum Apparentem Lunæ, etiam adhibitâ æquatione compositâ, quæ nimirum Secundæ inæqualitati credebatur sufficere, supputatum, aliquantulùm adhuc differre à motu Apparente per observationem obtento; adeòque ut conveniat, opus adhuc esse æquatione novâ, quæ maxima cùm est, ascendat ad minuta 41. 32", vel, ut Kepplerus, ad minuta 51'. 49". Esse autem maximam in Octantibus, hoc est in locis Medijs inter Syzygias & Quadraturas, nimirum in remotionis à Sole gradu 45, 135, 225, 315: in Syzygijs verò & Quadraturis nullam: adhæc à ☌ ad ☍ esse auferendam motui Vero Lunæ bis æquato; addendam verò à ☍ ad ☌. Porrò quantitas & mensura hujus inæqualitatis nondum satis explorata est: Bullialdus enim eam se observasse affirmat jam minorem minutis 40, jam multò majorem; & Ricciolus ait se perfectam Lunæ hypothesim differre, dum certiora de hac Variatione tertia per observationes (Tychonicas, opinor intelligit, quarum editio expectatur) fuerint observata.

NUMERUS VII.

Motus Apogei Lunæ.

APogeum Lunaris Eccentrici movetur motu quodam valdè tardo in consequentia, quod ita compertum est. Artificio tradendo infrà *a* reperitur locus Apogei in Eclipticâ ad certum tempus. Deinde ad aliud tempus, mensibus aliquot vel etiam anno uno alterove interjectis, eodem artificio Apogei locus inquiritur, qui tum erit Orientalior, sive longiùs ab Arietis initio remotus, quàm priùs. Atque hoc constanti experimento semper accidit. Unde manifestum est Apogeum in consequentia moveri. Periodum hujus motus docebimus loco citato absolvi annis Ægyptijs (hoc est dierum 365) 8, diebus 311, horis 5. 30' circiter. Unde percurrit Apogeum uno die minuta 6'. 41". 4‴. 48⁗.

a Num. 35.

NUMERUS VIII.

De duplici Apogeo.

QUæ numero præcedenti dicta sunt, intellige de Apogeo Lunæ tempore Syzygiarum, seu ☌ & ☍. Extra Syzygias enim duplex Apogeum statuemus *num.* 16, Medium & Verum, quæ in ipsis Syzygijs ab invicem non differunt prorsusque coincidunt. Extra Syzygias autem Medium Apogeum æquali fertur in consequentia motu, integrum Zodiacum percurrens, planè ut in Syzygijs: at Verum Apogeum ultra citraque Medium libratur, ut *num.* 16. pluribus explanabitur.

NUMERUS IX.

Motus Lunæ in Latitudinem.

Fig. 1. LUnam motu proprio non ferri sub Eclipticâ, sed ab eâ declinare, compertum est ex ejus Altitudine Meridianâ (ut tradidi sub finem *num.* 1.) quæ modò major est Altitudine Meridiana puncti *a* Solstitialis, modò minor. Quare orbita Lunæ ACBD secat Eclipticam AOBQ, in duobus punctis A, & B, quæ dicuntur Nodi. Nodus A, per quem Luna transit ad semicirculum Borealem ACB, vocatur Nodus Borealis, seu Ascendens, caput Draconis; ejusque nota est ☊. Nodus B, per quem Luna transit ad semicirculum Australem BDA, vocatur Nodus Australis, seu descendens, Cauda Draconis; ejusque Signum est ☋. Limites sunt puncta C, D, quæ maximè ab Eclipticâ declinant: distant à Nodis 90 gradibus.

a Defin. 17. *lib.* 1. *nu.* 1.

Maxima *b* Latitudo Lunæ, sive distantia Limitum ab Eclipticâ, à Ptolemæo usque ad Tychonem credita fuit permanere semper eadem nempè grad. 4. 58'. 30", vel rotundè grad. 5. At Tycho primus detexit Latitudinem eam solùm convenire Syzygijs; extra eas verò crescere Latitudinem, usque ad Quadraturas, in quibus tandem ascendat ad grad. 5. 17'. 30". Nondum prodière in lucem observationes, quibus hanc inæqualitatem assecutus est. Tam perito observatori meritò interim fides habebitur.

b Quid sit latitudo Lunæ patet ex defin. 33. *num.* 1.

Periodum motus Lunæ in Latitudinem infrà *c* scrutabimur. Ea erit D. 27. H. 5. 5'. 36". Unde quotidie Luna recedit à Nodis grad. 13. 13'. 45", 29"', 28"". Est porrò mensis Latitudinis, brevior non solùm Synodico, & Anomalistico, sed etiam Periodico, eò quòd Nodi (ut mox dicam) abeant in præcedentia, dum Luna fertur in consequentia: unde fit ut Luna Nodis, Zodiaco nondum absoluto, occurrat.

c Cap. 6.

NUMERUS X.

Motus Nodorum in præcedentia.

NOdorum in præcedentia motus præsidio Eclipsium Lunæ sic innotescit. Observa momentum Medium durationis Eclipticæ; quod efficies, si duratione Eclipseos bisectâ, semissem addas tempori, quo Eclipsis incepit: tum ad momentum illud Mediæ durationis quære locum *d* Solis Verum. Pari modo observa momentum Medium alterius Eclipsis, & quis tum sit Verus Solis locus inquire. Reperies hunc esse propiorem initio Arietis, quàm priorem, numerando scilicet in antecedentia: atque hoc experimento repetito contingere deprehendes. Quare cùm Luna, dum Eclipsatur, sit Soli diametraliter opposita, etiam ipsius locus Verus in posteriore Eclipsi erit propior initio ♈, quàm in priore, & sic deinceps. Atqui Luna dum Eclipsatur, est in Nodis aut circa eos, ut dicetur in Eclipsium Theoria *lib.* 4. Ergo Nodi moventur sensim in antecedentia. Exactior inquisitio fiet *num.* 50. & 51.

d Per nu. 55. *lib.* 1.

Periodus Nodorum absolvitur annis Ægyptijs 18. D. 223. H. 6, 12' circiter. Motus Diurnus Nodorum est grad. 0. 3', 10". 38"' circiter. Quæ omnia ex *cap.* 6. infrà fient manifesta.

NUMERUS XI.

Motus Lunæ in Altitudinem.

VAriam esse Lunæ à Terrâ distantiam ex ejus parallaxibus investigandis & demonstrandis *cap.* 2. *lib.* 3. fiet manifestum. Et absolutè quidem maximam, cùm Quadraturæ incidunt in E Apogeum Eccentrici; minimam, cùm in V Perigeum. Idem patebit ex variâ magnitudine diametri Apparentis, de quâ agemus *cap.* 5. *lib.* 3.

Fig. 4.

NUMERUS XII.

Libratio Lunæ multiplex.

OBservata hæc primùm est à Galilæo per tubum Opticum, & post hunc à Langreno, Gassendo, Bulhaldo, Hevelio, Ricciolo, Francisco Maria Grimaldi, alijsque. Postremi duo observarunt librari Lunam super axe suô ab Ortu in Occasum, & ab Occasu in Ortum ultro citroque, per partes 12 quarum Lunæ radius est 100. Colligitur hæc libratio ex eo, quod maculæ à limbo Orientali Lunæ per dictum spatium modò recedant, modò accedant (atque idem intellige de limbo Occidentali) quædam antea visæ occultentur, ac deinde rursus in conspectum veniant. Simili indicio animadversa est libratio in Boream & Austrum, imò & in alias plagas. Consule Ricciolum toto *cap.* 10. *lib.* 3. de hoc Phænomeno fusè & accuratè tractantem, item *cap.* 7. à *num.* 10. *Almag.*

CAPUT II.

Proponuntur Hypotheses Lunæ in Longitudinem.

INter Lunæ Hypotheses, quas magno numero Astronomi excogitarunt, duæ sunt omnium simplicissimæ, & intellectu facillimæ, quarum alteram tradit Ricciolus *lib.* 1. *Almag. cap.* 28: alteram fusè, sed obscurè, & absque demonstratione ullâ congruentiæ cum Phænomenis proposuit primò Maginus *lib.* 1. *Theoricarum*, ac deinde nonnullis immutatis & adjectis Lansbergius. Has duas, ne Hypothesium varietate Studiosorum mentes intricentur, omissis cæteris, adhibebo. Rejiciam tamen Magini Solidos orbes, & librationem Æquinoctiorum Lansbergianam, ejusdemque Anomaliam Æquinoctiorum, nec non circellum libratorium, quem Tertiæ inæqualitati salvandæ adhibet, utpotè Tychonis observationibus non congruentem. Adhæc neutrius me numeris ac mensuris adstringam, sed eas sequar quæ videbuntur maximè cœlo convenire.

NUMERUS XIII.

Hypothesis Prima Longitudinis Lunæ.

PARS PRIMA HYPOTHESEOS.

Fig. 2. §. 1. Zodiacus sit TROZ, ejusque ac Terræ centrum A; per quod ducatur diameter RZ. In hac à Terræ centro A sumatur Eccentricitatis intervallum AB, & centro B describatur circulus Eccentricus LFQ☍. Quanta porrò sit Eccentricitas AB invenietur ac demonstrabitur infrà *num.* 38, partium nempè 8745, quarum radius Eccentrici BL est 100000. Per hunc Eccentricum moveatur Luna secundùm ordinem Signorum, qui in schemate porrigitur à puncto O versùs RTZ. Adhæc Apogeum L, motu quodam valde lento feratur etiam in consequentia; cujus periodum absolvi annis Ægyptijs 8. diebus 311. horis 5. 30'. Demonstrabitur *num.* 35.

§. 2. Per hanc hypothesin prima pars Primæ inæqualitatis exposita. *num.* 3. §. 1. eodem planè modo explicabitur, quo inæqualitas Solis explicata fuit *lib.* 1. *num.* 23. Altera verò pars Primæ inæqualitatis exposita *num.* 3. §. 2. 3. 4 quæ in mensium tam Synodicorum, quàm Periodicorum inæqualitate consistit, ex eadem Hypothesi demonstrabitur eumdem prorsus ad modum, quo *lib.* 1. *num.* 48 annorum Solarium inæqualitas fuit demonstrata.

PARS SECUNDA HYPOTHESEOS.

Fig. 2. §. 3. Ab Eccentricitatis AB termino B sumatur diametro RZ, recta BC, quæ intelligatur divisa esse in partes æquales 180, & harum singulæ in scrupula 60. Quantitatem hujus lineæ inveniemus *num.* 41. ostendemusque eam esse partium 4308, quarum radius Ecc. CE est 100000. Per hanc lineam BC, centrum Eccentrici à Syzygijs ad Quadraturas ascendat, descendat autem à Quadraturis ad Syzygias, sic ut in Syzygijs centrum Ecc. semper sit in B, in Quadraturis semper in C; & sit motus ille centri semper duplo celerior vel motu Medio Lunæ à Sole, vel potius, ut satisfiat dictis §. 9. *num.* 5, motu Vero Lunæ à Sole; ita ut quo tempore Luna à Sole recedit uno gradu, centrum Eccentrici percurrat duas partes ex 180 in quas BC divisa intelligitur, & sic deinceps. Vocetur autem reciprocus ille centri ascensus descensusque Anomalia Eccentricitatis, sive Anomalia centri.

Ne verò tyrones hæreant, quæ dicta sunt exponam clariùs. In ☌ Eccentrici centrum sit in B. Inde usque ad primam □ ascendat in C duplo celeriùs, quàm recedat Luna à Sole, sic ut quo tempore Luna recedit à Sole grad. 1, vel 2, vel 3, centrum Eccentrici percurrat sursum, 2, vel, 4, vel 6 partes ex 180, in quas divisa est BC. Ita fiet ut in primâ □ centrum Ecc. præcisè futurum sit in C, & Eccentricus ipse in EGV: tunc enim, quia Luna recesserit à Sole grad. 90, centrum percurrerit ipsius BC partes duplo plures, nempe 180, hoc est totam BC; ac proinde tum existet in C. A Prima □ ad ☍ ijsdem legibus centrum per totam CB descendat, sic ut in ipso ☍ rursum sit in B. Atque ita spatio dimidij Synodici mensis una periodus Anomaliæ centri complebitur. Eodem planè modo à ☍ ad Secundam □, centrum ascendet ex B in C, rursumque à secundâ □ ad ☌ ex C descendet in B, quæ erit Periodus altera Anomaliæ centri: ac proinde intra unum mensem Synodicum bis Anomalia ista absolvetur.

Fig. 4. §. 5. In schemate 4 Eccentricitas minima pro Syzygijs esto AB, & Eccentricus in BQLMN, pro Quadraturis Eccentricitas maxima sit AC, & Eccentricus in CHESV; & per A centrum Eclipticæ RTZD ducatur MPAIQ perpendicularis Apsidum lineæ ELVN. Æquatio a maxima in Syzygijs est BMA, vel BQA, quando nimirum Syzygiæ incidunt in M, vel Q. Æquatio b maxima pro Quadraturis, utrique simul inæqualitati respondens, est CPA, vel CIA (non CQA) quando nempè □□ incidunt in P vel I. Æquatio c maxima inæqualitati Secundæ soli respondens, est COB, vel ei similis ad partem alteram, non autem CPB. Cave autem, quia COB est, ut dixi, maxima æquatio partialis, ne idcircò putes maximam compositam esse COA, ea enim ut (dictum supra) est CIA, vel CPA.

a *Prop. 8. num. 25. lib. 1.*
b *Per eand.*
c *Per eand.*

NUMERUS XIV.

Quomodo Phænomenis satisfaciat.

Fig. 2. HÆc Hypothesis omnium simplicissima & facillima quomodo Phænomenis Secundæ inæqualitatis satisfaciat deinceps videamus.

§. 1. Centri motu jam explicato fit, ut minima Lunæ Eccentricitas sit in ☌ & ☍ sive in Syzygijs, nempe AB, tunc enim centrum Ecc. semper est in B; à Syzygijs verò ad □□, quoniam centrum Ecc. tunc ascendit ex B in C, Eccentricitas assiduò crescit, adeò ut maxima fit in □□, tunc enim centrum Ecc. est in C. Inde fit rursum ut à □□ ad Syzygias centro descendente ex C in B, Eccentricitas ijsdem gradibus decrescat. Atque ita datur causa, cur (quod *num.* 11. observatum est) Luna numquam sit remotior à Terræ centro A, quàm dum Quadraturæ fiunt in Apogeo Eccentrici; numquam vicinior quàm dum in Perigeo. Nam in □□ centrum Eccentrici est in C termino Eccentricitatis maximæ AC, ac proinde Eccentricus tum est in EGVX, cujus Apogeum E, à centro Terræ A est remotius, quàm Apogea, K, L in quovis situ alio; Perigeum autem V, centro A vicinius quàm in quovis alio situ Ecc. ut patet Perigeis Y, M.

§. 2. Idem centri motus dum à Syzygijs ad □□ auget Eccentricitatem, suppeditat basim æquationis Secundæ, quæ ad tollendam inæqualitatem Secundam, ut *num.* 5. exposui, necessaria est. Quod ut clariùs intelligatur, insinuandus hîc obiter (id enim infrà a fiet exactè & plenè) est modus, quo Secunda prosthaphæresis, seu æquatio reperitur.

a *Num.* 47.

Fig. 3. Eccentricus minimam habens Eccentricitatem AB, sit LFMN. Inveniatur DR motus Apogei, sive distantia Apogei R ab Arietis initio ad tempus datum, ut tradam *num.* 37. Inveniatur item Anomalia Lunæ Media (ut tradam item *num.* 37.) quæ in Zodiaco numerata, sit RI, in Eccentrico autem sit LF. Deinde præsidio Eccentricitatis minimæ AB, quæ nota fiet *num.* 38, reperiatur Æquatio Prima sive simplex BFA, sive GI, ut tradam *num.* 39, eâque Mediæ Anomaliæ additâ vel subtractâ, innotescat Anomalia Lunæ coæquata RG, & motus Lunæ Vetus DRG. Hic motus Lunæ Verus, inventus supponendo Lunam esse in Syzygijs, cùm tamen revera sit extra eas, vocari solet Motus, seu Locus Lunæ Fictus vel primò Æquatus. Quæratur deinde

demum per *num.* 55. *lib.* 1. motus Solis Verus D H; quo subtracto à motu Lunæ vero D R G, notus fiet H R G motus Lunæ verus à Sole.

Habemus igitur ad tempus datum motum Verum H G Lunæ à Sole Primò Æquatum & Anomaliam Lunæ coæquatam R G per primam æquationem A F B: quæ quidem utraque unà cum motu Lunæ Vero D R G, essent exacta, si dato tempore Syzygiæ contingerent. At quia supponitur tum Luna extra Syzygias esse, neutra, uti nec locus Lunæ G, exacta erunt: eorum tamen ope reperietur Æquatio Secunda, per quam motus Lunæ correctus, cum motu per observationem cognito, consentiet. Id verò ita obtinebitur.

Quot gradus continet motus Fictus Lunæ Verus à Sole H G, sed duplicatus, tot partes ex rectæ B C partibus 180 numera ex B in ☉. Per dicta 3. §. *praeced. numeri*, erit tempore dato centrum Eccentrici ex B evectum in O, adeoque Eccentricus erit in K P Y. Deinde Anomaliæ coæquatæ R G per primam Æquationem A F B inventæ, gradus numerentur in Eccentrico K P Y ab Apogeo K in P, ducanturque rectæ B P, O P. Erit angulus B P O Æquatio, seu Prosthaphæresis Secunda, (ejus inventio tradetur *num.* 47.) quæ si motui Ficto Lunæ per Æquationem Primam invento, addatur vel subtrahatur, is demùm ita correctus, cælo conformiur evadet, ut experientiâ constat.

Fig. 2.

§. 3. Facilè jam ostensu erit, quî satisfiat observatis *num.* 5. §. 1. Ponatur enim centrum Eccentrici primum in B, deinde in D puncto quopiam inter B, & C; ac demum in C; sitque proinde Eccentrici positio triplex L Q M, K P Y, E G V. Anomalia Lunæ per Æquationem Primam, ut §. *praeced.* dixi, coæquata numeretur ab Apogeo E in G, & ab Apogeo K in P. Patet puncta G & P, esse unum idemque Eccentrici punctum, cùm æqualiter ambo distent ab Apogeo, & Eccentricus existens in E G V, sit idem ille qui est in K P Y. Ducantur jam rectæ B P, D P, & B G, C G, ut fiant anguli B P D, B G C. Ex §. 3. *num.* 13 patet in □ □ centrum Eccentrici esse in C, termino Eccentricitatis maximæ A C, & ex §. 2. *num. hujus* patet Æquationem Secundam Lunæ debitam cum tempore Quadraturæ Anomalia ejus est E G, esse angulum B G C. Rursum ex §. 3. *num.* 13. patet cùm centrum Eccentrici est inter C & B ex. gr. in D, ætatem Lunæ versari inter □ □ & Syzygias, & ex §. 2. *num. hujus* liquet Æquationem Secundam Lunæ debitam, cùm talis ejus ætas sortitur Anomaliam K P, priori E G eamdem, esse angulum B P D. Atqui angulus B G C major est angulo B P D. Igitur Secunda Æquatio Lunæ in □□ maxima major est, qualibet æquatione Secundâ, quæ eidem extra Quadraturas eamdem Anomaliam habenti, debetur: quod requirebat observatio §. 1. *num.* 5.

Quod autem angulus B G C major sit angulo B P D, sic ostendo. Quoniam E G, & K P sunt æqualium circulorum arcus æquales, etiam anguli ad centra n E C G, K D P æquales erunt. Ergo C G, D P o sunt parallelæ. Ergo angulus G æqualis est p angulo B I D. Sed B I D externus q major est interno P. Ergo etiam G angulus major est angulo P.

n *Per* 29. 3.
o *Per* 29. 1.
p 27. 1.
q *Per* 32. 1.

§. 4. Postremo, quod *num.* 5. §. 6. observatur, totam hanc Periodum variationis Æquationum Secundarum, intra mensem Synodicum bis absolvi, facilè erit in hac Hypothesi demonstrare. Incrementum enim ac decrementum Æquationis Secundæ respectu determinati gradus Anomaliæ, pendet ab incremento vel decremento Eccentricitatis, ut §. 3. jam ostendi: tota autem Periodus incrementi ac decrementi Eccentricitatis, intra mensem bis absolvitur, ut patet ex §. 3. *num.* 13. Si quæ supersint alia, *num.* 5. observata, jam illa per se Lector exponet.

NUMERUS XV.

In quo deficiat.

ILlud tamen, quod *num.* 5. §. 8. observatum est, per hanc Hypothesim salvari quî possit, non video. Si enim Æquatio Secunda loco Lunæ per Primam Æquationem invento jam addi debet, jam subtrahi: inde consequens est Æquationem Primam & Secundam subinde invicem vel partialiter vel totaliter elidere; ac proinde futurum ut motus Lunæ Verus non solùm subinde magis, sed etiam subinde minùs differat à Medio extra Syzygias, quàm differret si ita quæsitus fuisset, ac si tum fuissent Syzygiæ; hoc est motus Veri secundò æquati differentiam à Medio sæpè minorem fore, quàm loci Veri primò æquati.

658 2 *lan.*

Fig. 2.

Eccentricus in Syzygijs esto L Q M. centrum habens in B termino minimæ Eccentricitatis A B. Extra Syzygias Eccentricus sit K P N, centrum habens in D. Manifestum est Anomaliam Lunæ Mediam inveniri independenter ab inæqualitate tam Primâ quàm Secundâ: habetur enim si à motu Medio Lunæ auferatur motus Apogei. Motus autem Medius (ut patebit ex *num.* 47) reperietur idem, sive tum Syzygiæ sint, sive non. Similiter & motus Apogei erit idem, sive tum Syzygiæ contingant, sive non; quia si tum Luna esset extra Zyzygias, Eccentrici centrum solummodò esset in eâdem diametro R A Z, altiùs evectum, putà in D, ac proinde Apogei locus R in Eclipticâ idem esset, qui foret si eodem momento Syzygiæ contingerent. Ex quo patet eamdem Lunæ Anomaliam repertum iri, sive tum Syzygiæ sint, sive non. Igitur ad datum temporis momentum Anomalia Lunæ Media in Eccentrico Syzygiarum sit L F M ω, in Eccentrico verò, qui servit Lunæ extra Syzygias, ea sit K P Y N, æqualis priori, vel potius eadem, ut jam ostendi. Ex A centro Zodiaci per Lunam in N ducatur ad Zodiacum recta A ϖ, & per Lunam in ω, recta A δ: erit O R T ϖ motus Verus Lunæ extra Syzygias existentis in N, & O R T δ motus Verus Lunæ Syzygiarum tempore existentis in ω. Ducantur à centris Ecc. B, D, rectæ B ω D N. Quia Anomaliæ L F M ω, K P Y N (ut jam ostendi) sunt æquales, demptis semicirculis æqualibus L F M, K P Y, arcus M ω, Y N æquales erunt. Ergo anguli M B ω, Y D N ad centra per 29. 3, æquales sunt. Ergo D N, B ω per 29. 1 sunt parallelæ. Igitur ex A centro Zodiaci duci poterit recta A β, utrique D N. B ω æquidistans. Quoniam ergo A β determinat motum Medium in Zodiaco, ut patet ex *defin.* 22. *num.* 24. *lib.* 1, erit O R T β motus Medius Lunæ tam existentis in N, quàm existentis in ω. Sed Lunæ existentis in N motus verus est O R T ϖ. Ergo Lunâ existente in N, differentia motus Veri & Medij est β ϖ; Lunæ autem existentis in ω motus Verus est O R T δ, ac proinde motus Veri & Medij differentia tunc est β δ. Atqui arcus β ϖ semper major est arcu β δ; cùm enim B ω, D N sint parallelæ, recta A ϖ ex A per N ducta, necessariò cadit supra rectam A δ ductam ex A per ω. Ergo Lunâ extra Syzygias existente ex. gr. in N, semper major est diffe-

rentia

rentia motus Veri & Medij, quàm ea quæ esset, si fingeremus eodem temporis momento Syzygias contingere, Lunâ ex. gr. positâ in ω. Quod repugnat observatis §. 8. num. 5. ex quibus constat locum Verum Secundò æquatum aliquando minùs differre à Medio, quàm locum Verum Primò æquatum.

Quare hypothesis Ricciolana hactenus explicata, si in suâ illâ simplicitate relinquatur, ijs quæ §. 8. & 7. num. 5. ex ipso Ricciolo observantur, manifestè repugnat. Unde illi vel Anomaliam Apogei, qualis in Hypothesi secundâ traditur, vel aliud quippiam isti æquivalens, oportebit adjungere. Porrò defectus Hypotheseos non impedit veritatem calculi veri motus Lunæ, cujus formam nu. 14. §. 2. exposui; is enim intra limites defectuosæ Hypotheseos non continetur, cùm Regulis num. 5. §. 7. recensitis etiam innitatur. Quare si (quod potest) respondeat Ricciolus, noluisse hic se exactam Lunæ Hypothesim, sed tantùm aliquod calculi fundamentum proponere, libenter hanc ejus defensionem suscipiemus, pleniorem aliam quàm promittit in tomo tertio, Hypothesim præstolantes.

Fig. 4. Porrò quod supra ostendi per arcus βδ, βω, eodem modo ostendetur per angulos A ω B, A N D. a Per 27. 1. Nam quia D N, B ω sunt parallelæ, erit angulus a b Per 32. 1. A N D semper par ipsi B H A. Sed B H A b major est, quàm A ω H, seu A ω B. Ergo etiam A N D semper major est, quàm A ω B. Sed A N D est Æquatio Lunæ existentis in N extra Syzygias, & A ω B est Æquatio Lunæ existentis in ω, in Syzygijs. Ergo cùm Luna extra Syzygias est, major semper est Æquatio (hoc est differentia motus Veri & Medij) Æquatione, seu differentiâ motus Veri & Medij, quæ esset, si in idem illud momentum Syzygias incedere fingamus.

NUMERUS XVI.

Hypothesis secunda Lunæ in Longitudinem.

Fig. 5. §. 1. Zodiacus esto X R M, ejus ac Terræ centrum A, diameter K M; in quâ à centro Terræ A, numeretur Eccentricitas A B, Syzygijs nempè conveniens (cujus quantitas invenietur ac demonstrabitur num. 38.) & centro B describatur Eccentricus G O F Y. Per hunc Luna moveatur sub Zodiaco secundùm ordinem Signorum, qui porrigitur ab X versùs R: Apogeum verò G cum Eccentrico etiam in consequentia circa Terræ centrum A feratur eâ tarditate, quam determinabimus num. 35.

Fig. 5. §. 2. Hæc communia sunt secundæ Hypothesi cum primâ. Quare hic Prima Lunæ inæqualitas eodem modo salvabitur, quo num. 13. §. 2. ea salvatur in primâ Hypothesi: forma autem calculi Veri motus Lunæ tempore Syzygiarum, eadem erit quæ Solis tam in secundâ Hypothesi, quàm in primâ.

§. 3. Ut satisfiat inæqualitati Secundæ, quam exposui num. 5. Hypothesis sic ordinabitur. Centro accepto in diametro K M, describe circellum Q D, transeuntem per B terminum Eccentricitatis minimæ A B, quantitas diametri B C invenietur ac demonstrabitur num. 41. Per hunc circellum moveatur centrum Eccentrici ex B versùs D, eâ lege ut in parte superiori D C Q in consequentia, in inferiore Q E D, quæ Terræ centrum spectat, in præcedentia feratur. Duas præterea conditiones hic motus habeat; ut & duplo sit celerior motu Lunæ à Sole, & centrum Eccentrici in Novilunio semper existat in B perigeo circelli. Ita het ut, quoniam motus centri Eccentrici per circellum duplo celerior est motu Lunæ à Sole, cùm Luna recesserit à Sole gradibus 90, hoc est, cùm attigerit primam Quadraturam, centrum Eccentrici absolverit gradus 180, adeoque ex B, ubi fuerat in Novilunio, pervenerit in C Apogeum circelli. Fiet rursum, ut cùm Luna recesserit à Sole gradibus 180, hoc est pervenerit ad Plenilunium, centrum Eccentrici absolverit gradibus duplo plures, ac proinde ex C per Q redierit in B. Idem continget à Plenilunio ad Quadraturam secundam, & ab hac ad Novilunium. Itaque centrum Eccentrici in ☌ & ☍ semper erit in B circelli perigeo, in Quadraturâ utraque semper in C circelli Apogeo, & intra mensem unum Synodicum bis circellum totum absolvet centrum Eccentrici.

§. 4. Idem centri motus efficiet, ut Eccentricitas, quæ est distantia centri Eccentrici ab A centro Terræ, à Novilunio, quando nempe Luna est in B, continuè augeatur usque ad Quadraturam primam, cùm Luna nempe est in C; & rursum à Quadraturâ primâ usque ad Plenilunium eodem ordine, sed inverso, decrescat, centro Eccentrici descendente à C per Q in B. Pari modo quia à Plenilunio usque ad Quadraturam secundam centrum Eccentrici rursum ascendit ex B per D in C, iterum Eccentricitas assiduè crescet, & quia à Quadraturâ secundâ ad ☌ centrum rursus descendit ex C per Q in B, iterum eodem ordine (at inverso) Eccentricitas minuetur.

§. 5. Ex eodem centri motu duplex Apogeum efficitur, Medium & Verum, atque inde enascitur centri Prosthaphæresis Apogeum Verum est E punctum, in quo recta F E per Terræ centrum A, & Eccentrici centrum D, vel Q, ducta Eccentrico occurrit. Recta porrò F E, seu L I, dicitur linea Apogei veri, & punctum I, in quo ipsa occurrit Zodiaco, est Apogei Veri locus in Zodiaco. Apogeum Medium est G punctum, in quo occurrit Eccentrico Recta H G, quæ ducta per centrum Eccentrici D vel Q, æquidistat diametro K A M, per centra circelli & Terræ transeunti. Ipsam autem G H voco lineam Apogei Medij in Eccentrico. Locus Apogei Medij in Ecliptica est punctum K, & linea Apogei Medij in Ecliptica (quam simpliciter deinceps lineam Apogei Medij nominabo) est Recta K M per circelli centrum & per A Terræ centrum ducta. Fig. 6. 7.

§. 6. Porrò ad motum centri Eccentrici per circellum locus Apogei Veri I continuè mutatur. Quater in mense (nimirum in ☌ & ☍, hoc est in Syzygijs, cùm centrum Ecc. est in B; & in □□, hoc est in Quadraturis cùm centrum Ecc. est in C) Apogeum Medium & Verum coincidunt; tunc enim linea Apogei Veri I L congruit lineæ Apogei Medij K M, ut videre est in fig. 5, in qua pro ☌ & ☍ situs Eccentrici est G Z F Y, pro Quadraturis E S V H. A a Novilunio vel Plenilunio usque ad tempus, quo centrum Eccentrici pervenit ex B in D, ubi I L linea Apogei Veri tangit circellum, continuè in præcedentia locus Apogei Veri I recedit à loco Apogei Medij K versùs X. Inde verò usque Quadraturam, quæ fit centro Ecc. delato in C, locus Apogei Veri ad locum Apogei Medij K accedit continuè in consequentia. A Quadraturâ b autem usque ad contactum secundum in Q, locus Apogei Veri iterum ab Apogei Medij loco K recedit, sed in consequentia versùs R: atque inde usque ad Novilunium vel Plenilunium, quod fit centro Ecc. redeunte in B,

a Fig. 6.

b Fig. 7.

 rursum

rursum accedit, sed in præcedentia. Itaque Veri Apogei locus I à contactu primo D per C usque ad contactum secundum in Q, movetur in consequentia, a contactu autem secundo Q per B, usque ad contactum D primum, in antecedentia; absolviturque reciprocus ille Apogei Veri motus spatio dimidij mensis Synodici. Non absolvit hic motus umquam circulum integrum in Zodiaco, sed per 13 tantùm gradus ab Apogei Medij loco K utrimque recedendo reciprocatur.

§. 7. Postremò ad motum centri Eccentrici, quem accidentia jam exposita consequuntur, adjungatur æqualis motus Apogei Medij, seu lineæ Apogei Medij A K in consequentia circa Terræ centrum A: quo motu ostendam c infra locum Apogei Medij K quotidie versùs R prorepere grad. 0. 6'. 41''. 4'''. 48'''' : totum verò Zodiacum absolvere annis Ægyptijs 8, diebus 311. horis 5. 30. Cùm linea Apogei Medij A K M, pariter sensim promoveri intelligatur totus Eccentricus, unà cum lineâ Apogei Veri I E F L: quamvis huic motui illa suo motu reciproco, quem exposui §. 6, intra mensem bis adversetur, & bis tantundem faveat.

c Num. 35.

NUMERUS XVII.

Definitiones ad Secundam Hypothesim pertinentes.

Fig. 6. 7.

ZOdiacus sit X K M, ejus & Terræ centrum A, per quod sit diameter K M. In hac à Terræ centro sumpta sit A B, repræsentans minimam Eccentricitatem, & A C maximam, ambæ postmodo a reperiendæ. Circa B C Eccentricitatum differentiam descriptus sit circellus B D C Q. Per hunc, ut dixi *num.* 16. §. 3. movetur centrum Eccentrici motu duplicato Lunæ à Sole. Sit ex. gr. centrum Eccentrici in Q, vel D, Eccentricus ipse in hoc situ sit E Z H, & Lunæ centrum existat in O. Linea r Anomalistica sit Q O, vel D O. Linea loci Veri Lunæ sit A O P: locus Lunæ Verus P: linea motus Medij A N; locus Lunæ Medius N. Initium ♈ esto in X. Motus Lunæ Verus sit X K P, Motus Solis Medius X ♈ T. His partim ex numero præcedenti, partim ex definitionibus *lib.* 1. *num.* 24. suppositis, sit definitio.

a Num. 38. & 41.

r Vide definitiones num. 24. lib. 1.

1. *Anomalia centri Lunæ* est motus Æqualis centri Eccentrici per circellum ex B versùs D, duplo celerior motu Medio Lunæ à Sole, & numerationis initium habens in B termino Eccentricitatis minimæ.

Anomalia centri Lunæ ad datum momentum est arcus circelli B D in fig. 6. vel B D Q in fig. 7, à circelli Perigeo B versùs D, usque ad centrum Eccentrici D, vel Q, numeratus: quæ semper (ut jam dixi) est duplicata Longitudinis Lunæ à Sole.

2. *Linea Apogei Veri* est recta E F transiens per D, vel Q, Eccentrici & A Terræ centra.

3. *Apogeum Verum* est E, *Perigeum Verum*, F.

4. *Loca Veri Apogei & Perigei in Zodiaco* sunt puncta I & L, in quibus linea Apogei Veri E F Zodiaco occurrit.

5. *Linea Apogei Medij* est diameter Zodiaci K A M, in quâ existit centrum circelli.

6. *Loca Apogei & Perigei Medij in Zodiaco* sunt puncta K, M, in quibus linea Apogei Medij Zodiaco occurrit.

7. *Linea Apogei Medij in Eccentrico* est G H, parallela ad lineam Apogei Medij K M, & transiens per centrum Eccentrici Q, vel D.

Quamvis cùm nomino lineam Apogei Medij sine addito, semper intelligam K M: nihilominus etiam ipsi parallelam G H voco lineam Apogei Medij, sed in Eccentrico, eò quòd arcus K I, G E, similes sint, & anguli K A I, G D E, vel G Q E, qui (ut mox dicam) sunt Æquatio centri, æquales sint. Cùm enim G D, K A æquidistent, erunt anguli K A I, G D E per 27. 1. inter se æquales. Ergo per *coroll.* 2. *prop.* 33. *lib.* 6, arcus K I, G E similes sunt.

8. Medium Apogeum & Perigeum in Eccentrico sunt puncta G, H, in quibus linea Apogei Medij in Eccentrico, secat Eccentricum.

9. *Æquatio* seu *Prosthaphæresis centri* est angulus K A I, à lineis Apogei Medij & Veri comprehensus: sive arcus Zodiaci K I à dictis lineis interceptus: vel in Eccentrico est angulus G D E, G Q E, sive arcus E G.

10. *Eccentricitas temporanea* est, D A, vel Q A mutabilis distantia centri Eccentrici à centro Terræ A: est semper major minimâ A B, & minor minimâ A C, & ad motum centri per circellum assiduè minuitur augeturve.

11. *Anomalia Media Orbis Lunæ*, est Æqualis Lunæ motus per Eccentricum, numeratus à G Apogeo Medio in Eccentrico, usque ad Lunam in O: nempè arcus G Z O.

Vel ad Zodiacum referendo, *Anomalia Media Orbis Lunæ* est arcus Zodiaci K R N à linea K A Apogei Medij usque ad A N lineam motus Medij numeratus.

12. Anomalia orbis Lunæ Vera, seu coæquata est arcus Eccentrici E Z O, ab Apogeo Vero E usque Lunam in O.

Vel referendo ad Zodiacum, *Anomalia orbis Vera*, seu *coæquata* est arcus Zodiaci I R N, à loco Apogei Veri I usque ad locum Lunæ Medium N numeratus.

Ut igitur habeatur Anomalia orbis coæquata I R N, si Luna tendat à ☌, vel ☍ ad □ adeoque centrum Eccentrici ascendat ex B per D in C, ut in fig. 6, Æquatio centri I K addenda est ad Anomaliam orbis Mediam K R N. At si Luna tendat a □ ad ☍ vel ☌, ac proinde centrum Eccentrici descendat ex C per Q in B, ut in fig. 7, Æquatio centri I K auferri debet ab Anomaliâ orbis Mediâ K R N, ut habeatur Anomalia orbis coæquata I R N.

13. *Æquatio*, seu *Prosthaphæresis orbis Lunæ*, est angulus A O D, vel A O Q comprehensus à rectis ab A centro Terræ, & Q, vel D centro Eccentrici ductis ad O centrum Lunæ.

Sive ad Zodiacum referendo, *Æquatio orbis Lunæ*, est arcus Zodiaci P N, inter locum Lunæ Verum P, & Medium N interjectus. *Vide propr.* 6. *num.* 25. *lib.* 1.

Æquationem maximam contingere in transitibus Medijs ostensum est *propr.* 8. *num.* 25. *lib.* 1. Verùm quia Eccentricitas Lunæ cum ætate Lunæ s augetur assiduè mutaturque, hinc fit, ut cùm Luna est in transitu Medio modò major ejus Eccentricitas sit, modò minor, ac proinde etiam Æquatio maxima modo major sit, modò minor; omnium verò maxima, cùm Luna existens in transitu Medio, simul est in Quadraturâ cum Sole, eò quòd Eccentricitas in Quadr. sit maxima. Atque hac de causa Æquatio maxima Lunæ in Quadraturis C P A (*vide fig.* 4.) dicitur Maxima maximarum.

s Num. 16. §. 4.

14. *Anomalia orbis Lunæ completa*, seu *ultimo coæquata*, est arcus Zodiaci I R P, à loco Apogei Veri I usque ad locum Verum Lunæ P numeratus.

Quare

Quare ut habeatur Anomalia orbis completa, I R P, si Luna est in primo Anomaliæ semicirculo E Z F, ab Anomaliâ orbis coæquatâ K R N auferri debet Æquatio orbis N P, in secundo autem semicirculo (ut in fig. 6.) N P Æquatio orbis ad Anomaliam orbis coæquatam I R N est addenda; ut habeatur Anomalia orbis completa I R P.

Hæ definitiones hactenùs expressæ in *figuris* 6 & 7, quæ inserviunt Lunæ extra Syzygias & Quadraturas positæ, referri etiam debent ad *figuram* 5. quæ inservit Lunæ existenti in Syzygijs.

NUMERUS XVIII.

Forma calculi Geometrici motus Veri Lunæ in hac Hypothesi.

FOrma calculi juxta Hypothesim primam exposita, est *num.* 14. §. 2. Quomodo procedatur in hac Hypothesi secundâ, ut ejus à priori diversitas meliùs innotescat, hic paucis adjungam.

Ad datum tempus quærantur, motus Medius Lunæ X K R N, motus Medius Solis X ☉ T, motus æqualis Apogei Medij X K. Aufer motum Medium Solis X ☉ T à motu Medio Lunæ X K R N: habebis T R N, vel T φ N motum Medium Lunæ à Sole: vel contra, si Solis esset major: Aufer X K motum Apogei Medij ab X K R N motu Lunæ Medio: habebis Anomaliam orbis Mediam K R N, *a* seu G Z O.

a Defin. 11. *num.* 17.

Duplica motum Lunæ Medium à Sole T R N, seu T φ N, qui in circello numeratus à B versùs D, dabit Anomaliam centri B D C Q *in fig.* 7. B D *in fig.* 6. Per hunc inveni Æquationem centri K A I, sive K I vel G E, & Eccentricitatem temporaneam A Q, vel A D. Æquatio centri dempta vel addita Anomaliæ orbis Mediæ K R N, seu G Z O, dabit Anomaliam orbis coæquatam I R N, seu E Z O.

Ex temporaneâ Eccentricitate A Q, vel A D, & Anomaliâ orbis coæquatâ E Z O jam notis, reperiatur Æquatio orbis *b* A O Q, vel A O D, sive N P Anomaliæ coæquatæ E Z O debita. Hæc Medio Lunæ motui X K R N subtracta vel addita, dabit motum Lunæ Verum X K R P.

b Defin. 13. *num.* 17.

Quæ jam quæri & inveniri jussimus, reperientur omnia Geometricè suis locis infrà. Hic solam calculi formam repræsentavimus, quò Hypotheseos natura meliùs intelligeretur.

NUMERUS XIX.

Secunda Hypothesis meliùs Phænomena salvat, quàm Prima.

§. 1. SEcunda Hypothesis Lunæ hactenùs exposita, non tantùm omnia Phænomena salvat, quæ prima *num.* 14. sed etiam ea, quæ salvare prima non potest. Habet enim secunda eadem omnia, quæ prima, & præterea aliud, quo prima caret. Observatum est *num.* 5. §. 8. extra Syzygias sæpè minorem reperiri differentiam motus Lunæ Veri & Medij, quàm reperiretur, si fingeremus in idem illud tempus Syzygias incidisse. Demonstravi autem *num.* 15. si dato temporis momento Luna sit extra Syzygias, Veri ac Medij motus differentiam juxta primam Hypothesim semper esse majorem, quàm reperiretur, si eodem illo tempore dato Syzygiæ contingerent. Repugnat igitur huic observationi prima Hypothesis. Inde verò præcipuè demonstratio ducebatur, quòd in Hypothesi primâ ostenderetur eandem semper reperiri Anomaliam Lunæ, sive ea in Syzygijs, sive extra Syzygias esset. At in secundâ Hypothesi, quia (ut *num.* 16. §. 6. exposui) centrum Eccentrici per circellum fertur, habetur Apogeum duplex, Medium scilicet, quod motu æquali & lento in consequentia movetur, & Verum, quod ultra citraque Medium modò in antecedentia, modò in consequentia libratur, quo motu reciproco Anomalia orbis Vera assiduè augetur vel diminuitur. Unde fit ut in secundâ Hypothesi Phænomeno supradicto satisfiat: quod sic demonstro.

a Num. 16. §. 4.

§. 2. Zodiacus sit X R M; ejus ac Terræ centrum A; diameter K M; Eccentricitas minima A B, maxima A C, circellus B D C O; centrum Eccentrici in B, nempè in Syzygijs, & Eccentricus ipse in G Q H; linea Apogei Medij G H, sive K M, à quâ in Syzygijs linea Apogei Veri *o* non differt; Principium ♈ in X. His positis ad datum tempus sit motus Lunæ Medius X R, qui semper idem reperietur, sive dato tempore Luna sit in Syzygijs, sive extra eas. Jam motus Medij linea sit A R. Quæratur deinde Anomalia Lunæ ita, ac si tum Syzygiæ contingerent; hoc est quæratur Anomalia Lunæ eâ methodo, quâ ea quæritur in Syzygijs. Methodus autem pro Syzygijs hæc est: Quæritur ad datum tempus motus Æqualis Apogei X K, qui ablatus à motu Lunæ Medio X R, exhibet Anomaliam Lunæ K R ad datum tempus, quæ numerata in Eccentrico sit G P. Quia porrò in Syzygijs nulla est distinctio *m* Apogei Veri & Medij, nulla etiam Anomaliæ Veræ & Mediæ distinctio erit. Ponamus autem Anomaliam sic inventam, esse minorem gradibus 90, qualis est G P, vel majorem gradibus 270, & ducatur ex B, ubi propter Syzygias jam ponitur esse centrum Eccentrici, recta B P. Hæc erit parallela ad A R; cùm enim arcus G P, K R similes sint, erit angulus P B G par angulo R A K, ideoque P B æquidistat A R. Ducatur item ad P ex A centro Terræ Recta A P, ut fiat angulus A P B, qui erit Æquatio ad datum tempus debita Lunæ, supponendo eam tunc esse in Syzygijs. Quoniam verò Anomalia G P ponitur esse minor gradibus 90, angulus P B G acutus est, ac proinde P B circellum secat ex. gr. in M. *per.* 16. 3.

Fig. 8. 9.

o Per §. 6. *num.* 16.

m Per §. 6. *num.* 16.

Jam quia Luna dato tempore non erat in Syzygijs, sed ita processum fuit, ac si tum in Syzygijs fuisset, ponamus modò eam dato illo tempore talem habuisse ætatem sive elongationem à Sole, quæ duplicata, & sic ex B versùs D in circello numerata, finiatur in O infra punctum M, in quo B P circellum secat, ut in *fig.* 8; vel in ipso puncto M, ut in *fig.* 9. Igitur tum centrum Eccentrici erit in O, ut patet ex *num.* 16. §. 3. & Eccentricus ipse erit in E L V; ductaque per A & O recta Y E O A V erit linea *a* Apogei Veri. Igitur jam Anomalia *b* Lunæ Vera ad datum tempus est Y R minor priore K R, quæ ad idem datum tempus fuerat reperta, fingendo Lunam tum in Syzygijs esse. Ex puncto O ducatur O N parallela ad A R: erit hæc *in fig.* 8. etiam parallela ad B P, quia ipsas A R, B P, ostendi supra esse parallelas. In *fig.* 9. Rectæ O N, B P coincidunt. Erunt ergo ad centra O, A, anguli *d* N O E, R A Y æquales, adeoque arcus N E, R Y similes *e* sunt. Quare cùm arcum Y R jam ostenderim esse Anomaliam Lunæ Veram, in Zodiaco numeratam, Lunæ extra Syzygias competentem ad datum tempus,

a Defin. 2. *num.* 17.
b Defin. 12. *nu.* 17.
d Per 27. 1.
e Per cor. 2. *prop.* 33. *lib.* 6.

etiam

etiam arcus EN ea ipsa Anomalia erit in Eccentrico. Quare ductâ rectâ AN, angulus ANO erit Æquatio *b* ad datum tempus debita Lunæ extra Syzygias positæ, in distantiâ à Sole suprà determinatâ. Recta autem ON parallela ad BMP; *in fig.* 8. necessariò secat Rectam AP in I, eò quòd punctum O sit infra M.

b Defin. 13. nu. 17.

Fig. 8.

Reliquum est ut ostendam Æquationem N, sive ANO minorem esse Æquatione P, sive APB. Ostendi suprà parallelas esse ON, BP. Quare angulus P æqualis *f* est angulo AIO. Sed externus AIO major *g* est quàm internus N. Ergo etiam P major est, quàm N. In *fig.* 9. id faciliùs adhuc ostenditur; isthic enim angulus APB immediatè *per* 32. 1. est major angulo N. Igitur ad datum tempus Æquatio ANO, hoc est differentia motus Veri à Medio, extra Syzygias hîc minor est Æquatione APB, seu differentiâ motus Veri à Medio, quæ collecta fuit fingendo Lunam tempore dato in Syzygijs fuisse. Quod erat demonstrandum.

f Per 27. 1.
g Per 32. 1.

In schemate 10. Æquatio ANO extra Syzygias major est Æquatione APB, quæ ad idem tempus conveniret Lunæ in Fictis Syzygijs. Demonstratio ex dictis facilè colligetur.

In schemate autem 11, exhibetur casus quo Æquatio Lunaris, sive differentia motus Veri à Medio æqualis est æquationi, quæ debetur Lunæ in Fictis eodem tempore Syzygijs: quod sic demonstro.

Fig. 11.

Suppositis ijs quæ in demonstratione superiori sunt vel posita, vel demonstrata, Anomalia conveniens Lunæ, si dato tempore essent Syzygiæ, reperta sit GP, Æquatio eidem tum debita, erit APB. Ducatur ex A per P Recta infinita AZ, sitque Lunæ ea ætas, seu elongatio à Sole, ut existat centrum Eccentrici supra M in tali puncto circelli, putà in O, ut recta ON jungens centrum O, cum puncto N, in quo Eccentricus secat infinitam APZ sit parallela ad BP. Ex demonstratis suprà patet EN esse Anomaliam Veram, & ANO Prosthaphæresim, quæ ad datum tempus conveniunt Lunæ, ætatem hîc determinatam habenti. Atqui ob parallelas ON, BP, Æquationes *o* ANO, APB æquales sunt. Ergò hoc casu eadem est Æquatio extra Syzygias, quæ foret, si in idem tempus fingamus Syzygias incidisse. Quod erat demonstrandum.

o Per 27. 1.

§. 3. Ex hactenus demonstratis apparet per secundam Hypothesim salvari posse Phœnomena *num.* 5. §. 8. proposita, quæ prima non tantùm non salvabat, sed etiam evertebat, ut *num.* 15. ostendi. Neque verò, quod nimis longum foret, casus seorsim singulos opus est demonstrare. Non enim eget hæc Hypothesis Regulis additionis & subtractionis *num.* 5. §. 7. recensitis, cùm ad inveniendum Lunæ Verum locum non distinguat inter Æquationem Primam & Secundam, sed Æquationem unam totalem adhibeat toti Eccentricitati temporaneæ ex. gr. AO, tanquam basi insistentem, quam Anomalia, propter centri Prosthaphæresim, modò major, modò minor, jam auget, jam diminuit.

Scholium.

Ricciolus Almagesti sui lib. 4. cap. 28 negat ullis se Hypothesibus hactenus excogitatis, quas fusè & accuratè cap. 25. 26. 27 exposuerat, acquiescere. In quo illi, quod ad plerasque eorum attinet, libenter assentior. Nam, ut à Ptolomæo incipiam, juxta ejus Hypothesim distantia Lunæ à Terrâ in Perigeo duplo major est quàm in Apogeo, quod planè observationibus repugnat. Copernici & Tychonis duplex Epicyclus in nimis implexos sibiq́ contrarios motus Lunam distorquent. Et omnibus Epicyclis, hoc est commune incommodum, quod non eandem semper faciem nobis Luna obverteret, contra observationem ocularem perpetuam. Evadi quidem potest hoc incommodum, si Lunæ vertiginem menstruam circa suum centrum in partes contrarias tribuamus, sed ita motus sine necessitate multiplicantur. Kepplerus & Bullialdus Lunam per Ellipsim movent: sed realis motuum Lunæ æqualitas meliùs per circulos quàm per Ellipses salvatur; & motus circularis Elliptico simplicior, ideoq́ potior est. Longè tamen meliùs Ellipticam Hypothesim Bullialdus, quàm Kepplerus disposuit, qui parùm fundatis subtilitatibus vel potiùs figmentis inanibus, suas Hypotheses nequidquam stabilire conatus est. Sanè dum, Ptolomæum in hoc secutus, Eccentricitatem eandem perpetuò retinet maximam Lunæ apogeæ in Quadraturis distantiam negat majorem esse quam in Syzygijs, contra observationes parallaxium evidentes, ut [a] infrà ostendetur. Quo eodem vitio etiam Rheitæ Hypothesis laborat. Omnibus jam recensitis incommodis se expediunt qui cum Magino & Lansbergio utuntur Eccentrico cum Eccentricitate maximâ in Quadraturis, & minimâ in Copulis, circa differentiam utriusque descripto circello per quem Eccentrici centrum motu duplicato Lunæ à Sole deferatur. Hanc Hypothesim amplexus sum, & exposui num. 16. 17. 18. 19; eamq́ fatetur Ricciolus & omnium simplicissimam esse, & Phænomenis satisfacere: hoc tamen illi displicet, quòd æquales motus Planetæ circa fictitium quoddam punctum, ab Universi centro diversum, instituantur; cujus nulla appareat prærogativa vel dignitas, ut ipsum præ quovis alio respiciatur. Verùm hæc ratio, siquid probat: tantùm valet contra assertionem absolutam, nihil autem adversùs Hypothesim, quæ (ut ex ipsâ vocis Etymologiâ patet) tum bona est, si eâ suppositâ Phænomenis satisfiat. Quamquam ne contra ipsam quidem absolutè assertam hoc argumentum magnoperè facit, cùm plurima sint in hoc Universo ita disposita, ut eorum non alia ratio dari possit, quàm voluntas Conditoris. Cur enim tot stellæ & non plures? cur Sol eâ magnitudine est, & non majori? cur circa hunc axem potiùs cælum volvitur, quàm circa alium? cur mundus non est decuplo aut centies major quàm modò sit? Quemadmodum igitur non debet horum ratio assignari; ita neque debet ratio dari, cur pro centro Æqualium Lunæ motuum hoc punctum potius, quàm aliud fuerit assumptum. Quare nihil est, cur non etiam absolutè ea motuum forma teneri possit. Nobis tamen satis

a Lib. 3. num. 10.

satis erit eam accipere ut Hypothesim; quæ, ut talis, cum ipso assentiente Ricciolo & Phænomenis satisfaciat, & omnium simplicissima sit, eam meritò cæteris Hypothesibus præferendam judicamus. Tandem enumeratis confutatisque cæteris suam adfert Ricciolus, quam confictam vocat, spondens se tomo 3. Almagesti accuratiorem formam daturum. Ea porrò, quam modò lib. 4. cap. 28 dedit, exposita à nobis est num. 13. 14. 15. & hoc ferè uno à jam laudatâ differt, quod Æquatione centri careat quâ destituta absolutè quidem simplicissima omnium evadit; sed Phænomenis, ut num. 15 demonstravi, satisfacere non potest.

CAPUT III.

A fundamentis traditur quo artificio Motus Lunæ Æquales inveniantur.

NUMERUS XX.

Definitiones ad sequentia.

Ne usquam studiosi hæreant, explicationem terminorum nonnullorum, quas partim jam[a], ut res tulit, explicavimus & usurpavimus, partim usurpaturi deinceps sumus, visum est hic unum in locum colligere. Supponimus autem hic, definitiones *lib.* 1. *num.* 24, & definitiones *libri* 2. *num.* 17.

a Lib. 3. num. 10.

1. Sol, & Luna solent ab Astronomis *Luminaria* appellari.

2. *Novilunium*, & *Conjunctio*, *Copula*, *Synodus Luminarium* idem significant: ejus signum est ☌.

Similiter *Plenilunium*, & *Oppositio Luminarium* eadem sunt: ejus signum est ☍.

Syzygia significat ☌ vel ☍, hoc est tam ☌ quàm ☍. Vox *Syzygia* (uti & *Copula*) significat ☌ & ☍.

3. Signum Quadraturæ est □. Signum Quadraturarum est □□. *Fig. 12.*

4. *Linea Synodica* est Recta A P Q per Solis, & Terræ centra transiens, sive est linea Veri loci Solis. *Linea Verarum Syzygiarum*, est ipsa linea Synodica A P Q, producta in partem alteram versùs T.

5. *Planum Verarum Syzygiarum*, est circulus per Polos Zodiaci, & lineam Verarum Syzygiarum transiens.

Quare cùm in lineâ A P Q Verarum Syzygiarum sint centrum Terræ A, centrum P Solis, Verus locus Solis Q; manifestum est planum Syzygiarum Verarum transire per Polos Zodiaci, centrum Terræ, centrum Solis, locum Verum Solis.

6. *Vera Conjunctio Luminarium*, sive *Verum Novilunium* est, cùm O centrum Lunæ ac proinde & locus Lunæ Verus, est in plano Verarum Syzygiarum inter Solem, & Terræ centrum, sive cùm motus Veri in Longitudinem G Q, Lunæ & Solis ab ♈ initio, sunt ijdem, seu æquales; tunc enim loca Vera Solis & Lunæ erunt in eodem plano Syzygiarum, in eodem tempè Longitudinis circulo.

Igitur in Vero ☌ lineæ Veri motus Solis & Lunæ, sunt in uno plano ejusdem circuli Longitudinis[a].

a Defin. 31. num. 1. lib. 1.

7. *Oppositio Vera Luminarium*, sive *Plenilunium Verum* est, cùm B centrum, adeoque & D Verus locus Lunæ, est in parte oppositâ plani (E C A D) Verarum Syzygiarum, sive cùm Longitudo Lunæ G D differt à Longitudine Solis G Q E gradibus 180.

In Vero igitur ☍ lineæ Veri motus Solis & Lunæ A C E, A B D, sunt in uno plano Longitudinis.

8. *Luminarium Conjunctio*, vel *Oppositio vera*, & *Centralis* est, cùm centrum Lunæ non solùm est in plano, sed etiam in lineâ Verarum Syzygiarum.

In ☌ igitur Vero centrali lineæ Veri motus Solis & Lunæ, una sunt eademque Recta A O P Q: In Vero autem ☍ centrali sibi mutuo sunt indirectum, ut A C E, A B D.

9. Centralis vocatur, quia tunc centra Terræ, Lunæ, Solis, loca insuper Vera Lunæ ac Solis, sunt in eadem Rectâ. *Fig. 13.*

10. *Linea Mediarum Syzygiarum* est Recta A G I per Terræ centrum, & Solis locum Medium G transiens.

11. *Planum Syzygiarum Mediarum* est circulus per Polos Zodiaci, & A G lineam[b] motus Medij Solis transiens.

b Vide def. 14. lib. 1. num 24.

Quare cùm in A G lineâ motus Medij Solis existant centrum Mundi A, & locus Solis Medius G, liquet planum Mediarum Syzygiarum transire per Polos Zodiaci, centrum Terræ, seu mundi, locum Solis Medium.

12. *Conjunctio Luminarium Media*, sive *Novilunium Medium* fit, cùm locus Lunæ Medius est in A G plano Mediarum Syzygiarum: sive cùm motus Medij S G Solis ac Lunæ in Longitudinem æquales, seu ijdem sunt.

Igitur in ☌ Medio parallelæ motus Medij Solis ac Lunæ sunt in uno plano ejusdem circuli Longitudinis, easque refert Recta A G.

13. *Oppositio Media Luminarium*, sive *Medium Plenilunium* est, cùm I Medius locus Lunæ est in parte oppositâ plani Mediarum Syzygiarum A G I; sive cum S R I longitudo Media Lunæ differt ab S G Solis Longitudine Mediâ gradus 180. *Fig. 14.*

Liquet igitur in Medio ☍ lineas Mediorum motuum Solis & Lunæ A G, A I, esse in uno plano ejusdem circuli Longitudinis.

14. *Luminarium Conjunctio*, vel *oppositio Media Centralis* est, cùm locus Lunæ Medius est non solùm in plano, sed etiam in lineâ Mediarum Syzygiarum. *Fig. 13. 14.*

Igitur in Medio ☍ Centrali lineæ A I, A G Mediorum motuum Lunæ, & Solis non tantùm sunt in uno plano, sed etiam unam Rectam ad oppositas centri partes conficiunt A G I, ut in *fig.* 14: at in Medio ☌ (*vide fig.* 13) parallela Medij motus Solis ac Lunæ est una eademque Recta A G.

15. Eclipsis Vera est quæ fit in Vero vel ☌ vel ☍.

16. Eclipsis Media dicitur accidere in Medio ☌ vel ☍.

17. Eclipsem Veram ad Mediam reducere est ☌ aut ☍ Verum Eclipticum reducere ad Medium.

18. *Mensis Periodicus Verus*, est revolutio Veri loci Lunæ ab aliquo Zodiaci puncto ad idem punctum. Punctum verò, à quo numerandi initium ducitur, assumi solet initium ♈.

19. Menses Veri Periodici sensibiliter inæquales sunt, ut patet ex *num.* 3. §. 2. & demonstrari potest eodem modo, quo *lib.* 1. *num.* 48 demonstravi annos Solares Veros esse insensibiliter inæquales.

20. *Mensis Periodicus Medius*, est revolutio loci Medij, Lunæ ab aliquo puncto Zodiaci ad idem punctum.

Menses Periodici Medij omnes æquales sunt, quia

quia per *propr.* 2. *num.* 25. *lib.* 1. locus Mědius semper æqualiter per Zodiacum movetur.

21. *Mensis Synodicus Verus*, sive *Lunatio Vera*, est tempus ab uno Novilunio Vero ad aliud, vel ab uno Vero Plenilunio ad aliud.

Menses Synodicos Veros esse inæquales patet ex *num.* 3. §. 4.

22. *Mensis Synodicus Medius*, sive *Lunatio Media*, est tempus ab uno Novilunio Medio ad aliud, vel ab uno Plenilunio Medio ad aliud.

Medij menses Synodici omnes inter se æquales sunt: cùm enim linea motus Medij Lunæ *m* æquali motu feratur, itemque linea Medij motus Solis *o* æquali (sed tardiori) feratur motu, inde fit, ut quanto tempore opus fuit ut parallela motus Medij hoc mense assequeretur parallelam Medij motus Solis, tanto præcisè eandem assequatur mense alio.

m Per propr. 5. num 25. lib. 1. o Per eand.

23. *Mensis Anomalasticus*, sive *una revolutio vel restitutio Anomaliæ*, est revolutio Lunæ ab uno Eccentrici puncto ad idem punctum. Ita fit enim, ut Luna eundem situm habeat respectu Apogei in fine revolutionis, quem in principio.

Menses tam Anomaliæ quàm Synodicus sunt longiores Periodico, quia tam Apogeum, quàm Sol, moventur in easdem partes, in quas Luna: unde fit ut Luna ab Apogeo vel Sole digrediens, eadem Zodiaco jam absoluto, hoc est finito mense Periodico, nondum sit assecuta.

Fig. 6.

24. Postremò benè Tyrones distinguant inter motum Anomaliæ, & Medium: in Lunâ siquidem major est hujus distinctionis necessitas quàm in Sole, quòd in Lunâ motus Anomaliæ sensibiliter tardior sit motu Medio. Recolant igitur *defin.* 19. & 20. *num.* 24. *lib.* 1. Legant item *proprietatem* 3. *num.* 25. *ejusd. lib.* & notent motum Anomaliæ in Zodiaco computatum à motu Medio solùm differre ratione termini, seu principij, à quo numeratur. Ponamus exempli gratiâ locum Apogei in Zodiaco esse K, & Lunam motu Medio 20 dierum spatio percurrisse arcum K R N, atque interim Apogeum processisse ex K in Y. Motus Medius dierum 20 est arcus K R N, motus Anomaliæ dierum 20 est arcus Y R N. Itaque motus Medius eò tantùm differt à motu Anomaliæ, quòd hic numeretur à puncto Mobili, ab ipso nimirum Apogeo, quòd fertur in easdem partes, in quas Luna; ille verò à Zodiaci puncto stabili ex. gr. K; atque inde etiam fit, ut motus Medius conveniens dato cuipiam temporis intervallo, semper existat major motu Anomaliæ, qui eidem temporis intervallo debetur; componitur enim ex motu Anomaliæ & ex motu Apogei.

Fig. 7.

Pari modo oportebit distinguere inter Lunæ motum Medium, & motum Medium Lunæ à Sole: differunt enim etiam illi ratione principij à quo numerantur; nam prior (ut dixi suprà) à quovis Zodiaci puncto sed immobili alter à mobili, nempè à loco Solis numeratur. Ponamus ante dies 14 Conjunctionem Mediam Lunæ cum Solis accidisse in ω, illis verò diebus 14, locum Solis Medium processisse ex ω in T, Medium verò locum Lunæ ex ω per I in N. Medius motus Lunæ dierum 14 est arcus ω I N, Medius motus Lunæ à Sole dierum 14, est arcus T I N. Itaque tres illi motus Æquales, seu uniformes, nimirum Medius motus Lunæ, motus Anomaliæ Lunæ, Medius motus Lunæ à Sole, prout ad Zodiacum referuntur, solummodò differunt penes terminum *à quo*, qui in Medio motu stabilis est, in reliquis duobus mobilis.

25. Communi vocabulo motuum Æqualium Lunæ intelliguntur Medius motus Lunæ, Medius motus Lunæ à Sole, motus Anomaliæ.

NUMERUS XXI.

Demonstratur cursus Lunaris tota inæqualitas prima, quam nempè Luna subit in ☌ & ☍.

De modis observandi primam Lunæ inæqualitatem egi *num.* 3. sed Lunari Hypothesi jam constitutâ, eadem erit hoc loco accuratiùs exponenda.

Fig. 19.

Zodiacus esto Q G I S, ejusque centrum A; Eccentricus, seu Anomaliæ circulus, sit O C R D, cujusque centrum B: Eccentricitas A B, nempè minima, qualis est in Syzygijs: linea Apogei Q O B A R S. Per B centrum ducatur C D, perpendicularis ad O R. Ita circulus Anomaliæ divisus erit in quatuor quadrantes, quorum primus est O C, secundus C R, tertius R D, quartus D O. Ducantur præterea per C & D Rectæ A C E, A D F, & per A Zodiaci centrum Recta G P A M I, perpendicularis ad Q S; quæ proinde erit parallela ad C B D. His ita constitutis, si Luna sit in Apogeo O, vel Perigeo R, loca ejus Vera erunt Q vel S, nullâ existente differentiâ inter locum Verum, & Medium. Cùm verò existet Luna in C vel D, loca ejus Vera erunt E, F; Lunæ motus Medij erunt A G, A I, loca Media G, I; Æquationes, seu Prosthaphæreses A C B, A D B, sive G E, I F, quæ licet non sint maximæ (illæ enim contingunt ad puncta Anomaliæ P, M, ut ostendi *lib.* 1. *num.* 25. *propr.* 8.) sunt tamen maximis proximè æquales. Ex his jam apparebit quanta possit inæqualitas esse Verorum motuum Lunæ, æquali tempore factorum.

§. 1. Motus Verus, qui respondet Anomaliæ Quadranti primo O C, vel quarto D O, deficit à motu Vero, qui respondet Quadranti tertio R D, vel secundo C R, ferè duplo Æquationis maximæ Syzygialis, hoc est gradibus ferè 10. Cùm enim Lunæ existentis in O & C, loca Vera sint Q & E, quo tempore Luna Æquali motu percurrit Anomaliæ Quadrantem O C, eodem apparet in Zodiaco percurrere arcum Q E. Unde primo Anomaliæ Quadranti O C, respondet motus Verus Q E. Pari modo ostendam Quadranti tertio Anomaliæ R D respondere motum Verum S F. Absolvuntur autem motus Veri Q E, & S F temporibus æqualibus, quia absolvuntur eodem tempore, quo Luna uniformi motu æquales arcus O C, R D percurrit; & differunt inter se utrique Prosthaphæresi G E, I F, sive duplo unius. Fiat enim I L par G E: erit L F par utrique Prosthaphæresi G E, I F, sive dupla unius F I, cùm G E, F I æquales sint. Et quia Quadrans S I par est Quadranti Q G, ablatis æqualibus I L, G E, erunt S L, Q E æquales. Quare cùm S L, S F differant arcu L F, etiam Q E, S F different arcu L F, duplo Æquationis F I, seu G E. Igitur motus Veri Q E, S F æqualibus temporibus absoluti, differunt inter se duplo Æquationis G E, vel I F, hoc est ferè 10 gradibus, cùm Æquationes G E, I F proximè sint æquales maximis quæ contingunt ad puncta O & M, & sunt (ut ostendam infrà) singulæ graduum 5.

Idem eodem modo ostendetur de Veris motibus Q F, E S, qui respondent Quadranti quarto D O, & secundo C R.

§. 2. Motus Verus Q G S F respondens tribus Anomaliæ Quadrantibus primis O C R D, excedit motum

motum Verum SIQE, respondentem Quadrantibus RDOC tertio, quarto & primo, ac proinde æquali tempore absolutum, ferè duplo Æquationis maximæ Syzygialis. Id eodem ferè modo demonstrabitur, quo præcedens. Fiat enim GN par GE. Quoniam tres Zodiaci Quadrantes QGSI æquales sunt tribus Zodiaci Quadrantibus SIQG, si addantur utrimque æquales IF, GN, erit arcus QGSF æqualis arcui SIQN. Sed arcus SIQN excedit arcum SIQE arcu EN, duplo ipsius GE, qui est proximè æqualis Æquationi maximæ Syzygiali. Ergò etiam QGSF excedit SIQE arcu EN, proximè duplo Æquationis maximæ Syzygialis.

Fig. 19.

Idem eodem modo demonstrabitur de motu Vero ESIQ, qui respondet Quadrantibus CRDO, secundo, tertio, & quarto, respectu motus Veri FQGS, qui respondet Quadrantibus DOCR, quarto, primo, & secundo.

§. 3. Motus Verus ESF respondens Quadrantibus CRD, secundo & tertio, motum Verum FQE respondentem Quadrantibus DOC, quarto & primo, adeoque æquali tempore absolutum, excedit ferè quadruplo Æquationis maximæ Syzygialis, hoc est fermè gradibus 20. Eadem ferè rursùs demonstratio erit. Fiant enim GN, IL, æquales GE, IF. Erunt arcus FQE, NSL, æquales. Sed ESF excedit NSL arcubus EN, FL. Ergò etiam ESF excedit FQE arcubus EN, FL, quadruplo nempe Æquationis GE, vel IF, quæ proximè æqualis est Æquationi maximæ Syzygiali.

§. 4. Itaque si quatuor fuerint Lunæ Eclipses observatæ, quarum prima contigerit in Apogeo O, secunda in termino primi Quadrantis, seu Longitudine Mediâ C, tertia in Perigeo R, quarta in termino Quadrantis tertij, seu Longitudine Mediâ alterâ D, vel quarum prima inciderit in D, secunda in O, tertia in C, quarta in R; vel quarum prima acciderit in O, secunda post tres Quadrantes in D, tertia in R, quarta in C. Dico abjectis integris circulis, motum Verum à primâ Eclipse ad secundam differre à motu Vero ab Eclipsi tertiâ ad quartam ferè duplò Æquationis maximæ Syzygialis. Patet ex §. 1. & 2. Quod si prima Eclipsis contigerit in C, secunda in D, tertia etiam in D, quarta rursum in C. Dico, abjectis integris circulis, motum Verum ESF à primâ Eclipse ad secundam differre à motu Vero FQE ab Eclipse tertiâ ad quartam ferè quadruplo Æquationis maximæ Syzygialis. Patet ex §. 3.

Cùm igitur, licet hîc locum Apogei nondum constitutum habeamus, ex motu Lunæ tardissimo, velocissimo, inter tardissimum & velocissimum medio, propè verum cognosci possit quando Luna sit in Apogeo O, Perigeo R, Longitudinibus Medijs C, D; & cùm in Eclipticis ☍ ex loco Solis notus sit locus Lunæ, utpote ab illo tunc semper distans grad. 180: liquet motus Veros harum Eclipsium intervallis debitos, adeóque & differentiam eorum (quæ per §. 1. 2. 3. est ferè duplum vel quadruplum Æquationis maximæ) nota fuisse. Atque hunc in modum à veteribus deprehensum est, Æquationem maximam in Syzygijs excrescere ad grad. 5: quam *num.* 39 magis exactè determinabimus, statuemusque cum Ricciolo, grad. 5. 16.

NUMERUS XXII.

Inæqualitas mensium Verorum tam Synodicorum quàm Periodicorum.

CUm tanta sit Verorum motuum Lunæ inæqualitas præcedenti *num.* demonstrata, non possunt non menses tam Periodici quàm Synodici inæquales existere. Potest tamen etiam inæqualitas mensium Periodicorum eodem prorsus modo ostendi, quo inæqualitas annorum Solarium *lib.* 1. *num.* 48. Hæc porrò inæqualitas longè major in Lunâ est, quàm in Sole, eò quòd Æquationes adeoque & Æquationum differentia multò sit in Lunâ quàm in Sole major.

Inæqualitas item mensium Synodicorum demonstrari poterit ex distantiâ ☌ Veri à ☌ Medio, quod modò majus esse, modò minus ostendemus *lib.* 4. *c.* 1.

NUMERUS XXIII.

Notitia motuum Lunæ per Eclipses Lunares acquiritur.

PRimus aditus ad scrutandos Lunæ motus per Eclipses Lunares aperitur. Momento quippè medio durationis Eclipticæ, Luna Soli directè opponitur: ac proinde cùm locus Solis in Zodiaco [a] notus sit, etiam locus Lunæ, nusquam immiscente se parallaxi, fit notus, si Solis loco semicirculus, hoc est 180 gradus addantur vel subtrahantur. Zodiacus esto GDQE; centrum ejus & Terræ A; Sol in Eccentrici sui puncto C; Luna in Eccentrico suo Soli opposita in B. Erunt igitur centra Solis, Terræ & Lunæ, ad eamdem Rectam CAB, quæ ad Zodiacum utrimque protracta determinabit loca Vera Solis E, & Lunæ D. His positis, motus Verus Solis est GDQE, Lunæ GD, à motu Vero Solis deficiens semicirculo DQE. Quare à motu Vero Solis GDQE demptis gradibus 180, remanet motus Verus Lunæ GD. Quod si motus Verus Lunæ excedat motum Verum Solis, ac proinde Luna sit in C, Sol in B, tunc ad motum Verum Solis GD adde gradus 180, & prodibit Verus Lunæ motus GDQE. Ad Æquales autem Lunæ motus investigandos omninò necessarium [m] est ut loca Vera Lunæ aliqua per observationem innotescant: id verò, nisi Eclipses in consilium adhibeantur, obtineri vix potest. Quamvis enim (ut patet ex *num.* 4.) Verus Lunæ locus etiam per distantiam Lunæ à stellis Fixis, vel à Sole non opposito cognosci possit, si parallaxis, quæ utrobique se immiscet, extricetur; tamen, quia parallaxeos quantitas non nisi per ipsos Medios Lunæ motus innotescit, liquet hâc viâ minùs expeditè, quod quæritur, inveniri. Porrò Lunæ motus in Syzygijs, hoc est in ☌ & ☍, unâ tantùm inæqualitate involvitur; extra Syzygias verò duabus, imò juxta Tychonis observationes, etiam tribus; quarum altera ab alterâ discerni nequit, nisi seorsim è tribus una cognoscatur. E tribus autem ea, quam in Syzygijs Luna patitur, Eclipsium præsidio noscitur, perque eam deinde duæ reliquæ innotescunt. Hæc causa est cur inæqualitas Syzygialis ante alias investigetur, & cur cæteris observationibus Lunares Eclipticæ præferantur.

[a] *Per num.* 55. *lib.* 1. *Fig.* 12.

[m] *Patebit ex num.* 31. & 32.

NUMERUS XXIV.

Ex duabus Eclipsibus, in quarum utrâque non sint æquales Anomaliæ tam Solis quàm Lunæ, non elicitur certò quantitas mensis Synodici Medij.

CUm enim menses Veri Synodici, seu Lunationes Veræ (ut *num. præced.* & alibi ostendimus) sint inæquales, etiam aggregatum, seu intervallum temporis constans certo Lunationum *b* Verarum numero, ex. gr. trecentis, inæquale erit, vel esse poterit intervallo alteri totidem Veris Lunationibus constanti. Igitur Lunatio Media ex priori intervallo juxta modum *num.* 22. §. 1. traditum, deducta, non erit æqualis Lunationi Mediæ, deductæ ex intervallo altero. Deberent autem esse æquales, cùm una semper *a* eademque Synodicorum mensium Mediorum sit quantitas. Quare ex duabus Eclipsibus illimitatè acceptis, non rectè elicitur quantitas Medij mensis Synodici.

b Def. 21. num. 20.

a Ostendi ad def. 22. num. 20.

NUMERUS XXV.

Ex duabus Eclipsibus intervallo satis magno distantibus, & in quarum utrâque æquales sint Anomaliæ Lunæ, itemque Solis æquales, certò elicitur Medij mensis tam Synodici quàm Anomalistici magnitudo.

RAtio primæ conditionis est, quia, cùm in magno intervallo plurimæ Lunationes contineantur siquis error committitur, is in plurimas *o* Lunationes distribuitur, adeoque in singulis evadit insensibilis, uti patet expendenti modum deductionis, traditum *num.* 22. §. 1.

o Def. 21. num. 20.

Fig. 15. 16. 17. 18.

Pro demonstratione conditionis secundæ, Zodiacus esto G R K, ejusque centrum A; Solis Eccentricus D H N, centrum B, Apogeum M, linea Apogei M N; Lunæ Eccentricus F P L, centrum C, Apogeum P, linea Apogei P Q. Momento medio Primæ Eclipseos Sol sit in D, Luna in F; lineæ Verorum motuum A D E, A F K sibi mutuò indirectum, aut saltem in uno plano Longitudinis juxta *def.* 8. *&* 7. *nu.* 20; linea Medij motus Solis A G; linea Medij motus Lunæ A I; Anomalia Lunæ P L F; Æquatio K I; Anomalia Solis M H D; Æquatio E G. Certùm est *8* Verum modò præcedere Medium, modò sequi. In casu Figuræ 15 & 16, *8* Verum præcedit, quando enim lineæ Veri motus Solis & Lunæ, A D E, A F K sunt indirectum, aut saltem in uno plano Longitudinis, A I linea Medij motus Lunæ, nondum est indirectum, vel in uno plano Longitudinis cum A G lineâ Medij motus Solis; sed moveri adhuc debet versùs K ut indirectum, cùm ipsa fiat circa O. In casu Figuræ 17 & 18, *8* Medium præcedit, Verum sequitur. Cùm enim Luna F opposita est Soli D, adeoque lineæ Veri motus Solis & Lunæ A D E, A F K sunt indirectum, aut saltem in uno plano Longitudinis, linea Medij motus Lunæ A I jam antè fuit indirectum circa O cum A G lineâ Medij motus Solis, adeoque *8* Medium jam præcessit. Figuræ exprimunt omnes casus præter duos, in quibus nempè Æquatio Lunæ est minor Æquatione Solis ejusdem *a* speciei. Porrò temporis intervallum inter *8* Verum & Medium pendet ab Æquationibus Solis E G vel K O, & ab Æquationibus Lunæ K I: hæ autem ab *o* Anomalijs. Cùm igitur per hypothesim Anomaliæ Lunæ in Eclipsi utrâque sint Æquales, seu eædem nempè P L F, etiam Æquationes Lunæ in utrâque Eclipsi erunt eædem & homogeneæ, nempè K I. Pari modo quia Solis Anomaliæ in utraque Eclipsi ponuntur eædem, nempè M H D, etiam Æquationes Solis in utrâque Homogeneæ & eædem erunt, nempè E G, seu K O (tunc autem duæ Æquationes Homogeneæ dicuntur, quando motui Medio vel utraque addenda est vel utraque subtrahenda, ut motus Verus proveniat). Igitur utraque Eclipsis Vera utramque Mediam eodem temporis intervallo vel præcedit vel sequitur.

a Species Æquationum vide prop. 6. nu. 25. lib. 1.

o Patet ex num. 40. lib. 1.

Fig. 22. 23.

His ostensis, intervallum temporis inter Veram Eclipsim primam & secundam repræsentet A B; intervallum verò inter Mediam Eclipsim primam & secundam referat X Z. Ergo A X, B Z repræsentabunt tempora quibus Veræ Eclipses A, B, Medias X, Z præcedunt vel sequuntur. Hæc autem jam ostendi æqualia esse. Quare si æqualibus temporibus A X, B Z addatur tempus commune X B in Fig. 22, A Z in Fig. 23, erit A B tempus inter Eclipses Veras æquale tempori X Z inter Eclipses Medias. Atqui tempus inter Eclipses Medias, sive inter Ecliptica Plenilunia Media, adæquatè resolvitur in menses integros Synodicos Medios, sive integras Lunationes Medias, quarum una *a* semper eademque est quantitas. Ergo tempus A B inter Eclipses Veras, quando scilicet eædem in utrâque sunt Anomaliæ, etiam resolvitur adæquatè in Lunationes Medias integras æquè multas, putà in 223. Si ergo dicam: Lunationes Mediæ 223 efficiunt tempus A B; ergo Media Lunatio una quantum tempus efficiet? Per Reg. proport. prodibit tempus unius Lunationis Mediæ. Ergo ex intervallo temporis duarum Verarum Eclipsium, si in utraque æquales fuerint Anomaliæ Lunæ, itemque Solis æquales, rectè elicitur quantitas Lunationis Mediæ: quod erat demonstrandum.

a Ostendi ad def. 22. num. 20.

Quod autem ex binis ejusmodi Eclipsibus, etiam rectè deducatur quantitas mensis Anomalistici est manifestum. Cùm enim in utrâque Eclipsi eadem sit Anomalia Lunæ: liquet Eclipsium intervallo contineri Anomaliæ Revolutiones integras sine fractione. Quare si per has intervallum dividatur, prodibit tempus unius Revolutionis Anomalisticæ.

Inquirendum modo est, quâ viâ in duabus Eclipsibus Anomaliæ Æqualitas, sive (quod idem est) restitutio, seu reditus Anomaliæ cognosci possit.

NUMERUS XXVI.

Quo indicio Reditus Anomaliæ Lunaris deprehendatur.

§. 1. QUoniam Luna *a* circa Apogeum Eccentrici nobis apparet moveri tardissimè, circa Perigeum velocissimè, & in primo semicirculo E Z F ab Apogeo E usque ad Perigeum F, velocitas quotidiè crescit, in secundo autem semicirculo à Perigeo usque ad Apogeum assiduè decrescit; scire Astronomi potuerunt ad datum tempus Eclipsis in quo Anomaliæ semicirculo Luna versaretur. Scire item ex attentâ motus Lunaris consideratione potuerunt, utrùm is ejusdem velocitatis fuerit in secundâ Eclipsi, cuius in primâ. Quando igitur deprehensum fuit, Lunam in utrâque Eclipsi fuisse motam eâdem velocitate in eodem Anomaliæ semicirculo, necesse fuit in secundâ Eclipse Lunam rediisse ad idem punctum

a Vide propr. 11. num. 25. lib. 1.

Fig. 6. 7.

Ec-

Eccentrici, in quo fuerat in primâ, hoc est restitutam fuisse Anomaliam ab Eclipsi primâ ad secundam, sive eamdem in utrâque Anomaliam fuisse: hæc enim omnia idem significant.

b *Vide Regiom. Almag. lib. 4. prop. 5.*

Cavendum in hoc negotio *b* ab Eclipsibus in quibus Luna est propè puncta Transitus Medij: aptissimæ autem sunt illæ in quibus motus Lunæ Verus plurimùm differt à Medio, quod accidit propè Apogeum & Perigeum.

§. 2. *Quæres* an ex binis Eclipsibus quantitate obscurationis & duratione æqualibus in eodem Anomaliæ semicirculo celebratis, sequatur Anomaliæ restitutio?

Fig. 24, 23.

Respondeo non sequi si Totales fuerint, sequi autem si Partiales. Si enim in utrâque Eclipsi fuerit obscurata, hoc est immersa umbræ Terrestri ex. gr. pars Lunæ dimidia, manifestum est spatium umbræ, quod ab Eclipsis principio usque ad finem Luna pertransijt, in utrâque Eclipsi fuisse æquale, utpotè commensum Lunæ dimidio. Quare cùm Eclipseos utriusque duratio fuerit æqualis, liquet Lunam æqualibus temporibus æqualia umbræ spatia pertransisse, ac proinde æquali celeritate fuisse motam in Eclipsi utrâque. Unde, cum ex Hypothesi etiam in eodem utrobique Luna fuerit semicirculo Anomaliæ, ex indicio primo Anomaliam fuisse restitutam patet.

c Ostendi ad def. 22. num. 20.

Quod si Eclipses ambæ fuerint Totales, potuit in primâ fuisse Luna remotior à Terrâ & vicinior Apogeo, quàm in secundâ; ac proinde potuit in primâ fuisse totaliter immersa umbræ eo loco, ubi ea gracilior est, in secundâ verò ibi, ubi umbra crassior, adeoq; minus umbræ spatium pertransisse in primâ quàm in secundâ: & nihilominus, quia Luna in primâ (utpote Apogeo propinquior) fuit mota tardiùs quàm in secundâ, potuit inæqualia umbræ spatia æqualibus temporibus pertransire. Ergo inæqualis velocitas consistit, cum obscuratione æquali, utpotè totali utrobique, & cum æquali duratione. Ergo non sequitur restitutio Anomaliæ, quæ (ut ex primo indicio patet) æqualem in utrâque Eclipsi motus velocitatem requirit.

NUMERUS XXVII.

Aliud indicium Restitutionis, sive Reditus Anomaliæ Lunaris.

HAbeantur *Eclipses quatuor hisce tribus conditionibus præditæ. 1. In duabus harum, quas Primam & Tertiam appellabo, eadem fuerit Veri Lunæ motus velocitas. 2. Tempus à primâ ad tertiam æquale tempori à secundâ ad quartam. 3. Motus Verus Lunæ à primâ ad tertiam æqualis motui Vero à secundâ ad quartam. Dico his datis Anomaliam Lunæ restitutam fuisse tam à primâ ad tertiam, quam à secundâ ad quartam.*

a Vide propr. 11. num. 25. lib. 1. Fig. 6. 7.

Usui est hoc indicium, quando non constat utrùm Luna in Eclipsi primâ & tertiâ fuerit in eodem Anomaliæ semicirculo. Potest autem pro conditione primâ substitui altera, quæ ponat Eclipses primam & tertiam Partiales fuisse, sed æquales inter se quantitate obscurationis & duratione; hinc enim (ut patet ex §. 2. *num. præced.*) infertur æqualis in utrâque motus velocitas.

Fig. 20.

Zodiacus esto G N L P, ejusque centrum V: Eccentricus Lunæ M X O A, ejusque centrum E, Apogeum M, linea Apogei N M E V O P. Prima Eclipsis contingat in A (hoc est momento medio primæ Eclipsis, centrum Lunæ sit in A) secunda in B. Dico, si adsint tres conditiones supradictæ, etiam tertiam contingere in A (eodem nempè Anomaliæ puncto, quo prima) & quartam in B eodem Anomaliæ puncto, quo secunda. Quod hunc in modum demonstrabimus. Si negas Eclipsim tertiam contingere in eodem Anomaliæ puncto A, in quo prima, debebit ea incidere ad partem alteram Apogei M, in punctum Anomaliæ X, abscindens arcum X M parem arcui A M; aliàs enim non posset esse æqualis velocitas motus Apparentis in primâ & tertiâ, quam hypothesis requirit. Tum verò Eclipsis quarta necessariò contigerit in puncto Z, posito ultra X versùs O, & abscindente arcum Z M B parem arcui A M X: cùm enim per hyp. tempus inter Eclipsem primam & tertiam, tempori inter secundam & quartam sit æquale, & motus Lunæ per Eccentricum æquabilis sit, arcus A M X, quem à primâ Eclipsi A ad tertiam X, præter integros circulos, Luna percurrit, necessariò æqualis est arcui B M Z, quem post integros circulos Luna percurrit à secundâ ad quartam. Ductis igitur lineis Veri motus V A G, V X K, V B F, V Z L, Verus Lunæ motus post absolutos integros circulos, ab Eclipse primâ ad tertiam est arcus G N K, à secundâ verò ad quartam arcus F N L. Atqui (ut ostendam infra) arcus G N K, F N L sunt inæquales, eò quòd Eccentrici arcus A M X, B M Z quibus respondent, sint ostensi æquales. Ergò motus Lunæ Veri ab Eclipse primâ ad tertiam, & à secundâ ad quartam non sunt æquales inter se, quod hypothesi repugnat. Non potest igitur Eclipsis tertia contigisse in Z alio nempè Anomaliæ puncto, quàm in A, in quo prima. Igitur in Eclipse primâ & tertiâ eadem fuit Lunæ Anomalia M X O A, hoc est Anomalia à primâ in tertiam est restituta. Jam verò Eclipsi tertiâ incidente in Anomaliæ punctum idem A, in quod prima, etiam quarta necessariò incidit in idem Anomaliæ punctum B, in quod secunda. Quoniam enim tempus ab Eclipsi primâ A ad tertiam C æquale ponitur tempori à secundâ B ad quartam D, patet etiam tempus à primâ A ad secundam B necessariò esse æquale tempori à tertiâ C ad quartam D. Ergo cùm Anomaliæ motu æqualibus temporibus Luna æquales arcus Eccentrici absolvat, arcus A D, qui præter integros circulos percursus est à primâ A, ad secundam B, æqualis est arcui qui præter circulos integros percursus est à secundâ C ad quartam D. Ergo necesse est etiam quartam D incidisse in idem Eccentrici punctum B, in quod secunda inciderat.

Arcus porrò G K, F L, sive angulos A V X, B V Z inæquales esse sic ostendo. Quoniam arcus A X æqualis est arcui B Z, dempto communi B X, etiam A B, Z X æquales erunt. Deinde quia A M, X M æquales sunt, estque A B minor quàm A M; etiam A B erit minor quàm X M. Quare ab X M abscindi potest X Y (inspice figuram 21) æqualis ipsi A B, seu Z X. Ducantur deinde rectæ B V, A V, Z V, X V, Y V. Quia arcus A M, X M, item A B, X Y æquales sunt, etiam Y M, B M æquales erunt. Unde patet angulos X V Y, A V B æquales esse. Atqui Z V X major est (per Porisma seq.) quàm X V Y. Ergo etiam Z V X major est quàm A V B. Addito igitur communi X V B, erit totus Z V B, major toto X V A: quod erat demonstrandum.

Porisma.

Fig. 21.

Circuli M X Q centrum sit E; diameter M O; in eâ punctum V, ad quod ab æqualibus arcubus

Z X, X Y ſubtendantur anguli Z V X, X V Y. Dico angulum Z V X majorem eſſe angulo X V Y.

Producatur enim X V in Q; ducanturque Z Q, Y Q, Y V, Z V. Ex 15. 3, patet Y Q majorem eſſe quàm Z Q. Fiat ergo I Q par ipſi Z Q, ducaturque I V. Quoniam per hyp. arcus X Y, X Z, æquales ſunt; etiam anguli X Q Y, X Q Z æquales erunt per 29. 3. In triangulis igitur V Z Q, V I Q, quoniam anguli ad Q æquales ſunt, & latera Z Q, Q V, æqualia lateribus I Q, Q V, erunt quoque r anguli Z V Q, I V Q æquales. Ergo etiam ſ Z V X, I V X æquales erunt. Ergo Z V X major eſt quàm Y V X. Quod erat dem.

r Per 4. 1.
ſ Per 13. 1.

NUMERUS XXVIII.

Æqualium motuum Lunæ prima inveſtigatio.

§. 1. ELigantur duæ Eclipſes quàm longiſſimò temporis intervallo diſtantes, in quarum utrâque æquales fuerint Anomaliæ Lunæ, & Anomaliæ Solis æquales. Utrùm Solis Anomaliæ fuerint æquales, ſcietur ſi ad tempus utriuſque Eclipſis, Anomaliæ Solis ſupputentur per §. 3. *num.* 55. *lib.* 1. An Lunares Anomaliæ æquales fuerint, cognoſces ex indicijs *num.* 26 & 27 demonſtratis. Ex binis autem ejuſmodi Eclipſibus rectè colligi quantitates menſium Synodici & Anomaliſtici, *num.* 25. oſtenſum eſt. Et tales fuêre, ſaltem quoad Anomaliam Lunæ (nam de Solis non conſtat) quas Hipparchus adhibuit: reperitque intervallum earum Annorum Iulianorum 344, Dierum 363, & Horæ unius, hoc eſt Dierum 126009. Horæ 1: in hoc autem intervallo fuerunt menſes Synodici integri 4267, & Anomaliæ revolutiones integræ, ſeu menſes Anomaliſtici integri 4573. Utrumque haud difficulter potuit cognoſci; primum quidem ex numero Noviluniorum; alterum ex diverſitate motus Apparentis, quæ intra quamlibet Anomaliæ revolutionem conſpicitur. In quâlibet enim ſemel motus Lunæ apparet tardiſſimus propè Apogeum, ſemel velociſſimus propè Perigeum, bis mediocris circa Tranſitus Medios; & ab Apogeo ad Perigeum quotidiè augetur velocitas, à Perigeo ad Apogeum quotidiè minuitur. Ex his ergo ſtatis cujuſlibet revolutionis Anomaliſticæ diverſitatibus, facilè ſciri potuit, quantus earum numerus in dato temporis intervallo contineretur: & eſt credibile ab Eclipſibus non magno intervallo diſtantibus, veteres incepiſſe, atque inde ad alias magis diſſitas ſenſim progreſſos. Quoniam igitur tam 4267 Menſes Synodici, quàm 4573 Menſes Anomaliſtici conficiunt Dies 126009. H. 1: unus Menſis Synodicus, vel Anomaliſticus quantum tempus conficiet? per Reg. Proportionum prodibit tempus, ſive quantitas utriuſque: intervallo namque Dierum 126009. H. 1, diviſo per menſes Synodicos 4267, provenit Hipparcho Menſis Synodicus Medius D. 29. H. 12. 44'. 3''. 15'''. 44''''. 39'''''. 4''''''. eodemque intervallo diviſo per Menſes Anom. 4573, prodijt Menſis Anomaliſticus D. 27. H. 13. 18'. 18'' 59'''. 20''''. 1'''''.

Fig. 7.

§. 2. Jam ex menſe Synodico Periodicum ſic elicies. Ponamus ☌ incidiſſe in Zodiaci punctum X. Interim dum Luna à Sole digrediens ab X versùs R, eundem rurſus aſſequitur, etiam Sol procedit ab X versùs R. Unde fit ut Luna, Zodiaco jam emenſo, reverſa in X, Solem interim progreſſum in T, nondum ſit aſſecuta, ſed præter unum Zodiaci circuitum X R M X percurrere debeat X T partem ſecundi. Inquire a igitur quot Gradus Sol Medio motu percurrat ſpatio unius Menſis Synodici Medij, cujus quantitas jam innotuit. §. 1. Ita noti fient Gradus arcus X T, quibus additis ad Gradus 360 X R M X, noti fient Gradus X R M X T; quos Sol abſolvit ſpatio unius Menſis Synodici Medij. Fiat igitur ut Gradus noti X R M X T ad Gradus 360 X R M X, ita notum tempus Menſis Synodici Medij ad quartum; prodibit tempus unius Menſis Periodici Medij.

a Per num. 36. lib. 1.

Quod ſi per Menſem Synodicum ſic inventum, dividas Annos Julianos 344, Horam unam, comperies eo intervallo contineri Menſes Periodicos, ſive integros Zodiacos 4612 minùs Gradibus 7. 30.

§. 3. Ex Menſtruis temporibus jam conſtitutis reperientur Æquales motus Lunæ, datis temporum ſpatijs competentes, hunc in modum. Cùm uno Menſe Periodico Medio, hoc eſt Diebus 27. H. 7. 43'. 4''. '''. ''''. '''''. Luna motu Medio abſolvat Zodiacum totum, nempè Gradus 360: igitur Die uno, vel Horâ unâ, vel Scrupulo uno &c. quot gradus, vel minuta motu Medio abſolvit? Per Regulam proport. prodibit motus Medius Lunæ, Diurnus, Horarius, &c. Pari modo ex menſe Synodico elicietur motus Medius Lunæ à Sole Diurnus, Horarius &c. & ex menſe Anomaliſtico Medio, motus Anomaliſticus unius Diei, Horæ &c. Atque ita conſtruentur tabulæ Æqualium motuum Lunæ, ut tradidi in Sole *num.* 36. *lib.* 1.

MOTUS ÆQUALES DIURNI LUNÆ SECUNDUM HIPPARCHUM.

Medius.	Grad. 13.	16.	34''.	58'''.	33''''.	30'''''.	38''''''.
Medius à Sole.	Grad. 12.	11.	26.	41.	20.	17.	59.
Anomalia.	Grad. 13.	3.	53.	56.	29.	38.	38.

Quod ſi motum Diurnum per datum Dierum numerum multiplicemus, prodibit motus Æqualis, dato cuilibet temporis intervallo debitus.

Atque hæc eſt inveſtigatio prima Æqualium motuum Lunæ: qui quamvis præciſionem omnimodam hic nondum ſint aſſecuti, ex ijs tamen ad eoſdem penitùs elimandos Numeris ſequentibus gradus fiet.

Corollarium.

In dato temporis intervallo quot menſes Synodici, Anomaliſtici, Periodici contineantur invenire.

Dictum eſt §. 1. Annis Julianis 344, Horâ. 1. hoc eſt. D. 126007. H. 1. contineri Menſes Synodicos integros 4267, Anomaliſticos integros 4573: igitur in dato intervallo ex. gr. Annorum bis mille, quot Menſes Synodici, quot Anomaliſtici continentur? Per Regulam proportionum prodibunt quæſita. Rurſum quia (ut §. 2 dictum eſt) Luna D. 126007. H. 1. abſolvit Zodiacos 4612 minùs grad. 7. 30, inde ſimiliter per proport. Regulam elicies quot Zodiacos abſolvat Annos 2000.

Inventis Menſibus Synodicis, qui intervallo dato, putà Annorum 2000, continentur, pro Menſibus Anomaliſticis hoc compendium ſuggerit Ptolomæus: ut 4267 ad 4573, vel potiùs ut 251 ad 269 (ſunt enim hi minores numeri, majoribus proportionales) ita numerus menſium Synodicorum, Annis 2000 contentorum ad quartum: dabit hoc numerum menſium Anomaliſticorum Annis 2000 exactorum.

Scho-

Scholium.

Ut ex duabus Eclipsibus Lunarium mensium quantitates deducantur, notum esse debet temporis intervallum ab Eclipsi primâ ad secundam, hoc autem non innotescet, nisi priùs momenta ipsa Eclipticorum Pleniluniorum, quæ sola in hoc negotio spectari debent, fuerint nota. Hæc igitur fiunt nota hunc in modum.

Tubi Optici adminiculo observetur initium Eclipseos, atque ipsum quo Luna incipit obscurari, momentum, notum fiat Horologio sciaterico accuratè constructo, vel potius adhibeatur ad hoc praxis magis accurata, quam tradam lib. 3. num. 23 & 24: quod si Eclipsis tempore nocturno contingat, adhibeatur praxis alia, quam exponam lib. 5. num. 45. Observetur deinde finis Eclipsis, eodemque modo notum fiat momentum, quo Luna desijt obscurari. Sic nota habebitur Eclipseos duratio tota; quâ bifariam divisâ, ipsum primi Ecliptici Plenilunij momentum notum erit. Pari ratione notum fiet momentum Ecliptici Plenilunij posterioris. Neque ullum vitiosi circuli periculum hic est, quia praxes illæ, quas adhibendas præscripsi, à Lunæ motibus, quos jam inquirimus, nullatenus dependent, quod loco citato legenti perspicuum erit.

NUMERUS XXIX.

Attingitur Hypothesis Epicyclica Lunæ in Syzygys.

Quemadmodum in Sole, ita & in Lunâ tempore Syzygiarum Phœnomenis perinde satisfit per Epicyclum ac per Eccentricum; quanta enim est Eccentricitas Eccentrici, tanta est semidiameter Epicycli. Quamvis autem Eccentricum prætulerim, tamen, quia visum hic est etiam juxta hypothesim Epicycli investigare Anomaliam Lunæ tempore Eclipsium, cujus notitia ad corrigendos Lunæ motus Medios, Anomalisticos inprimis necessaria est; paucis hoc loco Epicycli hypothesim (pro Syzygijs tantùm) opus erit exponere.

Fig. 24. Zodiaci & Terræ centrum sit A: circulus Zodiaco concentricus Zodiacum repræsentans, esto D V B, Epicyclus sit X C Z F, cujus centrum E motu æquali spatio mensis Periodici percurrit circulum D V B in consequentia versùs Z B. Ex A centro Zodiaci per Epicycli centrum ducta Recta determinat in Epicyclo Apogeum C, & Perigeum F. Quo autem tempore centrum Epicycli in consequentia motu æquali percurrit circulum E B D V, interim Lunæ centrum, incipiens ab Apogeo C, percurrit Epicyclum in partem oppositam ex C versùs H, motu etiam æquali, sed paulò tardiori; ita ut, cùm Epicycli centrum absoluto circulo E B D V E redijt in E, centrum Lunæ motum ex Apogeo C per H, nondum redierit ad Apogeum C, sed opus sit, centrum Epicycli secundæ revolutionis partem ex. gr. E K priùs absolvat, quàm centrum Lunæ ad Apogeum C revertatur. Atque ita Luna jam Apogea non respondet eidem puncto Zodiaci E, cui respondebat Apogea Luna mense priori, sed puncto alteri magis Orientali, sive in consequentia, puta K. Unde fit ut Apogeum motu lento videatur in consequentia moveri. In hypothesi igitur Epicyclicâ Apogeum Epicycli motu sibi proprio non movetur, ut in hypothesi Eccentricâ, sed tantùm æquivalenter habeatur Apogei motus per aliquantò tardiorem motum Lunæ in Epicyclo. Atqui in hoc utriusque hypoteseos differentia potissimùm consistit.

Definitiones ad Epicycli hypothesim pertinentes sunt hæ:

Sit Lunæ centrum in H, vel G, & principium Arietis in ♈, utimur enim circulo D V B, (ut dixi suprà) tanquam Zodiaco: ducanturque rectæ A N H, A K G: & tangentes A Z, A X, quæ in schemate non exprimuntur.

1. *Locus* Lunæ *Verus* est N, vel K, *Medius* E.
2. *Motus Verus ab initio* ♈ est arcus ♈ N, vel ♈ K.
3. *Motus Medius ab initio* ♈, est arcus ♈ E.
4. *Æquatio*, est differentia motus Medij, & Veri ab initio ♈, arcus nempè E N, vel E K, sive anguli C A H, vel C A G.
5. *Æquatio maxima* est cùm Lunæ centrum stat in contactu Z, vel X; arcus nempè E Z, vel E X, sive anguli C A Z, C A X.
6. *Anomalia circulus* est ipse Epicyclus.

Primus Anomaliæ semicirculus est C H F, *secundus* F X C.

7. Cùm Luna est (in H) in primo Anomaliæ semicirculo C H F, motus Verus ♈ N est minor Medio ♈ E: & tunc Æquatio E N auferenda est à motu Medio, ut habeatur Verus; addenda Vero motui, ut habeatur Medius.
8. Cùm Luna est (in G) in secundo Anomaliæ semicirculo F X C, motus Verus ♈ K est major Medio ♈ E; & Æquatio E K addenda est Medio motui, ut habeatur Verus: auferenda à Vero, ut habeatur Medius.
9. *Anomalia* Lunæ est arcus Epicycli ab Apogeo ad centrum Lunæ in præcedentia numeratus. Ut si Lunæ centrum sit in H, Anomalia est arcus C H; si in G, Anomalia est arcus C Z F G.
10. *Motus Verus dato temporis spatio conveniens*, est arcus Zodiaci, quem dato temporis spatio, centrum Lunæ percurrit.

Motus Medius dato spatio temporis congruens, est arcus, quem dato tempore Epicycli centrum absolvit.

Motus Anomaliæ dato tempori conveniens, est arcus Epicycli quem dato tempore centrum Lunæ absolvit. *Fig. 24.*

Centrum Eccentrici sit in B, Lunæ in G, tempus datum dierum 13. Diebus 13 percurrat centrum Epicycli arcum B ɸ D; centrum verò Lunæ interim absolvat arcum Epicycli G C H, ducanturque rectæ A K G, A N H. Igitur quo tempore centrum Epicycli percurrit arcum B ɸ D, centrum Lunæ confecit arcum K ɸ N. Arcus igitur B ɸ D est *motus Medius*, arcus K ɸ N *motus Verus*, arcus G C H, *motus Anomaliæ dierum* 13.

NUMERUS XXX.

Lemmata ad sequentia.

LEMMA I. Cum Lunæ motus Verus aliquo temporis intervallo absolutus, deficit à motu Medio qui eidem intervallo temporis competit, notabiliter ampliùs quàm gradibus 5. Apogeum erit in eo arcu Anomaliæ, quem interim Lunæ centrum

trum percurrit. Si autem Verus excedat Medium plus quàm 5 gradibus, in dicto arcu erit Perigeum.

Fig. 24.

Demonst. In temporis dati principio centrum Epicycli esto in B, centrum Lunæ in G. In fine dati temporis Epicycli centrum sit in D, Lunæ in H, sic ut arcus Epicycli G C H dato temporis spatio percursus, contineat Apogeum C. Patet ex *defin.* 10 motum Verum dato temporis spatio confectum, esse arcum K φ N, Medium verò esse arcum B φ D. Igitur Verus deficit à Medio binis Æquationibus K B, N D, (sive arcu K D N) quæ simul majores esse possunt Æquatione maximâ D Z, quæ in *o* Syzygijs est graduum 5. Quod si arcus Epicycli à Lunæ centro interim percursus, inciperet in Apogeo C, aut ultra C versùs Z, ad summum posset motus Verus à Medio deficere Æquatione maximâ Z D.

o *Constat ex observ. nu.* 21. §. 4.

Idem patet in Eccentrico. Nam si arcus Veri motus O E H (inspice *fig.* 48. *lib.* 1.) contineat Apogeum E, poterit is deficere à motu Medio P E H binis Æquationibus O P, H I, quarum summa major Æquatione maximâ. At si arcus Veri motus non contineat Apogeum E, sed incipiat, vel in E, vel ultra E versùs H, tunc rursus à motu Medio ad summum poterit deficere Æquatione maximâ.

Secundæ partis demonstratio non absimilis.

Lemma II. Si nota est ratio A ad Z, & nota sit ratio B ad Z: nota etiam est ratio A ad B.

A.	Z.	B.
5.	9.	6.

Demonst. Sit enim A ad Z, ut 5 ad 9; & B ad Z, ut 6 ad 9. Igitur cùm A sit ad Z ut 5 ad 9; & Z est ad B, ut 9 ad 6, erit ex æquo A ad B, ut 5 ad 6. Nota est igitur ratio A ad B.

NUMERUS XXXI.

Datis tribus Eclipsibus Radium Epicycli, seu Eccentricitatem Syzygialem; item Lunæ Anomaliam Mediam, locum Medium, ad Eclipsium momenta invenire.

INsigne est hujus Problematis artificium à Ptolomæo traditum *lib.* 4. *cap.* 5, 6, & 7: quod quia ex Ptolomæo ipso alijsve non facilè arbitror Candidatos Astronomiæ assecuturos, ex ijs quæ jam præmisi, & apposito schemate aptiori, quantâ potero claritate, exponam.

§. 1. Tres Eclipses à Ptolomæo observatæ sic habent.

Prima fuit Hadriani Anno 17, expletâ Die 26 Payni, Horâ 11. 15'. Sol erat in Tauri grad. 13. 15'. ac proinde Luna Soli opposita, in Scorpij grad. 13. 15'. fuit Totalis.

Secunda contigit Hadriani Anno 19, completâ Die 2 Chœac, Horâ 11 post Merid. Sol erat in Libræ, adeoque Luna in Arietis grad. 25. 10'.

Tertia accidit Hadriani Anno 20, expletâ Die 19 Pharmuti, Horâ 16 post Merid. Sol erat in Piscium, adeoque Luna in Virginis grad. 14. 12'.

A primâ ad secundam, abjectis integris circulis, motus Verus Lunæ est graduum 161. 55': tot enim sunt à Scorpij gradu 13, 15' ad Arietis gradum 25. 10'. Ut habeatur motus Medius in Zodiaco, & motus Anomaliæ eodem temporis intervallo confectus, intervallum ipsum temporis æquandum est per *num.* 58. *lib.* 1. quod sic æquatum, est dierum 531. H. 23. 39'. Huic spatio temporis quantus debeatur tum motus Medius, tum motus Anomaliæ sciri jam potest ex *nu.* 28. Utemur autem cum Ptolomæo motibus Hipparchi, cui motus Medius Diurnus est grad. 13. 10'. 34". 58'''. 33''''. 30'. 30"; Diurnus autem Anomaliæ est grad. 13. 3'. 53". 56'''. 29"". 38'. 38". Ex his per §. 4. *num.* 28 reperies Diebus 531. H. 23. 39', intervallo nempè æquato Eclipsis primæ ac secundæ, deberi motum Medium post integros circulos abjectos, grad. 169. 37': motum verò Anomaliæ, post circulos integros, grad. 110. 21'. Igitur ab Eclipsi primâ ad secundam motus Verus deficit à Medio gradibus 7. 42'. Quare *b* arcus Epicycli grad. 110. 21', à Lunæ centro interim percursus, continet Apogeum. Circulus centrum Epicycli deferens esto D V B, Zodiaco concentricus, quo proinde etiam utemur tanquam Zodiaco; & initium ♈ sit in *ω*. In primâ Eclipsi centrum Epicycli sit in B, in secundâ sit in D. Quia igitur arcus Epicycli à Lunæ centro interim percursus continet Apogeum C, necesse est Lunæ centrum in primâ Eclipsi fuerit in semicirculo F X C, putà in G; in secundâ verò in semicirculo C Z F, putà in H. Ductis ergo rectis A K G, A N H, à primâ ad secundam, motus Verus est arcus K φ N, motus Medius est arcus B φ D, motus Anomaliæ G C H grad. 112. 21', continens Apogeum C; defectus Veri motus à Medio sunt arcus K B, sive K D, & N D, sive totus arcus K D N, grad. 7. 42'.

b Per lem. 1. *num* 30. *Fig.* 24.

Deinde à secundâ Eclipsi ad tertiam motus Lunæ Verus abjectis integris circulis est grad. 139. 2': tot enim sunt ab ♈ grad. 25. 10' ad ♍ grad. 14. 12. Tempus à secundâ ad tertiam æquatum, est Dierum 502. H. 5. 30'. Huic, assumptâ quantitate Diurnâ Hipparchi, reperietur convenire motus Medius grad. 137. 34'; motus verò Anomaliæ grad. 81. 36', abjectis utrobique integris circulis. Igitur ab Eclipsi secundâ ad tertiam motus Verus excedit Medium gradu 1. 28'. In secundâ Eclipsi centrum Epicycli erat in D, Lunæ centrum in H. In tertiâ igitur centrum Epicycli esto in E, Lunæ in O; ducaturque recta A O I. Motus ergo Verus ab Eclipsi secundâ ad tertiam, erit arcus N V *n i*, motus Medius D V E, motus Anomaliæ H O. Jam quia arcus N D, *n i* E æquales, vel potius ijdem sunt, addito communi D V *n*, erit N V *n* æqualis D V E. Sed arcus N V *n* I excedit arcum N V *n* arcu *i n*. Ergo arcus N V *n* I, motus nempè Verus excedit etiam D V E, motum Medium arcu *i n*. Quare cùm motus Verus Medium excedat grad. 1. 28', erit arcus I N, adeoque angulus I A N. grad. 1. 28': arcus autem K D N, sive K E N, hoc est angulus K A N erat grad. 7. 42'. Ergo reliquus K A I est grad. 6. 14'.

Hactenus igitur inventa sunt hæc: nota est positio Lunæ in Epicyclo tempore Eclipsium: in primâ quippe centrum Lunæ est in G, in secundâ in H, in tertiâ in O, & arcus Epicycli G H à primâ ad secundam, continet Apogeum. Deinde noti sunt arcus G H gr. 110. 21' & arcus H O grad. 81. 36'. Noti quoque sunt arcus K N, seu angulus G A H, grad. 7. 42', & arcus I *n*, seu angulus I A H, grad. 1. 28', & arcus K I, seu angulus K A I grad. 6. 14'. quæ omnia in Epicyclo centrum habente in E, simul repræsentantur, qui proinde solus deinceps inspiciatur. Ex his porrò ita notis solvetur problema in hunc modum.

§. 2. Ex puncto M, quo recta A G secat Epicyclum, ad A I, & A H ducantur perpendiculares M L, M Q. Ducantur item rectæ G E, H E, M H, M O. Demum ex O ad M H sit perpendicularis O P, & ex E ad A G perpendicularis E S T. In trigono rectangulo M Q A notus est angulus G A H, seu

M A Q,

c Per 32.1. d Per probl. 1. cap. 3. Geo. Pract. e Per 21. 3.

M A Q, adeoque *e* & reliquus Q M A. Ergò nota est ratio *d* A M ad M Q. Deinde quia notus est arcus G H, notus est angulus G E H ad centrum, adeoque *e* & ipsius semissis G M H. Sed G M H per 31. 1. æquatur duobus M A H, M H A. Ergò hi duo simul noti sunt, sed notus est M A H, seu G A H. Ergò alter M H A, seu M H Q etiam notus est. In trigono rectangulo igitur M Q H, quia notus est M H Q, etiam H M Q notus erit. Ergò nota est ratio M H ad M Q. Quare cùm nota jam fuerit ratio A M ad M Q, nota quoque erit per *lem. 2. num.* 30. ratio A M ad M H. In trigono rectangulo M L A, notus est angulus M A L, seu K A I, adeoque & reliquus A M L. Nota est igitur ratio A M ad M L. Ob notos deinde arcus G H, H O, notus est angulus G M O; sed G M O externus æquatur binis internis M A O, M O A. Ergo summa duorum M A O, M O A nota est. At notus est M A O, seu K A I. Ergo etiam M O A, seu M O L notus est. Itaque in trigono rectangulo M L O, notus est acutus M O L, adeoque, & reliquus O M L. Ergo ratio M O ad M L nota *f* est. Sed etiam nota jam fuit ratio A M ad M L. Ergo *g* ratio A M ad M O, sive M O ad A M nota est. Atqui jam suprà etiam ratio H M ad A M fuit nota. Ergo ratio H M ad M O *i* nota est. In trigono rectangulo M P O ob notum arcum H O, notus est angulus P M O, adeoque & M O P. Ergò nota est ratio M P ad M O, & P O ad M O. Sed nota jam fuit etiam ratio totius M H ad M O. Ergò nota etiam est ratio P H ad M O. Atqui jam statim nota fuit ratio P O ad M O. Ergo etiam *o* nota est ratio P H ad P O in triangulo rectangulo O P H. In eo igitur per *prob. 5. cap. 3. Geom. Pract.* notus fiet angulus P H O, sive M H O. Ergo arcus M O notus erit, cùm is subtendat angulum centri M E O, duplum *p* anguli M H O. Ergo notus erit totus arcus M O H (quem Ptolomæus hoc discursu reperit grad. 95. 16'. 50''): qui cùm sit minor semicirculo, Epicycli centrum E necessariò est in portione H G M: unde ductâ rectâ A F E C, Apogeum (quod etiam in lemmate ostensum est) erit in arcu G H, Perigeum F in arcu M O. Quia ergo notus est arcus M O H, itemque arcus etiam G H notus est, reliquus quoque G T M notus erit. Ergo per tabulas Sinuum ejus subtensa G M in partibus Radij E C nota fiet. Jam pridem nota fuit ratio A M ad M O; nota quoque est per tabulas Sin. Ratio G M ad M O, cùm sint chordæ notorum jam arcuum G M, M O. Ergo ratio G M ad A M etiam *q* nota est. Quare cùm G M nota sit in partibus Radij E C, etiam A M in ijsdem nota erit. Tota igitur A G in partibus Radij E C, seu E F est nota. Ergo rectangulum G A M, hoc est *r* rectangulum C A F, notum est in partibus quadrati E F. Ergo rectangulum C A F unà cum quadrato E F, hoc est *t* quadratum A E, notum est in partibus quadrati E F. Extractâ igitur radice, A E Radius Deferentis Epicyclum notus est in partibus Radij Epicycli E F, seu E C. Nota est igitur ratio Radij Epicycli ad Radium Deferentis, hoc est in Hypothesi Eccentrici nota est ratio Eccentricitatis ad Radium Eccentrici: quam Ptolomæus reperit esse ut 5. 14' ad 60, sive 8722 ad 100000.

f Per prob. 1. cap 3. Geo. Pract. g Per lem. 2. num. 30. i Per idem. o Per idem. p Per 21. 3. q Per lem. 2. num. 30. r Per 36.3. t Per 6.2.

§. 3. Venio ad Anomaliam. Quia ducta fuit suprà E S T ex centro E perpendicularis ad M G, erit M G *u* bisecta in S. Quare cùm M G nota sit in partibus Radij E G, erit & G S. Sed tota A G nota erat in partibus Radij E G. Ergo & A S in ijsdem est nota. In ijsdem verò etiam nota jam fuit A E. Igitur, cùm in trigono rectangulo A S E nota sit ratio A S ad A E, notus etiam fiet *x* angulus A E T, seu F E T, adeoque & arcus F T. Atqui notus etiam est arcus T G, utpotè semissis noti jam anteà arcus M G. Ergo totus F T G notus erit. Reliquus igitur ad semicirculum notus est arcus G C: quo subducto à toto circulo, arcus C Z F G, qui est Anomalia Lunæ in primâ Eclipsi, etiam innotescet. Quod si notum arcum G C à noto pridem G H subducamus, notus remanet C H qui est Anomalia Lunæ in Eclipsi secundâ. Huic adde notum anteà arcum H O; ita notus fiet arcus C H O Anomalia Lunæ in Eclipsi tertiâ. Ptolomæus reperit C Z F G grad. 314. 17': C H grad. 64. 38': C H O. grad. 146. 14'.

u Per 3. 3. x Per prob. 4. cap. 3. Geo. Pract.

§. 4. Restant loca Media ad Eclip. singulas. In trigono rectangulo A S E, notus fuit supra acutus A E S. Quare notus est etiam alter S A E, adeoque, & arcus K E, Æquatio, seu Prosthaphæresis Lunæ in primâ Eclipsi. Hoc ablato à noto pridem arcu K N, notus remanet arcus E N, seu angulus E A N, Æquatio Lunæ in secundâ Eclipsi: eodemque K E ablato ab arcu pridem noto K I, notus remanet E I, seu angulus E A I, Æquatio Lunæ in Eclipsi tertiâ, sive in tertio Ecliptico ☍. Jam in momento tertij Ecliptici Plenilunij centrum Epicycli, hoc est locus Lunæ Medius, erat in E, motusque Lunæ Medius ab ♈ initio erat ω V E; ipsius autem Lunæ centrum erat in O, locusque ejus Verus in I, & motus Verus ab ♈ initio fuit ω V I, qui notus est ex Vero loco & motu Solis, ut ostendi *num.* 23. Quare si illi addas notam Prosthaphæresim E I, etiam notus fiet ad momentum Ecliptici ☍ tertij, motus Lunæ Medius ab ♈ initio ω V E, ejusque locus Medius E. Pari modo in secundo Ecliptico ☍ cùm locus Lunæ Medius erat in D, Verus in N, quia ex Vero loco & motu Solis, notus est Verus Lunæ motus ω N, si huic addas inventam Æquationem D N (seu E N) notus erit ab ♈ initio motus Lunæ Medius ω D in secundo Eclip. ☍. In primo denique, cùm locus Lunæ Verus esset in K, Medius in B. à motu Vero ω V E C demptâ Æquatione B K, (seu K E) notus erit motus Lunæ Medius ab ♈ initio ω V E B, in tertio Ecliptico ☍. Atque ita omnibus quæsiti partibus satisfactum est.

Scholium.

His in Hypothesi Epicycli repertis, eadem omnia etiam nota jam sunt in Hypothesi Eccentrici, cùm in utrâque Hypothesi, eadem, seu æqualis, sit tam Anomalia, quàm Æquatio & motus Medius, ad tempus idem: juvat nihilominus eadem in Eccentrico ipso perquirere.

NUMERUS XXXII.

Eadem per viam Eccentrici alijs duobus modis invenire.

Fig. 9. Lib 6. Astronom.

Eligantur tres Lunæ Eclipses, seu Oppositiones Eclipticæ Lunæ cum Sole, ad quarum momenta invento Vero loco Solis habetur etiam Verus locus Lunæ, utpote Soli diametraliter oppositæ. Eccentricus autem sit F C E, & ad momentum primæ ☍ centrum Lunæ sit in Eccentrici puncto C, ad momentum secundæ in D, ad momentum tertiæ in E. Eclipsium intervallis qui debeantur motus Veri, patet ex cognitis Veris locis Lunæ; qui debeantur Medij,

dij, scitur ex *num.* 28. §. 3. Igitur ex collatione Veterum cum Medijs scitur per *lem.* 1. *num.* 30, in quo ex tribus arcubus C D, D E, E F C sit Apogeum. Ponamus esse in H, & linea Apogei esto H F, centrum Eccentrici K, centrum Zodiaci & Mundi B. Ducantur rectæ B C, B D, B E, quæ postrema continuetur in G; item rectæ K C, K D, K E, F D, C D, C G, D G. Ex *num.* 28 scitur qui motus Anomaliæ debeatur intervallo temporis à primâ ☍ ad secundam; ac proinde abjectis integris circulis, notus fit arcus C D: eodemque modo fiunt noti arcus D E, & C D E. Per arcus verò a noti sunt anguli C K D, D K E, C K E. Deinde quia ad singulas ☍ Eclipticas nota sunt loca Vera Lunæ in Zodiaco, etiam eorumdem distantiæ, adeoque & anguli C B D, D B E, C B E, qui eas distantias b metiuntur, noti erunt. His ita constitutis, si opereris, ut præscribetur *lib.* 6. *num.* 18. à §. 3. *usque ad finem*, acquires Eccentricitatem, Anomaliam, Locum Medium ad ☍ singulas. Atque hic primus modus est.

a Per 33. 6.

b Per eand.

Fig. 7. & 8. Lib. 6. Astronom.

Pro modo secundo, Eccentricus esto F D E; centrum Mundi ad Zodiaci in A. Ad momentum primæ ☍ Eclipticæ Lunæ centrum sit in C, ad momentum secundæ in D, ad momentum tertiæ in E. Ducantur rectæ A C, A D, A E, quæ postrema continuetur in F; item perpendiculares, C P, F I, F N, ac demum rectæ D C, C F. Arcus F C, C D, F D, nec non anguli D A E, C A E innotescunt, ut in modo primo. His ita constitutis, si opereris, ut præscribetur *lib.* 6. *num.* 17. à §. 4. *usque ad finem*, prodibunt Eccentricitas, Anomalia, Locus Medius, ad singulas ☍ Eclipticas.

Via Eccentrici videtur facilior Epicyclicâ: hac tamen non fuit negligenda, tum ne ipsius insigne artificium studiosi ignorarent, tum ut Eccentrici prærogativa appareret.

NUMERUS XXXIII.

Æqualium Lunæ motuum examen & emendatio.

Eligendi sunt ad hoc opus Eclipsium Terniones duo ejusmodi, ut quæ ejusdem sunt Ternionis, intervallo distent quàm minimo, Terniones verò ipsi, quàm maximo.

§. 1. Ptolomæus *lib.* 4. assumit tres Eclipses, Babylone observatas à Chaldæis. Prima fuit Anno 1. Mardocempadi, Die 29 Thoth expletâ, Horâ post Merid. 9. 30; sed Alexandriæ Horâ 8. 40: Sole in Piscium, adeoque Lunâ in Virginis grad. 24. 30. Secunda accidit Anno 2 Mardocempadi, Die 18 Thoth, Horâ 11. 10 post Merid. Alexandriæ. Sol erat in Piscium, ideoque Luna in Virginis grad. 13. 45'. Tertia fuit eodem Anno, Die 15 Phamenoth, Horâ 7. 40. Alexandriæ post Merid. Sol erat in Virginis, ac proinde Luna in Piscium grad. 13. 15'.

Assumpsit deinde tres alias Eclipses à se observatas, magno intervallo à prioribus distantes, quas recensui *num.* 31, *supra*.

Ex tribus prioribus eo artificio, quod fusè *num.* 31 exposui, pro momento secundi ☍ Ecliptici invenit Lunæ locum Medium in Virginis grad. 14. 44'; Anomaliam verò, seu distantiam Lunæ ab Apogeo, grad. 12. 24'. Ex tribus autem posterioribus eodem artificio *nu.* 32 jam explicato, invenit momento Medio Eclipseos secundæ posterioris Medium locum Lunæ in Arietis grad. 29. 30; Anomaliam verò, seu distantiam ab Apogeo grad. 64. 38'. Quia verò Eclipses ejusdem Ternionis modico intervallo à se invicem distant, motus æquales intervallis illis debiti, modicum vitij trahent ex motu Diurno Hipparchæo non penitùs exacto, ex cujus aggregatione *num.* 21. & 22 fuêre conflati, quod diligenter notandum est pro §. tertio.

§. 2. Quoniam igitur in momento secundi Ecliptici Plenilunij prioris, locus Medius Lunæ fuit in Virginis grad. 14, 44', Anomalia verò grad. 12. 24': In momento autem secundi Ecliptici Plenilunij posterioris, Lunæ Medius locus erat in Arietis grad. 29. 30; Anomalia verò grad. 64. 38'; manifestum est eo temporis spatio, quod inter duas hasce Eclipses effluxit, Lunam motu Medio absolvisse in Zodiaco (abjectis integris circulis) gradus 224. 46; tot enim sunt à Virginis gradibus 14, 44' ad Arietis gradus 29. 30; in circulo autem Anomaliæ percurrisse gradus 52, 14', quot nempè sunt a gradibus Anomaliæ 12. 24' ad gradus 64. 38'. Porrò tempus, sed Æquatum, ab Eclipsi secundâ priori, quæ fuit Anno 2 Mardocempadi (hoc est ante Christum Anno 720) Die 18 Thot, Horâ 11. 10, usque ad secundam posteriorem, quæ (ut *num.* 32 recensui) contigit Anno Hadriani 19, hoc est Christi 134, completâ Die 2 Choeac, Horâ 11 post Merid. est Annorum Ægyptiorum 854, Dierum 73. H. 23. 20, hoc est, Dierum 311783. H. 23. 20. Igitur Luna Diebus 311783. H. 23. 20, motu Medio percurrit in Zodiaco 224. 46', in circulo Anomaliæ grad. 52. 14, abjectis utrobique circulis integris.

§. 3. Colligamus jam motum Anomaliæ Diebus 311783. H. 23. 20 debitum, aggregando motum Diurnum Anomaliæ Hipparchæum, quem corrigendum susceperamus, estque grad. 13. 3'. 53". 56"'. 29"". 38""'. 38""""; & inveniemus, abjectis integris circulis, grad. 52. 31', cùm tamen repertum sit per duos Eclipsium Terniones, dicto temporis intervallo deberi solum grad. 52. 14'. Porrò hic motus Anomaliæ à Vero longiùs aberrat, quàm is qui paulò antè per duos Eclipsium Terniones inventus est, cùm procreatus sit ex Diurno motu Anomaliæ Hipparchæo toties sumpto, quot sunt in Eclipsium secundarum intervallo, Dies, nempè 311783, patet in illo vitium motus Diurni Anomalistici Hipparchi, inesse viribus 311783 multiplicatum. Quamvis autem motus Anomaliæ, qui eidem intervallo Dierum nempè 311783. H. 23. 20, per duos Eclipsium Terniones inventus est convenire, etiam ipse adminiculo Diurni motus Hipparchæi (ut patet ex processu *num.* 31.) repertus sit, non inest tamen in eo vitium Diurni motus Hipparchæi toties multiplicatum, uti patet ex eo, quod sub finem primi §. notandum esse monui. Igitur motus Medius debitus secundarum Eclipsium intervallo, multò exactior est qui reperitur per duos Eclipsium Terniones, quàm is qui ex aggregatione Diurni motus Hipparchæi. Quare si uterque in motus Diurnos resolvatur, ex priore multò exactior proveniet Diurnus motus Anomaliæ, quàm ex posteriore. Resolvitur autem posterior in Diurnum Anomaliæ motum Hipparchæum grad. 13. 3'. 53". 56"'. 29"". 38""'. 38"""". ex cujus aggregatione conflatus est. Prior verò in quem resolvatur, sic invenies. Prior inventus fuerat graduum 52. 14', posterior graduum 52. 31. Posterior ergo priorem excedit Minutis 17. Cùm ergo posterior motus Anomalisticus Dierum 311783. H. 23. 20 priorem excedat Minutis 17, motus Anomalisticus unius Diei posterior (nempè grad. 13. 3'. 53". 56"'. 29"". 38""'. 38""""), priorem, qui adhuc latet, quantùm excedet? Per Reg. prop. reperies excedere

dere grad. 0. 6. 0″. 0‴. 11⁗. 46′′′′′. 39′′′′′′. His ergo demptis à dicto Hipparchi motu Diurno Anomaliæ grad. 13. 3′, 53″. 56‴. 29⁗. 38′′′′′. 38′′′′′′. prodibit Diurnus Anomaliæ motus correctus, qui latebat, grad. 13. 3′. 53″. 56‴. 17⁗. 51′′′′′. 59′′′′′′.

Atque ita non solùm ipsum correctionis artificium, sed etiam demonstratio ejus est manifesta.

§. 4. Colligatur deinde Lunæ motus Medius in Zodiaco debitus Diebus 311783. H. 23. 20, aggregando Hipparchi motum Diurnum in Zodiaco grad. 13. 10. 34″. 58‴. 33⁗. 30′′′′′. 30′′′′′′, abjectisque circulis integris, inveniemus grad. 224. 46′. totidem præcisè, quot per duas Eclipsium trinitates erant reperti. Ex quo infert Ptolomæus Hipparchi motum Medium in Zodiaco rectè se habere. In quo quidem assentiri Ptolomæo non debemus, in binis namque illis Eclipsibus, ex quarum intervallo Ptolomæus hanc correctionem instituit, valdè dissimiles fuerunt Anomaliæ Lunæ; in priore siquidem repertà fuit grad. 12. 24′; in posteriore grad. 64. 38′. Quod quantùm obsit inventioni motus Medij, satis patet ex demonstratis *num.* 24. & 25. Atque hæc videtur causa esse cur per duas Eclipsium trinitates Ptolomæus, Hipparchæi motus Medij correctionem nullam obtinuerit.

§. 5. Nicolaus Copernicus ipsos Medios motus Ptolomæi, eodem artificio, sed per Eclipses aptiores, hoc est quæ similiores haberent Anomalias, & longiùs distarent, iterum ad incudem revocavit. Primò assumpsit tres Eclipses à Ptolomæo observatas Alexandriæ, quas recensui suprà *num.* 31, easque reduxit ad Meridianum Fruenburgi. Deindè assumpsit tres alias à se observatas Fruenburgi. Prima fuit Anno Christi 1511, completâ Die 6. Octob. H. 0. 35′ post med. noctem, existente Sole in Libræ, Lunâ in Arietis grad. 22. 25′. Secunda contigit Anno 1522, expletis Diebus 5 Sept. Horâ 1. 20. p. m. n. Sole existente in Virginis, Lunâ in Piscium grad. 22. 12′. Tertia fuit Anno 1523, elapsis Diebus Aug. 25. p. m. n. Horâ 4. 25′ Sole in Virginis, Lunâ in Piscium Grad. 11. 21′, existente.

Ex tribus prioribus, juxta modum *num.* 32 explicatum, Ptolomæus, adhibitis Diurnis motibus Hipparchi, elicuit pro momento secundi Ecliptici Plenilunij (ut jam dixi 1. §. *hujus numeri*) locum Lunæ Medium in Arietis Grad. 29. 36, Anomaliam verò graduum 64. 38′. Ex tribus autem à se observatis Copernicus ad momentum sui secundi Plenilunij Ecliptici, usus Diurnis motibus Ptolomæi, §. 1. jam inventis per methodum *num.* 31, invenit Medium Lunæ locum in Piscium Grad. 26, 50, Anomaliam verò Grad. 74. 27′, quæ ferè æqualis est Anomaliæ Eclipseos secundæ Ptolomaicæ.

Ex his deinde eodem discursu, quo §. 2. 3. 4. jam usi sumus, collegit Copernicus motus Diurnos aliquantò majores Hipparchæis à Ptolomæo correctis.

§. 6. Ex Medijs motibus sic correctis elicientur etiam quantitates Menstruæ correctæ hoc modo: Si Luna absolvat in Zodiaco Grad. 13. 10. 35″ &c. Die uno; Gradus 360 quanto tempore absolvet? Per Reg. prop. proveniet tempus quæsitum sive quantitas Mensis Periodici correcta. Eodem modo ex Diurno motu Lunæ à Sole correcto reperietur quantitas correcta Mensis Synodici, & ex Diurno motu Anomaliæ correcto Mensis Anomalistici quantitas correcta.

Scholium.

Motus Anomaliæ à Ptolomæo correctus, ab eo qui seq. Num. dabitur omninò (quantùm assequi humanâ industriâ licet) exactus, longiùs abit, quàm Hipparchæus ipse, quem corrigendum susceperat. Non idcircò tamen suspecta esse debet correctionis ratio jam demonstrata: sed potiùs aut in Eclipsium (quod opinor) veterum observatione, aut alibi peccatum esse quidpiam cogitemus. Satis infeliciter correctio ista Ptolomæo successit, cùm neque in motu Medio (ut §. 5 monui) Scopum attigerit. Visum est tamen eam exempli loco proponere, ut novus calculi labor vitaretur.

NUMERUS XXXIV.

Æqualium motuum Lunæ determinatio suprema.

EX motibus Æqualibus repertis *num.* 28, & correctis per *num.* 33. ad eam præcisionem deveniri potest, quanta potest humanâ industriâ obtineri. Oportebit igitur primò motuum prædictorum adminiculo exactas Mensium Synodici, Periodici, Anomalistici quantitates determinare, & ex ijs deinde motus Æquales, Diurnos, Horarios &c. deducere.

§. 1. Ad Mensium porrò accuratam inventionem assume cum Ricciolo duas Lunæ Eclipses, in quibus eædem sint Anomaliæ non solùm Lunæ, sed etiam Solis; quales requiri ad hoc opus, liquet ex demonstratis *num.* 24 & 25. Utrùm verò eædem sint Anomaliæ, id certò jam sciri potest ex *num.* 31 & 32, hunc in modum. In momento Ecliptici Plenilunij, quod ex observatione Copernici fuit anno 1522, expletis Diebus 5 Sept. Horâ 1. 20. post med. noctem per artificium *num.* 31. *vel* 32, reperta est *num.* 33. §. 5, Anomalia Lunæ Grad. 74. 27′. Habemus ergo unam Radicem motus Anomaliæ, hoc est, notam habemus distantiam Lunæ ab Apogeo ad certum aliquod temporis momentum. Quare præsidio hujus Radicis reperiemus Anomaliam Lunæ ad tempus datum quodcumque eâ methodo, quæ tradita est *lib.* 1. *num.* 54. & rursum tradetur *infra num.* 46. & 47; ac proinde sciri poterit, an in momentis duorum Pleniluniorum Eclipticorum eædem fuerint Lunæ Anomaliæ. Utrùm verò etiam Solis fuerint eædem, cognosci poterit ex *num.* 55. *lib.* 1. Indicium hujus rei, quod *num.* 27 demonstravimus, usui esse in Eclipsibus, quas adhibebo, non potest, quòd conditiones in eo requisitæ hîc non adsint.

§. 2. His præmissis: Eclipsis prima, à Chaldæis, ut refert Ptolomæus *lib.* 4. *cap.* 11, observata est Babylone Anno 336 Nabonassari, hoc est ante Christum 383, Die 26 Thot. completo nempè Die 22 Decemb. H. 19. 20 post Mer. sed Alexandriæ H. 18. 30, ac proinde Bononiæ juxta Ricciolum H. 16. 47′. Igitur Eclipticum hoc Plenilunium contigit Anno ante Christum 383, Dec. 23, H. 16. 47′.

Secundam observavit Gassendus Aquissextijs Anno 1628. Stylo Veteri, Die 10 Ianuarij, H. 9. 36′. 30″, ac proinde Bononiæ juxta reductionem Riccioli, Anno 1628. Ian. 10. Stylo Vet. H. 10. 5′. 30″.

Inquirantur deinde, ut §. 1. docui, utriusque

Eclipſis Anomaliæ. In primâ, Anomalia Lunæ fuit Grad. 230, in ſecundâ 231. 4'. differentia earum, nullius eſt hoc in negotio momenti. Anomalia Solis in primâ fuit Grad. 203. 46, in ſecundâ Grad. 203. 36, differentia rurſum momenti nullius. Quare in utrâque Eclipſi Anomaliæ tam Lunæ quàm Solis, ſunt eædem. Quare ex his Eclipſibus rectè elicietur quantitas Menſis Synodici, & Anomaliſtici, ut patet ex demonſtratis *num.* 25.

§. 3. Ex tempore Eclipſium, §. 2 ſuprà recenſito, liquet à primâ ad ſecundam fluxiſſe Annos Iul. 2009, Dies 18. H. 19. 11", ſive Dies 733805, Tertia unius Horæ 3957060. Numerum Lunationum hoc tempore contentarum certò cognoſces, vel eo modo, quem ex Hipparcho tradidi *in Coroll. num.* 28. vel tempus dividendo per quantitatem Lunationis Mediæ, ſeu Medij Synodici Menſis præcedentibus Numeris inventam, quam, ex ibidem demonſtratis, conſtat ad eam iſthic præciſionem fuiſſe deductam, ut in bis mille Annis non poſſit error in unâ integrâ Lunatione committi. Utrolibet modo utare, reperies contineri Lunationes 24849. Quoniàm igitur Lunationes 24849 conficiunt Dies 733805, & Tertia unius Horæ 3957060; Lunatio una quantum tempus efficiet? Diebus & Tertijs horarijs per 24849 Lunationes diviſis (uti Regula prop. exigit), proveniet unius Lunationis Mediæ quantitas. D. 29. H. 12. 44'. 3". 11'''. 28'''' &c. Legitimum fuiſſe operationis proceſſum patet ex *num.* 25.

Ex Menſe Medio Synodico jam invento quomodo eliciatur Periodicus, docui *num.* 28. §. 2.

Ut quantitas reperiatur Menſis Anomaliſtici, prædictarum Eclipſium intervallum, nempè Dies 733805, & Tertia Hor. 3957060, divide per quantitatem Menſis Anomaliſtici, per *præcedentes numeros* inventam, quæ ſatis exacta eſt, ut non poſſit in bis mille Annis committi error in unâ integrâ Lunatione: vel utere Regulâ Hipparcheâ, quam vide *in coroll. num.* 28. Reperies intervallo prædicto contineri Anomaliæ Revolutiones 26631. Quoniam igitur Menſes Anomaliſtici 26631 efficiunt Dies 733805 & Tertia Hor. 3957060; unus Menſis Anomaliſticus quantum tempus efficiet? Diebus & Tertijs Hor. per Menſes Anom. 26631 diviſis, proveniet tempus unius Menſis Anomaliſtici. D. 27. H. 13. 18'. 34". 25''' &c.

Hanc Porrò bigam Eclipſium meritò laudat Ricciolus, cùm nullæ extent, quæ & tanto intervallo diſtent, & in Anomalijs æquè conveniant.

§. 4. Ut verò exploratior evadat Menſium Lunarium quantitas, ea erit ex pluribus Eclipſibus binarijs elicienda, ut mediam inter quantitates repertas (aliquantillo namque inter ſe illæ different) eligendo, propiùs ad veram accedatur. Inſignis fuit Riccioli hoc in negotio vel peritia, vel labor. Selegit is 40 Eclipſes, bigas nempè 20, in quibus & temporis intervallum eſſet magnum, & Anomaliæ propinquior æqualitas. Has omnes expendit methodo jam explicatâ, & earum etiam nonnullas juxta artificium *num.* 33. atque ex ijs omnibus tandem ſtatuit,

Medium	*Menſ. Synod.*	D.	29.	H.	12.	44'.	3".	10'''.		
	Menſ. Period.	D.	27.	H.	7.	43'.	4".	58'''.	59''''.	45'''''.
	Menſ. Anomal.	D.	27.	H.	13.	18'.	34".	30'''.		

§. 5. Ex menſtruis quantitatibus ſic ultimò determinatis, motus Medij dato temporis ſpatio debiti invenientur, & ipſi ultimam limam conſecuti. Nam ſi Luna Diebus 27. H. 7. 43'. 4" &c. motu Medio abſolvit totum Zodiacum, nempè Grad. 360, uno Die, Horâ, Minuto &c. quot Gradus motu Medio abſolvet? Rurſum ſi Luna diebus 27. H. 13. 18'. 34". 30'''. totum Anomaliæ circulum, abſolvat: uno Die, Horâ, Minuto, quot Anomaliæ Gradus percurret? Utrobique per Regulam propor. quæſiti Medij motus innoteſcent. Diurnum porrò motum Medium Lunæ à Sole habebis, ſi à motu Medio Diurno Lunæ auferas Diurnum Solis motum Medium, qui *l. 1. n.* 36 repertus eſt Grad. 0. 59'. 8". 19'''. 51''''. 46'''''. 20''''''.

* Diurni Medii motus Lunæ.

Medius	Grad.	13.	10'	35".	1'''.	18''''.	16'''''.		
Medius a Sole.	Grad.	12.	11'.	26".	41'''.	26''''.	29'''''.	40''''''.	
Anomalia.	Grad.	13.	3'.	53".	56'''.	30''''.			

Horarii motus Lunæ Medii.

Medius	Grad.	0.	32'.	56".	27'''.	33''''.	15'''''.	40''''''.
Medius à Sole.	Grad.	0.	30'.	28".	36'''.	43''''.	15'''''.	40''''''.
Anomalia.	Grad.	0.	32'.	39".	44'''.	51''''.	15'''''.	0''''''.

Eodem modo reperientur motus Medij unius Menſis & Anni. Quamquam & motus Menſtruus etiam ex aggregatione motus Diurni, & Annuus aggregando Menſtruum obtinebitur. Quod ſi deinde ſpecies hæ ſingulæ aggregentur additione continuâ, procreabuntur motus Medij Menſium duorum, trium &c. Annorum duorum, trium &c. atque ita tabulæ Mediorum Lunæ motuum conficiuntur.

Corollarium.

a *Propr. 5. num. 25. lib. 1.*

Ex his etiam motus Diurnus Apogei habetur, ſi à Diurno motu Medio a ſubtrahatur motus Diurnus Anomaliæ; reſiduum quippe Grad. 0. 6'. 41". 4'''. 48''''. 16''''' eſt motus Diurnus Apogei. Ex illo autem per Reg. proport. elicitur tempus unius integræ Revolutionis Apogei, quod eſt Ann. Ægypt. 8. Dierum. 311. H. 5. 36. quàm proximè.

Scholium.

Tempus Apparens Eclipſium quibus ad inveſtigandos Lunæ Menſes ſum uſus, non reduxi ad Æquale, quòd id in tanto Eclipſium intervallo minimè neceſſarium videretur. Ricciolus porrò non ſolum tempus æquavit, ſed etiam Ecliptica Plenilunia Vera reduxit ad Media, ut intervallum inter Eclipſes Medias obtine-

obtineret. Id verò labore superfluo eum fecisse, cùm Anomalia tam Solis quàm Lunæ in Eclipsi utrâque fuerint eadem, patet ex iis, quæ num. 25 demonstravimus. Et Mensis quidem Synodicus, quem ex binis Eclipsibus nos utroq; illo neglecto deduximus, ad eam quantitatem, in qua ipse tandem acquiescit, ferè accedit æqualiter. Deduxi namque ego Dies 29. H. 12. 44'. 3". 11'''. 28''''; ipse D. 29. H. 12. 44'. 3". 8'''. 47'''', quæ quantitates Menstruæ, ab eâ quam Ricciolus statuerat esse exactam, paribus quàm proximè intervallis absunt. Idem accidit in Mense Anomalistico.

NUMERUS XXXV.

De Periodis Lunisolaribus.

Periodus, sive Cyclus Lunisolaris, est spatium temporis, quo Media Novilunia ad ejusdem Diei eamdem Horam, & ejusdem Horæ idem momentum revertuntur. De his pauca dicere, quando Æquales Lunæ motus jam constitutos habemus, non erit ab instituto alienum.

Primi Cleostratus, Harpalus & Eudoxus Periodum statuerunt Annorum 8. Sed rudior ea est, quàm ut inter Cyclos reponi mereatur, cùm intra illud spatium, ☌ anticipet priores sedes per 6 Horas.

Secunda fuit Metonis, Annorum 19, longè celeberrima, & usque ad correctionem Gregorianam ab omnibus recepta. Putavit igitur Meton Annis 19 compleri Lunationes, seu Menses Synodicos 235 præcisè. Sed falsus est; complentur enim illæ paulò citiùs, & Media ☌ finem Annorum 19 prævertunt Horâ 1. 27'. 31". 55'''. Quare spatio Annorum 19, ☌☌ pristinas sedes præveniunt Horâ 1. 27'. 31". 55'''. spatio autem quatuor Cyclorum Metonicorum, hoc est Annorum 76, præveniunt Horis 5. 56'. 7". 40'''; ac tandem Annis 312½ Die fermè integro. Unde à Concilio Nyceno ad nostra tempora 4 fermè Dies versùs initia Mensium progressa sunt. Ita Clavius *in Kal.*

Tertia Calippi fuit Annorum 76, ex 4 nempè Metonicis constans. Sed neque illa ita restituit ☌☌ in sedes pristinas, quin anticipent aliquantò, quod & experientia ipsa docuit, & re ipsâ comperies, si Annos Julianos 76 per Mensem Synodicum *superiori numero* stabilitum, diviseris.

Quarta est Chaldaica Dierum 17956, sive Annorum Iul. 54. Dierum 34; quibus compleri putabantur Lunationes 669. At si Dies 17956 dividantur per Lunationes 669, prodit Lunatio una Dierum 29. H. 13$\frac{41}{223}$, nimis magna, ut ex. *num. præc.* & omnium Astronomorum observationibus patet.

Quinta est Hipparchi, qui (ut *num.* 28. indicavi) deprehendit Diebus 126009, & Horâ 1, compleri Lunationes 4267, quibus si dividantur Dies 126009. H. 1; prodit Lunatio una, seu Mensis Synodicus D. 29. H. 12. 44'. 3". 15'''. 44''''. 39'''''. 4''''''. aliquantò major eo, qui *num. præc.* stabilitus fuit. Quare nehæc quidem Periodus, licet priores longè vincat, omninò est exacta. Illius tamen etiam illa laus est, quod ferè restituat non solùm Menses Synodicos, sed etiam Anomalisticos & Periodicos, ut *num.* 28. insinuavi.

Sexta est Vietæ Annorum Iul. 3400 continens Menses Synodicos 42053, per quos divisis Annis 3400, hoc est Diebus 1241850, provenit Mensis Synodicus D. 29. H. 12. 44'. 3". 10'''. 43''''. 50'''''. 41''''''. 25'''''''. 43'''''''', excedens illum, qui *num. præc.* stabilitus est, minùs quàm uno Tertio horario. Sanè etiam Clavius fatetur hunc Cyclum ad veritatem accedere quàm proximè, & Kepplerus putat à restitutione exactâ deficere uno solùm Minuto Horario, & Secundis 19.

Hæc de Cyclis Lunisolaribus strictim insinuata: neque enim omnes, sed eos tantùm qui cæteris celebriores viderentur, hic recensendos putavi.

NUMERUS XXXVI.

Radicem Lunæ Motuum ad quamvis Epocham statuere.

Adminiculo trium Lunæ Eclipsium (ut docui *num.* 31 & 32) reperi locum Medium Lunæ, ejusque Anomaliam ad momentum unius è tribus Eclipticì Plenilunij, sed æquatum. Sunt autem hoc in opere adhibendi motus Æquales, qui per *num.* 34. ultimam limam adepti sunt. Ita motus tam Medij, quàm Anomalistici Radices habebis Primitivas, hoc est, è cælo immediatè deductas, ex quibus ad aliam quamvis Epocham, eorumdem motuum Radices constitues, ut tradidi *lib.* 1. *num.* 53. in Sole; quæ enim isthic dicta ac demonstrata, omnibus Planetis conveniunt. Radix Medij motus Lunæ à Sole, est differentia Radicum Medij motus Lunæ, & Medij motus Solis.

Ricciolus Bononiæ ad principium Anni 1644, sive ad finem Anni 1643, reperit Radicem motus Medij Lunæ Signorum 5. Grad. 20. 28. 23'. 53". Radicem verò motus Anomaliæ Sign. 11. Grad. 22. 15'. 26'. 18".

NUMERUS XXXVII.

Ad datum tempus quodcumque, Motus Lunæ Æquales supputare.

Nempè Motum Medium ab initio ♈, Anomaliam, Motum Apogei ab initio ♈, Motum Medium Lunæ à Sole.

Radices singulorum Motuum *num.* 36 repertas, reduc ad *a* Meridianum loci, in quo es, aut quem vis, eæ enim solùm conveniunt Meridiano loci, in quo facta est observatio Eclipticì Plenilunij, ad cujus Epocham Radices sunt inventæ.

a Vide num. 60. lib. 1.

Ex §. 5. *num.* 34, collige singulos motus Medios, qui debentur temporis intervallo ab Epochâ usque ad momentum datum. Si momentum datum est Epochâ posterius, singulos hosce motus Medios jam collectos, adde suis quosque Radicibus; aufer verò ab iisdem, si anterius, juxta Regulas, *lib.* 1. *num.* 54 expressas. Prodibunt singuli Motus Medij quæsiti ad datum momentum.

Demonstravi *lib.* 1. *num.* 54.

Potest etiam ex motu Apogei primùm invento, reperiri Anomalia, si hic dematur à motu Medio ab ♈. Et vicissim ex Anomaliâ reperiri motus Apogei, si hæc dematur à motu Medio ab ♈. Motum Medium Lunæ à Sole ad datum tempus ut obtineas, quære ad datum tempus motum Medium tam Lunæ, ut jam docui, quàm *b* Solis. Medium Solis aufer a Medio Lunæ: prodibit Motus Medius Lunæ à Sole ad datum temporis momentum.

b Per num. 54. lib. 1.

CAPUT IV.

Modus investigandi Verum Motum & Locum Lunæ in Syzygiis.

NUMERUS XXXVIII.

Eccentricitatem Lunæ in Syzygijs exactè invenire.

Eccentricitas Lunæ in Syzygijs (sive minima) quæ *num.* 31. & 32 reperta fuit, non est usquequaque exacta, quòd ad ejus inventionem adhibiti isthic fuerint motus Æquales debitam præcisionem nondum assecuti.

Quare ut Eccentricitatem in Syzygijs quàm accuratissimam obtineas, assume tres Eclipses à Copernico observatas, quas recensui *num.* 33. §. 5. vel ex *Thesauro Eclipsium apud Ricciolum Almag. lib.* 5. *cap.* 19. ex ijs, quæ plures nactæ sunt observatores, aliam selige Eclipsium triadem; sed motum Medium & motum Anomaliæ, qui Eclipsium intervallis debentur, collige ex Diurnis motibus ad extremam limam *num.* 34. deductis. Tum cætera deductio omnis instituatur ut *num.* 32. tradidimus. Ita prodibit Eccentricitas priore exactior. Quod si per diversas Eclipsium trinitates hunc in modum Eccentricitas sæpiùs inquiratur, atque inter repertas, si quæ sit diversitas, media eligatur, in hac merito licebit acquiescere.

Eccentricitatem Syzygialem Ricciolus invenit partium 8745, quarū Eccentrici Radius est 100000, Ptolomæus autem 8722. Prior, utpote ex motibus accuratioribus deducta, Ptolemaicæ præferenda.

NUMERUS XXXIX.

Æquationes Lunæ in Syzygijs ad singulos Anomaliæ Gradus invenire.

Præsidio Eccentricitatis jam notæ per *nu. præc.* reperiuntur illæ eodem prorsus modo, quo in Sole *num.* 40. *lib.* 1. Atque ita pariter innotescet exactè quantitas Æquationis maximæ Syzygialis, quæ *num.* 21. §. 5. innotuerat utcumque. Hanc statuo cum Ptolomæo, & Ricciolo Grad. 5. 1.

Corollarium.

Fig. 37. *l.* 1. *Maxima Æquatio Lunæ in Syzygijs* B I A, *sive* L M, *contingit ad Anomaliam* F I. *Grad.* 95. 1, *& ad Anomaliam* F I G N *Grad.* 264. 59′. *Æquatio enim maxima* L M *Graduum* 5. 1. *addita Quadranti* C L, *facit arcum* C M *Grad.* 95. 1: *cui, quia similis* a *est arcus* F I, *etiam ipse erit Grad.* 95. 1.

a *Vide defin.* 23. *nu.* 24. *lib.* 1.

NUMERUS XL.

Ad datum quodvis tempus in Syzygijs motum Lunæ Verum, sive Locum Lunæ Verum, in Zodiaco supputare.

Fig. 5. Zodiacus esto K R M X; ejus ac terræ centrum A: Eccentricus G Y F Z: ejus centrum B: linea Apogei K G B A F M: Lunæ centrum in O: locus ejus Verus in P; linea motus Medij, A N; locus Lunæ Medius in N. Igitur Media ad datum tempus Anomalia Lunæ, b est G Y O, seu K R N, motus Verus X R M P, motus Medius X R N: motus Apogei X K: Æquatio B O A, seu N P.

b *Def.* 23. *num.* 24. *lib.* 1.

Per *num.* 37. quæratur ad datum tempus motus Medius X R N, & Anomalia G Y O, seu K R N. Deinde per *num.* 39. inveniatur Æquatio N P, Anomaliæ repertæ conveniens. Hæc, si Luna sit in primo Anomaliæ semicirculo G Y F, auferatur à motu Medio jam invento; addatur verò, si Luna (ut hic contingit) sit in secundo semicirculo F Z G: proveniet motus Lunæ Verus X R M P. Quia verò hic motus Verus inventus, est ad tempus Apparens, adhibenda est correctio quæ traditur *lib.* 1. *n.* 58.

CAPUT V.

Modus investigandi Verum Motum & Locum Lunæ extra Syzygias.

Duplicem exposui *num.* 13. & 16, extra Syzygias Hypothesim Lunæ in Longitudinem. Utraque erit, ut sequentia intelligantur, recolenda. Singulis sua methodus supputandi Verum Lunæ locum, respondet. Sed, quia earum alteram meliùs salvare Phœnomena *num.* 19. ostendi, visum est ab hac principium ducere.

NUMERUS XLI.

Maximam Lunæ tum Prosthaphæresim tum Eccentricitatem, quæ nimirum ipsi competunt in Quadraturis, invenire.

§. 1. Ex Ptolomæo *Almag. lib.* 5. *cap.* 2. & 3 hunc modum colligimus. Observandum est illud temporis momentum, quo Quadraturæ in Mediam Eccentrici Longitudinem, & simul (ut vitetur a parallaxis in Longitudinem) in Gradum Zodiaci Nonagesimum ab Horizonte incidunt. Tunc enim ex loco Vero Solis notus fiet Verus locus Lunæ: locus autem ejus Medius innotescet *per num.* 37. ex Mediorum Motuum tabulis jam *num.* 34. constitutis. Quare motuum Veri & Medij differentia, hoc est ipsa Æquatio, nota fiet, quæ ad momentum illud omnium maxima est.

a *Vide dicenda lib.* 3. *num.* 38. & 39.

Fig. 41. Zodiacus est D R T Z, ejusque centrum A: Eccentricus in Quadraturis H E S V, ejusque centrum C: linea Apogei R E C A V Z; Eccentricitas maxima A C, minima A B. Per A, Zodiaci centrum ducta sit ad R Z perpendicularis T I, secans Zodiacum in T, Eccentricum verò in P & I, ducaturque recta C P. Igitur locus Apogei in Zodiaco est R; R T quadrans Zodiaci; P & I, Transitus Medij, angulus A P C, Æquatio maxima in Quadraturis. Initium Arietis sit in D.

Oporteat invenire angulum A P C, & ex eo maximam Eccentricitatem A C.

Observetur illud temporis momentum, quo locus Verus Solis, & locus Apogei Lunæ in Zodiaco coincidant, putà in R, & locus Lunæ Verus sit in Nonagesimo Eclipticæ, & distet à loco Vero Solis Grad. 90. Distantia Lunæ à Sole captatur instrumento, ut per occasionem docui *num.* 4. Modus reperiendi locum Solis traditur *lib.* 1. *num.* 55. Locus Apogei reperitur per *num.* 37. *libri hujus* 2. Modus reperiendi Lunam in Nonagesimo, independenter ab his traditur *lib.* 3. *num.* 7. Oportet igitur ut in unum momentum tres illæ conditiones conveniant; nimirum

ut

ut Luna sit in Nonagesimo; ut à Sole suprà Horizontem conspicuo, distet Grad. 90; ut Sol & Apogeum Lunæ sint in eodem puncto Zodiaci. Porrò Sole & Apogeo Lunæ concurrentibus in Zodiaci puncto R, cùm Lunæ Verus locus à Vero Solis loco R distet grad. 90, Verus utique Lunæ locus erit in Zodiaci puncto T, quo finitur Quadrans R T: at Luna ipsa erit in Eccentrici puncto P, ductâque A F parallelâ ad C P, erit locus Lunæ Medius in F, motusque ejus Medius D R F, Verus D R T. Quoniam verò ad momentum prædictum ex observatione nota sunt tam motus Solis Verus D R, quàm distantia Vera Lunæ à Sole T R, etiam motus Lunæ Verus D R T notus erit. Quare si ad idem momentum quæratur per *num.* 37 locus Lunæ Medius D R F, utriusque motus Veri nempè & Medij differentia T F nota erit. Atqui T F est ipsa Prosthaphæresis quæsita; metitur enim angulum F A T, seu F A P, hoc est *e* angulum C P A. Et quia T A I ex hyp. est perpendicularis ad lineam Apogei R Z, trigonum P A C rectangulum erit: in quo quia notus jam est angulus C P A, etiam nota fiat ratio *n* A C ad C P. Igitur Eccentricitas A C in partibus Radij Eccentrici C P nota est. Porrò Æquatio C P A sic inventa, est maxima omnium in hac Eccentrici E S V H positione per *propr.* 8. *num.* 25. lib. 1: tam ipsa verò, quàm Eccentricitas A C, cum tribus supradictis conditionibus inventæ, sunt absolutè omnium maximæ quicumque alius fuerit situs Eccentrici: quæcumque enim absque istis conditionibus observationes instituantur, semper istis minores inveniuntur.

e Per 37. 1.

n Per probl. 1. c. 3. Geom. Pract.

§. 2. Ratio autem cur captanda fuerit Luna in Nonagesimo Eclipticæ, hæc est, quod tunc *u* parallaxis Longitudinis evanescat, adeoque distantia Lunæ à Sole instrumento accepta, quæ tantùm est Apparens, seu Visa, sit quàm proximè æqualis distantiæ Veræ. Dixi quàm proximè, quia licet in Nonagesimo evanescat parallaxis Longitudinis, potest tamen aliqua esse parallaxis *t* distantiæ, licet valdè parva. Deinde quia Lunâ existente in Nonagesimo, Sol ex hyp. extra Nonagesimum est, is aliquam parallaxim subit: quæ tamen, quia (ut *x* ostendam alibi) ferè insensibilis est, distantiam Lunæ à Sole Visam à Verâ vix sensibiliter faciet differre: unde & contemni hoc loco potest. Plus officere potest refractio Solis, utpotè propè Horizontem, in hoc casu, existentis. Quare cum ea Solem altiorem Vero, adeoque & Lunæ propinquiorem justo reddat, quando distantia Apparens Lunæ à Sole erit Grad. 90 tunc Vera excedet Grad. 90 totâ quantitate refractionis, quæ est Minutorum circiter 33, & *l.* 3. *n.* 26. innotescet independenter ab omni motu Lunæ. Oportebit igitur captare momentum illud, quo distantia Apparens Solis à Lunâ est Grad. 89. 27'. tunc enim Vera erit Graduum 90.

u Lib. 3. num. 39.

t Vide lib. 13. nu. 28.

x Lib. 3. num. 20. corol. 4.

§. 3. Quia porrò etiamsi Luna sit in Nonagesimo Eclipticæ, adhuc aliqua manere potest parallaxis Distantiæ, intentum fortè non minùs exactè obtinebitur, si loco Nonagesimi Gradus Eclipticæ, observetur Luna in Meridiano conditionibus alijs manentibus, & observatio fiat propè Tropicum. Nam si in loco observationis Altitudo Poli fuerit Grad. 30, erit Altitudo Æquatoris suprà Horizontem Grad. 60, complementum *q* nempè Altitudinis Poli; cui si addatur Distantia Tropici ab Æquatore Grad. *r* 23. 36, Lunaque observationis tempore in Cancro existat, erit Luna suprà Horizontem elevata Gradibus 83. 36. Quare parallaxis ejus *f* Altitudinem, ac proinde *s* etiam in Longitudinem, vix sensibilis evadet.

q Vide dicta ad defin. 14. lib. 1.

r Per num. 21. lib. 1.

f Vide ib. & num. 19. lib. 1.

s Vide dicenda.

Itaque si parallaxi neglectâ, procedatur ut suprà, Æquatio & Eccentricitas maximæ reperientur Veris quàm proximæ: quibus deinde, ex motuum per ipsas inventorum congruentiâ vel non congruentiâ cum cælo, quæ deinde correctio sit adhibenda, innotescet.

§. 4. Æquatio *o* maxima maximarum Lunæ extra Syzygias Ptolomæo, Copernico, Lansbergio est Graduum 7. 40: Bullialdo, Vendelino, Ricciolo Grad. 7. 30. Eccentricitas maxima, est Lansbergio 13340, Ricciolo 13053, quarum Radius Eccentrici est 100000.

o Vide defin. 13. nu. 17.

Corollarium.

Æquatio maxima in □ □ fit ad P Gradum 97. 30. Nam arcus L P, similis est arcui R F, qui excedit Quadrantem R T, Æquatione F T Grad. 7. 30.

NUMERUS XLII.

Æquationem *a* *Centri maximam, & Gradum Anomaliæ, in quo contingit invenire.*

a Def. 9. num. 17.

ZOdiaci centrum esto A (præter figuram 25 in margine adscriptam, etiam sub initium juvabit inspicere *fig.* 6 & 7.); circellus *o* Anomaliæ Centri sit B D C Q, ejusque centrum P. Erit igitur A P C *a* pars lineæ Apogei Medij, & si ducantur rectæ A G, A D, &c. erunt *b* anguli C A G, C A D &c. Æquationes Centri. Liquet autem Æquationem Centri maximam ad contactus D, Q, existere. Quæruntur igitur angulus C A D, & arcus B D.

Fig. 25.

o Def. 1. num. 17.

a Per def. 5 num. 15.

b Per def. 9 ibid.

Ducatur Recta P D. Per 18. 3. angulus P D A est rectus. Unde trigonum A D P rectangulum est: in quo nota sunt latera A P, P D; nam A B Eccentricitas Lunæ minima *num.* 38 inventa, est partium 8745; quarum Radius Eccentrici est 100000; & *num.* 41. A C Eccentricitas Lunæ maxima reperta; est earumdem partium 13053: adeoque A B demptâ ab A C, remanet P C earumdem partium 4308, cujus semissis P B, seu P D, est earumdem partium 2154, quâ additâ ad A B 8745, fit A P earumdem partium 10899. Quoniam igitur in rectangulo trigono A D P nota est basis A P 10899, & latus P D, 2154, ex his *b* reperietur angulus P A D Grad. 11. 23'. 55'' $\frac{1}{7}$: igitur Æquatio Centri maxima P A D, seu C A D, est Grad. 11. 23'. 55'' $\frac{1}{7}$.

b Per Probl. 4. cap 3. Geom. pr.

Deinde subtracto angulo P A D Grad. 11. 23'. 55'' $\frac{1}{7}$ à Gradibus 90, remanet angulus A P D, adeoque arcus B D, GRAD. 78. 36'. 4'' $\frac{6}{11}$. Quare Æquatio maxima Centri fit ad Anomaliæ Gradum 78. 36'. 4''. $\frac{6}{11}$.

Denique quia eodem in trigono rectangulo nota est basis A P in partibus Radij Eccentrici, & acutus P A D jam inventus est, ex his *d* reperietur A D Eccentricitas conveniens Gradibus Anomaliæ B D in partibus ijsdem Radij Eccentric.

d Per Probl. 2. cap. 3. Geom. pr.

NUMERUS XLIII.

Ad singulos Anomaliæ Centri Gradus Eccentricitates, & Æquationes Centri invenire.

ANomaliam Centri numerari ex principio B versùs D, sic ut in superiori parte circelli procedat in consequentia Zodiaci, in inferiori in præ-

Fig. 25.

præcedentia; patet *num. 17. def. 1. & ex §. 6. num. 16.*

Anomalia Centri data sit primùm minor Gradibus 180, ex gra. BG Grad. 150, qui numerentur ex B in G, ducaturque Eccentricitas AG, Oportet invenire Eccentricitatem AG, & Æquationem Centri CAG.

Quarum partium Radius Eccentrici est 100000, earum AB, Eccentricitas minima est 8745, maxima AC 13053, ac proinde BC 4308, ejusque semissis BP, seu GP 2154. Ergo AP est 10899, & GP 2154. Quoniam igitur in triangulo APG nota sunt latera AP, PG, & angulus APG, seu BPG, propter Anomaliam datam BG, ex his *i* reperietur latus AG Eccentricitas, & angulus CAG Æquatio, quæ debentur Anomaliæ Centri datæ BG.

i Per probl. 10. cap. 3. Geo. Pract.

Hunc in modum ad singulos Anomaliæ Gradus usque ad 180, Eccentricitates, & Æquationes Centri reperiuntur, & in tabulas digeruntur.

Quod si deinde Anomalia detur BDI Gradibus 180 major, ei debentur Eccentricitas AI, & Æquatio CAI, eædem quæ ejus complemento IQB. Aufer igitur Anomaliam datam BDI à Gradibus 360, & nota erit Anomalia residua IQB, cujus Eccentricitas AI, & Æquatio CAI, jam modo dicto inventæ, etiam conveniunt Anomaliæ datæ BDI.

NUMERUS XLIV.

Cum datâ Eccentricitate Temporaneâ Æquationes Orbis ad singulos Gradus Anomaliæ Orbis Veræ invenire.

Cum quælibet Ætas Lunæ incidere possit in Gradum quemlibet Anomaliæ Orbis Veræ, & cuilibet Ætati Lunæ sua conveniat *a* Eccentricitas, quantitate ab alijs differens, quam Temporaneam *a* appellavimus, manifestum est, Eccentricitatem Temporaneam quamlibet, etiam posse incidere in quemlibet Gradum Anomaliæ Orbis Veræ.

a Per §. 4. num. 16. a Defin 10. num. 17.

Zodiacus esto KRMX, ejusque centrum A: circellus Anomaliæ Centri BDCQ; Eccentrici centrum ponatur esse in Q, adeoque Anomalia Centri sit BDCQ, & Eccentricitas Temporanea AQ: linea Apogei Veri IEQAFL. Oporteat cum Eccentricitate AQ, Æquationes Orbis ad singulos Gradus Anomaliæ *b* Orbis Veræ invenire. Id verò obtinebitur eodem prorsus modo, quo in Sole *lib. 1. num. 40.* Ponamus enim Lunam esse in O, adeoque Anomaliam Orbis Veram dari EO. Ducantur rectæ AO, QO. Quia datur Anomalia Vera EO, notus est ad centrum Q angulus EQO, ac proinde etiam OQA notus est. Quia verò *num. 43* inventa jam est Eccentricitas AQ in partibus Radij Eccentrici QO, nota erunt in triangulo AQO latera QO, AQ, unà cum angulo OQA. Ex his ergo *b* reperietur Æquatio Orbis AOQ, debita Anomaliæ Orbis Veræ EO. Ita cum datâ Eccentricitate Temporaneâ Æquationes Orbis ad Gradus singulos Anomaliæ Orbis Veræ reperiuntur, & in Tabulam digeruntur.

Fig. 7.

b Defin. 12. num. 17.

b Per probl. 10. cap. 3. Geo. Pract.

NUMERUS XLV.

Quo compendio condantur Tabulæ Æquationum Orbis.

Quia Eccentricitates Temporaneæ ad Gradus singulos Anomaliæ Centri BDC sunt diversæ, ac proinde sunt numero 180, si modo jam explicato pro singulis Eccentricitatibus velimus Æquationes ad omnes Gradus Anomaliæ Orbis Veræ (EZF) investigare, condendæ essent Æquationum Tabulæ 180, quod laboris esset propè immensi: quem ut devites, hoc compendio utere.

Cum Eccentricitate minimâ AB investiga Æquationes ad singulos Gradus Anomaliæ, ut docui *num. 39*, & confer in Tabulam. Deinde cum Eccentricitate maximâ AC, ad singulos item Anomaliæ Gradus Æquationes inquirito. Tum auferendo Æquationes minimas ab his maximis inveni excessus maximarum suprà minimas, quos ordine Graduum minimis adscribe. Aufer deinde Eccentricitatem minimam AB à singulis Eccentricitatibus Temporaneis, ut earum habeantur excessus suprà minimam, atque hos excessus reducito ad partes sexagesimas ipsius BC excessus maximæ Eccentricitatis suprà minimam; quod obtinebitur, si fiat ut BC nota *c* in partibus Radij Eccentrici, ad excessum datæ Eccentricitatis Temporaneæ suprà minimam notum in iisdem partibus, ita 60 ad alium numerum. Excessus Eccentricitatum ita reductos, solent Astronomi adscribere Æquationibus Centri, & Scrupula Proportionalia appellant.

c Per num. 41.

His peractis, oporteat ex tabulis reperire Æquationem ex. gr. ad Gradum Anomaliæ Orbis 80, debitam Eccentricitati AQ; cujus excessus QS suprà AB, sit ex. gr. 20, quarum CB est 60. Excerpe ex tabulâ Æquationem Orbis, debitam minimæ Eccentricitati AB ad Gradum Anomaliæ Orbis 80. Illi adscriptum reperies excessum Æquationis debitæ Eccentricitati maximæ AC ad eundem Anomaliæ Gradum. Esto ille Grad. 2. 26. Fiat igitur ut (CB) 60 ad (QS) 20, ita excessus maximus Æquatorius Grad. 2. 26 ad alium. Hic additus Æquationi ad Gradum Anomaliæ 80 repertæ pro Eccentricitate minimâ AB, dabit Æquationem quæsitam pro Eccentricitate AQ ad Grad. Anomaliæ 80.

NUMERUS LXVI.

Ad datum quodvis tempus extra Syzygias Motum Lunæ Verum, adeoq; Verum ejus Locum Geometricè supputare.

Zodiacus esto XKR, ejusque centrum A; circellus Anomaliæ Centri BDCQ: linea Apogei Medij KAM: Eccentricitas maxima AC, minima AB. Initium ♈ sit in X.

Fig. 6. 7.

§. 1. Ad datum tempus quærantur hi motus Æquales; motus *a* Medius Solis X *a* T; motus *b* Medius Lunæ XRN; Anomalia Media *c* KRN, vel loco ejus *d* Apogei Medij motus XK, is enim ablatus à motu Medio Lunæ, relinquit Anomaliam Mediam KRN.

a Per num. 54. lib. 1. b Per n. 37 c Per n. 37 d Per n. 37

§. 2. Aufer motum Medium Solis à motu Medio Lunæ, prodibit motus Medius, seu Longitudo Media Lunæ à Sole TN. Hæc duplicata dabit Gradus Anomaliæ Centri, quæ in *fig. 6.* sit BD, in *fig. 7.*

fig. 7. BDQ. Quare centrum Eccentrici erit in D, vel Q, & linea Apogei Veri IEDAFL, vel IEQAFL.

Ricciolus, cum Tychone ad determinandam Centri Anomaliam, mavult assumere Longitudinem Lunæ Veram à Sole: id enim cælo magis congruere. Quare si hos placuerit sequi, ad datum tempus, inquire e *motum Solis Verum, deinde motum Lunæ* f *Verum eo modo, ac si essent Syzygiæ, hunc ab illo auferendo, habebitur Longitudo Vera Lunæ à Sole, quæ duplicata dabit Anomaliam Centri.*

e *Per nu.* 55. *lib.* 1.
f *Per num.* 40.

§. 3. Inquire i Eccentricitatem AD, vel AQ, & Æquationem m Centri KAI, seu KI, quæ debetur Anomaliæ Centri, §. 2. inventæ.

i *Per num.* 43.
m *ibid.*

§. 4. Æquationem Centri KI, si Anomalia Centri fuit minor Gradibus 180, ut in *fig.* 6, adde Anomaliæ Orbis Mediæ KRN; deme autem, si Anomalia Centri fuit Gradibus 180 major, ut in *fig.* 7. prodibit Anomalia Orbis Vera IRN.

§. 5. Cum Eccentricitate AD, seu AQ superiùs inventâ, inveni n Æquationem Orbis AOD, seu AOQ, adeoque arcum Æquatorium NP.

n *Per nu.* 44.

In tabulis Æquatio Orbis sic inquiritur: Æquationi Centri KI suprà §. 3. inventæ adscripta reperies Scrupula Proportionalia: quæ excerpe & serva. Deinde cum Gradibus Anomaliæ Orbis Veræ IRN ingressus Tabulam Æquationum Orbis, ex eâ sume Æquationem Orbis debitam Anomaliæ IRN ad Eccentricitatem minimam AB, cui adscriptum reperies excessum Æquationis, qui eidem Anomaliæ debetur ad Eccentricitatem maximam AC. Tum fiat, ut 60 ad Scrupula Proportionalia, ita excessus supradictus ad aliud: hoc additum Æquationi Orbis quæ debetur Eccentricitati minimæ, dabit Æquationem Orbis quæsitam NP, quæ nimirum debita est Anomaliæ IRN cum Eccentricitate AQ, ut patet ex num. 45.

§. 6. Æquationem Orbis NP, si Anomalia IRN est major Gradibus 180, ut in *fig.* 6, adde motui Lunæ Medio XRN; deme autem, si Anomalia IRN est Gradibus 180 minor, ut in *fig.* 7, prodibit motus Lunæ Verus XRP, ad tempus datum.

§. 7. Denique motui Vero sic invento, quia repertus est ad tempus Apparens, seu inæquatum, adhibeatur correctio, quæ traditur *lib.* 1. *num.* 58.

Corollarium.

Longitudinem Lunæ Veram à Sole ad tempus datum invenies, si per *num.* 55. *lib.* 1. inquiras motum Verum Solis, & per *num.* 47 *hic*, motum Verum Lunæ: à quo aufer motum Verum Solis: restabit motus Verus Lunæ à Sole ad tempus datum.

Scholium.

Motibus Veris Lunæ tanto labore & artificio constitutis, adhuc deest aliquid extra Syzygias, & Quadraturas, ut cum cælo perfectè conveniant, atque ea est tertia Lunæ inæqualitas, de quâ egi* num. 6. *neque plura hic addo, donec certiùs de eâ constet editis in lucem observationibus Tychonis.

NUMERUS XLVII.

Modus alter Geometricè supputandi Verum Motum & Locum Lunæ extra Syzygias.

INprimis eo utitur Ricciolus, estque accommodatus ejus hypothesi, quam exposui *num.* 13. Hoc potissimùm à præcedenti differt, quod ad datum tempus ita primò inquiratur a locus Verus Lunæ, ac si tum essent Syzygiæ, adhibitâ nimirum Æquatione simplice, cujus basis est minima Eccentricitas: qui locus deinde corrigitur per Æquationem secundam, cujus basis est excessus Eccentricitatis Temporaneæ, suprà minimam. Unde modus iste Æquationem compositam, seu totalem, quâ extra Syzygias, juxta priorem methodum, locus Lunæ Medius reducebatur ad Verum, in duas partitur.

a *Per nu.* 40.

Inspiciatur schema 3. in quo Zodiacus esto DRIZ, ejusque centrum A: linea Apogei RZ, Eccentricitas minima AB, maxima AC: Situs Eccentrici in Syzygijs LFMN, centrum habentis in B: principium ♈ in D.

Fig. 3.

§. 1. Ad datum tempus quære motum Lunæ Verum DRG, per *num.* 40, ita ac si tum essent Syzygiæ: eodemque modo reperi Anomaliam Lunæ Veram RG.

§. 2. Quære item motum Verum Solis DH ad idem tempus, per *num.* 55. *lib.* 1. quem aufer à motu Vero Lunæ DRG, ut proveniat Elongatio Vera Lunæ à Sole, HG, quam duplica. Quod si Elongatio Lunæ sit tanta (ex. gr. HGT) ut duplicata excedat Grad. 180, accipe ejus ad Grad. 360 complementum (TH), idque duplica. Hæc vocabitur Anomalia Centri ad tempus datum.

§. 3. Intelligatur deinde BC differentia Eccentricitatum maximæ & minimæ, secta in partes 180, atque ita totus Anomaliæ circulus repræsentabitur rectâ BC. Numeretur igitur in rectâ BC, ex B, in O Anomalia Centri ad tempus datum §. 2. jam reperta, ex. gr. partium 160. quarum BC est 180. Erit i ergo momento dato centrum Eccentrici in O parte 160 Anomaliæ Centri, ejusque situs erit KPYQ.

i *Per* §. 3. *num.* 13.

§. 4. Quoniam verò *num.* 41. Eccentricitas maxima AC reperta, est 13053, minima AB 8745. *num.* 38, adeoque BC 4308, quarum Eccentrici Radius est 100000: si fiat ut BC 180 ad BO 160, ita BC partes Eccentrici 4308 ad aliud; prodibit BO Eccentricitas Temporanea in partibus Radij Eccentrici. Atque ita ad singulos Anomaliæ Centri Gradus, seu partes, Eccentricitas Temporanea reperietur, & in tabulam conferetur.

§. 5. Numeretur Anomalia Vera Syzygialis, superiùs §. 1. inventa RG, in Eccentrico, ab Apogeo K in P, ducanturque rectæ BP, OP. Erit angulus BPO Æquatio secunda, insistens ipsi BO excessui Eccentricitatis Temporaneæ AO, suprà minimam AB. Innotescet autem BPO sic: quoniam ob notum Anomaliæ arcum KP, notus est angulus KOP ad O centrum Eccentrici, etiam reliquus POB notus erit. In triangulo igitur POB, quia nota sunt latera PO, BO (est enim jam inventum §. 4, quot BO contineat partes, quarum PO Radius Eccentrici continet 100000), & angulus POB; ex his reperietur b angulus BPO Æquatio secunda quæsita.

b *Per probl.* 10. *cap.* 3. *Geo. Pract.*

Quia autem Eccentricitas ABO, imidere potest in quemvis

quemvis Gradum Anomaliæ Eccentrici, pro solâ B O *condenda esset una tabula Æquationum : Et quia Eccentricitates Temporaneæ diversæ sunt numero* 180, *condenda essent Æquationum tabulæ* 180. *A tanto labore te expedies per compendium expositum num.* 45, *quo utere, ut docui num.* 46. §. 5.

Quod si accidat Anomaliam Veram Syzygialem esse majorem Grad. 180, cujusmodi est ex. gr. K P Y Q, Æquatio secunda B Q O æqualis erit ei, quæ fit ad Anomaliam K P S, æqualem Q K complemento prioris K P Y Q ad Gradus 360.

§. 6. Æquatio secunda sic reperta, si addatur, vel subtrahatur motui Lunæ Vero D R G (qui §. 1. repertus est, ut solet in Syzygijs, & vocatur motus Lunæ Primò Æquatus), dabit motum Lunæ Verum, ad tempus datum extra Syzygias.

Leges porrò hujus additionis, & subtractionis sunt istæ. Si tunc Linea c Synodica est in semicirculo H E S continente Apogeum, & Luna tendat à ☌ ad ☍, Æquatio secunda est subtrahenda; addenda verò cùm tendit à ☍ ad ☌. Si Linea Synodica tunc est in altero semicirculo S V H, tunc à ☌ ad ☍ secunda Æquatio est addenda; subtrahenda verò à ☍ ad ☌. Hasce Regulas experientia docuit & comprobavit.

Fig. 5. c *Vide def.* 14. *nu.* 20.

In quo autem semicirculo Linea Synodica versetur, ita scies. Quoniam nota est Anomalia Lunæ Vera R G per §. 1, hàc subtractâ à motu Lunæ Primò Æquato D R G, nota erit D R distantia Apogei Lunaris R ab ♈: Quare cùm etiam nota sit D H distantia Loci Veri Solis ab ♈, ab hac (memor Regulæ tertiæ *num.* 54. *lib.* 1.) aufer Apogei distantiam D R: ita nota erit distantia Solis ab Apogeo Lunari; quæ si fuerit minor Gradibus 90, seu uno Quadrante, aut major Gradibus 270, hoc est tribus Quadrantibus, linea Synodica erit (*vide fig.* 5) in semicirculo H E S, continente Apogeum E; si autem major Grad. 90, aut minor 370, erit in altero S V H in *fig.* 3. distantia Solis à loco Apogei Lunæ R, est R I Z H major Grad. 270, ideoque eo casu linea Synodica est in semicirculo Apogeum continente.

Fig. 3.

CAPUT VI.

Motus Lunæ in Latitudinem investigatur.

NUMERUS XLVIII.

Definitiones ad Latitudinem Lunæ pertinentes.

Planum Eccentrici, quem motu Proprio Luna percurrit, inclinatum esse ad planum Solaris Eccentrici, sive Eclipticæ, patet ex *num.* 9. Sit igitur planum Eclipticæ A C B D : planum Eccentrici Lunæ A O B Q, secans Eclipticæ planum secundùm rectam A B, per I Mundi centrum transeuntem, unàque ejus medietas A O B, ab Eclipticâ declinet ad Polum Boreum, altera B Q A ad Polum Australem.

Fig. 1.

1. Semicirculus A O B, ab Eclipticâ ad Polum Boreum declinans, vocatur *Borealis semicirculus Latitudinis*: alter B Q A, ab Eclipticâ declinans versùs Polum Austrinum, dicitur *Australis*: Polum Boreum concipe inter figuram & te, Australem post figuram.

2. *Nodi*, sunt puncta A, B, quæ in Zodiaco designat A I B communis sectio planorum Eclipticæ, & Eccentrici Lunæ.

Vocari solent *Caput & Cauda Draconis*.

3. *Limes Boreus* est Borealis semicirculi punctum O, maximè declinans ab Eclipticâ, distans ab utroque Nodo etiam Grad. 90.

4. *Limes Austrinus*, est Q punctum semicirculi Austrini, maximè ab Eclipticâ declinans, distans ab utroque Nodo etiam Grad. 90.

5. *Nodus Boreus*, sive *Ascendens*, est (A) qui contra Signorum ordinem, numerando à Limite Boreo O, distat ab eodem Grad. 90. Per hunc Luna motu Proprio evehitur, seu transit ad semicirculum Latitudinis Borealem. Ejus signum est ☊.

6. *Nodus Austrinus*, sive *Descendens*, est (B) qui secundùm ordinem Signorum numerando à Limite Boreo O, distat ab eodem Grad. 90. Per hunc Luna descendit in semicirculum Latitudinis Australem. Ejus signum est ☋.

7. *Latitudo Lunæ*, sive *distantia Lunæ ab Eclipticâ*, est circuli maximi per Polos Eclipticæ, & Lunæ centrum transeuntis, arcus inter Lunæ centrum, & Eclipticam interceptus. *Latitudo Vera*, est distantia Veri loci Lunæ ab Eclipticâ : *Latitudo Media* est distantia loci Medij ab Eclipticâ.

8. *Latitudo Lunæ Borea*, est cùm Luna existit in semicirculo Latitudinis Boreo, *Austrina* cùm in Austrino.

9. *Latitudo Borea*, seu *Septentrionalis Ascendens* est, cùm Luna tendit à Nodo Boreo A ad Limitem Boreum O. Designantur his litteris S A.

10. *Latitudo Septentr. Descendens* est, cùm Luna tendit à Limite Boreo O, ad Nodum Austrinum B. Designatur in Ephimeridibus litteris S D.

11. *Latitudo Australis*, seu *Meridionalis Descendens*, est cùm Luna tendit à Nodo Austrino B, ad Limitem Austrinum Q. Designatur litteris M D.

12. *Latitudo Meridionalis Ascendens*, est cùm Luna tendit a Limite Austrino Q, ad Nodum Boreum A. Designari solet litteris M A.

Porrò Nodi, adeoque & Limites non consistunt eodem semper loco, sed moventur sensim sub Zodiaco in præcedentia, seu contra Signorum ordinem, ut *nu.* 10, ostensum est; quo motu fit, ut tam Nodi, quàm Limites totum Zodiacum perambulent, mutetúrque assiduè distantia Limitum, non quidem ab Eclipticâ, (nisi modicè, ut dicam *num.* 61. §. 3) sed ab Æquatore; & Lunæ Eccentricus modò totus ultra Eclipticam utrimque versùs Mundi Polos existat, modò totus existat inter Eclipticam, & Æquatorem.

Sit enim in *fig.* 26 Colurus Solstitiorum H D O E; Polus Boreus X; Austrinus Z; Æquator B C; Ecliptica D A G, principium tam ♈ quàm ♎ in A, initium ♋ in D, ♑ in G. Sit autem Limes Boreus sub F initio ♋. Austrinus ergo erit in E sub initio ♑, & Lunæ Eccentricus in F A E. Ad motum Nodorum in præcedentia, etiam Limites F, E moventur, servato semper eodem intervallo suo ab Eclipticâ. ac proindè continuè appropinquant Æquatori, donec eumdem contingant in Q, & S; & toto eo tempore Eccentricus Lunæ totus utrimque porrigitur ultra Eclipticam D A G versùs Polos X, Z. Postquam verò Limites in Q, & S Æquatorem transiêre, jam necessariò illi incipiunt, adeoque & Lunæ Eccentricus, esse inter Eclipticam D A G, & Æquatorem B A C, ita ut, cùm Boreus Limes pervenerit in P ad initium ♑, & Austrinus in I ad initium ♋, situs Eccentrici Lunæ sit P A I. Id tamen nihil impedit quò minus Boreus Limes semper declinet ab Eclipticâ D A G versùs Boream, & Austrinus versùs Austrum, cùm Boreus (etiam in P) semper sit inter Eclipticam D G,

Fig. 26.

DG, & Polum Boreum X, Austrinus semper (etiam in I) fit inter Eclipticam DG, & Polum Australem Z.

13. *Motus Lunæ in Latitudinem* numeratur in consequentia à Boreo vel Nodo, vel Limite. Non differt à motu Longitudinis quoad rem, sed penes initium numerationis; hic enim numeratur ab ♈, ille à Limite Boreo, vel à Nodo Boreo.

14. *Restitui* dicitur *Latitudo Lunæ*, & *motus in Latitudinem Verus vel Medius*, cùm in fine alicujus temporis Lunæ centrum, vel centri locus Medius, eandem habet ab eodem Nodo (A) distantiam (AE) quam in principio ejusdem temporis.

15. *Mensis Latitudinis*, est tempus, quo motus Lunæ in Latitudinem semel restituitur.

NUMERUS XLIX.

Restitutionem motus Lunæ in Latitudinem cognoscere.

§. 1. Cognoscitur Restitutio motus Lunæ in Latitudinem (primò videlicet, & independenter à tabulis Astronomicis, quas nondùm inventas esse hic supponitur) præsidio duarum Lunæ Eclipsium similium. Similes autem Lunæ Eclipses ut sint, tres conditiones requiruntur. Prima est, ut in utraque æquales Lunæ portiones fuerint obscuratæ. Secunda, ut Latitudo Lunæ in utraque Eclipsi sit vel Borea ejusdem speciei, vel Austrina ejusdem speciei; *vide defin.* 8. 9. 10. 11. *num. prec.* Tertia, ut in utraque Eclipsi æquales fuerint distantiæ Lunæ à Terrâ: quod continget, cùm in Eclipsi utraque, vel æquales fuerint Anomaliæ, vel majoris (FOGS) (*vide fig.* 37. *lib.* 1.) complementum (SF) ad totum circulum æquale fuerit Anomaliæ minori (FO). Tunc enim utriusque ab Apogeo distantiæ (FO, FS) æquales erunt, adeoque (cùm, utpote in Syzygijs, Eccentricitates quoque Eccentrici Lunaris æquales sint) etiam Lunæ à Terræ centro distantiæ æquales erunt.

Fig. 1. Si duæ igitur Eclipses ejusmodi, tribus jam dictis conditionibus præditæ, reperiantur; centrum Lunæ in utraque ab eodem Nodo, putà A, æquali intervallo in consequentia distabit; ac proinde æqualis erit in utraque Lunæ in Latitudinem motus ex. gr. AE.

§. 2. Quod autem ad hoc necessaria sit conditio non solùm prima, sed etiam secunda, facilè intelligitur.

Fig. 29. Quod verò etiam tertia requiratur sic ostendo. Sectio coni umbrosi Terræ, in loco ubi eum Luna pertransit in primâ Eclipsi, esto COGF, ejusque centrum A, & semidiameter AO: segmentum Eclipticæ CAG; segmentum Eccentrici Lunaris EI: pars Lunaris diametri intra umbram immersa DO, major semidiametro Lunæ DB. Ponamus deinde in Eclipsi secundâ, salvis conditionibus primâ, & secundâ, Lunam minùs fuisse à Terræ centro remotam, quàm in primâ. Igitur sectio coni umbrosi Terræ QSFR, in loco ubi eum Luna pertransit, jam major erit quàm prior, adeoque & semidiameter

Fig. 28. ejus AS major erit semidiametro prioris AO. Ex hypothesi autem pars Lunaris diametri intra umbram immersa KS, æqualis est priori DO. Quare si ab æqualibus DO, KS, auferantur æquales semidiametri Lunæ DB, KN, remanent BO, NS, æquales. Quare si ab inæqualibus AO, AS, auferantur æquales BO, NS, remanent BA, NA inæquales; BA videlicet minor quàm NA. Atqui BA est Latitudo Lunæ in primâ Eclipsi, NA in secundâ. Minor igitur est Latitudo Lunæ in primâ, quàm in secundâ. Igitur in *fig.* 1 Latitudo Lunæ Eclipseos primæ esto EI, sic ut centrum Lunæ sit in Eccentrici puncto I. Quoniam in Eclipsi secundâ ostensum est Latitudinem Lunæ fuisse majorem, quàm EI; necesse est Lunæ centrum longius abfuisse à Nodo A, putà in F: sic enim major esse poterit Latitudo FN. Ergo etiam motus Lunæ in Latitudinem AF, in secundâ Eclipsi major fuit, motu AE in primâ. Ergo licet duæ primæ conditiones adfuerint, si desit tertia, nempè æqualis Lunæ distantia à Terrâ, concludi non potest restitutio motus Lunæ in Latitudinem ab Eclipsi primâ in secundam. *Fig.* 1.

Quod si tres conditiones illæ simul omnes concurrant, manifestum est æquales esse in utraque Eclipsi Lunæ motus in Latitudinem, ac proinde restitutum fuisse motum Lunæ in Latitudinem ab Eclipsi primâ ad secundam.

§. 3. Reliquum est ut ostendam, quomodo discerni possint utrùm adsint conditiones prædictæ.

Quod ad primam attinet, modus observandi quantitatem diametri obscuratam tradetur independenter ab his *lib.* 4. *num.* 62.

Secunda conditio discernetur hunc in modum. Si pars obscurata Lunæ vergat ad Septemtrionem, Latitudo ejus est Austrina, si pars obscurata vergat ad Austrum, Borea est Latitudo. Si in Eclipsi Latitudo Lunæ fuerit Borea, & post Eclipsim augeatur manens Borea, tempore Eclipsis fuit Borea Latitudo Ascendens. Si in Eclipsi fuerit Latitudo Borea, & post Eclipsim decrescat manens Borea, vel primò decrescat, ac postea crescat, sed facta jam Austrina, tempore Eclipsis fuit Borea Descendens. Si Latitudo Lunæ in Eclipsi fuit Austrina, & post Eclipsim crescat manens Austrina, tempore Eclipsis fuit Latitudo Austrina Descendens. Si in Eclipsi fuerit Latitudo Austrina & post Eclipsim decrescat manens Austrina, vel primò decrescat ac postea crescat, sed facta jam Borea, tempore Eclipsis fuit Latitudo Austrina Ascendens. Quæ omnia ex inspectione figuræ 1 facilè intelliges. Ut verò discerni possit an crescat, vel decrescat Latitudo Lunæ, & an Borea tum sit, an Austrina, sic opportuit procedere. Ad momentum, quo Luna attingit Meridianum proximè post Eclipsim *a* quære locum Lunæ in Zodiaco; eique sic notum Eclipticæ punctum, quod Lunæ tunc respondet; non quidem exactè, satis tamen ad opus præsens: siquidem infrà *a* ostendam ab eo, quod respondet exactè, non abesse Minutis 7. Hujus dein Eclipticæ puncti declinationem ab Æquatore notam *b* facito; quam si Borealis est, adde, si Australis, deme Altitudini Meridianæ Æquatoris, notæ *per num.* 27. *lib.* 1: atque ita prodibit Altitudo Meridiana dicti puncti Eclipticæ. Metire deinde ad idem momentum Altitudinem *c* Lunæ scilicet Meridianam; quæ si major sit Altitudine puncti Eclipticæ, ejus excessus indicabit Latitudinem; si minor, defectus erit indicium Latitudinis Australis; si plures, diversis Diebus ejusmodi observationes instituantur, & Latitudines inventæ inter se, & cum eâ quæ fuit in Eclipsi, conferantur, an post Eclipsim eæ crescant vel decrescant, & Boreæ fiant an Austrinæ, apparebit.

a Per num. 46. *vel* 47.
a num. 65.
b Per num. 52. *lib.* 1.
c Per num. 28. *lib.* 1.

Tertia conditio discernitur *per num.* 37. *lib.* 2.

NUMERUS L.

Quomodo motus Nodorum notitia prima acquiratur.

Nodos moveri in antecedentia, unamque Periodum absolvere Annis Ægyptijs pluribus quàm 18, paucioribus quàm 19, cognosci potest vel ex rudiori observatione Eclipsium, ut ostendi *num.* 10. Accuratior verò hujus Periodi notitia obtineri potuit hunc in modum.

Altitudo Meridiana maxima, quam Luna habere potest, ea est quam habet, cùm est & in principio Cancri & in Limite Boreo, sive cùm tam Luna quàm Boreus Limes simul sunt in principio Cancri. Tunc enim Altitudo Meridiana Lunæ composita est ex Altitudine Meridiana D O (*vide fig.* 26.) puncti Solstitialis D Eclipticæ, & ex Borei Limitis F distantiâ F D, ab Eclipticâ versùs Septemtrionalem Polum X. Debuit igitur observari, quo Die Altitudo Lunæ Meridiana esset omnium maxima, tunc enim constabat Limitem Boreum in principio Cancri existere. Sed quia Nodorum revolutio nonnisi post Annos Æg. 18 absolvitur, ac proinde Limes Boreus 18 Annorum spatio tantùm semel in prin. Cancri reperitur, etiam Altitudo Meridiana omnium maxima intra annos 18 erit unica tantùm. Quare opus fuit, ut qui primi hunc motum scrutati sunt, ex varijs conjecturis utcumque collegerint, quo ferè tempore Limes Boreus in prin. Cancri futurus esset. Nunc verò, cùm tabulæ cælestium motuum jam sint confectæ, licebit illud tempus ex tabulis cognoscere, non ut tabulis fides habeatur, cùm propositum nobis sit notitiam hujus motus primam, à quâ tabularum ipsarum constructio pendet, acquirere; sed eo tantùm fine, ut tempus observationi opportunum exploremus. Eo autem, sive per tabulas, sive per alias conjecturas utcumque explorato, per plures Dies ante, & post ipsum Lunæ Altitudines Meridianæ *a* capiantur, & Dies illa quâ ea fuerit omnium maxima, notetur. Quod si eadem observatio post Annos Æg. 18 repetatur Diesque similiter in quem maxima Altitudo Meridiana Lunæ inciderit, inveniatur, tempus inter utramque maximam Altitudinem intercedens, est Periodus unius Revolutionis integræ Nodorum. Neque officit huic operi parallaxis neglectio, cùm ea in utrâque observatione æqualis, utramque eodem modo afficiat.

a per num. 28. lib. 1.

Verùm, quòd difficultatibus non modicis hæc methodus obnoxia sit, idem sequenti Num. aliâ viâ tentabitur.

NUMERUS LI.

Aliâ viâ Motum Nodorum, ejusque Periodi notitiam primam acquirere: eâdemque operâ ad Epocham, seu momentum alicujus Eclipsis distantiam Veram & Mediam Lunæ à Nodo, & Locum Nodi in Zodiaco reperire.

§. 1. Eligantur duæ Eclipses Lunares, in quarum utrâque æquales Lunæ portiones, & versùs eumdem Polum obscurentur; & quarum una contingat circa Nodum Boreum, altera circa Austrinum: quod si etiam Anomalia Lunæ in utraque æqualis sit, opus erit omni ex parte exquisitum: quamvis tamen hoc deesset, sufficiens accuratio pro primâ notitiâ poterit obtineri. Utrùm autem Eclipses hisce conditionibus sint affectæ, innotescet per ea quæ *num.* 49. §. 3. dissernimus.

Zodiacus esto X T S V, ejusque centrum A: Eccentricus Lunæ D C E Y, ejusque centrum B: linea Apogei T C B A Y V: Nodus Boreus D, Austrinus E: Eccentrici semicirculus Borealis D C E, Australis E Y D. Quoniam Lunæ pars deficiens in utrâque *a* Eclipsi eumdem Polum, putà Australem, spectat, continget utraque in Boreali semicirculo D C E, una circa Nodum *b* Boreum in F, altera circa Austrinum in G. Et quoniam Lunæ portiones in utrâque æquales obscurantur, distantiæ centri Lunæ à Nodis F D, G E, in utrâque, vel omninò æquales erunt, vel quàm proximè; præsertim si *o* Anomalia Lunæ aliqualiter saltem æqualis in utrâque extiterit. Perindè est autem quo ab invicem temporis intervallo Eclipses illæ distent. Unde faciliùs eæ reperientur, quàm si intervallum ingens requireretur. Per F & G ducantur A F I, A G P; item B F, B G, & his parallelæ A K, A Q. Erunt Eclipsium tempore Lunæ loca Vera I, P; loca Media K, Q. Ducantur insuper rectæ A D M, A E R, & A N A S, parallelæ ad B D, B E; erunt Nodorum loca Vera M, R, loca Media N, S. Principium ♈ esto in X; & Signorum ordo ab X versùs N, T.

Fig. 30. *a Hyp.* *b per Hyp.* *o Vide dicta num. 49.*

§. 2. Ad momentum Ecliptici Plenilunij facti in F, notus fiat *n* motus Lunæ Medius X K, & ad momentum Ecliptici Plenilunij facti in G, notus fiat motus Lunæ Medius X T Q. Auferatur minor à majore, & notus fiet arcus K T Q. Quia ob parallelas A K, B F, & A Q, B G, anguli G B F, Q A K æquales *m* sunt, erit arcus G C F similis *p* arcui Q T K. Quare cùm notus sit Q T K, etiam G C F notus erit: quo ablato à semicirculo E C D, summa residuorum G E, F D, erit nota. Ergo cum *per* §. 1. G E, F D æquales sint, etiam F D distantia centri Lunæ à Nodo in Eccentrico, ad momentum Ecliptici ☍ in F innotescet.

n per num. 37. *m per 27. 1.* *p per cor. 2. p. 33. 6.*

§. 3. Deinde ad idem momentum Ecliptici Plenilunij celebrati in F, nota fiat *q* Anomalia Lunæ C G Y F: quâ ablatâ à toto circulo, notus erit arcus C F. Huic adde notum jam arcum D F, & notus erit arcus C D. Sed quia ob parallelas B D, A N, æquantur *r* anguli C B D, T A N, arcus C D, T N similes *s* sunt. Ergo etiam arcus T N notus est. Rursum, quia arcus C D jam notus fuit, etiam reliquus ad circulum totum C G Z D, Nodi nempè D, Anomalia est nota. Ergo ejus Prosthaphæresis B D A, seu M N *t* etiam nota fiet. Hanc aufer à noto jam arcu T N, & notus erit arcus T M. Inquiratur deinum X T distantia *u* Apogei Lunæ ab initio ♈. Quia igitur noti sunt arcus T X, & T M; notus quoque relinquitur arcus M X distantia loci Veri in Zodiaco Nodi D ab initio ♈. Quare ad momentum Ecliptici Plenilunij facti in D, notus est Verus locus in Zodiaco Nodi D.

q per num. 37. *r per 27. 1.* *s per cor. 2. p. 33. 6.* *t per num. 39.* *u per num. 37.*

Stevinius ut locum Nodi in Zodiaco assignet, jubet à loco Vero Lunæ I numerari in præcedentia, nempe versùs X, Gradus arcus F D, jam inventi §. 2. *Verùm ita non exhibetur Nodi Verus locus M; quia arcus M I distantia loci Veri ipsius Nodi D, ab I loco Vero Lunæ, ex vi eorum quæ hic dantur, non est similis arcui F D.*

§. 4. Ut innotescat distantia tam Veri, quàm Medij loci Lunæ à loco Vero Nodi, inveniatur *x* motus Lunæ Verus X I ad momentum Ecliptici ☍ facti in F: à quo si aufers notum jam §. 3. arcum M X, restabit arcus I M distantia loci Veri Lunæ, à

x per num. 40.

Vero

Vero loco Nodi. Inquire deinde *per num.* 39. Æquationem K I debitam Anomaliæ C G Y F jam §. 3. notæ, eamque aufer à noto arcu I M, remanebit nota K M distantia loci Medij Lunæ à loco Nodi.

§. 5. Quemadmodam §. 3. ad momentum Ecliptici ☍ facti in F, inventus est Nodi Borei D, locus M in Zodiaco, ita per duas alias Eclipses ijsdem conditionibus affectas, reperiatur ad momentum unius è secundis hisce Eclipticis Plenilunijs ejusdem Nodi locus in Zodiaco. Convenit autem Ecliptica Plenilunia, ad quæ Nodi loca sunt inventa Annis 8, vel 9, vel etiam 10 distare. Ex Nodi porrò duobus locis in Zodiaco notis, scies quantùm ab uno Ecliptico ☍ ad aliud, nempè Annis ex. gr. 9, Nodus in Zodiaco sit progressus. Tum ita ratiocinabere : si Nodus confecit in Zodiaco Gradus..... Annis 9 : Gradus 360 quot Annis absolvet ? Per Regulam prop. prodibit tempus unius Revolutionis integræ Nodorum.

§. 6. Hoc igitur vel simili artificio Periodus Nodorum fuit reperta. Copernico ea est Annorum Æg. 18. Dierum 228. Hor. 3. 49'. circiter, sive Dierum 6798. Hor. 3. 49'. Kepplerus vix uno Minuto dissentit : Magino est Annorum Æg. 18. D. 223. H. 6. 12', sive Dierum 6793. Hor. 6. 12'.

§. 7. Ex Periodo Nodorum jam notâ, motum Diurnum eorumdem ita reperies. Cùm Diebus 6798. H. 3. 49'. Nodi absolvant Grad. 360 : Die uno quantum absolvent ? Per Reg. prop. reperies absolvere in præcedentia Grad. 0. 3'. 10''. 38'''. 21''''. 21'''''. 35''''''. 58''''''', ita Copernicus. Ricciolo est. Grad. 0. 3'. 10''. 38'''. 9''''. 44'''''.

Scholium.

Ut nodi locus in Zodiaco secundus reperiatur, non est opus duabus novis Eclipsibus: sufficit enim si una reperiatur nova, similis prioribus, cui è prioribus ea adjungatur, quæ ad Nodum diversum accidit.

Potuit etiam obtineri quæsitum per duas Eclipses similes, ob eodem Nodo D, utrimque æqualiter (puta in F. & Z) distantes, eademque fuisset tota deductio, ut patet rem expendenti.

NUMERUS LII.

Motus Medios Lunæ in Latitudinem invenire.

Motum Medium Lunæ in Latitudinem quoad rem non differre à motu Medio Longitudinis, seu Periodico, sed tantùm penes initium numerandi, quod in motu Periodico stabile est, in motu Latitudinis mobile, patet ex *def.* 13. *num.* 48.

§. 1. Zodiacus esto G K P N, ejusque centrum A : Eccentricus Lunæ C I D M ; ejusque centrum B : Nodi C, D : locus Nodi C Verus in Zodiaco, sit O. Statuamus Lunæ locum Medium etiam esse in O, atque inde unius Diei naturalis spatio in consequentia moveri usque in E. Erit O E motus Medius Lunæ Diurnus in Zodiaco, quem *num.* 34. §. 5. reperimus esse Grad. 13. 10'. 35''. 1'''. 18''''. 16'''''. Jam eodem tempore, quo locus Lunæ Medius in consequentia fertur ex O in E, Nodus in præcedentia retrocedit ex O in F. Unde motus Diurnus Medius Lunæ à Nodo est F E, motum Medium O E excedens motu Diurno Nodi O F. Quare si ad motum

Fig. 27.

Medium Lunæ Diurnum in Zodiaco Grad. 13. 10'. 35''. 1'''. 18''''. 16''''' adjiciatur motus Nodi Diurnus, qui *num. præced.* §. 7. repertus est. Grad. 0. 3'. 10''. 38'''. 21''''. 21'''''. 35''''''. 58''''''', proveniet motus Medius Diurnus Lunæ à Nodo. Grad. 13. 13. 45''. 39'''. 39'''', 37'''''. 35''''''. 58'''''''.

Ex motu Medio Latitudinis Diurno reperientur Medij motus Latitudinis, unius Horæ, Minuti &c. unius Mensis, Anni &c. *vide dicta num.* 34. §. 5. *& alibi sæpius.*

§. 2. Quantitas autem Mensis Latitudinis Medij ita reperietur. Statuamus rursum locum Lunæ Medium, & locum Verum Nodi in eodem puncto Zodiaci O. Eo tempore quo Lunæ locus Medius in consequentia Zodiacum totum percurrit ex O per K P N in O, etiam Nodus retrocedit ex O in præcedentia ex. gr. usque in G; ita ut quo tempore locus Medius Lunæ percurrit totum Zodiacum, Nodus percurrat arcum O G. Ergo locus Lunæ Medius; cum Nodo conjunctus in O, ad eumdem redit in G. Atqui tempus quo Lunæ locus Medius percurrit Zodiacum O K P N O, est [a] Mensis Medius Periodicus; tempus autem quo percurrit arcum O K P N G, quo nimirum à Nodo recedens in O, ad eumdem redit in G, est [b] Mensis Medius Latitudinis. Ergo Mensis Medius Periodicus excedit Mensem Medium Latitudinis eâ temporis quantitate, quâ Luna motu Medio percurrit arcum G O, quem Mensis Periodici spatio Nodus percurrit. Quare ut innotescat Mensis Latitudinis, notus reddi debet arcus G O, quod ita fiet.

a *Def.* 10. *num.* 20.
b *Def.* 14. 15. *nu.* 48.

Motus Nodi Diurnus *num.* 51. §. 8. repertus est Grad. 0. 3'. 10''. &c. Cùm ergo Nodus Die uno absolvat Grad. 0. 3'. 10''. &c. igitur uno Mense Periodico, hoc est (ut ostendi *num.* 34. §. 4) Diebus 27. H. 7. 43'. 4''. 58'''. 59''''. 45''''', Nodus quantùm absolvet ? Per Reg. prop. prodibunt Minuta , quæ uno Mense Periodico Medio Nodus percurrit, & tantus erit arcus G O.

Quare si Minuta noti jam arcus G O [c] convertantur in tempus, idque auferatur à Mense Medio Periodico Dierum 27. H. 7. 43'. 4''. 58'''. 59''''. 45'''''. remanebit Mensis Medius Latitudinis D. 27. H. 5. 5'. &c.

c *per num.* 58. *lib.* 1.

§. 3. Invento jam Latitudinis Mense Medio, scire poterimus, (id quod scitu necessarium est ad limam ultimam hisce motibus *num.* 44. adhibendam) quot Latitudinis Menses in dato temporis intervallo, etiam magno, absolvantur; si nimirum per Latitudinis Mensem hic inventum, datum intervallum temporis dividatur.

Licebit etiam uti Regulâ quam tradit Hipparchus. Is cùm Mensem Medium Latitudinis, sive artificio tam explicato, sive alio, notum reddidisset, comperit Annis Æg. 441. D. 213. H. 23. 23', sive Diebus 161, 188. H. 23. 23'. compleri exactè Latitudinis Menses 5923. Dato igitur quovis annorum intervallo ex. gr. 2000, quot Latitudinis Orbes compleantur, ita cognosces. Annis Æg. 441. D. 213. H. 23. 23' complentur Latitudinis Orbes 5923 : igitur Annis 2000 quot ? Per Reg. prop. quæsitum dabitur.

Scholium.

Motus Latitudinis hoc Numero inventi, quamvis extremam præcisionem non habeant, usu tamen, & quidem eximio, non carent; per

eos siquidem motus absolutè exactos, Num. 44. reperiemus. Præter alia quippe ad hoc requisita, duo sunt, quæ horum motuum rudiorum adminiculo obtinentur. Primum est, cùm observationes non extant, cognoscere circa quem Nodum Eclipsis præterita quæcumque acciderit, ut tradam Num. 54. §. 3. Alterum quot Latitudinis Menses in dato Eclipsium intervallo contineantur, quod per rudiores hosce motus, §. 3. hîc jam repertum est.

NUMERUS LIII.

Ad datam Epocham Radicem Æqualis motus Lunæ in Latitudinem constituere.

§. 1. NVm. 51. §. 4 duarum Eclipsium similium adminiculo jam reperimus distantiam Lunæ Mediam à Nodo, ad Epocham, seu momentum notum alicujus Ecliptici Plenilunij: quæ est Radix Primitiva motus Lunæ in Latitudinem. Inde verò ad aliam Epocham quamcumque ex. gr. Christi Epocham, Lunæ distantiam Mediam à Nodo, hoc est Radicem motus Medij, seu Æqualis in Latitudinem, reperiemus eâ methodo, quam tradidi *l. 1. num.* 53. Sed quia ad hoc opus est motu Medio Latitudinis, qui *num.* 52. limam ultimam nondum fuerat adeptus, oportebit Radices hasce non Primitivas *num. seq.* ad limam quoque revocare.

§. 2. Ad Epocham porrò alicujus Ecliptici ☍ distantiam Lunæ Mediam à Nodo, hoc est Radicem Primitivam motus in Latitudinem poterimus hoc etiam modo reperire. Certum est in eâ Eclipsi, cujus duratio longissima est in momento ipsius Ecliptici ☍, centrum Lunæ esse in Axe coni umbrosi Terræ: qui Axis cùm sit in plano Eclipticæ, etiam Lunæ centrum tum in Eclipticæ plano erit. Sed Lunæ centrum, uti semper, ita etiam tum est in plano sui Eccentrici. Cùm ergo Lunæ centrum tum sit & in plano Eclipticæ, & in plano sui Eccentrici, necesse est ut in communi utriusque sectione, in ipso videlicet Nodo, tum existat. Quare ad datum momentum, sive Epocham Ecliptici ☍, scio Lunæ centrum in ipso Nodo existere: quæ est Radix Primordialis motus Latitudinis. Insuper, quia tum locus Lunæ in Zodiaco notus est, utpote oppositus loco Solis, qui per *num.* 55. *l.* 1. innotescit, etiam tum, nimirum in momento Ecliptici hujus ☍, locus Nodi in Zodiaco notus erit: adeoque eâdem operâ habebitur ad Ecliptici ☍ Epocham Radix motus Nodorum.

Quare si Eclipsim quampiam nanciscamur, cujus duratio longissima sit, ad ejus Epocham reperta erit Radix motus Lunæ in Latitudinem, imò & motus Nodorum. Ejusmodi verò Eclipsim qui supputationis artificio hîc voluerit inquirere, manifestè circulum committet, cùm Eclipsium supputatio Epochas motuum Lunarium jam constitutas supponat. Oportebit igitur Eclipsim ejusmodi ex observatione solâ discernere. Observatum porrò est longissimas Eclipsium Lunæ durationes esse Horarum 4, quàm proximè. Ricciolus & Lansbergius eam asserunt esse Horarum 3. 57′; sed alij plerique Horarum 4, & paucorum insuper Minutorum. Inter hos media est duratio Horarum 4. Quare adhibito tubo optico præstanti, observetur momentum, quo incipit obscuratio Lunæ, & momentum quo finitur. Tempus medium inter utrumque momentum erit Eclipsis duratio: quod si 4 Horas adæquet, concludemus eam esse longissimam, ac proinde (ut demonstravi *suprà*) in momento hujus Ecliptici ☍, Lunæ centrum in ipso Nodo extiture. Momenta porrò initij ac finis Eclipsis nota facies per *num.* 45. *lib.* 5. qui à motu Lunæ non dependet.

Reinholdo Annum inchoanti à mediâ nocte ante primam Ianuarij, Radix motus Medij Latitudinis ad Epocham Christi, est Regiomonti Graduum 129. 41′. 50″. 37‴. 59⁗. 17′. 3″. à Limite Boreo.

Lansbergio inchoanti Annum à Meridie primæ Ian. eadem Radix ad Epocham Christi est Goesæ Grad. 137. 3′. 31″. à Limite Boreo.

Ricciolo Annum inchoanti à Meridie ultimæ Decembris, eadem Radix ad initium Anni 1644 Bononiæ est Grad. 192. 52′. 27″, à Nodo Boreo numerando in consequentia, vel Grad. 192. 34′. 22″.

Eidem Bononiæ distantia Nodi Borei ab initio ♈ numerando in conseq. est Grad. 170. 15′. 38″.

NUMERUS LIV.

Motuum Æqualium Lunæ in Latitudinem & Radicis eorumdem determinatio exacta.

§. 1. UT Mensis Draconitici, seu Latitudinis, atque inde Mediorum Latitudinis motuum quantitas reperiatur exacta, opus est duabus Eclipsibus ejusmodi, ut à primâ ad secundam motus Latitudinis [n] restituatur. Ita quippe fiet ut utriusque Ecliptici ☍ intervallum adæquatè in certum numerum Mensium Latitudinis dividi, seu resolvi possit. Is verò numerus *per* §. 3. *num.* 52. fiet notus. Quare si per eum dividatur Eclipsium intervallum, prodibit quantitas unius Medij Mensis Draconitici.

[n] *Vide def* 14. *nu* 48.

§. 2. Verùm non restituitur Latitudo Lunæ, nisi Eclipses illæ sint omninò similes, hoc est nisi affectæ sint tribus illis conditionibus, ex quibus *num.* 49. cognosci Restitutionem Latitudinis Lunæ demonstravi. Eclipses autem binæ ejusmodi ab omnibus antehac Astronomis frustrà conquisitæ, obtigerunt Ioanni Baptistæ Ricciolo nostro.

Prima apud Ptolomæum *lib.* 4. *cap.* 6. à Chaldæis observata est Babylone Anno 2. Mardocempadi, peractâ Die 15 Phamenoth, hoc est ante Christum Anno 720, peractâ Die 1 Sept. defecitque à Septentrione dimidium Lunaris disci. Ex duratione Eclipsis collegit Ptolemæus medium Eclipsis fuisse Alexandriæ H. 7. 40 post Merid. Unde Ricciolus colligit Eclipsis medium fuisse Bononiæ H. 5. 57′. Sed tempore [a] Æquato, H. 6. 5′.

[a] *Vide nu.* 56. *lib* 1.

Secunda à Riccioló, multisque alijs observata est Bononiæ Anno 1643. Sept. 27, sed Stylo Veteri Sept. 17. H. 7. 36. 52″, at tempore Æquato, H. 7. 29′. 25″. & tum erat summum Eclipsis: defecitque rursum dimidium Lunaris disci ad Septentrionem.

§. 3. Quamvis autem hæc à Ricciolo præclarissimè sint observata, minimè tamen ostendit quomodo absque circuli vitio demonstrari possit, tres illas conditiones necessarias *num.* 49. recensitas, binis his Eclipsibus inesse; item quot Latitudinis Menses in dato Eclipsium intervallo contineantur, quâ viâ demonstretur. Nos autem utriusque demonstrandi gratiâ, ea omnia jam præmisimus, quæ totis *Numeris* 49. 50. 51. 52. 53, sunt deducta. Ex his igitur, quæ hîc desiderantur colligemus hunc in modum.

Et

Et quidem prima conditio, æqualitas videlicet obſcurationis, ex ipſa obſervatione patet.

Pro notitiâ conditionis ſecundæ, collige temporis intervallum à momento medio Eclipſis Chaldaicæ, uſque ad Epocham motus Latitudinis *num.* 53 conſtitutam, nempè uſque ad initium Anni 1644. Inveni deinde *per num.* 52. §. 1. motum Medium Latitudinis, debitum huic temporis intervallo: quem, quia Epocha poſterior eſt Eclipſi Chaldaicâ datâ *b* aufer ab Epochæ ipſius Radice, videlicet à *c* Gradibus 192. 52'. 27". Prodibit motus *d* Medius Latitudinis, qui major erit Gradibus 180, ſive uno ſemicirculo Latitudinis (A O B), minor verò Gradibus 270, ſeu tribus Latitudinis Quadrantibus (A O B Q): ac proinde momento medio Eclipſeos antiquæ Chaldaicæ, centrum Lunæ fuit inter Nodum Auſtrinum (B), & Limitem Auſtrinum (Q), fuitque Latitudo Lunæ *e* Auſtrina Deſcendens. Quamvis autem Latitudinis motus repertus *num.* 52, ejuſque Radix ad Epocham Anni 1644, reperta *nu.* 53. quibus hic uſus ſum, non ſint uſquequaque exacta; ſunt tamen exacta plus quàm ſatis ad cognoſcendum id, quod modò quærebamus, videlicet inter quem Nodum & quem Limitem momento medio Eclipſis datæ, centrum Lunæ extiterit. Liquet etiam hic non eſſe uſui methodum, quam tradidi *num.* 49. §. 3. Quæ enim iſthic præſcripſi, præſtanda fuêre ab Antiquis illius Eclipſeos obſervatoribus; quid porrò præſtiterint illi, non extat.

b *Vide nu.* 53. *lib.* 1.
c *Vide nu. præced. Fig.* 1.
d *patet ex num.* 53. *lib.* 1.
e *per def.* 11. *nu.* 48.

Pari modo ſi tempus collegeris à momento medio Eclipſeos Ricciolanæ, uſque ad Epocham *num.* 53 conſtitutam, nempè uſque ad initium Anni 1644, atque huic temporis intervallo debitum invenias motum *o* Medium Latitudinis; eumque, quia Epocha anterior eſt *p* addas Radici Epochæ, Gradibus nempè 192. 52'. 27"; prodibit motus Medius Latitudinis ad momentum medium Eclipſis Ricciolanæ; qui rurſum oſtendet centrum Lunæ tum fuiſſe inter Nodum Auſtrinum (B) & (D) Limitem Auſtrinum, ac proinde Latitudinem Lunæ iterum fuiſſe Meridionalem Deſcendentem. Habent igitur hæ Eclipſes conditionem ſecundam, quæ requirebat, ut in utrâque Latitudo Lunæ eſſet non ſolùm versùs eumdem Polum, ſed etiam circa eumdem Nodum, hoc eſt Latitudo eſſet vel utraque Aſcendens, vel utraque Deſcendens.

1 *Vide def* 4. *nu.* 48.
o *per* §. 1. *num.* 52.
p *Vide nu.* 53. *lib.* 1.

Tertia conditio colligi potuit à Ricciolo ex ijs quæ ipſe præmiſerat; & nos quoque ex ijs quæ præmiſimus, colligemus. Per *num.* 37. *hujus libri*, inquirantur ad momenta media utriuſque Eclipſis, Anomaliæ Lunæ. Eam in primâ reperies Grad. 198. 20, in ſecundâ Grad. 195. 10. priori etiam proximè æqualem. Quare Lunæ diſtantia à Terræ centro in utrâque Eclipſi quoad ſenſum æqualis fuit. Quod ſi ad prædicta *e* Ecliptica inquirantur etiam Anomaliæ Solis, hæ quoque proximè æquales reperientur, in primo quidem Grad. 93. 10'; in ſecundo Grad. 89. 5'. 40".

Liquet igitur binas Eclipſes datas, affectas eſſe tribus illis conditionibus, quas *nu.* 49. demonſtravi neceſſarias eſſe, ut facta ſit Reſtitutio Lunæ in Latitudinem à primâ in ſecundam. Harum itaque Eclipſium adminiculo, quod erat propoſitum, nullo jam negotio obtinebimus.

§. 4. Tempus collige, quod inter utramque Eclipſim interceſſit. Ricciolus, Pleniluniјs Eclipticis Veris ad Media priùs redactis (quod tamen ſuperfluum eſſe patet ex demonſtratis *num.* 25, cùm non ſolùm Anomaliæ Lunæ in utrâque Eclipſi æquales fuerint, ſed etiam Solis) collegit Annos Iulianos 2362. D. 16. H. 6. 42'. 31", ſeu Dies 862736. H. 6. 42'. 31". Modum ſciendi quot Latitudinis Menſes hoc intervallo, & alio quolibet, contineantur, demonſtravi *num.* 52. §. 3. per quem reperies prædicto temporis intervallo ab Eclipſi primâ ad ſecundam, completos fuiſſe Latitudinis Menſes 31704 præcisè. Per quos diviſo Eclipſium intervallo Dierum 862736. H. 6. 42'. 31", prodibit Menſis Medij Latitudinis quantitas exacta Dierum 27, H. 5. 5'. 36". 0'". 55"".

§. 5. Ex quantitate Menſtruâ Latitudinis reperientur Medij Latitudinis motus exacti dato cuivis temporis ſpatio convenientes, ut docui §. 5. *num.* 34, & in Tabulas conjicientur. Motus Medius Latitudinis Diurnus ſic reperitur Grad. 13. 13'. 45". 29'". 28"". Horarius Grad. 0. 33'. 4". 24'". 7"". 55""'. 40"""'.

§. 6. Ex motu Medio Latitudinis Diurno motum Diurnum Nodorum planè exactum elicies, ſi à Diurno Latitudinis, auferas Diurnum in Zodiaco *num.* 34. §. 5. inventum. Prodibit ille Grad. 0. 3'. 10". 38'". 9"". 44""'. Quod ſi ab Horario Latitudinis auferas Horarium in Zodiaco, repertum *num.* 34. §. 5; prodibit Horarius Nodorum Grad. 0. 0'. 7". 56'". 34"". 40""'. Demonſtratio patet ex diſcurſu §. 1. *num.* 52.

MOTUS MEDIUS LUNÆ IN LATITUDINEM.

Diurnus.	Grad.	13.	13'.	45".	29'".	28"".		
Horarius.	Grad.	0.	33'.	4".	24'".	7"".	55""'.	40"""'.

MOTUS NODORUM.

Diurnus.	Grad.	0.	3'.	10".	38'".	9"".	44""'.
Horarius.	Grad.	0.	0'.	7".	56'".	34"".	40""'.

z *Vide nu.* 56. *lib.* 1.

§. 7. Denique pro conſtitutione exactâ Radicis ad Epocham datam, utere Radice Primitivâ ad momentum alicujus Eclipſis *z* repertâ, vel §. 4. *num.* 51, *vel per* §. 2. *num.* 53. Tum adminiculo Radicis Primitivæ, ſed adhibitis motibus Latitudinis hîc jam ultimò elimatis, conſtitues Radicem ad Epocham datam, ut docui *num.* 53. *lib.* 1.

NUMERUS LV.

Motum Æqualem Lunæ in Latitudinem ad datum quodlibet tempus, ſeu Diſtantiam Lunæ Mediam à Nodo Boreo, Geometricè ſupputare.

PTolomæus, Copernicus, Reinholdus in Tabulis Prutenicis, Lansbergius in ſuis motum Latitudinis numerant à Limite Boreo: Alphonſini, & Ricciolus à Nodo Boreo. Sequor poſteriores.

Radij

Radicem Epochæ *num.* 53. repertam & *num.* 54. §. 6. limatam reducito ad Meridianum loci desiderati, ut docui in Sole *lib.* 1. *num.* 60. Collige deinde *a* motum Medium Latitudinis debitum intervallo temporis ab Epochâ ad momentum datum, quem adde vel deme Radici Epochæ, ut docui *lib.* 1. *num.* 54. prodibit motus Latitudinis ad momentum datum.

a per num. 54. §. 5.

NUMERUS LVI.

Motum Verum Lunæ in Latitudinem, sive Distantiam Lunæ Veram à Nodo Boreo, in Syzygijs, ad datum tempus Geometricè supputare.

Fig. 30.

AD datum tempus inquire (CG), sive (TQ) Anomaliam Lunæ per *num.* 37, & competentem illi Prosthaphæresim (PQ) per *num.* 39. Reperi deinde per *num. præced.* motum Latitudinis Medium (MTQ) ad tempus datum; cui deme Prosthaphæresim (PQ), si Anomalia est Gradibus 180 minor: adde, si major. Prodibit motus Lunæ Verus (MTP) à Nodo Boreo ad tempus datum.

NUMERUS LVII.

Motum Verum Lunæ in Latitudinem à Nodo Boreo, extra Syzygias, ad datum tempus Geometricè supputare.

Fig. 6. 7.

QUære ad datum tempus Anomaliam Orbis Veram (IRN), ut docui *num.* 46. *usque ad* §. 5. Tum Æquationem illi competentem reperi (PN) per *num.* 44. ut tradidi *num.* 46. §. 5. Deinde per *num.* 55, inquire ad tempus datum, motum Latitudinis Medium (VRN) cui juxta communem legem Æquationum, deme Æquationem (PN) si (ut in *fig.* 7) Anomalia Orbis Vera (IRN), est Grad. 180 minor: adde, si (ut in *Fig.* 6.) est Grad. 180 major. Prodibit Lunæ in Latitudinem motus Verus (VRP) ad tempus datum extra Syzygias.

Aliter.

Inveni motum Verum Latitudinis ad datum tempus, eo modo *b* ut in Syzygijs. Tum inquire Æquationem secundam, ut docui *num.* 47. *usque ad* §. 6. hæc, motui Vero Latitudinis tanquam in Syzygijs jam reperto, addita vel subtracta juxta leges *nu.* 47. §. 6. præscriptas, dabit motum Latitudinis Verum ad tempus datum extra Syzygias.

b per num. 56.

NUMERUS LVIII.

Locum Nodi Borei in Zodiaco per motum Latitudinis invenire ad tempus datum.

Fig. 6. 7.

PEr *num.* 55. inveni motum Latitudinis Medium (VRN), & per *num.* 37 motum Medium (XKRN) ab initiô ♈, utrobique ad tempus datum. Aufer motum Medium Latitudinis (VRN) à motu Medio Lunæ (XKRN). Residuum (XKV) erit distantia Nodi (V) ab initio ♈. In subtractione memento Regulæ tertiæ *num.* 54. *lib.* 1.

NUMERUS LIX.

Nodi Borei locum in Zodiaco independenter à Latitudinis motu invenire ad tempus datum.

NUmero 53 *sub finem* distantia Nodi Borei ab initio ♈ secundùm ordinem Signorum, reperta est Graduum 170. 15'. 38", ad initium Anni 1644. Inde numera temporis intervallum usque ad momentum datum, & motum Nodi ei competentem collige per §. 6. *num.* 54, quem Radici Epochæ Grad. 170. 15'. 38", subtrahe, si momentum datum Epochâ posterius est; adde, si anterius. Prodibit distantia Nodi ab initio ♈ ad tempus datum, secundùm ordinem Signorum numerata.

NOTA. Quia motus Nodorum fit in præcedentia, hîc oportuit subtrahere, cùm in alijs Medijs motibus factis in consequentia, debuisset addi; & vicissim hîc addi, cùm subtrahi in alijs; Ratio patet ex dictis *num.* 54. *lib.* 1.

NUMERUS LX.

Ad datum tempus, sive in Syzygijs, sive extra, Verum motum Lunæ in Latitudinem, aliter quàm Num. 56 & 57, invenire.

Fig. 6. 7.

AD datum tempus inveni Lunæ distantiam Veram (XRP) ab initio ♈ per *num.* 40. 46. 47. Deinde ad idem tempus per *num. præced.* reperi distantiam Nodi (XKV) ab initio ♈. Hanc aufer ab illâ, remanebit motus Lunæ Verus in Latitudinem (VRP) ad tempus datum. In subtractione memor esto Regulæ tertiæ *num.* 54. *l.* 1. quæ, ut isthic monui, in omni subtractione ejusmodi versari ob oculos debet.

CAPUT VII.

Inquiritur Latitudo Lunæ.

NUMERUS LXI.

Maximam Lunæ Latitudinem, sive distantiam Limitum ab Eclipticâ, in Syzygijs & Quadraturis invenire.

LAtitudo maxima Lunæ est arcus Maximi circuli per Polos Eclipticæ & Limites transeuntis, inter Lunæ Eccentricum & Eclipticam interceptus.

Omissis aliorum modis, in quibus videtur circulus committi, dum ijs utuntur, quæ à Latitudine ipsâ dependent, proponam eum, quo usus est Ptolomæus.

§. 1. Imprimis locus observationis is esse debet, ut Luna aliquando sit in vertice observatoris, aut propè eum: sic enim parallaxis Altitudinis erit, vel nulla, vel modica. Talis fuit Alexandria, ubi Æquatoris Altitudo suprà Horizontem, Ptolomæo teste, est Graduum 59. 2'; cui si addes distantiam Tropici ab Æquatore Grad. 23. *a* 30', & maximam Latitudinem Lunæ Grad. (ut mox patebit) 5, poterit aliquando Lunæ Altitudo Meridiana esse Grad. 87. in quâ Altitudine parallaxis minor est 4 Minutis.

a per num. 31. *lib.* 1.

Supposito igitur loco ad observandum idoneo, inquire

Fig. 26.

inquire quo Meridiano tempore Luna futura sit, & in principio Cancri, & in Limite Boreo, seu distans à Nodo Boreo Gradibus 90: tunc enim Altitudo Lunæ maxima erit quæ esse potest (putà O F), & Latitudo Lunæ etiam erit maxima, & Meridianus transibit per Polos Eclipticæ, utrobique nimirum Nodo existente in ipso margine Horizontis; ac proinde arcus Meridiani F D, maximam Lunæ Latitudinem metietur.

Porrò quando Luna in Meridie futura sit in principio ♋, sciri potest *ex num.* 40. 46. 47; quando in Limite Boreo, *ex num.* 56. 57. Invento igitur ejusmodi Meridie in ipso ejus momento, metire Altitudinem Lunæ (F O): à quâ subtrahe Altitudinem Æquatoris (B O) (quæ innotescit per *num.* 27. *lib.*1) & (B D) distantiam maximam Eclipticæ ab Æquatore, quæ est *b* Grad. 23. 30'. Relinquetur (F D) Latitudo Lunæ maxima.

b Per nu. 31. lib.1.

§. 2. Hoc modo Ptolomæus reperit Latitudinem maximam Lunæ Grad. 5 quàm proximè, eamque putavit esse stabilem; quem Astronomi omnes usque ad Tychonem secuti, tam in Syzygijs quàm extra eas, Latitudinem Lunæ maximam 5 Graduum assumpsêre, quòd eam adverterent Eclipsium Phœnomenis proximè satisfacere.

§. 3. At Tycho *tomo* 1. *Progymn. pag.* 126. *& in Epist. pag.* 140 affirmat ex suis diligentissimis observationibus evidenter sibi constare maximam Lunæ Latitudinem, sive Distantiam Limitum ab Eclipticâ in Syzygijs esse Grad. 5 quamproximè, videlicet Grad. 4. 58'. 30": at in Quadris Grad. 5. 17'. 30". Ex quo consequens est Latitudinem maximam Lunæ à Syzygijs ad Quadraturas continuè augeri, à Quadraturis autem ad Syzygias continuè minui. Tychoni subscribunt Rothmanus, Longomontanus, Maginus, Mulerius, Bullialdus. Lansbergius in Quadris eam statuit Grad. 5. 16', nullâ peculiari observatione id confirmans, qui ideo à Ricciolo reprehenditur. Ricciolus verò sibi nondum ait rem satis liquere, quem vide *pag.* 220. *in Scholijs, num.* 3. Tychoni omnium diligentissimo observatori, dum ejus observationes prodeant, fides adhibenda. Bullialdus sanè inconsultum censet à Tychonicâ Latitudine recedere, quòd eam in applicationibus Lunæ ad Fixas ad amussim cum cælo consentire sæpiùs sit expertus.

NUMERUS LXII.

Extra Syzygias, & Quadraturas ad datum tempus distantiam Limitum ab Eclipticâ, reperire.

Quære ad datum tempus Longitudinem Lunæ *a* Veram à Sole: ex quà cognosces an Luna tendat à Syzygijs ad Quadraturas, an contra à Quadraturis ad Syzygias. Cùm enim motus Lunæ à Sole est minor Grad. 90, Luna tendit à ☌ ad □ primam: cùm est major Grad. 90; sed minor 180, tendit à □ primâ ad ☍: cùm est, major Grad. 180, sed minor 270, tendit à ☍ ad □ secundam: cùm est major Grad. 270, tendit à □ sec. ad ☌.

a Per corol. nu. 46.

Si ergo Luna tendat à ☌ ad □, ita ratiocinare: cùm Luna distat à Sole Grad. 90, ac proinde cùm est in □, distantia Limitis ab Eclipticâ excedit 5. Gradus, distantiam nempe Limitis in ☌ Minutis 17. 30": igitur cùm à Sole distat ex. gr. Gradibus 30, distantia Limitis quot Minutis excedet Gradus 5? Per Reg. proport. excessum quæsitum reperies: quem si ad Gradus 5 adjeceris, proveniet distantia Limitis ab Eclipticâ ad tempus datum. Hunc in modum ad singulos Gradus Longitudinis Lunæ à Sole, usque ad □ primam, distantia Limitis reperitur, & in Tabulam conjicitur. Neque opus est calculum pro reliquis Quadrantibus iterare. Nam à □ primâ ad ☍ eodem ordine, sed inverso, distantia Limitis decrescit, quo ante creverat; & à ☍ ad □ sec. eodem ordine rursum crescit; & à □ sec. ad ☌ eodem ordine, sed inverso, iterum decrescit.

a Per num. 31. lib.1.

Fig. 26.

NUMERUS LXIII.

Ad datum tempus in Syzygijs & Quadris Veram Latitudinem Lunæ Geometricè supputare.

§. 1. AD datum tempus inquire *a* Veram Lunæ distantiam à Nodo Boreo; quæ si sit Grad. 0. vel 180, nulla erit Latitudo Lunæ: si Grad. 90 aut 270. Luna erit in Limite alterutro, ac proinde ejus Latitudo eadem, quæ Limitum: unde, quando tunc esset ☌ aut ☍, Latitudo Lunæ foret *b* Grad. 5, quando □ □, Grad. 5. 17'. 16".

a Per nu. 56. 57. vel 60.

b Per nu. 61.

Quod si ex cognitâ Lunæ distantiâ à Nodo Boreo cognoveris eam esse extra Nodos, & Limites, inde pariter cognosces ejus à Nodo proximo distantiam; ut si repereris distare Lunam à Nodo Boreo Grad. 120, Nodus Lunæ proximus erit Austrinus, & si à Grad. 180 subducas Grad. 120, remanent Grad. 60 pro distantiâ Lunæ à Nodo Austrino sibi proximo.

Quadrans igitur Eclipticæ esto A B. Quadrans Orbitæ Lunaris A C: A, Nodus alteruter: C, Limes alteruter: Distantia Lunæ à Nodo sibi proximo A, ad datum tempus jam inventa sit A E: arcus C B, E D partes sint circulorum Maximorum per Polum Eclipticæ, & Limitem C, ac locum Lunæ E transeuntium. Igitur in triangulo Sphærico angulus E D A *c* rectus est: angulus autem A, quia eum metitur *n* arcus B C distantia Limitis C ab Eclipticâ, est Grad. *d* 5 in Syzygijs, in Quadris autem Grad. 5. 17'. 30", & latus A E notum est, ex. gr. Grad. 73. Ergo notum fiet *e* latus E D, quæ est Latitudo *o* Lunæ ad datum tempus in Syzygijs, vel Quadris.

Fig. 31.

c Patebit ex nu. 68.

n Patebit ex nu. 66. defin. 4. & nu. 70.

d Per n. 61

e Per trigonom. sph. prob. 2.

o Defin. 7. num. 48.

§. 2. Hunc in modum ad singulos Gradus distantiæ Lunaris à Nodo proximo, usque ad 90, reperiuntur Latitudines Lunæ, & in Tabulam conferuntur pro Syzygijs: quando nimirum angulus A est Grad. 5. Deinde similis construitur Tabella pro Quadris, cùm nempè angulus A est Grad. 5. 17'. 30". Non solent tamen Latitudines in Quadraturis describi integræ, sed tantùm earum excessus suprà Latitudines in Syzygijs, ob causam *num. seq.* indicandam.

NUMERUS LXIV.

Ad datum tempus extra Syzygias & Quadraturas, Veram Latitudinem Lunæ Geometricè supputare.

§. 1. PEt *num.* 62 inquire distantiam Limitum ab Eclipticâ ad tempus datum, quæ ex. gr. sit Grad. 5. 10'. Reperi deinde ad idem tempus distan-

a Per num. 56 57 vel 60.

distantiam *a* Lunæ Veram à Nodo Boreo: ex quâ si cognoveris Lunam versari in Limite alterutro, ejus Latitudo eadem erit, quæ Limitum, ex. gr. Grad. 5. 10'. Quod si Luna extra Limites existat, cognosces, ut *num. præced.* ejus distantiam à Nodo proximo.

Fig. 31.

Esto igitur Quadrans Eclipticæ AB; Quadrans Orbitæ Lunaris AC; distantia nota Lunæ à Nodo sibi proximo AE: Arcus CB distantia Limitis ab Ecliptica inventus ad tempus datum ex. gr. Grad. 5. 10'; arcus ED, distantia Lunæ ab Ecliptica, seu Latitudo Lunæ.

n Ut patebit ex num. 68.
o Patebit ex defin. 4. nu. 66, & ex nu. 70.
b Per trigon. sph. probl. 2.

Quoniam in triangulo sphærico ADE rectangulo *n* ad D, notus est angulus A, Grad. 5, 10', quia eum metitur *o* arcus CB Grad. 5. 10': & Latus AE notum est, distantia nempè Lunæ à Nodo A, etiam latus *b* ED innotescet, Latitudo Lunæ quæsita ad datum tempus. Atque hunc in modum Latitudines Lunæ ad singulos Gradus distantiæ Lunaris à Nodo usque ad 90 reperientur.

§. 2. At si Tabulas Latitudinum Lunæ extra Syzygias & Quadraturas volueris condere, nisi compendio utaris, infiniti laboris negotium suscipies. Cùm enim (ut dictum §. 3. *num.* 61) CB distantia Limitis ab Ecliptica, adeoque & angulus sphæricus A, per Quadrantem integrum à Syzygijs ad Quadras, & contra assiduè varietur, 90 Latitudinum Tabulæ essent conficiendæ. Sed hunc laborem effugies, si unam construxeris Latitudinum Tabulam pro Syzygijs, & Latitudinibus singulis hisce Syzygialibus adscripseris excessus Latitudinum in Quadris, ut *num. præc.* §. 2 docui: sic enim Latitudinem Lunæ ad datum tempus, nullâ aliâ Tabulâ constructâ, reperies hunc in modum.

Fig. 32.

Inquire ad datum tempus per *num.* 63, Latitudinem Lunæ (QD), ac si tum essent Syzygiæ, quæ sit ex. gr. Grad. 3. 8'. Ad idem tempus inquire Latitudinem Lunæ (OD) ac si tum esset in □, quæ sit ex. gr. Grad. 3. 15'. Aufer priorem à posteriori, ut habeas excessum (OQ) nempè Min. 7. de quo sume partem competentem (EQ) Scrupulis proportionalibus, debitis tempori dato, eamque adde Latitudini Syzygiali (QD). Inquirendo autem Latitudinem Lunæ, ac si tum essent Syzygiæ, ipsa etiam proportionalia Scrupula reperies. Ut enim per *num.* 63 reperias Latitudinem Lunæ Syzygialem ad datum tempus, opus est reperire distantiam Lunæ Veram *c* à Nodo; ad quod rursum opus est distantiâ Lunæ *d* Verâ ab initio ♈: ad hanc demum requiritur, ut nota *i* fiat Eccentricitas (omnia ad tempus datum); cum quâ reperiuntur Scrupula proportionalia quæsita, ut tradidi *num.* 45. Ea porrò sint ex. gr. 40. Horum adminiculo pars competens de excessu accipietur; si fiat, ut 60 Scrupula ad Scrup. 40, ita excessus (OQ) Minutorum (7) suprà inventus ad Aliud: provenient quippe Grad. 0. 4'. 40". ex. gr. quæ addita Latitudini Syzygiali (QD: Grad. 3. 8, suprà inventæ) dabunt Latitudinem quæsitam (ED) ad tempus datum extra Syzygias & Quadraturas (Grad. 3. 12'. 40".)

c Per num. 56 57.
d Quæ nota fit per n. 46
i Per num. 43.

Fig. 32.

Aliter sumetur pars competens de excessu hunc in modum: Si ad datum tempus Latitudo Lunæ (OD) in □ □, hoc est distantis à Sole Grad. 90, Latitudinem (QD) in ☌ vel ☍ excedat arcu OQ ex. gr. Minut. 7; igitur Latitudo Lunæ extra □□ & ☌ ☍, distantis à Sole ex. gr. Gradibus 40, Latitudinem eandem QD in ☌ vel ☍, quot Minutis excedet? per Reg. proport. fiat ut distantia à Sole Grad. 90 ad distantiam à Sole Grad. 40, ita excessus OQ, Num. 7, ad Aliud: prodibunt pro EQ, minuta 3$\frac{1}{9}$, quæ addita Latitudini Lunæ QD in ☌ aut ☍, dabit Latitudinem Lunæ ED extra ☌ ☍ & □□, ad tempus datum.

NUMERUS LXV.

Reductio Lunæ ad Eclipticam.

Fig. 31.

QUadrans Eclipticæ esto AB. Intelligitur circulus Maximus per Polos Eclipticæ, & B ductus, cujus pars sit arcus CB inter Eclipticam, & Lunæ Orbitam AC interceptus. Erit etiam arcus Eccentrici, seu Orbitæ Lunaris AC, Quadrans circuli, & angulus ad B *a* rectus erit: arcus autem BA erit Lunæ à Nodo A distantia in Ecliptica; quæ, si Luna existat in Limite C, æqualis est ipsi CA distantiæ Lunæ à Nodo A in suâ Orbitâ, ac proinde nullâ Reductione est opus.

a Vide num. 68.

Existat deinde Luna extra Limites, putà in E. Per Polos Eclipticæ, & per E ducatur circulus Maximus, cujus pars sit arcus ED. Erit *b* angulus EDA rectus, & DA est distantia Lunæ à Nodo in Ecliptica, eaque jam inæqualis est arcui EA distantiæ Lunæ à Nodo in suo Eccentrico. Invenire igitur arcum DA, est Lunam reducere ad Eclipticam. Invenitur autem sic. Per *num.* 61. & 62 nota fit ad tempus, quo Luna est in E, distantia Limitis C ab Ecliptica, arcus nempè CB; & per *num.* 56. *vel* 57, nota fit EA distantia Lunæ à Nodo A. Jam quia arcus AB est Grad. 90. & rectus ad CB erit Nodus A *d* Polus Maximi circuli, cujus BC pars est; ac proinde *m* arcus BC metitur angulum A. Cùm ergo notus sit arcus BC, etiam angulus A notus erit. Quoniam igitur in triangulo rectangulo sphærico EDA, notus est angulus A, & latus EA, etiam *o* DA innotescet; quod petebatur.

b Vide 4
d Per num. 70.
m Per defin 4. n. 66.
o Per trigonom. sphær. probl. 14.

Porrò quia jam scitur quantùm D locus Lunæ in Ecliptica distet à Nodo A; si per *num.* 58. *vel* 59, nota fiat distantia Nodi ab initio ♈, etiam distantia loci reducti Lunæ D, ab initio ♈, nota erit.

Hunc in modum fiunt Tabulæ Reductionis Lunæ ad Eclipticam. Sed quoniam angulus A (ut *numero* 61. § 3 exposuimus) continuè variatur, extruendæ essent ad singulas mutationes anguli Tabulæ singulæ. Verùm tanto labore non est opus: sufficiet enim unica ad hujus anguli quantitatem Mediam, videlicet Grad. 5. 8'; cùm maxima sit Grad. 5. 17'. 16", minima Grad. 5. Ejusmodi Tabulam exhibuit Tycho *tomo* 1. *Progym. pag.* 118: quâ utendo nunquam committes errorem dimidio Minuto majorem.

Maxima porrò Reductio Lunæ ad Eclipticam est ferè 7 Minutorum.

CAPUT VIII.

De inventione Lunæ in Gradu Eclipticæ Nonagesimo, atque eâ occasione rudimenta quædam doctrinæ Sphæricæ.

NUMERUS LXVI.

Definitiones Sphæricorum Triangulorum.

QUando frequens deinceps futurus est Sphæricorum Triangulorum usus, imò sub finem capitis præcedentis jam esse cœpit, eorum prima quædam rudi-

rudimenta, ne aliundè peti debeant, quàm brevissimè recensebo.

1. *Angulus Sphaericus* est, quem in Sphaerae superficie efficiunt duo arcus circulorum Maximorum sese mutuò secantes.

Fig. 33. 2. *Angulus Sphaericus rectus* est quem in superficie Sphaerae efficiunt duo arcus, duorum Maximorum circulorum (ABGC, ADGE) se mutuò perpendiculariter intersecantium. Tales sunt anguli BGD, BGE, item CGD, CGE.

3. *Triangulum Sphaericum* est quod tribus arcubus circulorum Maximorum in Sphaerae superficie continetur.

4. *Arcus Maximi circuli Sphaericum angulum metiens*, ille est qui ex anguli vertice tanquam Polo inter crura anguli describitur.

Quid sit Polus circuli, expositum est defin. 3. num. 1. lib. 1.

Angulus esto Sphaericus DBG, ex cujus vertice ut polo descriptus sit arcus DG. Arcus DG metitur angulum DBG.

NUMERUS LXVII.

Maximi in Sphaera circuli ADGE polus esto B; centrum A. Recta BA à polo ad centrum ducta, circulo ADGE perpendicularis est.

Fig. 33. a Per def. 3. l. 1. nu. 1. b Per 8. 1. c Per def. 4. 1. d per 4. 11.

Ducantur BD, BG, BE. Triangula DBA, EBA sibi mutuo aequilatera sunt: nam AD, AE aequales sunt, quia ex A centro; BD, *a* BE, quia ex polo B ad circumferentiam DGE; AB verò communis. Ergo anguli BAD, BAE *b* aequales sunt. Ergo *c* recti. Pari modo ostendam aequari angulos BAE, BAG. Quare cùm BAE ostensus sit rectus, etiam BAG rectus erit. Ergo cùm BA ad rectas AG, AE, sese in plano circuli ADGE secantes, perpendicularis sit, etiam circulo ipsi *d* ADGE perpendicularis erit.

NUMERUS LXVIII.

Fig. 33. *Maximus in Sphaera circulus sit ADGE, per cujus polum B alius transeat Maximus circulus ABGC. Hic ad illum perpendicularis est, & angulus BGD rectus.*

Ex polo B ad A Sphaerae centrum ducatur recta BA. Haec ad circulum ADGE perpendicularis est per *praeced.* Circulus autem ABGC ex hyp. transit per B, &, quia Maximus etiam per centrum A: adeoque per rectam BA: quae quia perpendicularis est ad circulum ADGE, etiam circulus ABGC *d* circulo ADGE perpendicularis est, adeoque per *defin.* 3. angulus BGD rectus est. d per 18. 11.

NUMERUS LXIX.

Angulum Sphaericum Rectum metitur Quadrans circuli.

Fig. 34. Duo Maximi Sphaerae circuli ABDC, ABGC se mutuò perpendiculariter secent, constituentes angulum rectum Sphaericum DBG. Deinde ex B anguli vertice, tanquam polo, describatur circulus Maximus ADGE. Arcus igitur DG *a* metitur Sphaericum angulum rectum DBG. a per defin. 4. num. 66.

Dico arcum DG esse Quadrantem. Ducatur enim ex B polo circuli ADGE ad centrum A, recta BA. Haec ad *l* circulum ADGE perpendicularis est. Quare etiam circulus ADBEC per eam transiens ad *m* ADGE circulum, rectus est, & è converso ADGE ad ADBEC perpendicularis, seu *n* rectus est. Sed ex hyp. etiam ACGB ad eundem ADBEC rectus est. Ergo etiam GA communis *o* sectio circulorum ADGE, ACGB, ad circulum ADBEC recta est. Ergo etiam GA ad rectam AD in circulo ADBEC ductam, recta, seu perpendicularis est, & angulus DAG rectus. Arcus igitur DG metiens angulum Sphaericum rectum DBG, est Grad. 90. seu Quadrans circuli. l per num. 67. m per 18. 11. n per 19. 11. o per def. 3. 11.

NUMERUS LXX.

Circuli Maximi ADGEK, AGBKC, ad invicem recti, per mutuos transeunt polos.

Nam ab intersectione G numerentur in B Gradus 90. Dico B esse polum circuli ADGEK. Rursum ex G in E numerentur Gradus 90: dico E esse polum circuli AGBKC. Fig. 34.

Ex Sphaerae centro A in circulo ADGEK, ducatur quavis AF, itemque AB, AE; junganturque BF, BE. Quoniam AB ex centro A bifecat semicirculum GBC (est enim *a* GB Grad. 90); liquet AB esse rectam diametro GAK, quae est circulorum AGBKC, AGDKE sectio communis. Quia ergo BA est in plano AGBKC ad AGDKE *b* recto, & simul recta est ad communem eorum sectionem GAK, liquet BA esse *c* rectam plano AGDKE. Ergo BA recta *d* est ad lineas AF, AE, & anguli BAF, BAE recti, adeoque *e* aequales sunt. Quare cùm etiam AF, AB, aequales sint AE, AB; etiam BF, BE *f* aequales erunt. Eodem modo quavis rectae ex B ad peripheriam DGEK ductae, ostenduntur aequales. Ergo B polus est *g* circuli AGDNE. a Constr. b per hyp. c ex defin. 4. 11. d per defin. 3. 11. f per 4. 1. g per defin. 3. lib. 1.

Non aliter demonstrabitur E polus esse circuli AGBKC. Liquet ergo propositum.

NUMERUS LXXI.

Circulo Sphaerae Maximo AFKEI, insistat medietas alterius circuli Maximi AFDE. Polus circuli AFKEI sit B; Polus circuli AFDE, sit C. Dico circulum Maximum AGDI, qui transit per polos priorum, B, & C, secare bifariam in D semicirculum FDE.

AD A centrum ducantur rectae CA, BA, DA. Secent autem circuli AFDE, AGBI, circulum AFKGEI secundùm diametros FE, GI. Quia B est polus circuli AFKGEI, erit BA recta ad circulum *a* AFKGEI, ac proinde etiam *b* ad lineam in eo positam FA. Similiter, quia C est polus circuli AFDE, erit CA *c* recta ad circulum AFDE, adeoque, & ad lineam in eo ductam FA. Quoniam igitur FA ad duas BA, CA, se secantes in A, recta est, etiam ad circulum AGDI recta *e* erit. Ergo per *defin.* 3. 11. FA etiam ad DA recta est. Quoniam igitur DA, in centrum A rectò, seu perpendiculariter incidit, liquet semiperipheriam FDE secari bifariam in D. Quod erat demonstr. Fig. 35. a per num. 67. b per defin. 3. 11. c per num. 67. e per 4. 11.

 Ce-

Fig. 32. a Vide num. 68. b Ibidem. d Per num. 70. m Per defin. 4. n. 66. o Per trigonom. sphaer. probl. 14.

Corollarium.

Hinc patet 1. si K G E I sit Horizon, B Zenith, F D E semicirculus Ecliptica dato momento supra Horizontem existens, C Polus Ecliptica: semicirculum Ecliptica F D E secari bifariam in D a Verticali G C B I, per C Polum Ecliptica transeunti.

Nam cùm Zenith B, sit Polus Horizontis K G E I, Verticalis G C B I, hic transit per Polos B, & C, utriusq; circuli K G E I, & G D E.

Patet 2. Semicirculum Ecliptica numquam bisecari à Meridiano, nisi cùm Polus Ecliptica in Meridiano existit, quod singulis diebus bis accidit.

Patet 3. Æquatoris semicirculum à Meridiano semper bisecari, quia Meridianus transit semper per Polum Æquatoris, & per Polum Horizontis, nempè per Zenith.

NUMERUS LXXII.

Tempus, quo Luna in Zodiaci Gradu ab Horizonte Nonagesimo existet, invenire.

Observatio instituenda est cùm Luna est cornuta, vel saltem bisecta, aut gibbosa. Cùm enim Sol semper sit in Eclipticâ, & portio Lunæ à Sole illustrata, semper directè Solem spectet, liquet cornua Lunæ, quando etiam ipsa est in Eclipticâ, terminari exactè in circulo per Eclipticæ Polos transeunte. Quod si Luna extra Eclipticam vagetur, quoniam nunquam ab eâ recedit ultra a Gradus 5. 17'. 30'', cornua ejus terminantur in dicto circulo quàm proximè, citra errorem videlicet sensu perceptibilem.

a *per* § 3. *num* 61.

Hoc posito, suspende filum perpendiculare, & observa quando extremitates utriusque cornu, oculo post filum posito, exactè ipsi filo respondeant: eo quippè momento Luna in Gradu Eclipticæ Nonagesimo existit.

Cùm enim filum sit in plano tui Verticalis, patet etiam extremitates cornuum, filo exactè respondentes, adeoque & Lunæ centrum, esse in ejusdem Verticalis plano. Sed, per ea quæ jam præmisi, extremitates cornuum semper sunt in plano circuli, per Polos Eclipticæ transeuntis. Ergo eo momento Verticalis tuus, in quo tunc sunt extremitates cornuum, transit per Polos Eclipticæ. Atqui per *Coroll.* 1. *num.* 71. Verticalis transiens per Polum Eclipticæ, ejus semicirculum conspicuum bisecat, hoc est transit per Gradum ejus ab Horizonte Nonagesimum. Ergo extremitates cornuum, adeoque & centrum Lunæ, eo momento etiam sunt in Eclipticæ Gradu Nonagesimo.

FINIS LIBRI SECUNDI.

ASTRO-

ASTRONOMIÆ

LIBER TERTIUS

DE SOLIS ET LUNÆ

PARALLAXI, REFRACTIONE, DIAMETRO

APPARENTE, DISTANTIA, MAGNITUDINE.

CAPUT PRIMUM.

Dimensio Temporum Vibrationibus Perpendiculi.

CUm in rebus Astronomicis maximi momenti sit accurata temporis dimensio, ejusque usus sub ipsum statim hujus libri exordium in determinandâ Parallaxium quantitate futurus sit, de eâ breviter hoc Capite agendum erit. Mensuræ porrò temporis variæ sunt exeogitatæ, sed una omnium tutissima exactissimaque ea est, quæ per vibrationes Perpendiculi obtinetur.

NUMERUS PRIMUS.

Perpendiculi ad mensuram temporis accommodati forma, & definitiones eò pertinentes.

Fig. 1.
a *Ricciol. Alm. l. 2. cap. 22.*

AD regulam a seu trabeculam ferream FT, affixæ sint duæ laminæ ferreæ FG, HK, mutuò parallelæ, quibus cylindrus CI, axe utrimque prominente insertus sit, regulæ ferreæ FT æquidistans, sic ut circumagi expeditè & æquabiliter possit, quod quidem præcipuâ curâ & industriâ curandum est. Fiat deinde sphærula metallica, quæ à catenulâ ex minutis annulis (quos schema non benè exprimit) confectâ, suspendatur ex O. Sphærula non excedat duas libras, ne axis cylindri nimium atteratur, & catenula tres saltem pedes sit longa, alias nimis citò motus cessabit. His ita præparatis, tota machina trabi alicui cochleis vel aliter affigatur, sic ut laminæ FG, HK sint ad Horizontem rectæ, adeoque cylindrus CI ad eumdem parallelus. Sphærula deinde, tensâ semper catenulâ, in plano Verticalis per OA ad laminas FG, HK parallelè ducti, attollatur ex A in L. Ubi eam sibi permiseris, ultrà citràque perpendicularem OA, per circuli arcum movebitur ex L in M, ex M in N, ex N in P, ex P in Q, ex Q in R donec extincto motu in OA conquiescat.

Perpendiculum vocabimus, totam machinulam jam expositam: quam desumpsi ex Riccioli *Almag. lib. 2. cap. 20.*

Vibratio Perpendiculi est motus ejus ex L in M, vel ex M in N, & sic deinceps.

Vibratio composita, est motus ex L in M, & ex M in N.

Altitudo Perpendiculi, est AO, distantia centri Sphærulæ ab axe cylindri CI.

NUMERUS II.

Ejusdem Perpendiculi vibrationes æquè multæ, æqualibus temporibus absolvuntur.

UT si primò numeres 1000 vibrationes, ac deinde mille alias; mille primæ absolventur eodem tempore, quo mille secundæ. Illustrem hanc motus proprietatem primus deprehendit Galilæus, post quem multi suis eam scriptis illustrarunt.

Probatio rudior fit Clepsidris & Horologijs; sed longè accuratissima ea est, quam tradit Ricciolus *lib. 2. Almag. cap. 22. prop. 1*, & est hujusmodi.

Fig. 2.
a *per num. 26 lib. 1.*

Inventâ lineâ a Meridianâ CB, suspende filare Perpendiculum DA, Meridianam tangens in A. Tum ex eodem puncto D, tende filum DC usque ad Meridianam in C. Triangulum filare ADC, exhibebit planum Meridiani. Oculo deinde posito post filum DA, expecta donec centrum alicujus stellæ ab utroque filo tegatur; eo enim momento stella in Meridiano o existet. Tum socius illicò Perpendiculum moveat, & numerare vibrationes incipiat, donec alia stella eodem modo fuerit observata Meridianum attigisse. Quod si nocte sequenti inter transitus stellarum earumdem per Meridianum, vibrationes ejusdem Perpendiculi numerentur, idem erit vibrationum numerus, qui nocte præcedenti, aut certè differentia contemptibilis erit. Atqui tempus à transitu unius stellæ usque ad transitum alterius, utrâque nocte, imò aliâ quacumque, est exactissimè æquale. Ergo vibrationes ejusdem Perpendiculi æquè multæ, æquali tempore fuerunt absolutæ.

o *Mechanicen accuratam hujus filaris trianguli vide apud Ricciolum l. 5. c. 15. Prob. 8.*

Ita Ricciolus tribus noctibus facto experimento, à transitu Spicæ, ad transitum Arcturi cum duobus exercitatissimis socijs, bis numeravit vibrationes 3212, & semel 3214, calculis post tricenas quasque vibrationes in vas injectis.

Curandum porrò est diligenter, I. ut Perpendiculi motus semper maneat in eodem Verticali; II. ut si languidior evaserit motus, & brevi videatur extinguendus, Sphærula ex. gr. descendens ex R, ubi ferè Perpendicularem attigerit, trahatur in L, & statim dimittatur: ita vibrationes per multas Horas poterunt continuari. III. Ut arcus AL, per quem Sphærula attollitur, numquam excedat Gradus 90, imò consultum est non excedat 45.

Corollarium.

Hinc *patêt I. vibrationes ejusdem Perpendiculi, singulas singulis æquitemporaneas esse.*

Patet II. tempora vibrationibus proportionalia esse, & è converso: ut si tempore, A, peracta sint vibrationes X, & tempore B, vibrationes Z: Tempus A est ad tempus B, ut vibrationes X ad vibrationes Z: & contra.

A.	X.	3400
B.	Z	8700

NUMERUS III.

Dati Perpendiculi, quot vibrationes, unâ Horâ, vel aliâ quâvis Diei Naturalis parte notâ absolvantur, invenire.

Dicet quispiam fortasse, qui statum difficultatis non perceperit: numera vibrationes ab alicujus Horæ principio usque ad finem ejus, & scies quot vibrationes uni Horæ conveniant. At quomodo numerabis vibrationes Horæ spatio peractas, nisi priùs exhibere tempus noveris, quod esse Horam, hoc est vigesimamquartam Diei Naturalis partem certò scias. Id quidem adhuc latet, atque independenter à vibrationibus Perpendiculi debet innotescere.

Quæsitum igitur hoc artificio obtinebitur. Eligantur duæ stellæ in Æquatore positæ. Ejusmodi sunt, ea quæ est in pectore Antinoi, & ea, quæ in flexu manus dextræ Aquarij. Prima est in Æquatore præcisè; altera limbulo suo Æquatorem tangit, quæ differentia nullius in hoc negotio momenti est. Has porrò stellas esse in Æquatore comperies, si Altitudines a earum Meridianas inquiras: has enim comperies cum Altitudine Æquatoris (quæ per *Num.* 27. *l.* 1. innotescit) convenire. Æquator jam esto ABC, Horizon XZ, Meridianus ZDX. Ope Filaris Trianguli observa (ut docui *Num. præced.*) quo momento centrum primæ stellæ A, attingit Meridianum ZDX, eodemque incipe vibrationes Perpendiculi numerare, usque dum centrum stellæ secundæ B eumdem Meridianum attingat. Ita scies quot vibrationes sint factæ eo temporis spatio, quo arcus Æquatoris AB, Meridianum pertransijt. Tempus verò illud sic fiet notum. Metire quàm accuratissimè utriusque stellæ distantiam, quæ est ipse Æquatoris arcus ab ijs interceptus AB: is porrò est Grad. 36. 25'. ferè. Poterit eum Lector, cùm voluerit, accuratiùs explorare. Ego eam quantitatem exempli gratiâ assumo. Æquatoris autem Gradus 36. 25'. Meridianum b pertranseunt Horis 2. 23'. 53". 57'''. 30''''. Cùm ergo sciam quot vibrationes sint peractæ interim dum arcus AB Meridianum pertransijt, etiam scio totidem peractas esse Horis 2. 23'. 53". 57''' 30'''' : sit autem ex. gr. vibrationum ille numerus 7500.

a per num. 51. lib. 1. Fig. 4.

b per num. 51. lib. 1.

Hunc in modum postquam semel reperimus, quot vibrationes aliquâ Diei Naturalis parte absolvantur, inde quot cuivis alteri vibrationes conveniant, nullo jam negotio reperiemus. Velim scire quot ejusdem Perpendiculi vibrationes debeantur uni Horæ. Per *corol. 2. præc. Num.* ut Horæ 2. 23'. 53". 57'''. 30''''. ad Horam. 1, ita vibrationes ex. gr. 7500 debitæ (ut jam inventum est) Horis 2. 23' &c. sunt ad vibrationes debitas Horæ 1. Quare per Reg. Prop. quot vibrationes uni Horæ conveniant, innotescet.

Scholium.

I. Ricciolus usus est duabus stellis ex. gr. F, G, extra Æquatorem positis. Ut ergo notum faceret tempus à transitu stellæ G per Meridianum, ad transitum alterius F per eundem, reperire debuit earum Ascensiones Rectas, O A, O B, ut ex Ascensionum differentiâ notus evaderet arcus Æquatoris A B. Verùm Ascensionibus Rectis inveniendis se Parallaxis & Refractio immiscent, quas hîc declinare consultum est.

II. Erit fortasse cui videbitur nimis quàm operosum Perpendiculi vibrationes per duas Horas, & ampliùs numerare. Sed is profectò non intelligit, quanta non modò peritia, sed etiam patientia & labor in Astronomicis observationibus requiratur. Ricciolus sanè, ut ipse refert lib. 2. Alm. cap. 20. prop. 11. *Socijs qui sibi mutuò succederent, novem adhibitis, numerationem vibrationum ab uno Meridie in alium per Horas 24 continuavit. Rursum à transitu Caudæ Leonis per Meridianum usque alterum transitum, ejusdem numerationem per alias 24 Horas produxit. Atque his nondum acquiescens, duas stellas, ut hîc paulò ante commemoravi, adhibuit.*

III. Præter eas stellas quas assumpsi suprà, apta sunt ad eumdem finem etiam sequentes quatuor, Æquatorem proximè stringentes.

In nodo Hydræ Occidentalior, ad gradum Æquatoris 138. 20'. *ferè.*

Ibidem alia Orientalior, ad grad. Æq. 140. *ferè.*

In alâ sinistra ♍ *ad grad. Æq.* 186. *ferè.*

Informis magn. 6. ad grad. Æq. 204, *ferè.*

NUMERUS IV.

Datum quodvis temporis spatium notum facere.

Hoc est, quanta Diei Naturalis pars sit, nimirum quot contineat Horas, Minuta &c. invenire.

Tempus datum sit ex. gr. duratio alicujus Eclipsis. Numera quot vibrationes Perpendiculi dato tempore absolvantur, quæ sint ex. gr. 9000. Deinde per *Num. præc.* inventi, quot ejusdem Perpendiculi vibrationes unâ Horâ peragantur; quæ sint ex. gr. 3000. Cùm ergo 3000 vibrationum efficiant Horam unam: 9000 vibrationum quot Horas efficient? per Reg. Prop. proveniunt Horæ 3, quibus datum tempus, quod erat ignotum, æquale est.

Demonstratio patet ex *Coroll. 2. Num. 2.*

NUMERUS V.

Exhibere tempus æquale uni Horæ, vel cuivis parti Diei Naturalis.

Numera tot vibrationes Perpendiculi, quot per *Num. 3.* comperisti unâ Horâ absolvi, tempus

pus quo numerus ille vibrationum peractus est, uni Horæ æquatur.

Si tempus desideras ex. gr. æquale Horis 2. 25'; fiat ut Hora 1. ad Horas 2. 25', ita numerus vibrationum unius Horæ, qui notus est per *Num.* 3. ad quartum prop. Erit hoc numerus vibrationum conveniens Horis 2. 25', per *Cor.* 2. *Num.* 2. Numera igitur tot vibrationes Perpendiculi quot compereris Horis 2. 25'. convenire. Tempus quo ille vibrationum numerus fuerit peractus, erit Horis 2. 25' æquale.

NUMERUS VI.

Temporis momentum exactissimè notum facere.

Notum fit momentum, seu Instans temporis, quando scitur, inter ipsum & Meridiem quot Horæ, Minuta Prima, Secunda &c. intercedant. Instans porrò Meridiei innotescit per *Num.* 26. *l.* 1.

Numera vibrationes Perpendiculi à puncto Meridiei præcedentis, si ea est momento quæsito vicinior, usque ad momentum quæsitum; vel à momento quæsito, usque ad punctum Meridiei sequentis, si ea momento quæsito vicinior est. Deinde fit ut numerus vibrationum unius Horæ notus per *Num.* 3, ad numerum vibrationum hic inventum; sic Hora una ad quartum proportionale: prodibunt Horæ, Minuta prima, Secunda &c. quibus momentum quæsitum distat à Meridie sibi proximâ.

Demonstratio patet ex *Coroll.* 2. *Num.* 2.

CAPUT II.

Modus inveniendi Parallaxim Lunæ in circulo Altitudinis, & ex eâ distantiam Lunæ à centro Terræ.

NUMERUS VII.

De triplici loco Solis & Lunæ.

Hactenus duplicem Solis & Lunæ locum, videlicet Medium & Verum, cognovimus: deinceps etiam, cum Parallaxes attingemus, tertius sese offeret Apparens nempè, seu Visus. Luminarium igitur locus est triplex, Medius, Verus, Apparens seu Visus; atque inde triplex Luminarium tam Longitudo, quàm Latitudo consurgit, Media, Vera, Apparens, seu Visa. Res ex schemate lucem accipiet.

Fig. 3. Zodiacus esto G H Q, ejusque & Terræ centrum A; Terra A B Q; Zenith H; linea Verticalis H A; centrum Eccentrici in D; Eccentricus R N C S; in cujus puncto C, existat centrum Lunæ vel Solis: per C transeat Verticalis, seu circulus Altitudinis A P C K M. Ex D centro Eccentrici per C centrum Luminaris ducatur D C, eique parallela A G, ex centro Terræ usque ad Zodiacum: ducantur item ab Oculo in B, & Terræ centro A, per Luminaris centrum C, rectæ B C F, A C L, occurrentes Zodiaco in F, & L.

Locus Medius Luminaris est G; Verus L; Apparens, seu Visus F: & si principium Arietis sit in X, Longitudo Media est X G; Vera X L; Apparens, seu Visa X F. Æquatio, seu Prosthaphæresis est D C A, Parallaxis Altitudinis B C A.

Cæterum ut faciliùs intelligantur sequentia, recolenda sunt quæ de Parallaxi Altitudinis exposui l. 2. *num.* 18 & 19.

Scholium.

Astronomi extra negotium Parallaxis, motum Verum & Apparentem promiscuè accipiunt, quod à nobis etiam in præcedentibus subinde factum.

NUMERUS VIII.

Lunæ Declinationem Veram ab Æquatore ad datum tempus invenire.

Colurus Solstitiorum sit C A G; Æquator C F, ejusque Polus A; Ecliptica F G, ejusque Polus B; principia ♋ & ♑ in F, & G; princ. ♈ in D. Igitur D F est primus Quadrans Eclipticæ. Locus Lunæ Verus esto in O, per quem à Polo Eclipticæ B ducatur circulus Maximus B O P, Eclipticæ occurrens in P. Erit O P Latitudo Vera Lunæ, & P locus Verus Lunæ ad Eclipticam *a* reductus. Præterea per O, ex A Polo Æquatoris ducatur circulus Maximus A O N, occurrens Æquatori in N, erit O N Declinatio Lunæ, quam oportet invenire.

Fig. 5.

a Vide num. 65. *lib.* 2.

Inveni *c* ad tempus datum locum Lunæ Verum, eumque reduc *d* ad Eclipticam: ita nota erit Lunæ ab initio ♈ distantia D P in Ecliptica, quæ primò sit minor 90 Gradibus, seu Quadrante primo D F. Hanc igitur si demas à Grad. 90, remanent Gradus arcus F P, qui quòd ejus Polus sit ipse anguli vertex B, metietur angulum *e* F B P, seu A B O, qui proinde notus est. Reperi deinde ad datum tempus Latitudinem *o* Lunæ, nempè O P: quâ detractâ ex Quadrante B O P, notus remanet arcus O B. Est verò etiam notus arcus *p* A B distantia Polorum, nempè Grad. 23. 30. In triangulo igitur Sphærico A B O, *r* quia nota sunt duo latera A B, O B, & angulus ad B, etiam latus reliquum *r* A O innotescet. Hoc si demas ex Quadrante A O N, nota remanebit O N, Lunæ Declinatio Vera ad tempus datum.

c per num. 46. 47. *lib.* 2.
d per num. 65 *lib.* 2.
e per def. 4 *num.* 66. *lib.* 2.
o per num. 63. *vel* 64. *lib.* 2.
p per corol. nu. 31. *l.* 1.
r Trig. sph. Prob. 16.

Si Longitudo Lunæ sit major Grad. 90, adeoque pertineat ad Quadrantem secundum, tunc angulum ad B, metitur excessus Longitudinis Lunæ suprà Grad. 90. Ex quibus etiam patet quì idem angulus in Quadrante 3 & 4 innotescat.

Hunc in modum construuntur Tabulæ Declinationum Lunæ ad singulos Longitudinis & Latitudinis Gradus, quas vide apud Maginum, & Regiomontanum.

NUMERUS IX.

Parallaxeos Lunæ in Altitudinis circulo prima investigatio. *Fig.* 6. 7.

Altitudinem Lunæ Meridianam (F B) quàm accuratissimè *a* observa sed liberam à Refractione, cùm ea nempè non est minor Gradibus 38, aut 40; & momentum temporis quo Lunæ centrum Meridianum pertransijt, fac notum, numerando vibrationes Perpendiculi, ut docui *num.* 6. vel adhibendo praxes, quæ traduntur *num.* 36 *hujus l. ejusque corollario, aut num.* 45. *l.* 5, à Lunâ penitus independentes. Ad hoc deinde temporis momentum prius conversum ex Apparenti in Æquale, seu Medium per *num.* 58. §. 1. *l.* 1. inveni *b* Declinationem Lunæ Veram C D. Tum metire Altitudinem Æquatoris D B: quæ dimensio quomodo independenter ab omni

a per num. 28. *lib.* 1.
b per num. 8.

omni Parallaxi & Refractione peragatur, patet ex *num.* 27. *l.* 1. Altitudini Æquatoris D B si addas vel demas Declinationem Lunæ Veram C D, prodibit Vera Altitudo Meridiana Lunæ C B; quæ semper major c est Altitudine Apparenti, seu Visâ. Quare si Altitudinem Visam F B observatione cognitam subduxeris à Verâ C B, nota fiet utriusque differentia C F, quæ est d ipsa Lunæ Parallaxis quæsita.

c *per theor.* 8. *num.* 19. *lib.* 1.
d *per theor.* 2 *num.* 19. *lib.* 1.

Hunc in modum absque ullo vitioso circulo, in quo à magnis etiam Astronomis vehementer est laboratum, Parallaxium investigatio o prima peragitur. Summi ea momenti est, neque potest expediri, nisi Solis & Lunæ motibus jam constitutis, id quod totis primo & secundo libro independenter à Parallaxi & Refractione præstitimus.

o *Patebit hoc clarius ex nu.* 20.

NUMERUS X.

Luna Apogea & Perigea in □ & ☍ tum distantia à centro Terræ, tum Parallaxis Horizontalis statuitur.

§. 1. Inquire tempus, quo Luna sit Perigæa vel Apogea, & simul Quadrata vel Plena. Primum colliges ex *num.* 37. *l.* 2. si nimirum Anomaliam reperias vel nullam, vel Graduum 180. Secundum ex 46, vel 47. *l.* 2. Tum eadem agendo omnia quæ *num. præced.* ad momentum illud Parallaxim Lunæ reperies, ex quâ deinde distantiam Lunæ à centro Terræ, & Parallaxim Horizontalem elices hunc in modum.

Fig. 8. Verticalis, seu Altitudinis circulus esto A G F E; Semidiameter Terræ A B, centrum A; linea Verticalis F B A; Horizon Verus A E, Visus B D. Parallaxis Lunæ, seu Apogeæ, seu Perigeæ, in □ vel ☍ jam inventa sit per *Num. præc.* adeoque angulus B C A; Parallaxis Horizontalis illi respondens A D B. Oporteat distantiam Lunæ A C, seu A D, & Hor. Parallaxim A D B invenire. Quoniam ad inveniendam Parallaxim C, nota priùs reddi debuit a Altitudo Lunæ Vera C E, etiam C F distantia Vera Lunæ à vertice, adeoque & angulus F A C innotescet. Quia igitur in triangulo A C B, noti sunt anguli C & B A C, etiam proportio laterum A C, A B, nota b fiet; scieturque proinde, quot Semidiametros Terræ A B, distantia C A Lunæ Apogeæ vel Perigeæ, in □ vel ☍, contineat.

a *Patet ex num. præc.*
b *per prob.* 7. *cap.* 3. *Geom. prac.*

Deinde, quia in triangulo rectangulo D B A nota est ratio laterum A B, A D, (est enim A D distantia Lunæ à centro jam inventa), etiam angulus c D. ipsa nimirum Parallaxis Horizon. quæsita innotescet.

c *per probl* 4. *cap.* 3. *Geo. Pract.*

§. 2. Hæc inventionis theoria est. Nunc quantitates ipsas, prout b à Ricciolo pluribus observationibus sunt inventæ, subjicio. Quem unum ex omnibus, ob insignem ejus in observando peritiam hic visum est adhibere.

b *Alm. l.* 4. *pag.* 225.

I. In ☍ propè Apogeum, cùm nempè esset Anomalia Lunæ Æquata Grad. 4. 24'. 6", inventa est distantia Lunæ à Terræ centro, Semidiametrorum Terræ. 64. 13'. -/r 64¼: Parallaxis Horizontalis Min. 53. 44".

II. In ☍, propè Apogeum, cùm Anomalia Æquata esset Signorum 11. Grad. 25. 14'. 27", inventa est distantia à centro, Semid. 64. 20': Parallaxis Horiz. Min. 53. 35'. Sed in ipso Apogeo distantia fuit Semid. 64. 15': Parallaxis Hor. Min. 53'. 30".

III. In ☍, propè Perigeum, cùm Anomalia Æquata esset Sign. 5. Grad. 24. 46', inventa est distantia Semid. 54. Parallaxis Horiz. Min. 63. 43'. Sed in ipso Perigeo distantia fuit Semid. 53. 45': Parallaxis Hor. Min. 63'. 55".

IV. In □, proximè ad Apogeum, cùm nempè Anomalia Æquata esset Grad. 1. 45'. 3", inventa est Lunæ à centro Terræ distantia Semid. Terræ 66. 40.

V. In □, propè Apogeum, cùm Anomalia Æquata esset Sign. 11. Grad. 23. 16'. 30", inventa est distantia Lunæ, Semid. Terræ 66. 42': Parall. Horiz. Min. 51'. 32".

VI. In □, propè Perigeum, cùm Anomalia Æquata esset Sign. 5. Grad. 26. 56', inventa est distantia Lunæ à centro. Semid. Terræ 51. 30.

§. 3. Ex his aliisque observationibus prædictas distantias & Parallaxes Horizontales definit Ricciolus, ut sequitur.

In □□

LUNÆ APOG. { *Distantia, Semid. Terr.* 66. 42'. *vel,* 40. / *Parallaxis Horiz. Min.* 51'. 32".

LUNÆ PERIG. { *Distantia, Semid. Terr.* 51. 26. / *Parallaxis Horiz. Min.* 66'. 56".

In ☌ ☍

LUNÆ APOG. { *Distantia Semid. Terr.* 64. 15'. / *Parallaxis Horiz. Min.* 53'. 30".

LUNÆ PERIG. { *Distantia, Semid. Terr.* 53. 45'. / *Parallaxis Horiz. Min.* 63'. 55".

Ricciolum sequor donec ipse, vel alius certiora protulerit.

Corollarium.

1. Lunæ Apogeæ in ☍ distantia à centro Terræ est omnium absolutè maxima; Perigeæ autem in □, absolutè minima.

Nam si ejus Parallaxes quovis tempore artificio jam explicato inquiras, semper majores invenies, quàm in casu primo; & semper minores, quàm in casu secundo. Ergo, &c.

2. Errarunt igitur Ptolomeus, Albategnius, Alfraganus, qui maximam Lunæ distantiam statuerunt in ☌ ☍, minimam in □ □. Erravit etiam Keplerus, qui maximam & minimam statuit in ☌ ☍. Quare Ptolomæi, & Kepleri hypotheses cælo dissentiunt, ac proinde rejiciendæ. Illæ autem, quas *num.* 13, & 16. *lib.* 2 exposui, hinc egregiè confirmantur.

o *Vide theo.* 6. *num.* 19 *lib.* 1.

NUMERUS XI.

Certum est Lunæ, & Solis à Terrâ distantiam variari.

Duplex assertionis demonstratio est:

Prima ex evidenti inæqualitate Parallaxium. Parallaxis enim Lunæ in □ uno tempore inventa, excedit Parallaxim in □ alio tempore inventam multis Minutis, ut patet ex §. 3. *num. præced.* & ex *Tabellâ num. seq.* quæ tanta inæqualitas tantâ observationum constantiâ, & subtilitate deprehensa, neque in errorem instrumentorum, neque in aliam causam ullam refundi potest, quàm variam Lunæ distantiam à Terrâ.

Secunda ex evidenter sensibili inæqualitate Diametrorum Apparentium, etiam tum, cùm Luna extra Refractionis aleam est. In □ enim Diameter Lunæ Apparens (ut ostendam *num.* 33) modò est Minutorum 27', modò 39'. 6".

Itaque

Itaque variam Lunæ à Terrâ distantiam esse, verum est non solùm hypotheticè, eo nimirum sensu, quod eâ positâ satisfiat Phœnomenis, sed etiam absolutè. Distantiam Solis variari hypotheticè quidem verum est, eâ enim positâ, Phœnomena salvantur; absolutè tamen non perinde ex causis jam dictis constat, quia Parallaxis Solis non admodum sensibilis est; & varietas Diametri Apparentis non est tanta, quin à pertinaciter adversante possit in Refractionem utcunque refundi.

Nihilominus distantiam Solis à Terrâ verè immutari etiam certum est ex alio capite, nimirum ex ratione opticâ, quam adfert Scheinerus; qui in Rosâ Ursinâ affirmat, ad maculas Solares distinctè repræsentandas, telescopium in Solstitio Hyberno debere palmo ferè uno longiùs deduci, quàm in Æstivo. Ex quo consequens necessariò est Solem distare longiùs à Terrâ, Æstate, quàm Hyeme.

NUMERUS XII.

Distantia Lunæ à centro Terræ numquam minor est Terræ Semidiametris 50, numquam major Semidiametris Terræ 72.

Ex *theoremate 6 num. 19. lib. 1.* constat distantiam Astri à Terrâ eò majorem esse quò Parallaxis est minor; eò minorem, quò Parallaxis major est. Nullus autem è posterioribus Astronomis (nam veterum hoc in negotio errores ex manifestâ cum phœnomenis dissonantiâ omnibus sunt manifesti) Parallaxim Lunæ Horizontalem unquam observavit tantam, ut Minuta 68 æquaret, neque tam exilem unquam, ut Minuta 48, non excederet, uti ex Tabellâ subjectâ apparet:

Authores	*Maxima Paral. Horiz.*	*Minima Paral. Horiz.*
Alphonsus	63'. 17".	53'. 19'
Copernicus	65. 48.	50. 19
Tycho.	65. 36.	56. 44
Longomontanus	66. 9	57. 15
Lansbergius	67. 6	51. 12
Bullialdus	63. 43	53. 30
Kepplerus	63. 41	55. 26
Argolus	65. 36	56. 45
Vendelinus	61. 18	53. 46
Ricciolus.	66. 56	51. 32

Fig. 8. Esto jam Terræ centrum A; Oculus in superficie Terræ in B, Verticalis AGFE; linea Verticalis FBA; Horizon Verus AE, Visus BD; Lunæ centrum in D; Parallaxis Horizontalis ADB, quæ ponatur esse Min. 68', seu Grad. 1. 8', major videlicet quàm sit ab illustribus Astronomis unquam observata. In triangulo rectangulo ABD, recta AB est Sinus anguli D Grad. 1. 8', adeoque ex Sinuum Canone AB est 1977, quarum AD Sinus Totus est 100000. Sed 1977 continetur in 100000: plus quàm vicibus 50. Ergo AD distantia Lunæ à centro Terræ continet Semidiametros Terræ AB plus quàm 50. Atqui hæc distantia deducta est ex Parallaxi Grad. 1. 8', quæ (ut ostendi suprà) major est, quàm fuerit unquam ab Astronomis illustrioribus observata. Ergo distantia Lunæ nunquam 50 Semidiametris Terræ est minor.

Vide theo. 6. n. 19. lib. 1.

Sit deinde Parallaxis D Minutorum 48. Igitur in triangulo rectangulo ABD, latus AB, utpotè Sinus anguli D Grad. 0. 48', est 1396, quarum AD Sinus Totus est 100000. Divisione factâ continebit AD, plus quàm 71, sed minùs quàm 72 AB. Quæ distantia cùm sit deducta ex Parallaxi Grad. 0. 48', minore quàm ab Astronomis posterioribus un[illegible] sit observata, constat Lunæ distantiam 72 Terræ Semidiametris nunquam esse majorem.

NUMERUS XIII.

Distantiam Lunæ à Terra centro ad datum tempus invenire.

Distantiæ Lunares à Terrâ assiduè variantur duplici ex capite, ex motu Anomaliæ, & ex mutatione Eccentricitatis. *Fig. 12.* Sit Lunæ Eccentricus, sive Anomaliæ circulus BEGDF, ejusque centrum B; centrum Terræ A; linea Apogei DBAE. Manifestum est ex 7. 3. *elem.* distantias DA, CA, GA, IA, &c. inæquales esse omnes inter se, & maximam quidem esse DA, minimam EA, reliquarum verò eam esse majorem, quæ maximæ vicinior est. Quare motus Anomaliæ per integrum semicirculum assiduè mutat distantiam Lunæ à centro Terræ A. Deinde quia (ut dictum est in Lunæ Hypothesi *num. 13 & 16*) etiam mutatur assiduè Eccentricitas AB, fit ut ad quemlibet Anomaliæ Gradum toties mutari possit distantia Lunæ, quot sunt Eccentricitates diversæ, hoc est vicibus 180; ac proinde, vel solâ integrorum Graduum habitâ ratione, variari poterit distantia Lunæ vicibus 32400. His explicatis

Oporteat ad datum tempus Lunæ distantiam invenire, quæ ex. gr. sit AC, terminata ad Gradum Anomaliæ DC, quem dato tempore Luna obtinet. Inquire ad datum tempus Anomaliam Centri, ut docui *lib. 2. num. 46. §. 1, vel num. 47. §. 1. & 2.* Tum ad repertum Anomaliæ Centri Gradum reperi Eccentricitatem AB ei competentem, ut docui *l. 2 nu. 43, vel num. 47. §. 4.* ita Eccentricitas AB, ad tempus datum,

datum, nota erit in partibus, quarum Radius Eccentrici B D est 100000. Sit deinde Eccentricitas minima A X, & pro eâ situs Eccentrici sit X O L E M; & Apogeum in O. Per *num.* 38. *lib.* 2. A X est 8745, quarum X O Radius Eccentrici est 100000. Quare tota A O est 108745, quarum X O est 100000. Atqui A O distantia est Lunæ Apogeæ in Syzygijs (in his enim Eccentricitas est minima), eaque per *num.* 10. est Semidiametrorum Terræ 64.15. Ergo, si fiat ut A O prout est 108745, ad X O Radium prout est 100000; ita A O prout est Semid. Terræ 64.15, ad Quartum, prodibit Radius Eccentrici X O in Semidiametris Terræ 59. Rursum quia Eccentricitas A B ad datum tempus, suprà jam innotuit in partibus ex. gr. 9483, quarum Radius Eccentrici X O, seu B D est 100000; si fiat ut Radius B O prout est 100000, ad Eccentricitatem Temporaneam A B prout est 9483; ita Radius B D prout jam notus est in Semidiametris Terræ, ad Quartum; prodibit Eccentricitas A B in Semidiametris Terræ. Denique ad tempus datum inquire *o* Anomaliam Orbis Lunæ Veram D C: sic enim innotescet angulus C B D, adeoque etiam C B A. In triangulo igitur A C B notus est angulus C B A, & nota sunt in Semidiametris Terræ duo latera, B C Radius, & A B Eccentricitas; ex quibus *p* etiam latus A C, Lunæ à centro distantia ad datum tempus innotescet. Quod erat quæsitum.

o per num. 46. lib. 2.

p per probl. 11 cap 3 Geo. Pract.

In Syzygijs operatio est brevior, ut patet ex discursu toto.

Corollarium.

I. Radius Lunaris Eccentrici, sive distantia mediocris Lunæ à centro Terræ, est Semid. Terr. 59. Patet ex discursu præeed.

II. Parallaxis Horiz. Lunæ mediocriter distantis, nimirum 59 Semid. Terr. est Grad. 0. 58'. 16".

Fig. 5. l. 1.

III. Eccentricitas Lunæ Minima est Semid. Terr. 5. 15', Maxima Semid. Terr. 7. 46. Nam si à distantiâ Lunæ Apogeæ in □ A E, quæ per *num.* 10. est Semid. 66. 46, demas Radium Eccentrici C E, qui est Semid. 59, remanent pro Eccentricitate Maximâ A C, Semid. 7. 46. Rursum si ab A G distantiâ Lunæ Perigeæ in ☌ ☍, quæ per *num.* 10 est Semid. Terr. 64. 15', subducat Radium B G Semid. 59; remanent pro A B Eccentricitate Minimâ Semidiametri 5. 15'.

NUMERUS XIV.

Datâ Altitudine Lunæ, sive Verâ, sive Visâ, Lunæ Parallaxim in Altitudinem ad datum tempus invenire.

Fig. 8.

CIrculus Altitudinis, seu Verticalis, esto A G F E; Horizon Rationalis, seu Verus A E, Visus B D; Oculus in B; Lunæ centrum in C.

Detur primùm Lunæ Altitudo Vera E C. Datur ergo etiam distantia ejus Vera à vertice F C, adeoque angulus F A C notus est. Reperi *a* distantiam Lunæ à centro Terræ, dato tempori convenientem; sic enim notum erit latus A C in Semidiametris Terræ A B. Quoniam igitur in triangulo A C B nota sunt duo latera A C, A B, & angulus B A C, ex his reperietur *b* Parallaxis A C B ad tempus datum.

a per num. prec.

b per probl. 10. c. 3. Geo. Pract.

Parallaxim Horizontalem ad tempus datum dabit analysis trianguli rectanguli A B D. In eo enim datur latus A B, & per *num. prec.* latus A D distantia Lunæ. Ergo per *probl.* 4. *cap.* 3. *Geom. Pract.* datur angulus D Parallaxis Horiz. quæsita.

Detur deinde Altitudo Lunæ Visa, angulus nempè C B D. Datur ergo etiam distantia Visa à Vertice, angulus nempè F B C, adeoque & C B A. Tum *c* repertâ, ut prius, A C distantiâ Lunæ ad datum tempus, in Semidiametris Terræ A B, nota erunt duo latera A C, A B, & angulus C B A: ex quibus *d* innotescet Parallaxis C.

c per num. prec.

d per probl. 11 cap. 3. Geo. Pract.

Ex his colligitur modus construendi Tabulas Parallaxium Lunæ. Varias earum formas vide in Tabulis Astronomorum passim editis.

NUMERUS XV.

Altitudinem Lunæ Veram convertere in Visam, & Visam in Veram.

Fig. 8.

DAta sit altitudo Vera Lunæ E C, seu C A E. Petitur Visa C B D.

Per *num. prec.* inquire Parallaxim C, debitam Veræ Altitudini C A E. Parallaxis C dempta Altitudini Veræ C A E, dabit Visam C B D. Parallaxis enim C est excessus *e* Altitudinis Veræ C A E suprà Visam C B D.

e per Theor. 2. num. 19. lib. 1.

Detur deinde Altitudo Visa C B D. Petitur Vera C A E.

Per *num. prec.* inquire Parallaxim C, debitam Altitudini Visæ C B D. Parallaxis C addita Altitudini Visæ C B D, dabit Veram C A E.

Scholium.

In constituendis Lunæ Parallaxibus num. 9. 10. 14. 15. *Suppositum fuit Lunam in Altitudine Graduum* 45. *vel etiam* 40 *sensibilem Parallaxim non subire: quod sciri posse negat Ricciolus refractione adhuc ignotâ. Quare Almag. lib.* 10. *pag.* 637. *theor.* 3. neque Parallaxis, *inquit*, sine præcognitione refractionis aut distantiæ à Terrâ; neque refractio sine præcognitione Parallaxeos aut distantiæ à Terrâ, sive in Lunâ, sive in alio quovis sidere, potest exactè atque evidenter sciri per ullas observationes naturales. *Vide hac illum loco citato, itemque pag.* 634, *probl.* 73 *multis probantem, ubi etiam affirmat, qui hanc difficultatem solverit, eum de Astronomiâ benè meriturum, seque illum, si fuerit superstes, libentissimè auditurum. Atqui ego istud puto ostendi posse argumento neque difficili & satis certo, ut ex* Corollario 4. num. 28 *fiet manifestum.*

CAPUT III.

Inquiritur distantia Solis à Terrâ, & ex eâ Parallaxis.

PArallaxis Lunæ ex Motibus, ut *cap. præced.* vidimus, determinatur, & ex Parallaxi distantia. At Solis Parallaxis adeò parva est, ut ea ex Motibus discerni certò non possit. Imò needum omnino constat utrùm Solis Parallaxis sit ulla. Priùs igitur indaganda distantia Solis à Terrâ, atque ex eâ deinde, siqua est Pa-

Parallaxis, eruenda. Modi porrò sunt duo, quibus distantia Solis à Terrâ ab Astronomis investigatur, per Eclipses, & per Lunæ Diehotomiam. Prior nota requirit Diametros Apparentes Solis & Umbræ in loco transitus Lunæ, & Parallaxim Lunæ Horizontalem.

Fig. 4.l.4. Radij tangentes Solem, & Terram, qui Terræ Umbram determinant, sint G K X, C D X: axis per Solis & Terræ centra B, A, transiens, sit B A X: Semidiameter Umbræ in loco transitus Lunæ, esto E Q; ducanturque rectæ C A F, E A, B C, A D. Quoniam C D X tangit Terram in D, patet C D X esse Horizontem Visum Oculi existentis in D; ac proinde liquet *a* angulum A C D esse Parallaxim Horizontalem Solis, & A E D Lunæ. His utrique *b* æquatur externus F A E: qui, quia componitur ex angulis F A Q, seu B A C, & Q A E metientibus Diametros Apparentes Solis B C, & Umbræ Q E, ex hypothesi notus est. Ergo etiam nota est summa Parallaxium Horiz. A C D Solis, & A E D Lunæ. Ab hac summâ aufer Parallaxim Lunæ A E D ex hyp. notam. Prodibit Solis Parall. Horiz. A C D: cum quâ, & Semidiametro Terræ A D, reperietur in triangulo ad D *c* rectangulo latus A C distantia Solis à Terræ centro A.

a Ex def. 12 nu. 18. lib. 1. *b per 32. 1.* *c per 18. 3.*

Quoniam igitur Solis Parallaxis hic colligitur subtrahendo Parallaxim Horiz. Lunæ à summâ Semidiametrorum Appar. Umbræ Q A E, & Solis F A E, quot Minutis aberraveris in his tribus independenter à Solis Parallaxi, & distantiâ reperiendis, totidem planè Minutis residua inde Solis Parallaxis à verâ abludet. Unde, cùm in tribus datis illis constituendis caveri vix possit error trium Minutorum, fieri poterit ut salvis utrobique Eclipsium phœnomenis, hâc viâ deducatur Parallaxis Horiz. Solis modò trium Minutorum, modò ne unius quidem Minuti dimidij. Quare meritò Keplerus, Vendelinus, Riciolus, hanc viam, licet à Ptolomæo, & plerisque post hunc Astronomis usurpatam, tanquam incertam, & tantæ subtilitatis negotio inidoneam repudiant. Modus alter qui Lunæ Dichotomiâ utitur, & certissimus est, & unicus, quo ad disquisitionem tam arduam eniti humana industria possit. Illum Aristarcho Samio debemus: excoluêre post illum Kepplerus, Vendelinus, Langrenus, & diligentissimè omnium Ricciolus.

NUMERUS XVI.

Modus investigandi distantiam Solis à Terrâ per Dichotomiam Lunæ.

Ad clariorem Problematis deductionem quædam Lemmata, seu Porismata præmitto.

PORISMATA.

1. Quia Sol Lunâ est major, pars Lunæ per Solem illuminata semper est major dimidiâ: excessus tamen, ob immanem Solis à Lunâ distantiam adeò parvus est, ut appareat dimidia. Utrumque satis per se clarum est, & demonstratur in Opticâ.

2. Pars visa Lunæ semper est minor dimidiâ; sed ob ingentem Lunæ ab oculo distantiam apparet dimidia. Utrumque demonstratur in Opticâ, & per se patet satis.

3. Quamvis Solis ac Lunæ superficies sint Sphæricæ, tamen ob distantiam ab oculo ingentem, apparent instar circuli, planæ. Demonstratur in Opticâ & satis per se patet.

4. Cùm Luna apparet bisecta, seu Dichotoma, hoc est, dimidia sui parte illuminata, planum separans partem illuminatam C Q D ab obscurâ C B D, transit per Lunæ centrum O, & per Oculum A, utrumque satis est manifestum. *Fig. 9. 10.*

5. Cùm Luna apparet bisecta, recta E O, Solis ac Lunæ centra connectens, perpendicularis est plano lucidam partem ab obscurâ separanti. Patet, quia pars illustrata C Q D, adeoque & basis ejus, ipsum nempè planum separans, directè Soli semper obvertitur.

6. Cùm planum separans partem obscuram à lucida transit per Oculum A, sed non per Terræ centrum Z, tria centra Lunæ, Solis, & Oculi rectis lineis connexa, constituunt rursus triangulum Dichotomicum A O E, rectangulum ad O centrum Lunæ. *Fig. 10.*

Nam recta E O per *Poris.* 5, perpendicularis est ad planum, separans partem lucidam C Q D ab obscurâ C B D; ac proinde *c* etiam ad rectam A O in eo ductam. Angulus igitur A O E rectus est. Recta porrò A O, est in plano separanti, quia planum *d* transit per O centrum, Lunæ, & A centrum Oculi.

c per defin. 3. 11. *d per Poris. 4.*

7. Cùm planum separans partem obscuram à lucidâ transit non solùm per A centrum Oculi, sed etiam per Z centrum Terræ, tria centra Lunæ O, Solis E, Terræ Z, rectis lineis connexa, iterum constituunt triangulum Dichotomicum, rectangulum Z O E. *Fig. 9.*

Nam quia planum separans transit per O *a* centrum Lunæ, & per Z *b* centrum Terræ, patet rectam Z O esse in plano separante; ad quod cùm *c* E O sit recta, etiam *p* E O ad Z O, in plano dicto existentem recta erit. Angulus igitur Z O E rectus est.

a per Poris. 4. *b per hyp.* *o per Poris. 5.* *p per defin. 3. 11.*

8. Quò Sol fuerit à Terrâ remotior, eò magis à Lunâ distat; & contra. Quantacumque tamen ponatur Solis remotio à Terrâ, distabit à Lunâ minùs semper, quàm Gradibus 90. sed quando, triangulum Dichotomicum terminatur ad Oculum A, ut in *fig.* 10 assertionem intellige de Solis à Lunâ distantiâ Visâ; cùm terminatur ad Terræ centrum Z, ut in *fig.* 9, intellige de distantiâ Verâ.

Sit primò Sol in E, ducaturque A E, sit deinde in F, ducaturque A F. Patet angulum O A E, seu O Z E, qui metitur distantiam à Lunâ Solis altioris, majorem esse angulo O A F, seu O Z F, qui metitur distantiam à Lunâ Solis humilioris. Quia tamen angulus ad O rectus est, fit ut angulus distantiæ O A E, seu O Z E, quantumcumque à Terrâ Solem removeris, semper minor *q* recto permaneat. *Fig. 9. 10.* *q Patet ex 32. 1.*

9. *Temporis momentum, quo, Luna apparet Dichotoma, invenire.*

Luna apparet bisecta, quando nec cornuta, nec gibbosa apparet; id quod tubo optico accuratè potest discerni.

Primò tempus Dichotomiæ, ne ejus observatio frustra tentetur, utcumque prænosci debet, quod facile est, ex Lunæ Motibus jam *libro* 2 constitutis. Deinde adhibendus est tubus opticus quàm optimus, & prægrandis, qui totum Lunæ discum, & omnes in eo maculas distinctè uno intuitu exhibeat, quod non obtinebitur, nisi tubo duobus vitris convexis instructo. Ejusmodi tubo igitur in Lunam directo observa, quando dimidius Lunæ discus illuminatus appareat, atque illud momentum fac notum *i* vibrationibus Perpendiculi. Hoc verò quia plerumque non statim potest discerni, eò quod per aliquod temporis spatium Luna bisecta appareat, elige duo momenta extrema;

i per nu. 6.

trema; primum, quo dubium esse incipit, an Luna (si est primæ Quadraturæ) adhuc appareat cornuta; alterum quo dubitare cœperis, an jam gibbosa appareat, & utrumque momentum illud vibrationibus Perpendiculi fac notum; sic enim nota erit temporis quantitas inter ea momenta intercedens, quæ nunquam aut vix unquam mediam Horam æquabit. Hoc deinde spatio temporis secto bifariam, ipsum Dichotomiæ momentum innotescet.

Qui nudo oculo Dichotomiam observare voluerit, ne ille nimis in observando sit crassus: videbitur enim illi Luna adhuc cava, non rarò Horâ integrâ post vel ante Dichotomiam tubo observatam.

Modus primus.

Fig. 9.

Observa Lunæ Dichotomiam, quando est in Gradu Eclipticæ ab Horizonte Nonagesimo, & (si fieri potest) cùm nullam aut modicam Latitudinem habet: tunc enim (ut patet ex dictis *num. 72. lib. 2.*) planum separans partem obscuram à lucidâ, est circulus Maximus per Eclipticæ Polos transiens, ac proinde tunc planum separans transit non solùm per Oculi centrum A, sed etiam per Terræ centrum Z. Oportet autem, ut etiam Luna tunc sit expedita à Refractione, adeoque alta Gradibus saltem 40. Observatio Dichotomiæ habetur per *Porisma 9*, inventio Lunæ in Nonagesimo per *num. 72. lib. 2.* Tribus igitur centris Terræ Z, Lunæ O, Solis E, per tres lineas connexis, constituitur triangulum Dichotomicum Z O E, quod per *Porisma 7* ad O rectangulum est; cujus angulus O Z E in Terræ centro terminatus, Veram Lunæ à Sole distantiam metietur. Igitur ad momentum Dichotomiæ, quod per *Poris. 9.* est notum, inquire *a* motum Solis Verum, & motum *b* Verum Lunæ; ab hoc si subtrahas motum Solis, vel contra; distantia Vera Lunæ à Sole, hoc est angulus O Z E, innotescet. Jam quia angulus Z O E rectus est, & notus est acutus O Z E, etiam reliquus E notus erit. Quare per *probl. 1. cap. 3. Geom. Pract.* nota fiet ratio laterum Z E, Z O, ac proinde quoties Z E distantia Solis à Terræ centro contineat Z O distantiam Lunæ ab eodem, innotescet. Quare si per *num. 13.* inveniatur ad momentum Dichotomiæ, distantia Lunæ Z O in Semidiametris Terræ, etiam Z E distantia Solis ad idem momentum Dichotomiæ, in Terræ Semidiametris nota erit. Quod erat faciendum.

a per num. 55. lib. 1.
b per num. 46. vel 47. lib. 2.

Verùm, quia rarò Dichotomia reperitur in Nonagesimo, modum alterum, & tertium adjungo.

Modus secundus, immediatus, & ab omni motu Solis ac Lunæ independens.

Fig. 10.

Observa Dichotomiam Lunæ, ut *Poris. 9.* est traditum, quando Luna est extra aleam Refractionis. Centris Oculi A, Lunæ O, Solis E per rectas lineas connexis, triangulum constituetur Dichotomicum, quod per *Poris. 6.* rectangulum est. Quare angulus O A E (seclusâ refractione Solis) metitur distantiam Lunæ à Sole, non Veram, sed Visam. Itaque si instrumentum præsto sit exactum & grande, in quo etiam Secunda sint notata, & Sol suprà Horizontem extet, metire distantiam Lunæ à Sole: sic enim notus fiet angulus O A E. Inquiratur deinde Refractio Simplex Altitudinis Solis, ipsius Visæ Altitudini congruens. Modus ab his independens tradetur *num. 26. & 27.* Ex Refractione autem Altitudinis eliciatur Refractio Longitudinis, ut tradam infrà independenter *o* ab his *num. 45. Coroll. 2*: quam adde angulo O A E suprà invento (Refractio quippe Solem justò altiùs attollendo, hunc angulum effecerat vero minorem) ut habeatur exactè angulus distantiæ Visæ Lunæ à Sole: quo noto, reperitur, ut suprà, proportio distantiæ Solaris A E ad Lunarem A O.

o Vide Schol. n. 45.

Modus tertius.

Quòd si Sol conspicuus non sit, aut ejusmodi instrumento careas, vel uti nolueris, ad momentum Dichotomiæ, quod per *Poris. 9.* sit notum, inquire motum, seu Longitudinem Veram tam *c* Solis, quàm *d* Lunæ. Ad momentum idem metire Altitudinem Lunæ, Refractionis expertem, ad eamque Parallaxim Altitudinis Dichotomiæ momento congruentem *f* reperi; atque ex hac, (ut independenter ab his ostendam *num. 45.*) elice Parallaxim Longitudinis: quæ, si Luna declinat à Nonagesimo versùs Occasum, Longitudini Veræ demenda est, ut habeatur *o* Longitudo Visa; addenda verò, si Luna à Nonagesimo vergit in Ortum. Longitudinem Solis Veram aufer à Longitudine Visâ Lunæ jam inventâ, vel contra. Prodibit distantia Visa Lunæ à Sole aliquantò adhuc major minorve justâ, eò quòd Longitudinem Veram Solis non expediverim à Parallaxi, quæ proinde Solem versùs Horizontem retrahit, longiusque à Lunâ abducit, vel adducit. Ut igitur exactè habeatur distantia Visa Lunæ à Sole, distantiæ jam inventæ addenda vel subtrahenda erit Parallaxis Solis in Longitudine. Hic enim verò apparet Parallaxim solis tantam, quanta fuit à plerisque assumpta, seipsam perimere. Quò namque eam voluerint majorem esse, eò circà □ primam distantia Visa Lunæ Dichotomæ à Sole, angulus nempè O A E, fiet major, adeoque & distantia Solis à Terrâ *a* eò major, & Parallaxis *b* eò minor evadet. Ipsi igitur statuant, quantùm nos ad distantiam priùs inventam, ut sit completa; si velint adjicere; evertent se quidquid statuerint. Nam si tenere voluerint Parallaxim Horizontalem Tychonis trium Minutorum, & deductam inde Longitudinis Parallaxim angulo O A E priùs invento, ut sit completus; adjecerint: colligetur inde distantia Solis à Terrâ planè enormis, & Parallaxis propè nulla. Nos interim, ut à fortiori, quod ajunt, ratiocinatio nostra procedat, distantiæ angulum O A E priùs repertum, complebimus additamento quàm minimo, Secundorum videlicet 30, aut 20, aut 15, qui nihilominus vel tantillo auctus, reperietur non minor Gradibus 89. 28'. Hunc igitur in modum angulus O A E in rectangulo triangulo A O E innotescet. Quo noto, reperitur quoties A E distantia Solis ab Oculo, contineat A O distantiam Lunæ ab eodem. Quare si ad momentum Dichotomiæ nota fiat in Semidiametris Terræ A O, distantia Lunæ ab Oculo, etiam A E distantia Solis in Terræ Semidiametris nota erit: quod erat faciendum.

c per num. 55. lib 1.
d per num. 46. aut 47. lib. 2.
f per n. 14.
o Ostendam infrà.
a per Poris. 8.
b per Theo. 8. num. 19. lib. 1.

Hunc in modum reperietur distantia Solis (ut ostendam *num. 19*) nunquam minor 7000 Semidiametrorum Terræ, & Parallaxis Solis Horiz. nunquam major 30 Secundis.

Ricciolus alium modum tradit sed valdè operosum, quo tempus Dichotomiæ Visæ in superficie Terræ revocat ad tempus, quo apparet Dichotomia in Terræ centro. Ipsum consule, si voles, Almag. pag. 732. 733. 734.

NUMERUS XVII.

Omnino certum est distantiam Solis à Terra continere distantiam Lunæ plus quàm decies novies, hoc est plus quàm Terræ Semidiametros 950, adeoq; plus quàm 3101750 milliar. Italic. Bonon. Imò ex recentioribus observationibus Dichotomiæ certum est distantiam Solis excedere distantiam Lunæ quinquagies septies, hoc est Semidiametros Terræ 2850; seu milliaria Italica Bonon. 9315250.

Fig. 9. 10. EX omnibus Dichotomiæ observationibus, tam antiquis quàm novis, in momento Dichotomiæ angulus distantiæ Lunaris à Sole tam Visæ quàm Veræ, palpabiliter & evidentissimè major est Gradibus 87, ac proinde angulus E in centro Solis minor Gradibus tribus. Posito autem angulo E Grad. 3. ejus Sinus Z O in *fig.* 10, seu A O in *fig.* 11, est 5233, quarum Z E, vel A E, est 100000, nempè Sinus Totus. Divisis autem 100000 per 5233, reperies Z E continere Z O in *fig.* 9, seu A E continere A O in *fig.* 10, plus quàm 19 vicibus: quibus per certò minimam Lunæ distantiam, quæ *a* est Semid. Terræ 50, multiplicatis, fit Z E, seu A E distantia Solis Semidiam. Terræ 950. His rursum ductis in Semidiametrum Terræ minimam, quæ est milliariorum Bonon. 3265, distantia Solis evadit milliar. Bonon. 3101750. Atqui hæc distantia deducta est ex angulo O Z E, vel O A E evidentissimè, ut dixi suprà, nimis parvo, adeoque ex angulo E nimis magno. Ergo *b* prorsus est evidens distantiam Solis à Terrâ excedere &c.

a per num. 12. — *b per Por. 8. num. 16.*

At prope injuriam cælo faciat, qui Lunæ Dichotomæ distantiam à Sole ultra Gradus 87 non extendat. Ex observationibus Vendelini & inprimis Riccioli permultis & accuratissimis, satis constat, ut *num.* 19. ostendam, Lunam Dichotomam à Sole distare non minùs quàm Grad. 89. 30′. ac proinde meritò opinabimur distare saltem Grad. 89: ex quâ distantiâ elicitur, ut suprà, Solis à Terrâ distantia vicibus 57 major distantiâ Lunari à Terrâ, hoc est major Semidiametris Terræ 2850, hoc est milliarijs Bonon. 9315250.

NUMERUS XVIII.

Datâ aliquâ Solis distantiâ cum Gradu Anomaliæ, ejusdem distantiam ad quemvis Anomaliæ Gradum invenire.

§. 1. DAta sit primò distantia Solis Apogea, ex. gr. Semidiametrorum Terræ 8000. Ex eâ distantiam mediocrem, seu Radium Eccentrici, distantiam Perigeam, & alias ad Gradus singulos Anomaliæ reperiemus hunc in modum.

Fig. 11. Eccentricus Solis esto B C E D F, ejus centrum B, Terra A; linea Apogei C B A D; Eccentricitas A B. Per *num.* 38. *lib.* 1. A B est 3460, quarum Radius B C est 100000. Ergo A C est 103460. Quare si fiat ut A C prout est 100000, ad A B prout est 3460, ita A C prout est Semidiametri Terræ 8000, ad Quartum; provenient pro Eccentricitate A B Semid. Terræ 267 $\frac{56180}{103460}$. His subtractis ab A C 8000 Semid. remanent pro Radio B C Semidiametri 7732 $\frac{47280}{103460}$, quæ est distantia Solis media.

A Radio sic invento aufer rursum B A, Semidiametros nempe 267 $\frac{56180}{103460}$: remanent Semidiametri 7464 $\frac{94560}{103460}$ pro A D distantiâ Solis Perigeâ.

Sit jam Sol in quovis Anomaliæ puncto noto E, & oporteat invenire ejus à Terrâ distantiam A E. Duc Radium B E. Quoniam datur Anomaliæ arcus C E, adeoque & angulus C B E, etiam E B A datur. In triangulo igitur A E B, nota sunt angulus E B A, & in Semidiametris Terræ duo latera A B, B E: ex quibus reperietur *o* in Terræ Semidiametris latus A E, distantia Solis quæsita.

o per probl. 10. cap. 3. Geo. pract.

§. 2. Detur secundo in Semid. Terræ distantia Solis quæcumque A E, cum Anomaliâ C E. Ex hac reliquas distantias omnes hunc in modum elicies. Quoniam nota est Anomalia C E, adeoque & angulus C B E, etiam A B E notus erit. Sunt verò & latera B A, B E nota, nam *i* B A est 3460, quarum B E est 100000. Ergo etiam *p* A E in ijsdem partibus fiet nota, eritque ex. gr. 90025, quarum B E est 100000. Igitur si fiat ut A E prout 90025 ad B E prout est 100000, ita A E prout est certus numerus Semidiametrorum Terræ, ad Quartum: prodibunt Semidiametri Terræ pro Eccentrici Radio B E. Et rursum si fiat ut B E prout est 100000, ad B A prout est 3460, ita B E prout est certus numerus jam inventus Semidiametrorum Terræ, ad Quartum: prodibunt Semidiametri quæ debentur Eccentricitati A B: quibus adjectis ad Semidiametros Terrestres Radij B E, seu B C, provenient Semidiametri Terrestres distantiæ Solis Apogeæ A C. Demum Semidiametris ipsius B A subductis ex Semidiametris Radij B D, prodibunt Semidiametri distantiæ Solis Perigeæ A D.

i per num. 38. lib. 1. — *p per probl. 10. cap. 3. Geo pract.*

Ex Radio B E, & Eccentricitate A B in Semidiametris Terræ jam notis, distantiæ reliquæ ad singulos Anomaliæ gradus reperiuntur, ut *supra sub finem §. 1.*

NUMERUS XIX.

Distantia Solis à Terrâ numquam minor quàm 7000 Semidiametrorum Terræ, hoc est milliariorum Bonon. 22. millionibus, 855 millibus, & Parallaxis Solis Horizontalis numquam major Minuto dimidio.

NObilissimum Astronomiæ Theorema hoc est, ad cujus investigationem Kepplerus omnes Europæ Astronomos invitavit. Ejus veritas quibus nitatur fundamentis, ex ijs quæ subjiciam, apparebit.

Anno 1651. Apr. 27. Hor. 7. 38′ post Meridiem Ricciolus Bononiæ observavit telescopio maximo Lunam Dichotomam, seu bisectam. Luna tunc erat alta Grad. 65, & paucis Gradibus transgressa Nonagesimum. Ex his datis procedendo juxta modum tertium *Numeri* 16, in triangulo *a* rectangulo Dichotomico A O E, reperitur angulus O A E distantiæ Visæ Lunæ à Sole, Grad. 89. 34. 50′ quàm proximè: & tantum reperit in centro Terræ per modum suum Ricciolus in *fig.* 9. angulum O Z E. Ex quo ulteriùs juxta modum tertium operando elicitur ad momentum Dichotomiæ distantia Solis à Terrâ par Semidiametris Terræ 8333. Sol autem tunc erat in ♉ Grad. 7. 16′, longè videlicet ab Apogeo quod est *b* in ♋ Grad. 7. 26′. Quare distantia Solis Apogea major est Semidiametris 8333. Sed ponamus tantum esse

a per Poris. 6 n 16. Fig. 10. — *b per num. 38. lib. 1.*

esse Semid. 8000. Ex hac distantiâ Solis Apogeâ, per *num. prac.* §. 1. reperitur distantia Perigea, seu minima Semidiametrorum Terrestrium 7464.

Neque verò distantia Solis major 7000 Semid. Terræ ex hac unâ Dichotomiæ observatione quamvis accuratissimâ, deducta est à Ricciolo, sed ex alijs multis, ut refert ipse *Almag. pag.* 734. Et suffragantur observationes Dichotomicæ Vendelini in *Tabulis Atlanticis*, qui longè adhuc altiùs Solem evehit. Ait enim Lunæ Dichotomæ distantiam à Sole collectam à se esse Grad. 89. 45'; ex quâ provenit distantia Solis à Terrâ Semidiametrorum Terrestrium 13740. Posthæc alijs insuper considerationibus adductus, concludit Solis mediocrem à Terrâ distantiam Semid. Terr. 14656.

Maneat igitur distantiam Solis à Terrâ numquam minorem esse 7000 Semid. Terr. hoc est (assumptâ *o* minimâ Terræ Semidiametro) milliariorum Bonon. 22855000.

o Vide Geometr. Pract. cap. 6. ante probl. 5.

Atque hinc manifesta jam est pars altera Theorematis. In schemate 8. Parallaxim Horizontalem Solis referat angulus A D B, & sit A D distantia Solis à Terræ centro A, Semid. Terr. 7000. In triangulo rectangulo A B D, quia nota sunt latera A D, A B, cùm A D sit 7000, quarum A B est, 1; ex his per *probl. 4. cap. 3. Geom. prac.* reperies angulum D minorem Minuto dimidio, seu 30 Secundis. Quò autem A D ponitur minor, eò Parallaxis D, proveniet major, & contra. Cùm ergo A D distantia Solis à Terrâ numquam minor sit 7000 Semid. Terræ, liquet Parallaxim Solis Horizontalem numquam esse majorem Minuto dimidio. Suffragatur rursum Vendelinus, ex cujus distantiâ Solari Semidiametrorum Terræ 14656 Parallaxis Horizontalis elicitur Secundorum 14.

Fig. 8.

Ricciolus ex pluribus Dichotomiæ observationibus factâ electione, Solis distantias statuit eas, quæ tabellâ sequenti exhibentur.

	Distantia Solis			Different. Max. & minimæ	Eccentricitas.
	Max.	Med.	Min.		
In Semid. Terræ.	7580	7327	7074	506	253
In milliar. Bonon.	24(748.700	23 (922.655	23 (096.610	1 (652.090	826.045

Assumpsi Semidiametrum Terræ minimam, quæ est milliariorum Bononiensium 3265. vide *Geom. prac. cap. 6. ante Probl. 5.*

NUMERUS XX.

Deducuntur Corollaria, ex quibus liquet Luminarium motus & Parallaxes à nobis ritè hactenus fuisse deducta.

I. Cùm tantilla sit Parallaxis Solis in Horizonte ipso, ad Gradum Altitudinis 60, aut 70, ea jam propè evanescat necesse est.

II. Vix operæ pretium erit Parallaxim Solis in Longitudinem & Latitudinem inquirere, cum eæ adhuc minores sint *a* Parallaxi Altitudinis. Laboris hoc erit compendium non minimum in supputandis Eclipsibus.

a Ostendam num 39. affect. 8.

III. Liquet motus Solis ac Lunæ ritè constitutos fuisse, tametsi Parallaxis Solaris fuisset neglecta. Nos tamen in motu Solis ejus neglectum evitavimus ubique, præterquam *lib. 1. num.* 33. ubi parvi ea momenti est, & *num.* 37, ubi ejus neglectus prorsus insensibilis est, ut patet consideranti. In motu verò Lunæ neglecta solum fuit *num.* 41. *lib.* 2. Parallaxis Longitudinis Solis, quæ cùm adhuc minor sit Parallaxi Altitudinis, non potuit inde error sensibilis in Lunæ Eccentricitatem maximam ibi constitutam derivari.

IV. Ex his objectio solvitur, quæ formari posset contra motus, & Parallaxes Solis & Lunæ hactenus constitutas: quæ est hujusmodi. Parallaxis Solis in Longitudinem neglecta fuit in statuendâ Eccentricitate maximâ Lunæ *lib. 2. num.* 41: Eccentricitas porrò maxima influit in motus Lunæ tam Longitudinis, quàm Latitudinis: hi verò influunt in Lunæ Latitudinem; hæc unà cum motu in Longitudinem & Latitudinem influit in Declinationem Lunæ, illa in Parallaxim Lunæ; hæc rursum in Parallaxim Solis, cum determinari nequeat quot Solis distantia contineat Semidiametros Terræ, nisi priùs constiterit, quot Semid. Terr. contineat distantia Lunæ.

Manifesta inquam est hujus objectionis solutio. Cùm enim ex neglectâ Parallaxi Longitudinis Solis, in Eccentricitatem Lunæ maximam error nonnisi insensibilis profluxerit, etiam motus Lunæ in Longitudinem & Latitudinem, atque inde Latitudo Lunæ, adeóque & Declinatio ejus, non nisi insensibiliter potuerunt alterari. Unde liquet Parallaxim Lunæ, quæ adeò sensibilis est, non potuisse hinc errorem notabilem contrahere. Quod si Parallaxis Lunæ ritè fuit constituta, manifestum jam erit etiam Solis ex eâ deductam, errore sensibili carere. In summâ, ut jam dicta paucis complectar: Error parvus in Motibus, longè adhuc minorem causat in Parallaxi Lunæ; Error verò in Lunæ Parallaxi, siquis fuisset commissus, adhuc multò minorem in Parallaxim Solis inducet: ut si error in Motibus fuisset unius Minuti, inde Parallaxis Lunæ vix errorem unius Secundi, Solis autem vix unius Tertij contraxerit. Hæc vera an sint, si experiri calculum volueris, ita explorabis. Ad datum tempus reperi Longitudinem Lunæ, & ex eâ distantiam à ☊ tum ex utrâque Latitudinem Lunæ; ex his Declinationem, ac tandem Parallaxes tum Lunæ tum Solis, quas serva. Deinde longitudinem Lunæ auge vel minue Minuto uno, duobus aut tribus, atque ex eâ sic minutâ vel auctâ, collige eodem ordine, quo suprà Parallaxes Luminarium. Ita cernes quantillo intervallo hæ à prioribus dissideant. Simili modo solvitur objectio, quæ formari posset contra motum Solis.

Atque

Atque ita favente Deo, ex multiplici Solarium Lunariumque Motuum labirintho absque ullo vitioso circulo tandem emersimus, si Refractiones excipias, quas mox aggrediar, ostendamque neque ex illis circuli vitium in Motus Luminarium *l.* 1. & 2. constitutos, inferri.

o Vide Scholia num. 26. & 27. & num 46.

NUMERUS XXI.

Parallaxim Solis in circulo Altitudinis ad datum tempus invenire.

EX *num. prec.* jam constat distantiam Solis Perigeam, seu minimam, esse saltem 7000 Semidiam. Terr. Quære igitur *a* Anomaliam Veram Solis ad datum tempus; cum quâ, & distantiâ 7000 Semid. Terr. per *num.* 18. reperies distantiam Solis à Terrâ ad tempus datum. Cum hac deinde reperies ad singulos Altitudinis Gradus Parallaxes Solis, ut tradidi in Lunâ *num.* 14, sit enim Altitudinis circulus (*in fig.* 8.) GFE, ejusque centrum A, Oculus verò in Terræ superficie esto in B; Sol in C, altus ex. gr. Grad. 70, & distantia Solis ad datum tempus jam inventa, sit AC. Quoniam datur arcus EC Grad. 70, etiam FC, adeoque angulus FAC datur. In triangulo igitur ABC, quia nota sunt angulus BAC, & in Semidiametris Terræ duo latera AC, AB, ex his quoque angulus *o* ACB, Parallaxis quæsita ad tempus datum, innotescet.

a per num. 46. lib. 2.

Fig. 8.

o Per probl. 10. cap. 3. Geo. pract.

Verùm cùm tanta sit Parallaxis Solaris exilitas, non est opus tantâ præcisione. Sufficiet igitur ad datum tempus notam habere Altitudinem Solis; atque ad hanc cum distantiâ 7000 Semid. Terr. modo jam dicto Parallaxim inquirere.

Quod si Tabulam Parallacticam desideras, cum eâdem illâ 7000 Semid. distantiâ ad singulos Altitudinis Gradus Parallaxes inquire. Eas citra discrimen ullum erroris sensibilis ad quemvis Astronomicum usum adhibebis, qualiscumque ad tempus datum Solis à Terrâ distantia fuerit.

CAPUT IV.

Modus investigandi Refractiones Solis & Lunæ.

NUMERUS XXII.

Definitiones nonnulla ad sequentia.

Fig. 13.

1. **L***Ocus Refractus Solis vel Lunæ*, est punctum in quo per Refractionem Sol vel Luna apparet: & *distantia Apparens Refracta à Vertice*, est arcus à Vertice usque ad locum Refractum: *Altitudo autem Apparens Refracta*, est arcus Verticalis à loco Refracto ad Horizontem Visum.

Verticalis sive Altitudinis circulus esto MN; Vertex M; Horizon Verus FK, Visus LE; locus Verus Luminaris, quem linea à Terræ centro per Luminaris centrum ducta, ostendit, sit I; locus Apparens, seu Visus, ad quem per Parallaxim Luminare deprimitur, sit O; locus in quo per Refractionem apparet, C. Hunc voco *locum Apparentem Refractum*, MC *Distantiam à Vertice Apparentem Refractam*, & CB *Altitudinem Apparentem Refractam*: ad distinctionem à loco Viso O, & distantiâ Visâ à Vertice MO, & Altitudine Visâ OB, de quibus actum *num.* 7.

2. *Refractio Horizontalis* est, quâ Luminare infrà Horizontem Visum existens, apparet in margine Horizontis.

Horizon Verus esto FK, Visus LE, Verticalis MN, Verus locus Luminaris in A, sed Refractus in B, Arcus AB est Refractio Horizontalis.

Porro Solis Refractio plerumque major est Parallaxi, subinde minor, nonnumquam etiam æqualis. Cum major est, dividitur in Simplicem & Compositam.

3. *Refractio Simplex*, est arcus Verticalis, quo Sol suprà locum Verum attollitur. *Refractio Composita, seu Tota*, est arcus Verticalis ex Parallaxi, & Refractione Simplici compositus.

Locus Verus Solis sit in I; Visus, seu Parallacticus in O, Refractus in C. Arcus CI est Refractio Simplex; Composita verò, seu Tota est OC: nam si nulla esset Refractio, Sol verè existens in I, vi Parallaxeos appareret in O. Cùm ergo vi Refractionis appareat in C, liquet totum Refractionis effectum esse arcum OC.

4. *Refractio Simplex Horizontalis* est arcus Verticalis AD, quo Sol à loco Vero A attollitur ad Horizontem Verum FK. *Horizontalis Composita*, sive *Tota*, est arcus AB, quo Sol attollitur à loco Vero A, ad Horizontem Visum LE: sive est arcus Verticalis ex Horizontali Simplice AD, & Parallaxi Horizontali composita.

Nam Horizontis Veri ac Visi distantia BD, Parallaxim Horizontalem metitur, ut patet in *fig.* 8. Cùm enim Horizontes Verus AE, ac Visus BD, sint paralleli, erit Parallaxis Horiz. ADB, æqualis alterno *a* sibi angulo DAE, quem metitur arcus DE, distantia Horizontium.

a Per 27. 1.

5. *Distantia Æquatoria Syderis V à Meridiano FMR*, est arcus Æquatoris (QS) inter Meridianum, & circulum Declinationis à Mundi Polo (G) per Sydus V descriptum interceptus.

Prima Refractionis Astronomicæ affectiones referuntur l. 1. num. 20, quem consule.

NUMERUS XXIII.

Distantiam Solis Æquatoriam à Meridiano & Diei tempus invenire, cùm Sol gradus saltem 40 altus est.

HÆc determinatio additur, ut excludatur Refractio, cùm ad ejus inventionem hoc ipso Problemate usuri simus.

Meridianus sit AQD; Horizon AB, Polus Mundi Boreus X; Vertex Q; Æquator CD centrum Solis in G, declinans ad boream, per quod ductus sit Declinationis Quadrans XGE. Arcus igitur *o* CE, est distantia Solis Æquatoria à Meridiano, quam oportet invenire.

Fig. 14.

o Per def. 5 nu prec.

Instrumento cape Solis distantiam à Vertice, cui deme Parallaxim per *num.* 21 inventam. Sic nota erit (QG) distantia Vera Solis à Vertice. Tum notus fiat arcus (QX) distantia Poli à Vertice, quod fiet, si (BX) Altitudo Poli inventa per *num.* 27. *l.* 1. subducatur à Quadrante (BQ). Reperiatur deinde EG Declinatio Solis; ad quod opus est, ut hoc ipsum Diei tempus, quod hic quæritur, aliunde sit notum præter propter, ut ad illud inquiri possit locus *b* Solis in Eclipticâ, atque ita innotescat *c* ejus Declinatio EG. Fiet verò præter propter notum Horologio Horizontali Sciaterico accuratè constructo. Subductâ jam Declinatione (EG) à Quadrante (EX)

b per num. 35. lib. 1.

c per num. 52. lib. 1.

(E X) notus erit arcus G X. Quoniam igitur in triangulo G Q X nota sunt tria latera Q G, Q X, G X, ex his reperietur *n* angulus Q X G, seu C X E, adeoque & arcus Æquatoris C E ipsum *p* metiens, ipsa videlicet distantia Solis Æquatoria à Meridiano A Q D: quæ conversa *r* in tempus Solare, dabit quæsitum Diei tempus exactè.

n per trigon. Sph. prob. 18.
p per def. 4. num. 66. lib. 2.
r per num. 51. lib. 1.

Quæret aliquis qui fieri possit, ut ex tempore Diei, hoc est distantiâ Solis à Meridiano solùm præter propter cognitâ, exacta ejusdem cognitio obtineatur.

Respondeo: licet error in tempore commissus æquaret quadrantem unius Horæ: tamen quia Sol interim vix absolvit Secunda 2 & 27 Tertia, locus ejus ad falsum tempus quæsitus, non aberrabit à loco debito Tempori Vero vel ad unius Gradus Minutum unum. Quare hinc neque in Declinationem, loco Solis ità reperto debitam, neque in distantiam Solis Meridianam ex illâ repertam, poterit error sensibilis derivari.

Si Sol sit in Æquatore, putà in E, quod in Æquinoctijs contingit, utere triangulo E Q X; in quo datur Quadrans Declinationis E X, & Q E distantia Vera à Vertice nota fit, ut suprà. Si Sol sit in O, declinans ad Austrum, utere triangulo O Q X, in quo latus O X componitur ex Declinatione O F, & Quadrante F X: reliqua latera nota fiunt, ut suprà.

Corollarium.

Ubi Refractiones fuerint inventæ, universalis erit Problematis solutio jam tradita qualiscumque fuerit Altitudo Solis, si distantiæ à Vertice per instrumentum captæ, addatur Refractio, & dematur Parallaxis; sic enim nota *a* erit distantia Vera à Vertice Q G: quâ inventâ reliqua operatio eadem erit, quæ suprà.

a num. 19. & 20. l. 1.

NUMERUS XXIV.

Distantiam Solis Æquatoriam à Meridiano, & tempus Diei, licet Sol infrà Horizontem, aut ei vicinus sit, incognitâ adhuc Refractione, invenire.

OBserva tempus quo Sol non absit longiùs ab Horiz. quàm 40 Gradibus, & ad illud inquire per *num. præc.* distantiam illius momenti ab Horâ 12 præcedenti, si observatio fiat post Meridiem. Metire deinde vibrationibus Perpendiculi (ut docui *nu. 4*), quantum sit temporis spatium, ab eo momento quod jam factum est notum, usque ad momentum quæsitum, quod nempè fieri notum petebatur, & ad quod reperiri debebat distantia Solis Æquatoria à Meridiano. Hoc temporis intervallum adde distantiæ momenti prioris ab Horâ 12; ita notum fiet totum tempus ab Horâ 12, usque ad momentum quæsitum: quod *a* conversum in Gradus & Minuta Æquatoris, dabit distantiam Æquatoriam Solis à Meridiano ad momentum quæsitum.

a per num. 51. lib. 1.

Quod si observatio fiat ante Meridiem, vibrationibus Perpendiculi metire quantum temporis spatium sit à momento quod vis facere notum, & ad quod desideras distantiam Solis Æquatoriam à Meridiano, usque ad momentum aliquod, quo Sol jam incipit attolli suprà Horiz. Gradibus 40, ut Refractio vitetur. Illius verò momenti secundi distantiam ab Horâ 12 sequenti notam fac per *num. præc.* quæ addita intervallo priori, dabit totum tempus à momento primo usque ad 12 sequentem; atque hoc tempus conversum in partes Æquatoris, exhibebit distantiam Solis Æquatoriam à Meridiano ad momentum primum.

Corollarium.

Postquam Refractiones fuerint inventæ non requiretur Altitudo Solis par .. aut major 40 Grad. tunc enim Problema universaliter absolvetur, juxta *Corol. num. præc.* licebitque captare tempus quo Sol parum ab Horizonte distet, atque ita breviùs fiat tempus vibrationibus Perpendiculi numerandum.

NUMERUS XXV.

Distantiam Lunæ Æquatoriam à Meridiano invenire.

MOmentum illud, ad quod desideras distantiam Lunæ Æquatoriam à Meridiano, fac notum, itemque notam fac distantiam Solis Æquatoriam à Meridiano ad idem momentum. Utrumque obtinebis vel per *num.* 23, si Sol sit altus saltem Grad. 40, vel per *num.* 24, si Horizonti sit propior, aut infrà eum. Inquire deinde ad momentum, quod jam factum est notum, Longitudinem Veram tam *c* Solis, quàm *d* Lunæ; sed Longitudinem Lunæ, si Latitudinem tum habeat, ad *f* Eclipticam reducito. Quærantur deinde ad idem momentum jam notum *i* Ascensiones Rectæ, (hoc est distantiæ Æquatoriæ ab initio ♈) tam Lunæ quàm Solis: sic enim innotescet etiam distantia Æquatoria Lunæ & Solis, quæ sit ex. gr. arcus Æquatoris F T. Si jam Sol fuerit in T, remotior videlicet à Meridiano, aufer à T C distantiâ Æquatoriâ Solis à Meridiano, quæ suprà jam innotuit, distantiam Æquatoriam Lunæ & Solis F T etiam notam: residuum F C dabit distantiam Æquatoriam Lunæ à Meridiano. Quod si Sol sit in F, propior Meridiano, quàm Luna in T, tunc T F distantiam Æquatoriam Lunæ à Sole, adde ad F C distantiam Æquatoriam Solis à Meridiano: sic nota erit T C distantia Æquatoria Lunæ à Meridiano, quæ petebatur.

c per num. 55. lib. 1.
d per num. 46. vel 47. lib. 2.
f per num. 65 lib. 2.
i per num. 52. lib. 1.
Fig. 14.

NUMERUS XXVI.

Refractionem Solis Horizontalem, tam Simplicem, quàm Compositam, invenire.

HOrizon Verus esto F K, Visus L F; Zenith M; Verticalis M N, Polus Mundi G; Æquator Q R; Meridianus F M R. Sol sit in A infrà Horizontem Verum; sed ejus centrum appareat in B punctο Horizontis Visi. Oporteat Parallaxim Horizontalem *o* Simplicem A D, & Compositam A B reperire.

Fig. 13.
o Def. 4. num. 22.

Per Polum G, & A centrum Solis ductus intelligatur arcus circuli Declinationis G A, secans Æquatorem in S. Erit S Q distantia Æquatoria Luminaris à Meridiano F M R. Si jam observare placuerit Refractionem Vespertinam, vibrationibus Perpendiculi *a* metire tempus à Meridie præcedenti usque ad momentum, quo Solis centrum apparet in Horizontis Visi puncto B; si Matutinam, tunc eodem modo metire tempus à momento, quo Solis centrum apparet in Horizonte Viso, usque ad Meridiem sequentem,

a per num. 4.

quentem. Tempus sic inventum in partes Æquatoris conversum, dabit distantiam Solis Æquatoriam SQ à Meridiano. Et hanc quidem omninò expedit vibrationibus Perpendiculi, ut jam exposui, notam facere, tum quia is modus omnium certissimus est, tum quod hic labor semel exantlatus, non solùm Parallaxi Horizontali inveniendæ, sed alijs etiam ad singulos Altitudinis Gradus reperiendis, inserviet, si vibrationum numerus ad singulos Gradus Altitudinis ineatur. Quod si laborem istum numerandi vibrationes subire totum nolueris, utere Problemate *nu.* 24, eoque inveni & tempus quo Luminare Horizontem Visum apparenter attingit, & ejus distantiam tunc Æquatoriam à Meridiano. Utrovis modo inventa distantia Æquatoria dabit angulum QGS, seu MGA, quem *b* metitur. Deinde ad notum sic momentum, quo Solis centrum in Horizonte Viso apparet, quære *i* Declinationem Veram Solis AS, quæ addita Quadranti SG, dabit arcum AG. Arcus verò GM est complementum Altitudinis Poli KG, quæ nota fit per *Num.* 27. *lib.* 1. In triangulo igitur AMG, quia nota sunt angulus MGA, & latera AG, GM, ex his innotescet *m* latus AM, distantia Vera Solis à Vertice, quæ semper reperietur major Quadrante. Ab hac igitur si demas Quadrantem DM, nota erit Parallaxis Horizontalis Simplex AD.

b per def. 4. *nu* 66. *l.* 2. *i per num.* 52. *lib.* 1.

m per trigon. Sph. prob. 19.

Arcus autem BD metitur Parallaxim Horizontalem, ut ostendi ad *def.* 4. *num.* 22. Parallaxis verò Horizontalis Solis inventa est *num.* 19. & 21. Quare arcus BD notus. Hunc ergo si addideris arcui jam noto AD, tota Solis Refractio Horizontalis AB nota erit.

Solis Refractio Horizontalis Simplex Tychonica est Grad. 0. 31'. 6"; Tota seu Composita Grad. 0. 34', sed nimia, quia Parallaxim Horizontalem nimis magnam assumit Grad. 0. 2', 54". Quantitates à Ricciolo inventæ, multò sunt accuratiores, quas Tabellâ sequenti exhibeo.

c per num. 55. *lib.* 1. *d per num.* 46. *vel* 48. *lib.* 2. *f per num.* 65 *lib.* 2. *i per num.* 52. *lib.* 1.

Fig. 14.

Refractio Solis Horizontalis Composita.

Æstiva.	*Æquinoctialis.*	*Hyberna.*
Grad. 32'. 25".	Grad. 0. 33'. 0".	Grad. 0. 33'. 40".

Corollarium.

Refractio Solis Horizontalis est major Parallaxi Horiz. ejusdem. Semper enim, cùm Sol in Horizonte apparet (putà in B) ejus à Vertice distantia Vera (putà MA) Quadrante major reperitur.

Scholium.

Solis Refractio Horizontalis Simplex inventa à nobis est independenter ab omni Parallaxi, & Motibus Lunaribus; quod quidem totum ratiocinium nostrum excutienti manifestum erit. Id Visum est hic annotare, ut appareat circulum non fuisse commissum in maximâ Eccentricitate Lunæ determinandâ lib. 2. num. 41, *ex quo loco huc, & ad* numerum seq. cum suo Scholio, *reprimisque ad* Scholium num. 46. *ubi totum hoc negotium concludetur, Lectores remiseram.*

Fig. 13.

Def. 4. *num.* 22.

per num.

NUMERUS XXVII.

Solis suprà Horizontem apparentis Refractiones tam Simplices, quàm Compositas invenire.

§. 1. Iisdem positis quæ *num. præced.* Instrumento cape distantiam Solis Apparentem Refractam à Vertice; deinde eo modo, quem *num. præced.* jam tradidi, inquire Solis à Vertice distantiam Veram. Ex utriusque collatione distantiæ, Refractiones innotescent hunc in modum.

Fig. 13.

§. 2. Si Solis distantiâ à Vertice Apparens Refracta MC minor sit distantiâ verâ MI; Apparens MC subtracta Veræ MI, dabit Refractionem Simplicem IC; cui si addas Solis Parallaxem *a* IO, dato tempori convenientem, habetur Refractio Tota, seu Composita OC. Atque in hoc casu Refractio absolutè major est Parallaxi.

a Quæ reperitur per num. 21.

§. 3. Si distantia à Vertice Apparens Refracta par est distantiæ Veræ MI, Refractio Parallaxi æqualis est, parallaxis enim isti momento conveniens sit IO. Vi Parallaxeos Sol, si abesset Refractio, appareret in O: cùm ergo appareat in I, liquet Parallaxim IO à Refractione elidi, ac proinde hanc illi æqualem esse.

§. 4. Si distantia Apparens Refracta MX à Vertice major sit distantiâ Verâ MI, sed non tanto excessu, quanta est Parallaxis IO, tunc Refractio est OX, minor Parallaxi, quæ ut innotescat, aufer à distantiâ Apparente Refractâ MX, Veram MI, & residuum IX à Parallaxi IO: reliquum dabit Refractionem OX.

§. 5. Si distantia Apparens Refracta à Vertice par sit distantiæ Veræ MI, unà cum Parallaxi IO, Refractio est nulla, seu insensibilis. Siqua enim esset, attolleret Solem suprà locum O, ad quem à Parallaxi deprimitur.

Hunc in modum Refractiones Solis ad singulos Altitudinis Apparentis Refractæ Gradus reperiuntur, quarum Tabulam exactissimam exhibet Ricciolus *sub finem tomi* 1. *Almag. Tab.* 9.

Corollarium.

Circa Gradum Altitudinis 45 Refractiones modo jam dicto inventæ evanescunt: isthic enim reperitur distantia Apparens à Vertice, æqualis distantiæ Veræ unà cum Parallaxi. Ergo per §. 5. &c. *unde Coroll.* 4. *num.* 28.

Scholium.

Solis Refractiones Simplices hic repertæ à nobis sunt independenter à Motibus Lunaribus, & Parallaxi quacumque; uti liquidò patebit totam inventionis seriem recolenti; quod hic moneo ob causam præcedenti Scholio indicatam.

NUMERUS XXVIII.

Refractiones Lunæ, tam in Horizonte, quàm suprà Horiz. Apparentis invenire.

Horizon Verus sit FK, Visus LE; Zenith M; Verticalis MN; Polus Mundi G; Meridianus FMR; Æquator QR.

Fig. 15.

§. 1. Appareat primò Lunæ centrum in Horizontis Visi puncto B, ipsâ infrà eum existente. Tum, ut

ut *num.26.* docui in Sole, inveni distantiam Veram Lunæ à Vertice, quæ semper reperietur minor Quadrante; adeoque Lunâ Apparente in Horizonte Viso in B, locus ejus Verus inter Horizontem Verum F K, & Visum L E, existet, ex. gr. in A, Veraque ejus distantia à Vertice erit A M, minor Altitudinis Quadrante D M. Quia porrò ad reperiendam Lunæ distantiam Veram à Vertice, opus est, ut patet *ex num. 26*, distantiâ Lunæ Æquatoriâ à Meridiano S Q, eam reperies aut solis Perpendiculi vibrationibus, ut *num. 26.* jam tradidi, vel per modum *numeri* 25. Inventam igitur Lunæ distantiam Veram à Vertice M A, aufer à Quadrante M D, & residuum D A aufer ab arcu D B, qui est *b* Parallaxis Lunæ Horiz. ac proinde notus fit per *num.* 14. Postremum residuum A B dabit Refractionem Lunæ Horizontalem.

b Ostendi ad def. 4. n. 22.

§. 2. Appareat deinde Luna suprà Horizontem Visum: sit autem Lunæ locus Verus in I; locus Visus, seu Parallacticus, O; adeoque Parallaxis isti momento conveniens I O. Inveni distantiam Veram Lunæ à Vertice M I, ut docui *num. 26*; sed quando isthic pro Sole adhibetur *numerus* 24, hic utere *numero* 25. Capiatur deinde instrumento Lunæ distantia à Vertice Apparens Refracta M X, quæ semper reperietur major distantiâ Verâ M I, & minor distantiâ Visâ, seu Parallacticâ M O, adeoque Lunæ locus Apparens Refractus inter Verum I, & Visum, seu Parallacticum O, intercedet. Aufer tandem distantiam à Vertice Veram M I, à distantiâ Apparente Refractâ M X, & residuum I X aufer à Parallaxi I O, quæ nota fit per *num. 14*. Postremum residuum O X, dabit Refractionem Lunæ quæsitam ad Altitudinem Lunæ Apparentem Refractam B X.

Hunc in modum inveniuntur Refractiones Lunares ad Gradus singulos Altitudinis Refractæ Apparentis.

Refractiones Lunæ Horizontales à Ricciolo inventa sunt hæ:

Æstiva	*Æquinoctialis*	*Hyberna*
Gr.0.33'.0".	Gr.0.33'.40".	Gr.0.34'.20".

Corollarium.

1. Refractio Lunæ Horizontalis semper minor est Parallaxi ejusdem Horizontali. Cùm enim Luna apparet in Horizonte Viso in B, ipsa verè existit inter Horizontes Verum F K & Visum L E (ut dixi §.1.) putà in A. Ergo A B Refractio Horizontalis Lunæ minor est arcu D B, qui est Parallaxis Lunæ Horizontalis, ut ostendi *ad defin.4. num.* 22.

2. Etiam Refractiones Lunæ suprà Horizontem apparentis sunt Parallaxibus, quæ ijs respondent, minores. Quia Lunæ locus Apparens Refractus (X) semper Medius est inter Verum (I), & Visum seu Parallacticum (O), ut dixi §. 2. Ergo Refractio (O X) rursum minor est Parallaxi (O I).

3. Quemadmodum Solis, ita & Lunæ, Refractiones modo jam tradito inventæ; ad Gradum 45 Altitudinis evanescunt. Ad hunc distantia Apparens Refracta à Vertice invenitur ad omnes deinceps Gradus usque ad 90, æqualis distantiæ Visæ, seu Parallacticæ M I O.

4. Absolutè verum est Refractiones Lunæ, Solis, Fixarum à Gradu Altitudinis 45 evanescere; ac proinde tam Parallaxes quàm Refractiones jam inde à *Cap.* 2. huc usque hoc supposito deductæ, rectè se habent. Nam per *præc. Coroll.* distantia Parallactica Lunæ à Vertice, & ejusdem distantia Refracta à Vertice à Gradu 45 per omnes sequentes usque ad 90, semper æquales reperiuntur, sic ut locus Lunæ Refractus cum Parallactico semper conveniat. Atqui æqualitas, & consensus adeò constans haberi non posset, si Hypothesis de Refractione ad Grad. 45 evanescente, ex quâ Parallaxes, & Refractiones hactenus deduxi, fuisset falsa, si enim post Grad. 45 adhuc verè Refractio se immisceret, locus Refractus in tanto Graduum numero à loco Parallactico aliquando dissideret. Quamvis enim fieri posset, ut aliquoties coinciderent; ut tamen coincidant semper, id prorsùs commentitium esse, nemo (opinor) inficias ibit. Ergo &c. Quoniam verò Sol, & Fixæ, utpote altiores, minùs *a* refringuntur quàm Luna, si hujus Refractio ad Grad. 45 evanescat, evanescet à fortiori etiam illorum, & Fixarum quidem ad Gradum Altitudinis 20, ut dicetur *num. 6, lib. 5.*

a per propr. 6. num. 20. lib. 1.

NUMERUS XXIX.

Notæ ad Refractiones.

§. 1. **R**Efractio Vespertina cæteris paribus aliquanto minor est Matutinâ, quia vespertinus aër calore Diurno magis execoctus, adeoque purior est.

§. 2. Ob eamdem causam Refractiones Æstivæ minores sunt Æquinoctialibus, & hæ Hybernis.

§. 3. In Refractiones Solis Compositas magnus error inducitur, si Parallaxis Solis nimis magna statuatur. In quo graviter Tycho, & alij eum secuti hallucinantur: dum enim Parallaxim Solis Verâ majorem Refractioni Simplici addunt, Refractionem Totam, sive Compositam necessariò efficiunt longè verâ majorem. Atque hinc factum opinor, ut Solis Refractio Horizontalis Tychonica (quemadmodum patet ex *tom. 1. Progymn. pag.* 79, & 124.) evaserit major Lunari, quòd observationibus repugnat.

§. 4. Refractiones Horizontales objectorum inæqualiter à Terræ centro distantium, ut Solis, Lunæ, apicis altissimi montis cujuspiam, omnes æquales sunt, si eadem respectu omnium fuerit Atmosphæræ, seu Refractivi aëris densitas & Altitudo. Quod quidem hactenus non videtur ab Astronomis & Opticis animadversum.

Probatio est manifesta. *In schemate* 32. *l.* 1, Terra sit A O D, Atmosphæra D O L C F, Horizon Verus A K, Visus O B, Oculus in contactu O. Refractio Horizontalis objecti E ad Oculum O ea est, quæ fit per radium Refractum O C tangentem, & in ipso Horizontis Visi plano existentem. Ille verò tantùm est unicus, is nempè qui Terram (ut jam dixi) tangit in O, ubi Oculus ponitur. Ergo etiam radius incidens Refracto illi unico C O respondens, tantùm est unicus. Quare cùm in omni Refractione Horizontali idem fit radius incidens E C, atque idem radius Refractus C O, etiam Refractionis angulus O C I semper erit idem.

Fig. 32. l. 1.

Neque hæc pugnant cum ijs quæ dixi *Propr. 6. nu.* 20. *l.* 1, nempè siderum eamdem Altitudinem, sive distantiam à Vertice habentium, illud refringi magis, quod Terræ vicinius est. Sint enim duo sidera, E remotius à Terrâ, P vicinius. Horum (ut jam ostendi) Horizontalis Refractio unâ eàdemque peragitur viâ E C O, P C O: Sed eorum distantiæ à Vertice N E, Q P, manifestò inæquales sunt.

§. 5. Quo pacto igitur fieri potest, ut (quod observationes Tychonis, & aliorum requirunt) Refractio

ctio Horizontalis Lunæ superet Horizontalem Solis, hæc autem excedat Horizontalem Fixarum?

Jam sanè liquet id non contingere (quod putavit Ricciolus *l. 10. Almag. pag. 653. Probl. 25*) quia Luna sit Terræ vicinor, quàm Sol, cùm §. 4. ostensum sit Refractionem Astrorum Horizontalem, quantumvis inæqualiter distantium à Terrâ, peragi unà semper eàdemque viâ E P G O. Videntur igitur Observationes intelligi debere non de Refractione Horizontali præcisè, sed de ijs quæ contingunt quando Astra sunt Horizonti Viso quàm proxima: si enim vel tantillam habuerint Altitudinem, poterunt ea quæ magis distant à Terrâ, refringi minus, quàm ea quæ minorem à Terrâ distantiam habent, ut patet ex *propr. 6. num. 20. l. 1.* cùm demonstratio hic allata solùm valeat, quando Astra apparent in Horizonte Viso præcisè.

a per prop. 6. num. 20. lib. 1.

CAPUT V.

Inquiruntur Apparentes Diametri Solis & Lunæ.

NUMERUS XXX.

Diametrum Solis Apparentem observare.

Fig. 19. Sectus sit Sol plano per B centrum suum, & A centrum Oculi producente in ipso circulum Maximum F R E L; quem tangant radij Visuales A C, A D, in C & D. Arcus C L D solus spectatur ab Oculo A, & est minor semicirculo F L E, sed insensibiliter.

Recta igitur C D subtendens arcum Solis Visum F L D, est Diameter Solis Apparens.

Eodem modo Apparens Diameter cujusvis Astri definitur.

Cùm autem petitur Apparens Diameter, petitur quantitas anguli C A D, sub quo ea spectatur, sive Scrupula arcus C P D centro A descripti, à quo C D insensibiliter differt. Hunc igitur angulum, sive arcum, hic oportebit inquirere. Quæ quidem disquisitio quantum Astronomis negotium facessat, ex singulorum conatibus apparet.

Modus primus.

Fig. 32. l. 1. Designa planum Meridiani duobus filis tenuissimis, suprà lineam Meridianam perpendiculariter suspensis. Tum, capite transversæ cuipiam trabeculæ innixo, contemplare Solem per tubum vitris coloratis instructum, & immobilem, donec collimando per duo fila, conspicias Solis limbum Occidentalem attingere planum per duo fila ductum; hoc est ipsum planum Meridiani; eodemque momento jube numerari vibrationes Perpendiculi, usque dum limbus Solis Orientalis idem planum attingat; hoc est usque dum totus Solis discus Meridiani planum pertranseat. Ita notum *a* fiet temporis spatium, quo Solis Diameter Meridianum pertransit. Hoc tempus, si Sol tum sit in punctis Æquinoctialibus, in partes Æquatoris *b* conversum, dabit Minuta, quæ Diameter Solis Apparens subtendit. Si verò sit extra Æquatorem, tunc de Æquatoris arcu sumenda est pars proportionalis, ut jam dicturus sum.

a per nu. 4.
b per num. 51 lib. 1.

Fig. 16. Axis Mundi sit A B; Meridianus A C B D; Æquator C D; Parallelus, in quo Sol tum est, E G F; Arcus Paralleli Diametrum Solis subtendens E G. Per G ducatur circulus Declinationis A G K B. Tempus quo arcus E G, à Solis Diametro subtensus, adeoque & arcus C K, Meridianum pertransierunt in partes Æquatoris conversum, notificavit non arcum E G, sed arcum C K, illo majorem tantò, quantò Æquator C D major est Parallelo E F. Quare si fiat ut Æquator C D, ad Parallelum E F, ita Minuta arcus jam noti C K ad Quartum: prodibunt Minuta Æquatoris, quibus arcus E G, hoc est Solis Diameter, æqualis est. Ratio autem peripheriarum C D, E F sic fiet nota. Inquire ad momentum datum, *c* Solis Declinationem E C, seu G K; quâ demptâ à Quadrante C A, notus erit arcus A E, ejusque Sinus E M. Peripheriæ *d* C D, E F sunt inter se, ut Radij ipsarum N C, M E. Sed N C, M E ratio nota est, cùm N C sit Sinus Totus, & M E Sinus noti arcus A E. Ergo peripheriarum C D, E F ratio nota est.

c per num. 37. vel nu. 52 lib. 1.
d In selectis ex Archim. pag. 7.

Idem obtineri potest in specie Solis per foramen exiguum transmissâ, numerando vibrationes Perpendiculi, dum tota species sectionem Meridiani, in Tabellâ candidâ designatam, pertranseat.

Hunc modum Ricciolus egregiè excoluit, usus Perpendiculo *i*, cujus una simplex vibratio erat ursius dimidij Secundi: eoque affirmat se omnibus pensitatis Diametrum Solis Apogei adeptum esse Min. 30'. 30", Perigei Min. 33'. Fatetur tamen de unius dimidij Minuti excessu defectûve semper se dubium mansisse, eò quòd duo circiter Secunda temporis numerentur, antequam certus sis marginem Solis planum filare sub initium, & finem observationis attingere. Interim vel ex hac ipsâ dubitatione apparet, quantam in observando vir ille subtilitatem adhibeat.

i Constructionem ejus tradit. lib. 3. Almag. c. 20.

Modus secundus.

Fig. 18. Trabeculæ ligneæ M G perpendiculariter affixa sit lamina metallica L N, rotundo foramine pertusa in B, cujus Diameter non excedat duas uncias Pedis Romani. Huic æquidistet altera tabella candida G K, intervallo 10 Pedum, aut plurium. Nota autem esse debet Diameter foraminis in minimis particulis, putà in centesimis unius unciæ, & in ijsdem particulis nota etiam sit oportet tabellarum distantia Q P. Deinde in cubiculo totaliter obscurato, sub Meridiem, intromitte Solis speciem per foramen lamellæ B, in tabellam candidam G K, sic ut cocidi axis B I, sit ad tabellam rectus, & punctura acus designa speciei Solaris Diametrum O C. Id verò debet celeriter expediri, ne interim imago Solis moveatur, vel potiùs à duobus utraque punctio in O, & C, eodem momento absolvenda. Tum circino acutissimo acceptam Diametrum O C notam fac in partibus distantiæ tabellarum Q P, seu B I. Sic enim in triangulo rectangulo B I C, nota erunt latera C I, I B: ex quibus *a* reperietur angulus C B I, qui est semissis anguli C B O; ac proinde C B O, adeoque & ipsi ad verticem æqualis D B E sub quo Solis Diameter apparet, notus fiet.

a per Prob. 5. cap. 3. Geo. Pract.

Porrò ut exacta sit observatio, præter jam dicta, sequentes adhibeantur cautelæ.

1. In determinandâ speciei Solaris Diametro O C etiam penumbra, seu umbrago includatur, exclusâ tantùm merâ ac simplici umbrâ.

2. A Diametro speciei Solaris O C, subducatur Diameter foraminis B, aliàs Diameter O C colligetur nimis magna, ob causam à Keplero indicatam,

tam, quam etiam nos, favente Deo, in *a* Dioptricâ exponemus. Hoc quia Scheinerus, diligenter alias in hoc scrutinio versatus, omisit, Diametrum Solis Visualem semper justâ majorem collegit. Ipsum consule, *Rosa Ursina lib.* 4.

a Mors Authoris, Diopticam ipsius intercepit.

3. Plura expedit adhibere foramina, ut peritè monet Ricciolus, qui se ait plerumque iteratâ observatione duo foramina adhibuisse, quorum alterum altero duplo esset majus, ut sibi constaret, an utriusvis subtractâ Diametro, æqualis (quod oportet) remaneret solaris imaginis Diameter O C.

Hoc modo usi sunt Tycho, Keplerus, Cysatus, Ricciolus; estque omnium haud dubiè optimus, si cautelæ jam dictæ adhibeantur. Nihilominus quia confinia lucis, & umbræ non sunt prorsus evidentia, & dum oculus satagit dubium eximere, inquit Ricciolus, basis lucida movetur: remanet semper dubium de excessu dimidij circiter Minuti in Diametro Solis inde deductâ.

Modus tertius.

Hunc tradit Gassendus in *lib. de Magn. Solis humilis & sublimis.* Trabeculæ, cujus longitudo erat 22 Ped. Parisiensium, normaliter affixit duas tabellas ad capita æquales, & parallelas, quarum latitudines erant 796, qualium distantia ipsarum fuit 38308, hoc est Pedum, ut jam dixi, Parisinorum 22. Deinde rectâ obversis ad Solem tabellis dimensus est umbræ latitudinem à primâ tabellâ projectam in secundam. Ex quâ demum collegit angulum Visualem Solis. Praxis verò se habet, ut sequitur.

Fig. 17. Tabellæ prioris latitudo sit A B, per cujus extremitates A, B transeuntes Solis radij K A N, P B N, in tabellâ posteriori determinent C D latitudinem umbræ ipsius A B. Concurrant autem radij in N. Quia tabellæ sunt parallelæ, erit umbra C D, parallela ad A B; ideoque si ex N ad C D perpendicularis ducatur N E, ea productа in F, etiam erit perpendicularis ad A B. Et quia tabellæ sunt Soli obversæ æquidistanter, liquet radios A N, B N, & angulos N A F, N B F æquales esse. Cùm igitur in triangulis N F A, N F B anguli ad F sint æquales, utpote recti, itemque ad A, & B, & æqualia sint latera A N, A B, etiam anguli ad N æquales erunt, itemque A F, B F æquales. Eâdem de causâ etiam, C E, D E æquales erunt. Ducatur jam D G parallela ad E F; quia etiam C D, A B, parallelæ sunt, erit E E G F parallelogrammum; ideoque F G æqualis D E.

His positis, acutissimo circino cape umbram C D, sed umbram puram, penumbrâ exclusâ, eamque fac notam in partibus distantiæ tabellarum, atque in iisdem eodem modo fac notam A B, ita notæ erunt D E, F B, quas jam ostendi earum esse semisses. Quia verò D E jam nota, æqualis ostensa est F G, etiam F G erit nota. Quare si F G notam auferas à notâ F B, remanebit B G nota. In triangulo igitur rectangulo D G B, cùm nota sint duo latera B G, & D G, seu E F tabellarum distantia, ex his reperietur angulus G D B, hoc est (quia D G, N F sunt parallelæ) F N B. Quare cùm ostenderim suprà F N B, esse semissem totius K N P, etiam K N P, subtensus à Solis Diametro Apparente, notus erit. Quod erat quæsitum.

Quemadmodum modus secundus plerumque excessu aliquantillo peccat, ita postremus ille defectu: Proclive est siquidem ob incerta umbræ, ac lucis confinia, ut cùm umbræ C D quantitatem accipis, aliquid penumbræ, seu lucis dubiæ includatur, adeoque umbra C D capiatur justâ major; ex quâ deinde angulus N colligatur justo minor: nam quò C D, adeoque & E D, seu F G, fuerit assumpta major, eò reliqua G B, adeoque & angulus G D B, hoc est, F N B, erit minor. Quæ cùm ita sint, si utroque modo utaris, atque inter collectas ex utroque Diametros, mediam eligas, proximè ad veram accedes.

Præter hosce tres modos jam explicatos, alij sunt plures ab Astronomis usurpati; sed minùs certi, quos hic propterea omisi.

NUMERUS XXXI.

Solis Apogei Diameter Apparens est Min. 30'. 30". Perigei Min. 33'. 8": Medij Min. 31'. 56".

Et certum est Diametrum Solis Perigei Apparentem non esse minorem 30 Minutis.

Veritas tam partis primæ quàm secundæ comperietur ex accurato exercitio modi triplicis *Num. præc.* Ricciolus sanè, qui videtur præ alijs omnibus in hoc negotium accuratiùs incubuisse, has quantitates omnibus pensitatis amplexus est.

Quod verò seorsim ad partem secundam attinet, ea insuper ex omnium Astronomorum observatione constat, quorum nullus Diametrum Solis Apparentem Minutis 30 reperit minorem.

NUMERUS XXXII.

Diametrum Lunæ Apparentem observare.

Modus primus.

Idem erit cum eo, qui fuit *Num.* 30 primus pro Sole. Secundus isthic & tertius Lunæ minùs conveniunt.

Modus secundus.

Observa quàm accuratissimè initium alicujus Eclipseos Lunæ Totalis, adhibitis cautelis exponendis infrà *l.* 4, *a* atque ab eo momento vibrationibus Perpendiculi metire *b* tempus usque ad momentum illud, quo Luna præcisè tota obscuratur; quod sit ex. gr. Horâ 1. 6'. Inquire deinde motum Horarium Lunæ à Sole; quod quidem fiet hoc modo.

a num. 63.
b per num. 4.

Inveni motum *c* Lunæ Verum ad momentum 12 Horis tempus observationis præcedens, & rursum ad momentum 12 Horis subsequens. Verorum motuum sic inventorum differentiam divide per 24; quotiens dabit motum Horarium Lunæ Verum Eclipsis tempori convenientem, ut patet. Eodem modo reperies motum Verum Horarium Solis. Aufer deinde motum Horarium Solis à motu Horario Lunæ, Residuum dabit motum Horarium Verum Lunæ à Sole, Eclipseos tempori convenientem. Sit is ex. gr. Grad. 0. 26'. 48". Alios modos *vide infrà l. 4. num.* 2.

c per num. 46, *vel* 47 *lib.* 2.

Cùm igitur Luna moveatur à Sole spatio Horæ 1. ex. gr. Gradibus 0. 26'. 48": igitur Horâ 1. 6', à Sole quot Minutis removebitur? Per Regulam prop. Minuta quæsita innotescent: & tantam esse Apparentem Lunæ Diametrum concludes. Cùm enim positum fuerit ab initio obscurationis usque ad obscu-

obscurationem totalem fluxisse Horam 1. 6', manifestum est tot Minuta explere Apparentem Lunæ Diametrum, quot Minutis spatio Horæ 1. 6', Luna à Sole recessit.

NUMERUS XXXIII.

Diameter Apparens Lunæ Apogeæ in ☌ & ☍ est Gr. 0. 28'; in □□ Gr. 0. 27. Lunæ Perigeæ in ☌ & ☍ Grad. 0. 33'. 30". in □□ Grad. 0. 35'. 6". In distantiâ Mediâ Grad. 0. 30'. 30".

APparentis Diametri Lunæ quantitas, ut habeatur exacta, pluribus ea modis inquirenda est, & ex inventis media quædam eligenda. Adhæc conciliari ea debet cum observationibus Eclipsium, quarum quantitas à Solis, & Lunæ Diametris Apparentibus dependet. Incredibili labore, & solertiâ hoc in negotio Ricciolus noster versatus est, qui tandem hisce omnibus, pluribusque alijs expensis, quantitates suprà recensitas amplectitur. Ipsum consule *Almag. l. 4. cap. 16. præsertim pag. 231. 232*, ubi luculentissimè ostendit, quàm egregiè cum Eclipsium phœnomenis, Diametri à se constitutæ, consentiant.

NUMERUS XXXIV.

Veram Solis ac Lunæ Diametrum invenire.

Fig. 19.

TAngentes ab Oculo ductæ A C, A D, determinent Apparentem Luminaris Diametrum C D, atque ex B centro ducantur B A, B C, B D. Referat autem A B distantiam Luminaris Perigeam, quæ nota est *per num.* 19: vel *per num.* 10: proinde C A D metietur Diametrum Apparentem Luminaris Perigei, qui notus est *per num.* 31, vel *per num.* 33. Quoniam triangula C B A, D B A sibi mutuò æquilatera sunt (Nam A C, A D, utpote tangentes, æquantur *per Corol. 2. 36. 3*; & B C, BD sunt radij, & B A communis est) erunt *per* 8. 1. anguli B A C, B A D æquales. Quoniam ergò notus est C A D, etiam ejus dimidius B A C notus erit. Angulus verò B C A in contactu C, *per* 18. 3. rectus est. Quoniam igitur in triangulo rectangulo A C B, nota sunt latus A B, *b* distantia Lunaris Perigei, & acutus B A C, ex his *a* reperietur B C Semidiameter Vera Luminaris.

b per num. 32, & 19.
a per Prob. 2. cap. 3. Geo. Pract.

Corollarium.

Eodem modo reperitur Diameter Vera cujusvis Astri, datis Apparente ejus Diametro, & distantiâ à Terrâ.

NUMERUS XXXV.

Ad datum quodvis tempus Diametrum Apparentem Solis, vel Lunæ invenire.

Fig. 19.

CUm Luminarium distantiæ à Terrâ assiduè varientur, necesse est etiam Apparentem Luminarium magnitudinem assiduò variari.

Oporteat igitur eam ad datum tempus, adeóque ad quamlibet à Terrâ Luminaris distantiam invenire. Resumatur *in figurâ* 19 triangulum rectangulum A C B, in quo distantia Luminaris est A B, & Semidiameter Vera BC, angulus verò Diametri Apparentis est CAD. Inveni ad datum tempus distantiam Luminaris A B; Lunæ quidem *per num.* 13; Solis verò *per num.* 10. & 18: tum *d* utriuslibet reperi Semidiametrum Veram B C. Ex his *b* angulus C A B innotescet: qui cùm sit æqualis *o* angulo B A D, notus erit Apparentis Diametri angulus totus C A D ad tempus datum.

Hunc in modum fiunt Diametrorum Apparentium Tabulæ.

d per num. prec. per Probl. 4. cap. 3. Geo. Pract.
o Ostendi num. prec.

CAPUT VI.

De magnitudine Solis, & Lunæ.

NUMERUS XXXVI.

Sol major est Terrâ plus quàm millies septingenties. Imo novissimæ atque accuratissimæ Lunaris Dichotomiæ observationes, Solem exhibent plus quàm vicies, & septies millies Terrâ majorem.

NUmero 17 ostensum est distantiam Solis à Terrâ excedere Semidiametros Terræ 2850; & *Numero* 31 Diametrum Solis Apparentem nunquam minorem esse 30 Minutis. Ex hac Diametro Apparente, & distantiâ Semidiametrorum Terr. 2850, quæ utraque veris minora sunt, reperitur per *Num.* 34. Vera Solis Diameter major Semidiametris Terr. 12 $\frac{45}{1000}$; quæ minor est verâ, utpote deducta ex Diametro Apparente, & distantiâ nimis parvis. Sed demus eam esse tantùm Semid. 12, ac proinde sic Diameter Terræ ad Diametrum Solis ut 1 ad 12. Si hæc ratio per quatuor terminos continuetur, 1. 12. 144. 1728, erit ut primus terminus, nempè 1, ad quartum 1728; ita *a* Terra ad Solem. Atqui hæc Solis quantitas elicita est ex Diametro Verâ, nimis parvâ. Ergo Sol est Terrâ major plusquam vicibus 1728.

a per 18. 12.

Verùm longè altiùs solem evehunt observationes Lunæ Dichotomæ, summâ diligentiâ atque solertiâ à Vendelino, ac inprimis Ricciolo nostro institutæ: ex quibus, (ut *num.* 19. ostensum est) colligitur distantia Solis à Terrâ nunquam minor 7000 Semid. Terr. Ex hac distantiâ, & Apparente Diametro 30 Min. (quæ vera *b* minor est) elicitur Vera *c* Solis Diameter Semidiametrorum Terrestrium 30 $\frac{53}{1000}$; pro quâ assumo tantùm Semid. 30, ut Diameter Terræ, sit ad Solis Diametrum, sicut 1 ad 30. si ea proportio continuetur per 4 terminos, 1. 30. 900. 27000, erit ut 1, primus terminus, ad 27000 terminum quartum, ita *o* Terra ad Solem. Quæ ipsa Solis quantitas quia deducta est ex verâ Diametro, adhuc nimis parvâ, erit Sol Terrâ major plus quàm vicibus 27000.

b per n. 11.
c per n. 34.
o per 18. 12.

NUMERUS XXXVII.

Luna est ad Terram, ut 1 ad 55.

EX distantijs Lunæ Apogeæ, & Perigeæ in ☌, ☍ *num.* 10, repertis; ac præsertim ex mediocri repertâ *num.* 13. *Coroll.* 1, & ex Diametris Apparentibus *num.* 33. constitutis, colligitur per *num.* 34, vera Lunæ Diameter esse ad Diametrum Terræ, ut 26$\frac{1}{4}$ ad 100. Quare si hæc proportio per quatuor terminos continuetur, erit ut *d* primus, nempè 26$\frac{1}{4}$ ad quartum, ita Luna ad Terram. Ea vera proportio post absolutum calculum reperitur, quæ est 1 ad 55.

d per 18. 12.

CAPUT VII.

Modus inveniendi Parallaxes Longitudinis & Latitudinis.

NUMERUS XXXVIII.

Definiuntur Parallaxes Longitudinis, & Latitudinis, item Parallaxes Ascensionis Recta, Declinationis, Distantia.

SUppositis ijs quæ definita sunt *lib. 1. num. 18, & lib. 3. num. 7.* circa Parallaxim Altitudinis, ab hac demum ad reliquas Parallaxium species progrediemur. Species autem sunt istæ, *Parallaxis Altitudinis, Latitudinis, Longitudinis, Ascensionis Recta, Declinationis, Distantia*, ad quarum intelligentiam clariorem, duplex schema adhibeo, in quo

Meridianus sit QZP, Polus Boreus A; Polus Zodiaci B; Zenith Z; Horizon Verus QP; Verticalis ZX; Ecliptica LH. Per B Polum Eclipticæ, & Zenith Z, ducatur circulus Maximus BZN; erit hic unus ex circulis Latitudinis; semicirculum verò Eclipticæ, qui suprà Horizontem extat, secabit *a* bifariam in O, in duos Quadrantes; quorum unus ad Orientem pertineat, alter ad Occidentem. Quadrans Orientalis exhibetur in *fig.* 23. estque HO: Occidentalem repræsentat *figura* 24, designaturque iisdem litteris HO. His præmissis sit

Fig. 23. & 24.

a per Coroll. 1. nu. 71. lib. 2.

DEFIN. 1. Sidus quodcumque dicitur esse in *Nonagesimo Gradu Ecliptica* (nimirum ab Horizonte computato) cùm attingit circulum Latitudinis, seu Longitudinis, Verticalem BZON. Hic enim, (ut dixi) semicirculum Eclipticæ conspicuum bisecat in O.

Sit deinde in circulo Verticali Verus astri locus in R, Visus seu Apparens in F, adeoque Parallaxis Altitudinis sit RF. Ab Eclipticæ Polo B, ducantur per locum Verum R, & Visum F, Latitudinum circuli BRK, BFI, secantes Eclipticam in K, & I. In K terminatur Longitudo Vera sideris, in I Visa: ac proinde Longitudinis Veræ, & Visæ differentia est KI. Latitudo autem Vera est RK, Latitudo Visa FI.

2. *Parallaxis Longitudinis*, est differentia (KI) Longitudinis Veræ & Visæ.

3. *Parallaxis Latitudinis*, est differentia Latitudinis Veræ RK, & Visæ FI.

4. *Triangulum Parallacticum Solis aut Luna*; est quod tres Parallaxes, Altitudinis, Longitudinis & Latitudinis constituunt.

Locus Verus sit R vel C, Visus F vel D. Per F vel C ducatur arcus FS, vel CM, inter Latitudinum circulos BRK, BFI, vel BC, BMD, parallelus Eclipticæ LH; qui quoad sensum non differt ab arcu circuli Maximi, & æquali ipsi KI, seu GE, Longitudinum differentiæ, eò quòd in Lunâ & Sole dictus arcus FS, vel CM, non nisi modicè ab Eclipticâ distet. Triangulum igitur Parallacticum est RFS, seu CDM, cujus unum latus est RF, seu CD, Altitudinis Parallaxis; alterum FS (hoc est KI) vel CM (hoc est GE) Parallaxis Longitudinis; tertium RS, seu MD, Parallaxis Latitudinis, differentia videlicet Latitudinis Veræ KR & Visæ IF, sive Veræ ED & Visæ GC, arcus enim IF, KS; item GC, EM ob parvitatem & propinquitatem censentur esse paralleli.

5. *Parallaxis Ascensionis Recta*, est differentia Ascensionis Veræ & Visæ.

6. *Parallaxis Declinationis*, est differentia Declinationis Veræ & Visæ.

Pro 5. & 6 def. explicatione, Horizon esto QP; Zenith Z; Polus Boreus A; Æquator MN; Verticalis ZX; Syderis locus Verus R, Visus F; Parallaxis Altitudinis RF; Sectio Verna O. Ex Polo A, per Verum locum R & Visum F, transeant Declinationum circuli ARK, AFI. Igitur *a* Ascensio Vera est OK, Ascensio Visa OI; & KI ipsarum differentia: hæc est Parallaxis Ascensionis Rectæ. Similiter *b* Declinatio Vera est RK, Declinatio Visa est FI, ductoque arcu parallelo FS, ipsarum differentia est RS; hæc est Parallaxis Declinationis.

Fig. 20.

a Def. 39. nu. 1 lib. 1.
b Def. 18. ibid.

7. *Parallaxis Distantia*, est distantiæ Veræ Visæque differentia.

Horizon sit QP; Zenith Z; duo Sydera, C, & D; Verticales per ea ducti ZCM, ZDB; Sydera m loca Visa sint M, N; Distantia Vera arcus DC, Distantia Visa arcus MN, circuli uterque Maximi. Igitur distantiæ Veræ DC & Visæ MN differentia est Parallaxis Distantiæ.

Fig. 21.

Ex his facile jam erit exponere species Refractionis, qua totidem sunt quot Parallaxium.

NUMERUS XXXIX.

Affectiones prima Parallaxium Longitudinis & Latitudinis, ac caterarum.

1. IN gradu Eclipticæ Nonagesimo Parallaxis Longitudinis evanescit.

Ecliptica sit LH; Horizon QP; Polus Eclipticæ B; Zenith Z. A Polo Eclipticæ B, per Verticem Z ducatur circulus Longitudinis BZN. Hic bisecat *a* semicirculum Eclipticæ conspicuum in O. Quoniam igitur Sydus ponitur esse in Nonagesimo Eclipticæ, erit in O, vel certè in *b* circulo Longitudinis Verticali BZN, putà in V: Sit ergo Verus ejus locus in V. Quoniam verò BZN est circulus & *m* Longitudinis & Altitudinis, in eo continget Parallaxis Altitudinis, putà VY, adeoque locus Verus V, & Visus Y in uno Longitudinis circulo existunt. Ergo nulla hoc casu est Parallaxis Longitudinis, ad quam requiruntur duo Longitudinum circuli, quorum unus transeat per locum Verum, alter per Visum.

Fig. 23. 24.

a per Cor. 2 nu. 71. lib. 2.
b per def. 1.
m Def. 31. nu. 1. lib. 1.

2. In gradu Eclipticæ Nonagesimo, una eademque est Altitudinis & Latitudinis Parallaxis.

Nam positis iisdem quæ affectione 1, cùm circulus BZN sit Altitudinis circulus, liquet VY esse Parallaxim Altitudinis; & cùm idem BZN etiam sit *i* circulus Latitudinis, liquet VY esse differentiam Latitudinis veræ VO, & Visæ YO, ac proinde VY etiam esse Parallaxim Latitudinis.

i per def. 31. n. 1. l. 1.

3. In Nonagesimo gradu Æquatoris, sive in Meridiano, nulla est Parallaxis Ascensionis Rectæ, & Parallaxis Declinationis eadem est quæ Altitudinis.

In *fig.* 20 Meridianus sit QZAN; Polus Boreus A; Æquator MN; Sectio Verna O; locus Syderis Verus V, Visus Y. Quoniam Meridianus QAN est hic circulus non solùm Altitudinis, sed etiam *o* Declinationis, liquet loci tam Visi Y quàm Veri V, eamdem esse *d* Ascensionem Rectam OM; & VY esse Parallaxim Altitudinis simul & Declinationis ab Æquatore MN.

Fig. 20.

o per def. 18 num. 1. lib. 1.
d per def. 39 num. 1. lib. 1.

4. Cùm duo Sydera D, & N, sunt in eodem Verticali ZB, Parallaxis distantiæ eadem est, quæ Altitudinis. Patet.

Fig. 21.

5. Syderis extra Nonagesimum Eclipticæ gradum positi, in Quadrante Orientali Longitudo Vera minor est Visâ, ac proinde Parallaxis auget Longitudinem. At in Quadrante Occidentali Longitudo Vera major est Visâ, adeoque Parallaxis Longitudinem minuit.

Fig. 23. 24. a Def. 31. nu. 1. lib. 1. b per Cor. 1 num 71. lib. 2.

In *fig.* 23 & 24 sit Horizon Q P; Vertex Z; Verticalis Z X; Ecliptica L H; Polus ejus B; circulus *a* Longitudinis per Verticem transiens, & Eclipticam *b* bisecans in O, sit B Z O N, locus Verus Syderis in R; Visus in F. Per R & F ducantur Longitudinum circuli B R K, B F I. Longitudo igitur Vera terminatur in K, Visa in I: quæ puncta primò sint in Quadrante Eclipticæ Orientali H O, *in fig.* 23. Quoniam igitur Longitudo numeratur secundùm ordinem Signorum ab Occasû in Ortum, manifestum est Longitudinem (*in fig.* 23) numerari per L versùs O, ac proinde Longitudinem Veram terminatam in K, minorem esse Longitudine Visâ terminatâ in I.

Sint deinde puncta K, & I in Quadrante Occidentali H O, *in fig.* 24. Rursum igitur quia Longitudo numeratur ab Occasu in Ortum, hoc est per H versùs O, liquet Longitudinem Veram terminatam in K, majorem esse Visâ terminatâ in I.

6. Manentibus iisdem: in Regionibus citra Tropicum Cancri, Parallaxis Latitudinis R S, minuit Latitudinem Veram Borealem R K: tunc enim Latitudo Visa est S K.

Quod si Parallaxis Lat. æqualis est Latitudini Veræ Boreali, ita ut loco Vero existente R, Visus sit T in ipsâ Eclipticâ, tunc Parallaxis Latitudinem perimit; si excedit, ita ut Vero loco existente R, Visus sit ultra Eclipticam, putà in C, tunc Parallaxis tollit Borealem Latitudinem Veram R K, eamque mutat in Australem Visam C G.

Fig. 23. 24. a per Cor. 2 nu. 71. lib. 2. b per def. 2. m Def. 31. nu. 1. lib. 1.

Denique si Latitudo Vera fuerit Australis ex. gr. C T, eam Parallaxis Lat. semper auget: Vero enim loco existente in C, ultra Eclipticam versùs Austrum, locus Visus, qui semper Vero humilior est, necessariò longiùs ab Eclipticâ versùs Austrum elongatur, putà in D; Inde Latitudo Visa D T, semper excedet Veram C T, adeoque Parallaxis Lat. C D, Latitudinem Veram C T semper augebit.

7. Universim, si Parallaxis Altitudinis, & Latitudo Astri ad Polos oppositos tendant, Parallaxis Altitudinem vel minuet, vel tollet, vel transferet: si tendant ad Polum eumdem, Parallaxis Latitudinem semper augebit.

8. Parallaxis Altitudinis semper major est tam Parallaxi Longitudinis, quàm Parallaxi Latitudinis, cùm ab eâ differt.

i per def. 31 n. 1. l. 1. o per num. 68. lib. 2.

Triangulum enim Parallacticum F S R ad S rectangulum *o* est, in eoque latus recto angulo oppositum est R F Parallaxis Altitudinis, Parallaxes autem Longitudinis S F, & Latitudinis R S opponuntur acutis. Ergo per 11 Clavij *de Tri. Sph.* R F Parallaxis Altitudinis cæteris major est.

NUMERUS XL.

Fig. 20. a Quid ea sit vide l. 1. n. 1. def. 40. n vel ut tradam lib. 545. independenter ab his. b Def. 39. nu. 1. lib. 1.

Ascensionem a Rectam Medij Cæli ad datum tempus invenire.

INveni tempus Diei, sive distantiam Solis Æquatoriam à Meridiano *per num.* 23 *aut* 24, *eorumque Corollaria.* *n* Reperi deinde Ascensionem Rectam Solis, sive distantiam *b* Solis Æquatoriam à Sectione Vernâ per *num.* 52. *lib.* 1. Huic deme distantiam Solis Æquatoriam à Meridiano, si Sol Matutinus est; adde verò, si Sol est Pomeridianus: prodibit Ascensio Recta Medij Cæli quæsita.

Demonstratio patet ex definitionibus citatis.

NUMERUS XLI.

Punctum Eclipticæ Culminans ad datum tempus invenire: hoc est, puncti Eclipticæ per Meridianum transeuntis Longitudinem, seu distantiam à principio ♈ ejusque Altitudinem Meridianam invenire.

Fig. 22.

MEridianus esto F A E; Horizon M R; Vertex Z; Æquator F G, ejusque Polus Boreus A, Ecliptica D E, secta à Meridiano in D. Igitur punctum Eclipticæ Culminans est D. Oportet hujus distantiam ab initio ♈, ejusque Altitudinem Meridianam D M invenire.

d Def. 5. num. 22. g per def. 4. n. 66 l. 2. i per nu. 52. lib. 1. f Ibid.

Sol eo tempore existat in O. & à Polo A per O ducatur Declinationis Quadrans A P, erit F P distantia *d* Solis Æquatoria à Meridiano, quam notam fac per *num.* 23. *vel* 24 *eorumq; Corollaria*: vel, ut independenter ab his tradam *lib.* 5, *num.* 45. Sit verò F P primò minor Gradibus 90. Quoniam A Polus est Æquatoris F G, arcus F P *g* metitur angulum F A P. Cum ergo F P notus sit, etiam angulus F A P, seu D A O notus erit. Inquire deinde Declinationem, Solis ad tempus datum, quæ si est Borea, ut hic O P, eam aufer à Quadrante A P, & notum fiet latus A O. Præterea notus fiat *f* angulus D O A quem cum Eclipticâ D E facit Declinationis circulus A O P. Quoniam igitur in triangulo D A O nota sunt latus A O, & duo anguli D A O, D O A, ex *x* his reperietur tam arcus D A, quàm arcus D O Eclipticæ à Sole O, ad punctum Eclipticæ Culminans D. Quare si nota *m* fiat Longitudo, seu distantia Solis ab initio ♈ ad datum tempus, etiam puncti Eclipticæ Culminantis D distantia ab initio ♈ nota erit, addendo videlicet arcum D O Longitudini Solis, si is Occidentalis est; vel demendo, si Orientalis. Tandem A Z complementum Altitudinis Poli A R notæ per *nu.* 27. *l.* 1. aufer à noto jam arcu D A, & residuum Z D aufer à Quadrante Z M; remanebit D M Altitudo Meridiana puncti Culminantis D.

x per trigon. Sph. prob. 20. m per nu. 55. lib. 1.

Sit deinde distantia Solis Æquatoria à Meridiano major Gradibus 90, arcus ex. gr. F N, Sole existente in S, ductoque Declinationis arcu A N S. Tum verò utere triangulo S A E, quod ita resolves. Arcus F N notus fiet, ut *supra* F P. Aufer F N à semicirculo F G: restabit N G notus: qui quia metitur angulum *n* N A G, seu S A E, etiam is notus erit. Angulus porrò Q S N notus fiet *o* ut *supra* D O A. Quare Q S N ablato à duobus rectis, seu Gradibus 180, notus erit reliquus N S E, seu A S E. Arcus autem A S, fit notus Declinatione Solis S N additâ Quadranti A N. Quoniam ergo in triangulo S A E, nota sunt latus A S, & duo anguli S A E, A S E, ex *p* his reperietur tam arcus E A, quàm arcus Eclipticæ S E, à Sole S usque ad imum Eclipticæ punctum E, transiens videlicet per imum Meridiani semicirculum. Quare cùm nota etiam sit distantia Solis ab initio ♈, latere non poterit imi Eclipticæ puncti E distantia ab initio ♈, ac proinde nec puncti D Culminantis, utpotè distantis ab imo, Gradibus 180. Aufer tandem Poli Altitudinem A R, à noto jam arcu A E, remanebit R E depressio Meridiana imi Ecl. puncti E.

n per def. n. 66 l. 2. o per sch. n. 52. lib. 1. p per trig. Sph. prob. 20.

NU-

NUMERUS XLII.

Punctum Ecliptica ad datum tempus oriens & occidens, unà cum angulo Ecliptica ac Horizontis invenire.

Fig. 22. a per num. praec. b per 68. lib. 2. c per 52. lib. 1. o Trigon. Sph. prob. 5. & 12.

Iisdem positis, quæ *num praeced.* reperi a puncti Eclipticæ Culminantis D distantiam ab ♈ initio, ejusque Altitudinem Meridianam D M. Quia Meridianus M Z E transit per Verticem Z, hoc est Polum Horizontis M R, angulus D M Q b rectus est in triangulo M D Q: in quo quia insuper notum est latus M D, & angulus c M D Q, Meridiani cum Eclipticâ D E ex his o reperientur angulus D Q M Eclipticæ & Horizontis, itemque arcus D Q: quem si addas distantiæ puncti Culminantis D ab initio ♈, prodibit punctum Eclipticæ oriens; si demas, occidens.

NUMERUS XLIII.

Gradum Ecliptica Nonagesimum, ejusque situm respectu Meridiani invenire ad tempus datum.

Fig. 24. m per nu. praec.

Meridianus esto P Z Q; Horizon P Q; Vertex Z; Ecliptica L H, ejusque Polus B. Inveniatur m puncti Eclipticæ H dato tempore occidentis distantia ab ♈ initio. Huic si addideris Gradus 90, habebis Nonagesimi O distantiam ab initio ♈.

Fig. 23.

Vel *in fig.* 23 inquire puncti Eclipticæ orientis H distantiam ab initio ♈, eique aufer Grad. 90: prodibit distantia Nonagesimi ab ♈ initio.

Inquiratur deinde ad tempus datum puncti Culminantis L Eclipticæ Longitudo, seu distantia ab ♈ initio. Si ea est æqualis Longitudini Gradus Eclipticæ Nonagesimi *suprà* inventi erit Nonagesimus in Meridiano; si major, Nonagesimus à Meridiano declinat in Occasum; si minor, in Ortum.

NUMERUS XLIV.

Altitudinem Nonagesimi, & distantiam à Vertice invenire ad tempus datum.

Fig. 24. vel 23.

Sit meridianus P Z Q; Horizon P Q; Vertex Z; Ecliptica H L, ejusque Polus B; Verticalis per B Polum Eclipticæ transiens B Z N, qui cùm semicirculum Eclipticæ conspicuum n bisecet in O, erit Nonagesimus Eclipticæ Gradus ab Horizonte in O, adeoque H O est Quadrans Eclipticæ. Oporteat igitur Nonagesimi Altitudinem N O, & à Vertice distantiam O Z invenire.

n per Cor. 1. n. 71. l. 2.

Quoniam Vertex Z est Polus Horizontis P Q, perque eum transit circulus Maximus Verticalis nempè Z N, angulus Z N H, sive O N H, rectus a est. Inveni deinde b O H N angulum Eclipticæ & Horizontis. Cùm igitur in triangulo rectangulo H N O, nota sint angulus O H N, & basis H O, quæ ex hyp. est Grad. 90, ex his reperietur p N O Altitudo Nonagesimi; eâque demptâ à Quadrante N Z, remanebit O Z distantia Nonagesimi à Vertice.

a per n. 68. lib. 2. b per n. 42. p per trig. Sph. prob. 2.

NUMERUS XLV.

Ad datum tempus reperire 1. Luminarium distantiam Veram à Vertice: 2. angulum in ipsorum centro, factum à Verticali & Eclipticâ: 3. angulum factum in Luna centra à Verticali & circula Latitudinis.

Fig. 25.

Esto Meridianus Q Z P; Horizon Q P; Ecliptica L H; ejus Polus B; Polus Mundi Boreus A; Vertex Z; Verticalis per B Polum Eclipticæ transiens B Z N, determinans a Eclipticæ Nonagesimum in O.

a per Cor. 1. num. 71. lib. 2.

§. 1. Sit primò Luminare (id est Sol vel Luna) extra Nonagesimum in Eclipticâ in C. Ducatur arcus Latitudinis, seu Longitudinis B C, & Verticalis Z C G. Nota fiat Longitudo b Nonagesimi O, & Longitudo Luminaris c C: ita nota erit Longitudinum differentia O C. Inveniatur item n O Z distantia Nonagesimi à Vertice. Triangulum porrò o Z O C ad O rectangulum est: in quo quia nota sunt latera C O, O Z, ex his reperietur d C Z distantia Luminaris à Vertice, & angulus o O C Z Verticalis & Eclipticæ; quo dempto ab angulo O C B, qui i rectus est, remanet Z C B angulus Verticalis & circuli Latitudinis notus.

b per n. 43. c per n. 55. lib. 1. vel per nu. 46, aut 47. l. 2. n per n. 44. o per n. 68. lib. 2. d per trig. Sph. prob. 7. o Ibid. probl. 11. i per cor. 1. n. 71. lib 2. k per num. 65. lib. 2.

§. 2. Sit deinde Luna in D, extra Nonagesimum cum Latitudine Boreâ: ducanturque arcus Latitudinis B D C; & Verticalis Z D K. Ex D loco Lunæ in Zodiaco, noto per *nu.* 46, *vel* 47. *l.* 2, notus k fiat C Lunæ locus in Eclipticâ, sive Longitudo puncti C: sic enim ut priùs §. 1. in triangulo O Z C, reperientur latus C Z, & angulus O C Z, ejusque complementum Z C B, seu Z C D. Quoniam ergo in triangulo C Z D, nota sunt latus C Z, & latus C D, Latitudo Lunæ (quæ innotescit per *num.* 63. *vel* 64. *l.* 2.) unà cum angulo Z C D, ex his r reperietur D Z distantia Lunæ à Vertice, & angulus Z D C: quo sublato à duobus rectis, notus fiet Z D B, sive C D K angulus Verticalis Z D & circuli Latitudinis B C.

r per trig. Sph. probl. 19.

§. 3. Quod si Luna sit in E, cum Latitudine Australi, ducantur arcus Z E F, Z C G Verticales, & B C E Latitudinis. Latus C Z, & angulus Z C B nota fient, ut §. 2. Tum angulo Z C B dempto à duobus rectis, notus erit E C Z: Cùm igitur in triangulo E Z C nota sint latera C Z, & E C, latitudo Lunæ, cum angulo E C Z, ex his f reperies E Z distantiam Lunæ à Vertice, & angulum Z E C factum à Verticali Z E, & Latitudinis circulo D E.

f per trig. Sph. probl. 19.

§. 4. Tandem, si Luna sit in Nonagesimo cum Latitudine Boreâ O R, vel Austrinâ O M, nota fiat t O Z distantia Nonagesimi à Vertice; cui deme Latitudinem Boream, & prodibit R Z, vel adde Latitudinem Austrinam, & prodibit M Z distantia Lunæ à vertice. Quod si Luminare sit in ipso Nonagesimo O, absque ullâ Latitudine, tunc Nonagesimi & Luminaris eadem erit à Vertice distantia O Z.

t per n. 44.

Corollarium.

Tria illa quæ hoc Numero inventa sunt in Lunâ & Sole, reperientur eodem modo in quovis Sydere, cujus nota sit Longitudo & Latitudo ad tempus datum.

NUMERUS XLVI.

Ad datum Luminarium Parallaxes Longitudinis & Latitudinis invenire.

Fig. 23. vel 24.

Casus 1. Iisdem positis quæ n. 38. existat Luna in Verticalis Z X puncto R, sed appareat in F. Ex B Polo Eclipticæ ducantur circuli Longitudinis, seu Latitudinis B R K, B F I, & ab F loco Viso, sit arcus F S, parallelus Eclipticæ L H, qui ob modicam Lunæ distantiam ab Eclipticâ censetur æqualis & similis esse arcui I K. Triangulum o igitur Parallacticum est R S F rectangulum ad S (nam angulus a B K I, adeoque & R S F, rectus est), cujus basis R F, est Parallaxis Altitudinis, latus alterum S F, seu K I, Parallaxis Longitudinis, tertium R S Parallaxis Latitudinis. Vide *def.* 2. 3. 4. *num.* 38.

o Def. 4. num. 38. a per n. 68. lib. 2.

Analysim porrò hujus trianguli sic institues. Inquire *b* R Z distantiam Veram Lunæ à Vertice unà cum angulo Z R B, seu S R F, à Verticali Z X, & circulo Latitudinis B R K in centro Lunæ constituto. Reperi deinde *c* Parallaxim Altitudinis R F, Verticali distantiæ R Z congruentem. Quoniam igitur in triangulo rectangulo F S R, nota sunt latus R F, & angulus S R F, & his innotescent *d* S F, seu K I Parallaxis Longitudinis, & R S Parallaxis Latitudinis.

b per n.45. c per n. 14. d per probl. 2. cap. 3. Geom. prac. vel trigon. Sph. prob. 2. & 14.

Quia verò Solis & Lunæ Parallactica triangula sunt valde parva, non est opus recurrere ad Trigonometriam Sphæricam, sed satis erit ea resolvere ut rectilinea.

Ex hoc casu solutio reliquorum vel solâ inspectione figuræ, nullo negotio colligitur. Nam

Cas. 2. si Lunæ locus Verus est in C, ultrà Eclipticam ad Polum alterum, sed Visus in D, Parallacticum triangulum erit C M D, rectangulum ad M, solveturque ut cas. 1.

Cas. 3. si Lunæ locus Verus sit in F, sed Visus in T, in ipsa Eclipticâ, Parallacticum triangulum erit F I T, rectangulum ad I, solveturque ut casu 1.

Cas. 4. Si Verus Lunæ locus ad unam sit Eclipticæ partem in F, Visus ad alteram in C, tunc ducto arcu parallelo C φ & more solito arcubus Latitudinis B F I φ, B G C, triangulum Parallacticum erit F φ C, rectangulum ad φ: quo, ut cas. 1. docui, resoluto, innotescet φ C, seu I G Parallaxis Longitudinis, & latus F φ; à quo si demas F I Latitudinem Lunæ, quæ nota fit per *num.* 63, *vel* 64, *l.* 2. nota erit I φ, seu G C Parallaxis Latitudinis.

Cas. 5. Postremò si Luna vel Sol sit in ipsâ Eclipticâ, putà in T, sed locus Visus in C, tum triangulum Parallacticum erit T G C, rectangulum ad G, in quo *x* quærendus est non angulus T C G, sed C T G, seu Z T O, factus à Verticali, & Eclipticâ; tum reliqua analysis ut casu 1.

x per n.45.

Aliter.

Iisdem positis

Fig. 26.

Cas. 1. Lunæ Verus locus sit in Verticalis puncto R, Visus in F: ducanturque Latitudinis arcus B R K, B F I.

Inquire *i* angulum Z R B, seu K R T Verticalis, & circuli Latitudinis unà cum R Z distantiâ Lunæ à vertice, cum quâ reperi Parallaxim *k* Altitudinis R F. Quoniam igitur in trigono R K T, quod ad *m* K rectangulum est, nota sunt angulus K R T, & latus R K Vera Latitudo *n* Lunæ, ex his *e* reperientur K T, R T, cum angulo K T R. Aufer Longitudinis Parallaxim R F jam notam, à noto arcu R T: & notus erit arcus F T. Cùm ergo in trigono F I T rectangulo *o* ad I, nota sint latus F T, & angulus K T R, seu I T F, ex his *f* reperies I T & F I. Quare si I T auferas à K T jam noto, prodibit K I Parallaxis Longitudinis; & si F I Latitudinem Visam jam notam demas ab R K Latitudine Verâ etiam notâ, prodibit Parallaxis Latitudinis.

i per n.45. k per n.14. m per num. 68. lib. 2. n per n.63. & 64. l. 2. e per probl. 3. c. 3. Geo. prac. vel trig. Sph. pro. 9. 12. 5. o per n. 68. lib. 2. f per prob. 2. cap. 3. Geom. prac. vel trig. Sph. prob. 14. &

Cas. 2. Si Verus Lunæ locus sit in C, ad partem alteram Eclipticæ. Visus autem in D; ducantur Latitudinis arcus B G C, B E D, & procedatur ut in casu 1.

Cas. 3. Idem est qui in modo primo, eodemque modo solvitur.

Cas. 4. Sit Verus Lunæ locus in F, ad unam partem Eclipticæ, Visus in C, ad alteram. Ductis arcubus Latitudinis B F I, B G C, Parallaxis *p* Longitudinis erit I G, Latitudinis *y* C G.

y Vide asfect. 6. n. 39. p per n. 68. lib. 2. q per n. 63. & 64. l. 2. r per n.45.

In trigono F I T, rectangulo *p* ad I, nota est *q* Latitudo Lunæ Vera F I, & angulus *r* Z F B, seu I F T: ex quibus *a* innotescent I T & F T, cum angulo I T F, seu G T C. Aufer F T à Parallaxi Altitudinis F C (quæ ad distantiam à Vertice R Z notam per *num.* 45, reperietur per *num.* 14); eritque arcus T C notus. In triangulo igitur T G C, rectangulo *f* ad G, quia nota sunt latus T C, & angulus G T C, ex his *b* reperietur C G Parallaxis Latitudinis, & arcus G T; qui additus arcui I T jam noto *supra*, dabit I G Parallaxim Longitudinis.

a per prob. 3. c. 3 Geo. prac. vel trig. Sph. prob. 10. 3. 6. f per n. 68. lib. 2. b per prob. 2. c. 3. Geo. pract. vel trig. Sph prob. 2. & l. 14.

Cas. 5. idem est qui in Modo primo, & eodem modo solvitur.

Corollarium.

1. Per hunc modum reperientur Parallaxes in Longitudinem & Latitudinem cujusvis Syderis, quantumvis ab Eclipticâ remoti, si ejus Longitudo & Latitudo sint notæ. Unde modus hic posterior priore universalior est. Ratio est, quia non utitur arcubus parvis Eclipticæ parallelis, qui non sunt arcus Maximorum circulorum, ac proinde pro talibus assumi non debent, nisi modicè ab Eclipticâ distent.

2. Quemadmodum ex Parallaxi Longitudinis per ea, quæ hoc capite tradidimus, deductæ sunt Parallaxes Longitudinis, & Latitudinis; ita ex Refractione Altitudinis inventâ, eâdem planè methodo atque ordine, Refractiones tam Solis quàm Lunæ in Longitudinem & Latitudinem reperientur.

Scholium.

Refractio Solis tam Longitudinis quàm Latitudinis, Simplex, sive pura (seclusâ videlicet Parallaxi) modo jam indicato inventa, est independens ab omni motu Lunæ. Ad eam quippe reperiendã concurrunt primum Refractio Solis Simplex in Altitudinis circulo, quæ independenter ab omni motu Lunæ reperta fuit nu. 26 & 27, *ut ibidem* in Scholijs *annotavimus; deinde ea quæ hoc* c. 7, *deducta sunt; quæ ipsa quoq; quantum ad Solem pertinent à Lunæ Motibus nusquam dependent. Visum id est hoc etiam loco annotare, ut appareat, cùm in constituendis Lunæ Motibus, Solis Refractione Simplici in Longitudinem o usi fuimus, nequaquã vitiosum circulum, quod in ratiocinijs Astronomicis nimis est quam proclive, commissum fuisse.*

o Num. 41. l. 2.

NUMERUS XLVII.

Parallaxim Longitudinis Lunæ à Sole in ☌ invenire ad tempus datum.

Parallaxis Lunæ in ☌ semper major est Parallaxi Solis. Quare si per ea quæ jam tradidimus, reperiantur Parallaxes tam Solis quàm Lunæ, & à Lunari auferatur Solaris, prodibit Parallaxis Lunæ à Sole. Res clarior fiet ex schemate.

Iisdem positis, quæ *nu. præcedenti*, tempore ☌ sit Verus Lunæ locus in R, per quem transeat circulus Latitudinis, seu Longitudinis B R K, secans Eclipticam L H, in K. Quoniam ex hyp. est ☌, adeoq; loca Vera Solis & Lunæ Longitudine conveniunt, liquet Verum Solis locum esse in K: per quē ducatur Verticalis Z K N, in quo Parallaxis Solis in Altitudinem sit K N, adeoq; Visus Solis locus sit in N. Per N ducatur Longitudinis circulus B N, secans Eclipticam in O, Arcus igitur K O, est Parallaxis Solis in Longitudinem. Parallaxis Lunæ in circulo Altitudinis sit R F, adeoq; Visus ejus locus sit F: per quem ducatur circulus Longitudinis B F, occurrens Eclipticæ in I. Arcus igitur K I est Parallaxis Lunæ in Longitudinem, quæ semper major est Parallaxi Solari Longitudinis K O. Utriusque differentia O I, est Parallaxis Longitudinis Lunæ à Sole: quæ proinde nota erit, si Parallaxes Longitudinis Lunæ K I, & Solis K O, fuerint inventæ.

Fig. 26.

FINIS LIBRI TERTII.

ASTRONOMIÆ
LIBER QUARTUS
DE LUNÆ ET SOLIS ECLIPSI.

OPus Astronomiæ præcipuum eſt Defectuum Solis ac Lunæ prædictio; ex quo ſua potiſſimùm huic ſcientiæ apud homines conſtat admiratio, & fides. Subtile negotium, & obſcurum: ſed evaneſcet obſcuritas, ſi ordo legitimus ſcientiæ teneatur. Fundamenta jam ſtrata libris prioribus. Per hæc volentem diſcere Lectorem, ad arcani pulcherrimi cognitionem, ordinis ubique memor & brevitatis, Deo juvante, deducam.

CAPUT PRIMUM.

Quo artificio Vera Novilunia, & Plenilunia, tam præterita quàm futura inveniantur.

QUæ ad definitiones pertinent, jam ferè præmiſimus *lib. 2. num. 20.* Eorum hic renovanda memoria eſt, ut pede inoffenſo progredi porò liceat.

NUMERUS PRIMUS.

Medium ☌, & ☍ dato tempori proximum, & ex eo omnia tam antecedentia, quàm conſequentia invenire.

Fig. 6. o *Per num. 58. l. 1.* a *Per num. 37. l. 2.*

INveni ad tempus (ſed o æquatum) motum a Medium Lunæ à Sole: Si is eſt Grad. 360, ad datum tempus erit ☌ Medium, ſive Synodus Media: Si minor eſt Gradibus 360, arcus ex. gr. G R I 154. Grad. eum aufer à Grad. 360; ita notus erit arcus reſiduus I S G Grad. 206, qui à momento dato percurrendus Lunæ reſtat, ut Solem aſſequatur. Tum ita ratiocinare: Luna motu Medio à Sole percurrit b Grad. 12. 11′. 26″. 41‴. 26⁗. 29ᵛ. 40ᵛⁱ; Die uno: igitur Gradus 206, quot Diebus abſolvet? Per Reg. prop. prodibit tempus, quod additum tempori dato, exhibebit tempus ☌ Medij proximè datum tempus ſubſequentis.

b *Per num. 34. l. 2.*

Deinde Menſis Medij Synodici, qui eſt c D. 29. H. 12. 44′. 3″. 10‴, accipe ſemiſſem, quam adde tempori jam inventi ☌ Medij: prodibit tempus ☍ Medij proximè ſubſequentis. Quod ſi eandem ſemiſſem addideris ad tempus hujus ☍ Medij jam inventi; alterum prodibit ☌ Medium proximè ſubſequens. Atque ita continuâ ſemiſſeos Medij Synodici Menſis additione omnia Media ☌, & ☍ futura reperies. Quod ſi eadem ſemiſſis à tempore noto unius Medij ☌ perpetuò ſubtrahas, prodibunt omnia ☌ & ☍ Media præterita.

c *Per num. 34. l. 2.*

Corollarium.

Non aliter ad tempus datum reperiemus tempus Quadraturæ Mediæ, aut alterius cujuſcumque phaſeos Mediæ.

NUMERUS II.

Ad datum tempus motum Verum Horarium tam Lunæ quàm Solis, & motum Verum Horarium Lunæ à Sole invenire.

UNum jam modum tradidi ſuprà *num. 32. lib. 3.* cùm de Apparente Diametro Lunæ agerem.

Modus alter ſic habet. Inveni ad tempus datum Luminaris motum a Verum. Deinde ad momentum, unâ Horâ momentum datum antecedens vel ſubſequens, iterum reperi Luminaris motum Verum. Horum motuum differentia, erit motus Horarius Verus Luminaris exactè.

a *Solis per num. 55. l. 1. Lunæ per num. 46. vel 47. l. 2. extra Syzyg. ſed per num. 40. in Syzyg. Fig. 1.*

Tertius modus, qui ad Tabulas motus Horarij conficiendas cæteris expeditior, eſt talis. Ecliptica vel Zodiacus eſto D Q F, ejuſque centrum A: Eccentricus Luminaris C R G S, ejuſque centrum B: linea Apogei D C B A G F: Anomalia Luminaris ad datum tempus, C O: linea motus Veri A O K: linea motus Anomaliæ B O: linea motus Medij A Q: Æquatio K Q: Anomalia uno gradu à priori differens, C N: linea motus Veri A N E: linea motus Anomaliæ B N: linea motus Medij A P: Æquatio E P.

EP. Puncta demùm, ad quæ maximæ Æquationes contingunt, sint R, S. His ita constitutis

Inquire ad tempus datum Luminaris Anomaliam CO, Solis quidem per *num.* 55. *l.* 1, Lunæ verò in Syzygijs per *num.* 27. *l.* 2, extra Syzygias per *num.* 46, *vel* 47. *l.* 2. Tum Anomaliæ CO convenientem reperi Æquationem KQ, Solis per *num.* 40. *l.* 1, Lunæ in Syzygijs per *num.* 39. *l.* 2, extra Syzygias per *num.* 46, *vel* 47. *l.* 2. Similiter Anomaliæ CN uno Gradu differenti debitam inveni Æquationem EP. Fiat deinde, ut Luminaris motus Medius ON Gradus unius, hoc est ut 60 Min. ad differentiam Æquationum KQ, EP; ita Luminaris motus Medius Horarius (qui notus est per *num.* 36. *l.* 1, & per *num.* 34. *l.* 2.) ad Quartum. Hoc additum vel demptum motui Medio Horario, dabit motum Horarium Verum ad tempus datum. Demi porrò debet, si Anomaliæ CO, CN, sint minores Anomaliâ CR, aut majores Anomaliâ CRS; addi verò, si Anomaliæ C*n*, C*o* sint majores Anomaliâ CR, & minores Anomaliâ CRS. Anomalia porrò CR in Sole est *a* Grad. 91. 59′, CRS Grad. 268. 1′. In Lunâ tempore Syzyg. CR est *b* Grad. 95. 1′, CRS Grad. 264. 59′; tempore Quadr. CR *c* est Grad. 97. 30′, CRS Grad. 262. 30′.

a per corol. n. 40. l. 1.
b per corol. n. 39. l. 2.
c per corol. n. 41. l. 2.

Hanc verò constructionem ita demonstro. Cùm AOK, ANE sint lineæ Veri motus ex centro Zodiaci A ductæ, manifestum est EK esse motum Verum, motui Medio NO Gradus unius ad datum tempus respondentem. Ut autem NO motus Medius unius Gradus, sive 60 Minutorum se habet ad EK motum Verum sibi dato tempore respondentem, ita Medius motus Horarius, ex. gr. Lunæ Grad. 0.32′.56″.27‴. &c. se habet ad motum Horarium Verum sibi dato tempore respondentem. Ergo etiam ut motus Medius ON 60 Min. ad suam differentiam à motu Vero EK, ita Medius motus Horarius ex. gr. Grad. 0.32′.56″.27‴. &c. est ad differentiam suam à motu Vero Horario, Quare si nota fiat differentia motus Medij NO, & Veri OK, etiam per prop. Reg. nota erit differentia motus Horarij Medij, & Veri ad tempus datum. Differentia porrò ipsorum NO, EK, eadem est quæ Æquationum KQ, EP; quòd sic ostendo. Arcus CO, DQ similes *d* sunt, itemque CN, DP. Ergo etiam reliqui NO, PQ sunt similes. Ergo etiam arcus QP, est motus Medius ON unius Gradus, seu 60 Min. Atqui differentia arcuum QP, EK, eadem est quæ Æquationum QK, EP. Ergo etiam ipsorum ON, EK, eadem est differentia, quæ Æquationum QK, EP. Sive igitur faciam (quod in constructione præscribitur) ut est ON motus Medius 60 Minutorum ad Æquationum KQ, EP, differentiam, ita motum Medium Horarium ex. grat. Grad. 0.32′.56″. &c. ad Quartum: sive faciam, ut est ON motus Medius 60 Min. ad differentiam suam à motu Vero EK sibi respondente, ita motum Medium Horarium ex. grat. Grad. 0.32′.56″. &c ad Quartum: utrumlibet fecero, idem Quartum prodibit. Atqui faciendo posterius, ostendi *supra* provenire differentiam motus Horarij Medij à Vero. Ergo etiam faciendo prius, quod nempè in constr. fuerat præscriptum, proveniet differentia Horarij motus Medij à Vero. Reliquum est, ut inventæ differentiæ additio, & subtractio præscripta demonstretur. Cùm Anomaliæ CO, CN minores sint, quàm CR, Æquatio QK major *o* est Æquatione EP. Ergo dempto communi PK, etiam QP, major est quàm EK. Atqui (ut jam ostendi) QP est motus Medius 60 Min. Ergo etiam motus Medius 60 Min. est major motu Vero EK, sibi respondente. Sed ut QK, seu ON, Medius motus 60 Min. est ad KE motum Verum sibi respondentem; ita est motus Horarius Medius ad Horarium Verum sibi respondentem. Ergo etiam motus Horarius Medius, major est motu Horario Vero, quando nempè Anomaliæ CO, CN sunt minores, quàm CR, aut majores quàm CRS. Ergo tum motus Horarij Medij, & Veri differentia, à Medio auferenda est ut habeatur Horarius Verus. Contra si Anomaliæ C*n*, C*o* sint majores quàm CR, & minores quàm CRS, tunc Æquatio *qk*, minor *p* est Æquatione *ep*, demptoque *kp* communi etiam *qp*, seu *on* motus Medius, minor est *ek* motu Vero: unde etiam motus Hor. Medius minor est Hor. Vero. Ergo tunc differentia Horarij Medij, & Veri addenda est Medio, ut Hor. Verus proveniat. Ita omnes constructionis partes sunt demonstratæ, quod erat desideratum.

d per prop. 2. num. 25. lib. 1.
a Solis per num. 55. l. 1. Lunæ, per nu. 46, vel 47. l. 2. extra Syzyg. sed per num. 42. in Syzyg. lib. 1.
o per prop. 9. num. 25. lib. 1.
p per eand.

Invento hunc in modum Horario motu Vero Lunæ, & Solis ad tempus datum, etiam

Motus Verus Horarius Lunæ à Sole

ad idem tempus obtinebitur, si Horarius Solis ab Horario Lunæ auferatur.

MOTUS VERUS HORARIUS SOLIS

	Apogei		Perigei	
est Tychoni	2′.	23″.	2′.	33′.
est Ricciolo	2.	23.	2.	24.

VERUS MOTUS HORARIUS LUNÆ IN ☌ ET ☍,

	Lu. Ap.		Lu. Per.		Lu. Ap. à Sole.		Lu. Per. à Sole.	
	′	″	′	″	′	″	′	″
est Tych.	30.	11.	35.	52.	27.	38.	33.	29.
est Ricc.	29.	20.	35.	30.	26.	46.	33.	7.

Sex Numeris sequentibus exponuntur Regulæ sex, ex quibus cognoscitur an & quantùm Vera Syzygia Mediam sequatur vel præcedat.

NUMERUS III.

Si tempore Mediæ Syzygiæ Luminarium ambæ Æquationes sint Ablativæ, & Lunæ major quàm Solis; Syzygia Vera sequitur Mediam, & Æquationum differentia est Vera distantia Luminarium.

§. 1. PRo ☌ inspice *Fig.* 5. in qua Zodiacus esto RGS, ejusque centrum A; Eccentricus Solis MDN, ejusque centrum B, & linea Apogei MN; Eccentricus Lunæ PFQ, ejusque centrum C, & Apogei linea PQ.

Fig. 5.

Quia ex hyp. Luminarium ambæ Prosthaphæreses sunt Ablativæ tempore Medij ☌ dati, utraque erunt *a* in primis Anomaliarum suarum Semicirculis MDN, PFQ, Sol in D ex. gr. Luna in F. Ducantur lineæ Anomalisticæ CF, BD. Quia supponitur esse tempus ☌ Medij, tunc autem Media Longitudo Solis, & Lunæ est una, ex. gr. SVG, & unus utriusque locus Medius G, ut patet ex *defin.* 12, & 14. *num.* 20. *l.* 2, liquet AG lineam motus Medij, necessariò jam esse Soli ac Lunæ communem; & quia per *defin.* 13. *num.* 24. *l.* 1. linea motus Medij, & linea Anomalistica æquidistant, liquet ambas CF, BD ipsi AG, adeoque & inter se esse parallelas, Demùm lineæ motus

a Propr. 6. nu. 25. l. 1.

tus Veri sint A D E, A F K, determinantes Longitudinem Veram Solis quidem S V E, Lunæ verò SVK, locaque Vera Solis E, Lunæ K. Igitur Æquatio Solis est E G, Lunæ K C, major ex hyp. quàm Solis, & Æquationum differentia est K E, ipsa nempè Luminarium distantia Vera in Zodiaco. Ordo autem Signorum fit ab S per V.

His ita constitutis, manifestum est Longitudinem Lunæ Veram S V K, minorem esse Longitudine Verâ Solis S V E, quo tempore ☌ Medium jam contingit in G; ac proinde Lunam E loco suo Vero K nondum assecutam esse locum Solis Verum E, quando loca utriusque Media jam sunt unita in G; sed restare adhuc Lunæ percurrendam motu Vero Æquationum differentiam K E, ut Soli quoad locum Verum uniatur. Hoc igitur casu ☌ Verum fit post ☌ Medium, & Luminarium distantia est Æquationum differentia.

Fig. 6. §. 2. Pro ☍ inspice *Fig. 6*, in quâ, ut prius, esto Zodiacus R G S, ejusque centrum A: Eccentricus Solis M D N, ejusque centrum B, & Apogei linea M N: Eccentricus Lunæ P F Q, ejusque centrum C, & Apogei linea P Q. Et quia supponitur Æquationes Luminarium esse Ablativas, utraque erunt [a] rursum in Anomaliæ suæ primo semicirculo: Sol in D, Luna in F. Ducantur lineæ Anomalisticæ B D, C F, & lineæ motus Medij A G, A I, quæ, quòd supponatur esse tempus ☍ Medij, sibi mutuò erunt [b] indirectum, aut certè in eodem plano Longitudinis circuli, ac proinde I est locus Oppositionis Mediæ. G igitur est locus Medius Solis; I locus Medius Lunæ; S V G Longitudo Media Solis; S V G I Longitudo Media Lunæ, Oppositio Media in I, ductisque lineis motus Veri A D E, A F K, Longitudo Solis Vera est S V E; Longitudo Lunæ Vera S V K. Demùm lineâ E D A Veri motus Solis productâ in O, punctum Oppositionis Veræ erit in O; Æquatio autem Solis est E G, sive O I; Æquatio Lunæ K I ex hyp. major quàm Solis; Æquationum differentia K O, ipsa videlicet distantia Veri loci Lunæ à puncto O Oppositionis Veræ. Ordo autem Signorum porrigatur ab S versùs V.

[a] Propr.6. nu.25.l.2.

[b] per defin. 13, & 14

His ita constitutis, liquet Longitudinem Lunæ Veram S V K, minorem esse Longitudine S V O puncti Oppositionis Veræ. Quare quando, juxta hypothesim, locus Lunæ Medius punctum Mediæ Oppositionis attigit in I, tunc Luna F loco suo Vero K nondum pervenit ad Veræ Oppositionis punctum O; sed ab eo adhuc distat Æquationum differentia K O.

NUMERUS IV.

Si tempore Mediæ Syzygiæ Luminarium ambæ Prosthaphæreses sint Ablativæ, sed Luna minor quàm Solis, Vera Syzygia præcedit Mediam, & Luminarium distantia est differentia Prosthaphæresium.

Fig. 5. Pro ☌ inspice *Fig. 5*. in quâ Medium ☌ fit in G, congruentibus ibidem locis Medijs Lunæ ac Solis: locus autem Solis Verus fit in E; Æquatio Solis E G. Si jam Æquatio Lunæ fit minor quàm Solis, ex. gr. G X, & Ablativa utraque, erit Longitudo Lunæ Vera S V X major Solis Longitudine Verâ S V E. Quare, cùm ☌ Medium celebratur in G unitis ibidem locis Medijs Solis, & Lunæ, locus Lunæ Verus X jam prætervectus est locum Solis Verum E, Æquationum differentiâ E X.

Pro ☍ inspice *Fig. 6*. in quâ punctum Oppositionis Veræ est O, Mediæ I, æquatio Solis E G, sive O I Ablativa. Si ergo, quo tempore ☍ Medium celebratur in I, convenientibus ibidem loco Lunæ Medio, & puncto Oppositionis Mediæ, Æquatio Lunæ etiam fit Ablativa, & minor quàm Solis ex. gr. I X, liquet Longitudinem Lunæ Veram fore S V X majorem Longitudine S V O puncti O Veræ Oppositionis. Ergo, cùm ☍ Medium celebratur in I, Vera Oppositio, seu ☍ Verum jam præcessit, loco Lunæ Vero X jam promoto ultrà O punctum Oppositionis Veræ, totâ Æquationum differentiâ O X.

NUMERUS V.

Si tempore Mediæ Syzygiæ Luminarium Æquationes ambæ sint Additivæ, & Luna major quàm Solis, Syzygia Vera fit ante Mediam, & Luminarium distantia est differentia Æquationum.

Pro ☌ inspice *Fig. 13. lib. 2.* In quâ construantur, & ponantur eadem omnia, quæ *suprà num. 3. §. 1*, hoc uno dempto, quod propter Æquationes Additivas, Luminaria [a] jam sint in secundo Anomaliæ semicirculo. Quoniam igitur Æquatio Lunæ G K major est Æquatione Solis G E, quo tempore ☌ Medium fit in G, convenientibus ibidem locis Medijs Lunæ ac Solis, patet Longitudinem Lunæ Veram S V K majorem esse Longitudine Verâ Solis S V E, ac proinde jam præcessisse ☌ seu Synodum Veram, loco Lunæ Vero K jam prætervecto locum Verum Solis E, differentiâ Æquationum E K.

Fig. 13. Lib. 2.

[a] Propr.6. nu.25.l.2.

Pro ☍ inspice *Fig. 14. lib. 2.* in quâ construantur eadem quæ *num. 3. §. 2*, hoc dempto quod ob Æquationes Adjectivas, Luminaria jam [q] sint in secundo Anomaliæ semicirculo. Punctum Oppositionis Veræ est O, Mediæ I, Æquatio Solis E G, seu O I, Lunæ K I major quàm Solis. Igitur Longitudo Vera Lunæ S V K, major est Longitudine S V O puncti Veræ Oppositionis O. Ergo, quo tempore fit ☍, seu Oppositio Media in I, unito ibidem loco Lunæ Medio cum puncto Oppositionis Mediæ, Luna F loco suo Vero K jam prætervecta est Oppositionis Veræ punctum O, intervallo O K, quod est Prosthaphæresium differentia.

Fig. 14. Lib. 2.

[q] Ibid.

NUMERUS VI.

Si tempore Syzygiæ Mediæ Luminarium Æquationes ambæ sint Additivæ, sed Luna minor quàm Solis, Vera Syzygia fit post Mediam, & Luminarium distantia est Prosthaphæresium differentia.

Pro ☌ inspice *Fig. 13. l. 2.* in quâ ☌ Medium fit in G, locus Verus Solis in E, Æquatio Solis E G. Si jam Æquatio Lunæ fit minor quàm Solis, putà G X, atque utraque Additiva, erit Vera Longitudo Lunæ S V X minor Verâ Solis Longitudine S V E. Igitur quo tempore Solis ac Lunæ Media loca uniuntur in G, locus Lunæ Verus X nondum est assecutus Verum Solis locum E; sed ab eo adhuc distat Æquationum differentiâ X E.

Fig. 13. Lib. 2.

Pro ☍ utere *Fig. 14. l. 2.* in quâ Oppositionis punctum est O, Mediæ I, Æquatio Solis E G, seu O I. Quoniam Æquatio Lunæ est minor quàm Solis, putà I X,

Fig. 14. Lib. 2.

IX, & Additiva utraque, erit Vera Longitudo Lunæ S V X minor quàm S V O Longitudo puncti Oppositionis Veræ O. Igitur quo tempore fit ☍ Medium, hoc est locus Lunæ Medius attingit punctum Mediæ Oppositionis I, locus Lunæ Verus X nondum attigit punctum O Oppositionis Veræ, sed ab eo adhuc distat differentiâ Æquationum X O.

NUMERUS VII.

Si tempore Media Syzygia Luminarium amba Prosthaphæreses sint heterogenea, Luna autem Ablativa, Syzygia Vera sequitur Mediam, & Luminarium distantia est summa Prosthaphæresium.

Fig. 7. §. 1. PRo ☌ inspice Fig. 7. & construantur ac ponantur eadem, quæ num. 3. §. 1, referendo omnia (conveniunt enim litteræ) ad Figuram 7, dempto quòd propter heterogeneas Prosthaphæreses Luminaria jam sint in diversis Anomaliæ semicirculis, Luna quidem F in primo a ob Prosthaphæresim Ablativam, Sol D in secundo ob Adjectivam; unde etiam fit, ut Vera Luminarium distantia K E jam confletur ex summâ Prosthaphæresium Lunæ K G, & Solis E G. His ita existentibus, quo tempore ☌ Medium celebratur in G, patet Longitudinem Veram Lunæ S V K, minorem esse Longitudine Verâ Solis S V E, adeoque locum Lunæ Verum K nondum attigisse locum Solis Verum E, sed ab eo adhuc distare Æquationum summâ K E.

a Propr. 5. num. 25. l. 1.

Fig. 13. Lib. 2. Prop. 6. num. 25. l. 1.

Fig. 8. §. 2. Pro ☍ inspice Fig. 8. atque eadem pone, & construe, quæ num. 3, §. 2, referendo omnia (conveniunt enim litteræ) ad Figuram 8, hoc excepto quod Luna F jam sit in Anomaliæ primo semicirculo ob Æquationem Ablativam, Sol D in secundo propter Æquationem Adjectivam. Liquet igitur quo tempore fit ☍ Medium, seu Oppositio Media in I, Longitudinem Lunæ Veram S V K, minorem esse quàm S V O Longitudinem puncti Veræ Oppositionis O, ac proinde locum Lunæ Verum nondum attigisse Veræ Oppositionis punctum O, sed ab illo adhuc abesse totâ summâ Æquationum, Lunæ K I, & Solis O I, seu E G.

Fig. 14. Lib. 2. q ibid.

NUMERUS VIII.

Si tempore Syzygia Media Luminarium Æquationes sint heterogenea, Luna autem Adjectiva, Syzygia Vera Mediam præcedit, & distantia Luminarium est summa Æquationum.

Fig. 10. PRo ☌ inspice Fig. 10, atque eadem construe & pone, quæ num. præc. §. 1, num. 3. §. 1, referendo omnia (conveniunt enim litteræ) ad Fig. 10, hoc solùm excepto, quòd Luna F jam sit in secundo Anomaliæ semicirculo ob Æquationem Adjectivam, Sol D ob Ablativam in primo. Igitur quo tempore ☌ Medium contingit in G, Longitudo Vera Lunæ S V K, major est Longitudine Verâ Solis S V E, adeoque tum Verus Lunæ locus K jam prætervectus est Verum locum Solis E intervallo E K, quod ex Æquatione Solis E G, & Lunæ K G componitur.

Fig. 13. Lib. 2.

Fig. 9. Pro ☍ inspice Fig. 9, & ponantur ac construantur eadem, quæ nu. præc. §. 2, & n. 3. §. 2. referendo omnia (conveniunt enim litteræ) ad Fig. 9. hoc dempto, quod Luna F ob Æquationem Adjectivam jam sit in Anomaliæ semicirculo secundo, Sol D in primo ob Ablativam. Igitur quo tempore ☍, seu Oppositio Media, fit in I, Longitudo Lunæ Vera S V K, major est quàm S V O Longitudo puncti Veræ Oppositionis O, adeoque locus Lunæ Verus K jam prætervectus est punctum O Oppositionis Veræ, intervallo O K, ex Æquationibus O I, sive E G Solis, & Lunæ K I composito.

Fig. 14. Lib. 2.

Scholium.

De distantiâ Medij, & Veri ☍, egi etiam, sed obiter, lib. 2. num. 25, & in 4. Figuris istbic exhibui Æquationes Luminarium tempore Veri ☍, quòd id tum esset proposito accommodatius.

NUMERUS IX.

Summa Regularum sex Numeris præcedentibus traditarum.

Syzygia Vera sequitur Mediam.

I. SI Luminarium ambæ Æquationes sint Ablativæ, sed Lunæ major quàm Solis num. 3.

II. Si ambæ Adjectivæ sed Luna minor num. 6.

III. Si Solis Æquatio sit Additiva, Lunæ Ablativa num. 7.

Syzygia Vera præcedit Mediam.

I. Si Luminarium Æquationes ambæ sint Ablativæ, sed Lunæ minor, quàm Solis num. 4.

II. Si ambæ Adjectivæ, sed Lunæ major num. 5.

III. Si Solis Æquatio sit Ablativa, sed Lunæ Adjectiva num. 8.

Distantia Luminarium est

Differentia Æquationum, cùm eæ sunt homogeneæ. Summa Æquationum, cùm heterogeneæ.

Corollarium.

Iisdem legibus Quadratura Media, & quælibet alia Lunæ phasis Media præcedit, vel sequitur Veram.

NUMERUS X.

Omnia Vera Novilunia, & Plenilunia tam præterita, quàm futura invenire.

INquire a tempus Mediæ Syzygiæ, hoc est, Medij ☌, vel ☍, ad Anni dati Mensem datum. Tum ad tempus inventum ☌ aut ☍ reperi Æquationes b Solis, & c Lunæ; & ex earum qualitate cognosce d an Media Syzygia præcedat Veram, an sequatur; item quæ tum sit Luminarium Vera distantia, utrùm videlicet ea sit Æquationum differentia, vel summa. Deinde Æquationum summam vel differentiam divide per Verum motum Horarium Lunæ à Sole repertum nu. 2. Ex eâ divisione proveniet tempus (numerus nempè Horarum, & Minutorum), quod si Vera Syzygia Mediam sequitur, adde tempori Syzygiæ Mediæ; si Vera Syzygia Mediam præcedit, deme. Ita prodibit Syzygiæ Veræ tempus Æquale, quod in Apparens per num. 57. lib. 1. e convertes.

a per nu. 1. b per num. 55. l. 1. c per n. 40. & 39. l. 2. d per nu 9. e Cur sterl id debeat dixi num. 59. l. 1.

Demonstratio habetur *ex quæstione 5. cap. 6. lib. 5. Arithmetica nostra Practica*, ad quam lectorem remitto, Motus enim Verus Horarius Lunæ à Sole nihil aliud est quàm spatiorum, quæ in Zodiaco Horâ unâ Sol & Luna conficiunt, differentia: quo notato applicatio demonstrationis isthic allatæ manifesta erit.

Tempus Veri ☌ aut ☍ sic inventum prorsus esset exactum, si motus Veri Luminarium essent æquales, seu æquabiles. At quia sunt inæquales, aliquid plerumque deerit ad præcisionem absolutam. Quare si tempus Veri ☌ aut ☍ accuratiùs desideras, quære ad tempus illud jam inventum, motum seu Longitudinem o Veram Lunæ, item Longitudinem Veram p puncti, quod Soli opponitur. Si motus, seu Longitudines illæ conveniant, scito ☌ aut ☍ Veri tempus rectè inventum fuisse: si non conveniant, differentiam earum divide per motum Horarium Verum Lunæ à Sole; & quotientem, si Longitudo Vera Lunæ minor est, adde tempori Veræ Syzygiæ priùs invento; deme, si major. Ita proveniet Veræ Syzygiæ tempus exactum, sed Æquale: unde illud, ut *suprà*, oportebit in Apparens convertere.

o Per nu. 40. l. 2.
p Per nu. 55. l. 1. quære locum Solis, cui adde Grad. 180.

Corollarium.

Eodem modo, sed per *Corollaria nu. 1. & 9.* ad tempus quodcumque, sive præteritum sive futurum, reperiemus tempus Quadraturæ Veræ, & alterius cujuscumque Veræ phaseos Lunaris.

NUMERUS XI.

Maxima temporis differentia inter Mediam, & Veram Syzygiam, est Horarum circiter 14, sed inter Quadraturam Veram, & Mediam Horarum circiter 18.

Fig. 7.

Quando enim sub Mediæ Syzygiæ tempus Luminarium Æquationes sunt heterogeneæ, per *num. 7. & 8*, ipsa Æquationum summa est distantia Luminarium. Quare si tunc etiam Luminaria (quod Figura quoad Lunam non satis exhibet) sint in punctis transituum Mediorum F, D, in quibus nempè a maximæ Æquationes existunt, Solis quidem E G b Grad. 1.59′, aut Graduum 2; Lunæ autem (in Syzygijs) K G c Grad. 5: erit Luminarium distantia K E Grad. 7. sub tempus Mediæ Syzygiæ. Motus autem Verus Horarius Lunæ à Sole per *num. 2*, circa Medios transitus reperitur esse Min. 30 quàm proximè. Quare si distantia K E Grad. 7, dividatur per Min. 30, seu per Gradum dimidium, provenient Horæ 14, pro distantiâ maximâ Syzygiæ Mediæ ac Veræ.

a Propr. 7. nu. 25. l. 1.
b Per nu. 40. l. 1.
c Per nu. 39. l. 2.

Quia verò in Quadraturis Æquatio maxima Lunæ d est Grad. 7. 30, si huic addas maximam Solis Grad. 2, fit distantia maxima □ Veræ, & Mediæ Grad. 9. 30; quâ divisâ per motum Lunæ Horarium Verum, Min. 30, seu Gradum dimidium, proveniunt Horæ 18, & paulò ampliùs pro maximâ distantiâ □ Veræ & Mediæ.

NUMERUS XII.

Invenire tempus quo Sol, vel Luna in dato Zodiaci loco erit.

Fig. 7. Lib. 2.
a Solis, per nu. 54. l. 1. Lunæ verò per nu. 37. lib. 2.

Velim scire quando Sol futurus sit ex. grat. in N Grad. 10 Scorpij. Inquire ad tempus præsens a locum Medium Luminaris, qui sit ex. gr. in K Gradu 10 Cancri. Igitur notum est intervallum K N loci inventi, & quæsiti. Reperi spatium b temporis quo Luminare dictum K N intervallum Medio motu percurrit. Hoc si addas tempori præsenti, quo Luminaris locus Medius est in K, prodibit tempus, quo locus ejusdem Medius futurus sit in N. Ad hoc igitur tempus (quod vocemus X) jam notum, quære c Anomaliam Luminaris E O, sive I N, & Prosthaphæresim d A O Q, seu N P illi congruentem. Hanc si diviseris per motum Horarium Luminaris *num. 2.* inventum, prodibit tempus α, quod additum, vel demptum tempori α, quo Luminaris locus Medius erit in N, dabit tempus quæsitum, quo ejusdem locus Verus erit in N. Addi porrò debet tempus α in primo Anomaliæ semicirculo, tunc enim motus Medius citiùs pervenit in N locum datum, quàm motus Verus; demi verò in semicirculo secundo, quia tunc motus Medius seriùs locum datum attingit, quàm Medius.

b Per nu. 36. l. 1. & nu. 34. l. 2.
c Solis per nu. 55. l. 1. Lunæ per n. 37. l. 2.
d Solis per nu. 40. l. 1. Lunæ per nu. 39. l. 2.

Demonstratur ut num. 10.

Quæ hoc capite exposita sunt, ad Solis & Lunæ defectus communiter spectant. De singulis deinceps seorsim tractabimus.

CAPUT II.

Umbræ Lunam obscurantis dimensio.

NUMERUS XIII.

Exponitur & definitur Eclipsis Lunæ cum Umbrâ Terræ & Atmosphæræ.

Fig. 1.

Terram repræsentet circulus A O T H, vapores Terram ambientes, sive Atmosphæram annulus peripherijs R K V F, O T H comprehensus. Radij tangentes Solem in X & Z, Terram in B & Y, sed irrefracti, sint X B N, Z Y N, coeuntes in N. Hi radij circa rectam A N S per centra Solis & Terræ ductam in orbem revoluti, efficerent conum Umbræ Terrestris, si vapores Terram non ambirent. Nunc quia radij prædicti, in punctis Q, E, vapores ingressi non pergunt indirectum ex Q & E in N; sed refringuntur ex Q in α, & ex E in α, versùs perpendiculares A Q, A E. ac proinde Terram non tangunt, non erit conus B N Y Umbra Terræ Vera, ut veteres putabant, sed Ficta. Quare radij Umbram Terræ Veram determinantes, ab extremo Solis margine X, Z incidunt in vapores ultra Q, & E, cujusmodi sunt ex. gr. radij X D, Z G. Hi enim in vaporum ingressu refracti versùs perpendiculares ex D & G in R & P, Terram poterunt contingere in O & H: in egressu autem ad R, P, iterum refracti coibunt in M, atque ita efficient Veram Terræ Umbram O R M P H. His positis

1. *Umbra Terræ Ficta*, sive *Conus Terræ Fictus* est (B N Y) qui radijs (X B N, Z Y N) Solem & Terram tangentibus, sed irrefractis, continetur.

2. *Umbra Terræ Vera*, est (O R M P H) quæ radijs (X D O R M, Z G H P M) Solem & Terram tangentibus, sed refractis, comprehenditur.

3. *Umbra, seu Conus Atmosphæræ*, est (K S F) qui radijs (X K S, Z F S) Solem, & Atmosphæram tangentibus continetur.

4. Solet etiam *Penumbra* appellari, quia portio illa, quæ remanet dempto Terræ cono R M P, & sola

propriè

proprie est Umbra Atmosphæræ, non destituitur penitus omni luce, cùm nihil ipsa sit aliud, quàm lux Solis per Atmosphæram transmissa, ac proinde refracta & valdè diluta. Radij porrò Atmosphæræ conum efficientes sunt irrefracti, cùm in contactu refractio evanescat.

Axis Umbræ tam Atmosphæræ, quàm Terræ, non differt à lineâ *b* Veræ Syzygiæ, sive Synodicâ, cùm utraque transeat per centra Solis ac Terræ.

b *Def.* 4. *nu.* 20. *l.* 2.

§. *Sectio Umbræ* est circulus, qui nascitur ex Cono Umbroso secto per planum Axi A S rectum.

Cæterùm obscurari Lunam à Cono Umbroso Terræ, seu potiùs (ut ostendam *infrà*) Atmosphæræ, manifestius est, quàm ut multis probari debeat. Cùm enim Terra per *num.* 2. *l.* 1. sphærica sit, & per *num.* 36. *l.* 3, minor Sole, liquet Umbram ejus conicam esse, cujus mucro Soli præcisè oppositus existat. Quia verò Conus ille Umbrosus longior multò est distantiâ Lunæ à Terrâ, ut patebit ex *num. seq.* in hunc Luna Soli opposita necessariò incurrit, ab eodemque obscuratur.

NUMERUS XIV.

Ad datum tempus Angulum & Axem tam Coni Atmosphæra, quàm Coni Terrestris Ficti, invenire.

Fig. 4. a *Def.* 1.

§. 1. Solis centrum esto B; Terræ A; radij Solem ac Terram tangentes G K X. C D X, & irrefracti, determinent Umbram, seu Conum Terræ Fictum K X D. Oporteat ejus angulum ad D, & Axem A X invenire.

Ex centris A, B, ducantur ad contactus rectæ A K, B G, & A I parallela ad K G. Cùm anguli ad K & G *a* sint recti, liquet A K G I esse rectangulum parallelogrammum, ideoque A K æqualem esse G I. Atqui *b* G B Solis Semidiameter nota est in Terræ Semidiametris. Ergo si A K, seu G I Semidiameter Terræ auferatur à G B Semidiametro Solis, residuum B I in Terræ Semid. notum erit. Quoniam igitur in triangulo B I A rectangulo ad I, nota sunt latus B I (ut jam ostendi) & latus *c* B A distantia Solis ad tempus datum, ambo in Semid. Terræ, ex his *d* angulus I A B, hoc est *e* (quia G X, I A sunt parallelæ) G X B, innotescet ad datum tempus. Noto autem angulo G X B, seu K X A, etiam K X D ipsius duplus erit notus.

a *per* 18. 3. b *per n.* 34. *lib.* 3. c *per n.* 18. & 19. *l.* 3. d *per Prob.* 4. *cap.* 3. *Geom. pract.* e *per* 27. 1. o *per* 18. 3. p *per Prob.* 1. *cap.* 3. *Geom. pract.*

Deinde in trigono A K X rectangulo *o* ad K, quia notus jam est acutus K X A, etiam ratio *p* A K ad A X fiet nota: ac proinde A X Axis Coni Ficti, in Terræ Semidiametris A K ad tempus datum notus erit.

Ricciolus hunc in modum ex Semidiametro Solis partium 34, quarum Semidiameter Terræ sit 1, & ex distantiâ Solis Perigæâ 7000 Semid. Terræ elicit semiangulum Coni Terræ Ficti Min. 16'. 8'', Axem verò 213 Semid. Terræ. At ex distantiâ Solis Apogæâ 7600 Semid. Terræ collegit Angulum Coni Ficti Min. 14'. 50''; Axem verò Semidiametrorum Terr. 231. Quod si data illa mutentur, alius colligetur tam Angulus, quàm Axis. Nullus tamen Astronomus collegit Angulum Coni Terræ Ficti majorem Minutis 16'. 8''; aut minorem Minutis 12'. 10''; neque Axem majorem 282 Semid. Terræ, aut minorem 213.

§. 2. Angulus & Axis Coni Atmosphæræ reperitur eodem prorsùs modo, quo Coni Ficti; verùm Axis sic innotescit in Semidiametris non Terræ, sed Atmosphæræ.

§. 3. Porrò Angulus Coni Atmosphæræ minor est Angulo Coni Ficti Terræ, at insensibiliter.

Nam quia Semidiameter Atmosphæræ, aliquantò major est Semidiametro Terræ, ubi illam subtraxeris à Solis radio B G, erit residuum B I jam paulò minus quàm dum sola Terræ Semidiameter subtrahebatur. Quare cùm B A distantia Solis eadem maneat, angulus I A B, hoc est K X A, adeoque totus K X D Coni Atmosphærici Angulus, aliquantò minor evadit Angulo Ficti Coni Terr. Si Atmosphæræ Semidiameter excedat Semidiametrum Terræ ad summum 25 Milliarijs Bonon. operando formâ jam traditâ, reperies Angulum Coni Atmosphærici ab Angulo Coni Ficti ne uno quidem Secundo superari. At demus, quod nemo dixerit, Semidiametrum Atmosphæræ duplam esse Semidiametri Terræ, ac proinde Atmosphæræ Altitudinem æquare Milliaria Bonon. 4139: nihilominus, colligetur Angulus Atmosphærici Coni minor Angulo Coni Ficti Secundis tantùm 26, quæ differentia exigui adhuc momenti est.

§. 4. Quod attinet ad Axem Coni Atmosphærici, is absque sensibili differentiâ continet tot Semidiametros Atmosphæræ quot Semidiametros Terræ Conus Terræ Fictus, nimirum 213 Sole Perigeo, 231 Sole Apogeo.

Quamvis enim K X A Angulus Atmosphærici Semiconi aliquantò minor sit, adeoque ratio A X ad A K aliquantò major, quàm in Cono Terræ Ficto, tamen quia excessus ille Anguli ne unius quidem Secundi est, etiam ratio X A ad A K crescit insensibiliter; ac proinde Axis Coni Atmosphærici tot absque errore sensibili continet Semidiametros Atmosphæræ, quot conus Terræ Fictus Semidiametros Terræ.

§. 5. Axem Coni Atmosphærici in Terræ Semidiametris (hactenus enim tantùm in Atmosphæræ Semidiametris innotuit) sic invenies. Semidiameter Atmosphæræ ex mente Riccioli excedit Semidiametrum Terræ ad summum Milliarijs Italicis Bon. 25. Axis autem Atmosphæræ continet Semidiametros Atmosphæræ *a* 213 Sole Perigeo, at 231 Sole Apogeo. Quare si 25 multiplices per 213 vel 231, prodibunt Milliaria 4899 vel 5775, quibus Semidiametri Atmosphæræ 213, vel 231 (hoc est Axis Coni Atmosphærici) excedunt Terræ Semidiametros 213, vel 231, hoc est Axem Coni Ficti Terrestris. Cùm igitur una Terræ Semidiameter contineat *b* Milliaria Bonon. 4139, Coni Atmosphærici Axis excedet Axem Coni Ficti Terr. unâ Semidiametro Terræ & adhuc Milliarijs 760 Sole Perigeo, 876 Apogeo. Si autem major sit altitudo Atmosphæræ quàm Milliariorum 25, etiam Axis Atmosphæræ major colligetur.

a *Per* §. *præc.* b *Prob.* 4. *c.* 6. *Geom. pract.*

Scholium.

Semiangulus Umbræ Fictæ (A X C) semper minor est Semidiametro Apparente Solis B A C, ut patet ex 32. 1. *In quo Lansbergius convicit erroris Tychonem, & Longomontanum, ex quorum positionibus colligitur Semiangulus Umbræ major Semidiametro Solis ab ipsis assertâ. A quo absurdo immunis est Semiangulus* §. 1. *determinatus, uti patet si cum Semidiametro Apparente Solis* lib. 3. num. 31. *asserta, conferatur.*

NU-

NUMERUS XV.

Reperire Semiangulum Coni, seu Umbræ Terrestris Veræ. Is autem componitur ex Semiangulo Umbræ Fictæ, & Solis Refractione Horizontali bis sumptâ.

Fig. 2.

RAdij refracti Solem & Terram tangentes, qui Fictam Terræ Umbram definiunt, sint XQBN, ZEYN: radij autem refracti Solem & Terram tangentes, qui Veram Terræ Umbram efficiunt, sint XDORM, ZGHPM. Angulus Veræ Umbræ M, Fictæ N.

Quoniam radius XD per refractionem procedens ex D in R. Terram tangit in O, ipse radius refractus DR utrimque protractus in λ, & θ erit Horizon Visus Oculi existentis in O; ac proinde radio XD producto in φ, angulus φDI, sive XDλ, est refractio Solis Horizontalis. Jam quia radij XDφ, XQN, Solem ambo tangunt, ac proinde ex eodem quoad sensum puncto Solis procedunt, erunt quoad sensum paralleli. Quare radius refractus DR, eos intersecans facit angulum *a* NIθ æqualem angulo φDI, refractioni nempè Solis Horizontali.

a per 27. 1.

Hoc ostenso, externus Iθλ *b* æquabitur duobus internis oppositis NIθ, refractioni (ut jam ostensum) Solis Horizontali, & INθ Semiangulo Umbræ Fictæ. Deinde, quia radius DR rectâ procedit in θ, refractè in M, erit θRM angulus refractionis in egressu Atmosphæræ, & par refractionis angulo φDI sub ingressum. Quare IθA, seu RθA, unà cum θRM, æquatur Umbræ Fictæ Semiangulo INA, & refractioni Solis Horizontali bis sumptæ. Sed RθA cum θRM *d* æquatur externo RMA. Igitur RMA Semiangulus Umbræ Terrestris Veræ æquatur Semiangulo Umbræ Fictæ & refractioni Horizontali Solis bis sumptæ. Quod erat demonstrandum.

b per 32. 1.

d per 32. 1.

Semiangulus Umbræ Fictæ Sole Apogeo erat *num. præc.* §. 1. Grad. 0. 14'. 50": cui si addatur Horiz. Refractio Æstiva Solis Apogei *q* Grad. 0. 32'. 25", bis sumpta, fit Semiangulus Umbræ Veræ Æstivæ RMA, Grad. 1. 19'. 40": additâ verò bis Refractione Tychonicâ Grad. 0. 34', fit Semiangulus Umbræ Grad. 1. 22'. 50".

q per n. 26. l. 3.

NUMERUS XVI.

Fig. 2.

Umbræ Terrestris Veræ Axem (AM) investigare altitudine quâlibet Atmosphæræ datâ.

IIsdem positis, quæ *num. præc.* ducatur recta AR.

Quoniam triangulum AOR ad contactum O *a* rectangulum est, in eoque notæ sunt AO, AR (nam δR Altitudo Atmosphæræ ex hypothesi datur in Milliaribus, quorum AO, seu Aδ, continet *b* 4139), ex his reperietur *c* angulus ORA. Producantur MR in ψ, & DR in θ. Refractionis angulus MRθ in Atmosphæræ egressu æqualis est angulo Refractionis φDR ad ingressum. At φDR est Solis refractio Horizontalis (ut ostensum *num. præced.*) quæ *d* est Min. 32. 25' in Æstate. Ergo etiam MRθ, seu ψRO est Min. 32. 25'. Quare si hunc addas jam noto ORA, totus ψRA adeoque & MRA notus est. Angulus autem AMR, nempè Semiangulus Umbræ Terrestris, per *num. præced.* est Grad. 1. 19'. 40". In triangulo igitur MAR datur AR Radius Atmosphæræ, & noti sunt anguli AMR, MRA; ex quibus *e* reperietur AM longitudo Umbræ Terrestris.

a per 18. 3.
b Prob. 4. c. 6 Geom. pract.
c per Prob. 4 cap. 3. Geom. pract.
d per n. 26. lib. 3.
e per Prob. 9. cap. 3. Geom. pract.

Quamcumque porrò Atmosphæræ altitudinem dederis ab uno Milliari usque ad 100 & ultra, si formâ jam præscriptâ opereris, Atmosphæræ Axem AM semper deprehendes Semidiametrorum Terrestrium circiter 43. Hoc neque Keplerus, qui primus Umbram Terræ curiosiùs est contemplatus, neque ipsius insistens vestigijs Ricciolus, videtur advertisse. Atqui tamen ex istâ observatione Quæstionis *seq. num.* proponendæ decisio pendet. Et sanè dignum observatione est, quod ex incertâ altitudine Atmosphæræ, longitudo certa Umbræ Terrestris eliciatur. Tria subjicio calculi exempla.

Ex altitudine Atmosph. Milliariorum Bonon.	*Collegi Axem Umbræ AM Semidiametrorum Terr. proximè.*
2	43
26	23
100	42
1000	

NUMERUS XVII.

Luna eclipsatur ab Umbrâ non Terræ, sed Atmosphæræ.

Fig. 2.

DEmonstratio ex *præcedenti Numero* manifesta est: Quamcumque enim Atmosphæræ altitudinem dederis, Umbræ Terrestris longitudo AM colligitur Semidiametrorum Terrestrium circiter 43, aut 42. Atqui Lunæ à Terræ centro distantia numquam *a* minor est Semidiametris Terræ 50. Ergò Umbra Terræ numquam pertingit ad Lunam. Quare Luna à Terræ Umbrâ numquam potest obscurari.

a per n. 12. lib. 3. vide etiam nu. 10.

Obscurari autem ab Umbrâ Atmosphæræ sic ostendo. Umbræ Terrestris Fictæ BNY longitudo AN, numquam minor *b* est Semidiametris Terr. 213. Ergo Umbræ Atmosphæræ KSF longitudo AS semper excedit Semidiametros Terr. 213. Atqui Lunæ distantia à centro Terræ numquam *c* major est Semidiametris Terr. 72. Ergo Luna Soli opposita ab Atmosphæræ Umbrâ necessariò obscuratur.

b per n. 14. §. 1.
c per n. 12. lib. 3.

Lunam non Eclipsari ab Umbrâ Terræ, primus asseruit Keplerus in *Astron. Optica pag.* 268, & post eum Ricciolus *lib. 5. Almag. pag.* 305. sed quia neuter advertit ea quæ *Num. præced.* observavimus, etiam neuter satis idoneam ejus rei demonstrationem attulit.

Scholium.

Altitudinem Atmosphæræ ad refractionem idoneæ Keplerus sentit duo Milliaria Italica non excedere, nullâ sufficienti ratione nixus. Ricciolus lib. 5. Almag. pag. 660. Probl. 51. & 50, & pag. 596. Probl. 36 *subtiliter & ingeniosè ex montis Caucasi altitudine probat altitudinem aëris refractivi circa Caucasum non minorem esse 18 Milliarijs Bonon. Numquam tamen aut nusquam excedere Milliaria* 50, *id quidem ille* Problemate 51 jam citato *etiam affirmat, sed nusquam probat. Neque enim, quod fatetur etiam ipse* Probl. jam cit.

satis

satis constet utrùm vertex Caucasi sit refractioni obnoxius. Si autem obnoxius non sit, supeà ipsum utique Atmosphara porrigitur, eâ altitudine, ad quam explorandam nihil possit Caucasus conferre. Quare incertum est non solùm an Atmosphara ad Milliacia 50 non ascendat, sed etiam an non 100, vel ultra. Vnde liquet, quod Num. 16. *observavimus, de longitudine Terrestris Vmbea nihil posse certum concludi, nisi eam ex altitudine quâlibet Atmosphara ad Milliaria 100 & ultea, quàm peoximè semper eamdem aut certe minocem minimâ altitudine Lunari derivari.*

NUMERUS XVIII.

Quantum Terra Sol ultra hemisphaerium illuminet.

Fig. 2.

Iisdem positis, quæ *num.* 15: Pars Terræ illuminata est O T H, quam versùs Solem includunt radij refracti tangentes D O R, G H P, ductàque A ϖ perpendiculari ad Umbræ Axem A M S, portio Terræ ultra hemisphærium illuminata, est arcus ϖ O; quæratur quantus hic sit.

Dico cum Keplero *a* æqualem esse Umbræ Fictæ Semiangulo B N A, unà cum refractione Solis Horizontali.

a pag. 269. Astro. Opt.

Producatur enim A ϖ donec in 2 occurrat radio tangenti irrefracto X Q B N, atque ad contactus B, O, ducantur Semidiametri A B, A O, item ad punctum I quo se interseccant radij X Q B N, D R, semidiameter A I. Quia recta 2 ϖ A perpendicularis *b* est ad A N, trigonum 2 A N rectangulum est ad A: in quo quia A B est *c* perpendicularis ad 2 N, angulus 2 A B, seu ϖ A B subtensus ab arcu ϖ B, æquatur *x* angulo 2 N A, seu B N A, qui est Semiangulus Umbræ Fictæ. Deinde in quadrilatero I B A O, qui anguli A B I, A O I, ad contactus sunt duo *d* recti, etiam reliqui B I O, B A O simul sumpti, duos *e* efficiunt rectos. Atqui etiam B I O, cum N I O duos *m* facit rectos. Ergo B A O, & N I O æquales sunt. Atqui N I O, sive N I θ, æqualis est *n* refractioni Horizontali Solis, ut ostensum *num.* 15. Ergo etiam B A O, Refractioni Horiz. Solis est æqualis. Quare si huic addas ϖ A B, quem ostendi *suprà* æqualem esse Angulo Umbræ Fictæ B N A, erit totus angulus ϖ A O, quem subtendit arcus ϖ O, æqualis Semiangulo Umbræ Fictæ, & Solis Refractioni Horizontali. Quod erat demonst.

Fig. 2.

a per 2.12 lib. 3. vide etiam n. 10.
b per const.
c per 18.3.
x per 8.6.
d per 18.3.
e per theor. 1. Scho. post. 32. 1.
m per 13.1.
n per 15.1.
b per 2.14 §. 1.
c per 2.14 lib. 3.

Semiangulus Umbræ Fictæ Sole Apogeo erat *o* Min. 14'.50": Horizontalis autem Refractio Æstiva Solis Apogei Min. *p* 32'.25". qui simul juncti efficiunt Minuta 47'. 15"; & tantus est arcus ϖ O ultra hemisphærium à Sole Apogeo illuminatus in Æstate.

o per num. 14. §. 1.
p per num. 26. lib. 3.

NUMERUS XIX.

Vmbra Terrestris Atmospharica, in loco transitus Luna, Diametrum, tam Veram, quàm Apparentem ad tempus datum invenire.

EX pluribus modis quibus hoc negotium Astronomi absolvunt, duos seligam cæteris meliores, quorum primus Riccioli est, alter Kepleri.

Fig. 4.

Modus prior.

Radij G K X, C D X Solem ac Terram tangentes, determinent Umbram Terræ Fictam K X D: quam hic licebit assumere pro Umbrâ Atmosphæricâ, quia utriusque anguli insensibiliter differunt, ut ostensum §. 3. *num.* 14, Axes autem, quamvis (ut ex §. 4. *num.* 14 patet) sensibiliter differant; non sic tamen, ut sensibiliter inde Umbræ Semidiameter immutetur. Axis Umbræ sit B A X; transitus Lunæ in Q E. Quæritur ad datum tempus, quanta sit Q E Umbræ Semidiameter Vera (hoc est quæ sit ratio ipsius Q E ad A D Semidiametrum Terræ) & Apparens (hoc est angulus Q A E, sub quo ex Terræ centro spectaretur.)

Per *num.* 14. ad tempus datum notus est A X Axis Umbræ, in Semid. Terr. & *num.* 10. §. 3. vel per *nu.* 13. *lib.* 3, nota est A Q distantia Lunæ, etiam in Semid. Terr. Ergo etiam Q X in Terræ Semid. nota est. Quoniam igitur in Trigono X Q E rectangulo ad Q, nota sunt latus X Q, & Umbræ Semiangulus *a* Q X E, ex his *b* reperietur Q E in partibus ipsius X Q. Quare cùm X Q nota sit in Semid. Terræ, etiam ratio Q E ad Semidiametrum Terræ nota erit; quod erat primum. Deinde in trigono A Q E rectangulo ad Q, quia nota jam sunt latera A Q, Q E, ex his *c* reperietur angulus Q A E; quod erat alterum.

a per num. 14. §. 1.
b per Prob. 3. cap. 3. Geo. Pract.
c per Prob. 5 cap. 3. Geo. Pract.

Hunc in modum Umbræ Semidiameter Vera, & Apparens, dum Luminaria sunt in lineâ Augium, in loco transitus Lunæ tales reperiuntur, quales exhibet Tabella sequens,

	Sole Apogeo		*Sole Perigeo*	
	☾ Apogeâ	*☾ Perigeâ*	*☾ Apogeâ*	*☾ Perigeâ*
Vmbra Semid. Vera qualium Semid. Ter. est 100000	72085	76610	69764	74688
umbra Semid. Apparens ex modo 1.	38'. 32"	49'. 2"	37'. 30"	47'. 45"
umbra Semid. Apparens ex modo 2.	38'. 32"	48'. 57"	37'. 26"	47'. 51"

Modus alter.

Omnium simplicissimus hic est, & unico præcepto continetur. A summâ Parallaxium Horizontalium Solis & Lunæ aufer Semidiametrum Apparentem Solis. Relinquetur Umbræ Semidiameter Apparens.

Ducantur enim rectæ C A F, A E, & ad contactum D semidiameter A D. Quoniam A D perpendicularis *d* est ad tangentem C D E, manifestum est A C D, esse Parallaxim Horizontalem Solis, quæ nota est per *num.* 19. *lib.* 3, & A E D esse Parallaxim Horiz. Lunæ, quæ nota est per *num.* 10. §. 3. *lib.* 3. quibus utrique æqualis est *o* externus angulus F A E. Ab hoc si demas F A Q, hoc est B A C (qui metitur Semidiametrum Solis Apparentem, & notus est per *num.* 31. *lib.* 3) notus relinquetur angulus Q A E, qui Diametrum Apparentem Lunæ metitur.

d per 18.3.
o per 32.1.

Hunc in modum, assumptâ Parallaxi Horiz. Solis tam Apogei quàm Perigei (insensibilis enim differentia est) Secundorum 30, Parallaxibus verò Horiz. Lunæ & Semidiametro Solis Apparenti, prout *Numeris citatis* sunt inventæ, Umbræ Semidiametri Vera, & Apparens tales proveniunt, quales exhibentur in *Tabella præcedentis ordine tertio*, & differunt ab inventis per modum primum aliquot Secundis tantùm.

Cæterùm Semidiameter, sive primo, sive secundo sic inventa, est non Umbræ Atmosphæricæ, quæ Lunam *p* sola obscurat, sed Umbræ Fictæ. Verùm, ut dixi *suprà*, nullius momenti differentia est: Umbræ enim Fictæ Apparens Semidiameter jam inventa, ab Apparente Semidiametro Umbræ Atmosphæricæ non exceditur *u* Secundis 17: quæ differentia in definiendis Eclipsibus tutò contemnitur. Atque hinc apparet qui factum sit, ut Astronomi antiquiores licet Umbram Atmosphæræ nescriverint, in prædicendis tamen Eclipsibus non aberraverint. Et vicissim, cùm Antiqui Atmosphæram ignorantes in prædicendis Eclipsibus satisfecerint, colligitur Atmosphæræ altitudinem non esse tantam, ut ea neglecta errorem possit in hoc negotio sensibilem causare.

p per n. 17.
u Vendelinus in idea tab. Atlant. pag. 5.

Scholium.

Cùm summa Parallaxium Horizontalium Solis & Lunæ, æqualis sit summæ Apparentium Semidiametrorum Solis & Umbræ, ita cohærere inter se hæc debent, ut si alterum ex altero educatur, nulla contradictio aut inconcinnitas geometrica oriatur. Imò necesse est uno nexu devincta sint hæc septem; Luminarium distantia à Terrâ, Semidiametri Vera & Apparentes, Umbra Axis, Angulus, Semidiameter Apparens. Quod quidem in quantitatibus à nobis hactenus determinatis, nisi fallor, observatum est.

CAPUT III.

Eclipses Lunæ tam præteritas, quàm futuras invenire.

NUMERUS XX.

Terminos Eclipticos tam Possibiles, quàm Necessarios invenire.

T*Erminus Eclipticus Possibilis*, est talis Lunæ Latitudo in momento Veri ☍, aut ea distantia Lunæ à Nodo propiore, intra quam Eclipsis potest contingere, & extra quam non potest. *Terminus Eclipticus Necessarius*; est ea Latitudo Lunæ in momento Veri ☍, vel ea distantia Lunæ à propiore Nodo, intra quam Eclipsis necessariò accidit.

§. 1. Hos Terminos ita reperies. Sectio Umbræ in loco transitus Lunæ esto circulus A B C E D, cujus centrum A: Ecliptica C D: Lunæ Semita F H: segmentum circuli Maximi per Eclipticæ Polos, & centrum Solis ducti, (qui per *defin.* 5. *nu.* 20. *l.* 2, est ipsum planum Syzygiæ Veræ), vel potiùs sectio ejus cum plano Umbræ A B C E D, sit O A E. Ad hanc ubi appulerit Lunæ centrum, putà in G, liquet contingere ☍, & Lunæ Latitudinem tunc esse G A; quæ licet non sit recta ad viam Lunæ F H (cùm per *nu.* 68. *l.* 2. sit recta ad Eclipticam C D) ac proinde non sit minima distantia centri Lunæ à centro Umbræ A: tamen, quia ab hac vix sensibiliter differt, poterit illa (nempe G A) pro hac (nempè distantiâ minimâ) in Terminis Eclipticis statuendis assumi.

Fig. 11.

His ita constitutis, manifestum est ☍ non posse Eclipticum esse, si Latitudo Lunæ G A ad momentum ☍, est æqualis summæ Apparentium Semidiametrorum Umbræ A O, & Lunæ G B, aut eâ major. Cùm enim æqualis est, Luna tangit Umbram in O: unde cùm quoad sensum (ut dixi *supra*) centrum Lunæ in G minimè distet à centro Umbræ, liquet eam tam ante quàm post contactum, ad Umbram non pertingere. Quod si Latitudo Lunæ G A minor est summâ Semidiametrorum Appar. Umbræ A O, & Lunæ G B, patet aliquam Lunæ partem Umbræ immergi, adeóque ☍ esse Eclipticum.

Fig. 12. 13. 14.

Quare si accipiamus maximam Semidiametrum Appar. Umbræ in loco transitus Lunæ, quæ est *a* Min. 49'. 2", & maximam Lunæ Semidiametrum App. in Syzygiis, quæ *b* est Min. 16' 45"; harum summa Grad. 1. 5'. 47", sive Grad. 1. 6', dabit Latitudinem Lunæ, quâ si in momento Veri ☍. Luna habeat majorem vel æqualem, impossibilis sit Eclipsis; possibilis autem, si minorem.

a per nu. præced.
b per num. 33 lib. 3.

Quòd si minima sumatur Umbræ Appar. Semidiameter, quæ est *c* Min. 37'. 30", & minima Semid. App. Lunæ in ☌ ☍, quæ est Min. 14'; harum summa Min. 51'. 30", vel Min. 52'. efficiet Latitudinem, quâ si in momento Veri ☍ Luna habeat non majorem, necessariò eclipsabitur.

c per num. præced.
d per num. 33. lib. 3.

§. 2. Eosdem Terminos per distantiam à Nodo sic reperiemus. Arcus Eclipticæ sit A B; arcus semitæ Lunaris A C; Nodus propior A; Latitudo Lunæ in ☍ C B Grad. 1. 6', Terminus videlicet Eclipticus Possibilis quoad Latitudinem. Quoniam triangulum A B C ad B *e* Rectangulum est, in eoque nota sunt angulus *f* A, Grad. 5, & latus C B. Grad. 1. 6', ex his *i* invenietur C A distantia Lunæ à Nodo propiore

Fig. 31. lib. 2.
e per num. 68. l. 2
f per num. 61. lib. 2.
i per trig. sph. prob. 3.

piore A, intra quam fieri poterit, & extra quam non poterit Lunæ Eclipsis. Quod si CB ponatur Min. 52, Terminus nempè Necessarius quoad Latitudinem, prodibit CB distantia Lunæ à Nodo, intra quam Eclipsis necessaria est.

§. 3. Hæc inventionis theoria. Quales porrò ab Authoribus subjectis sint inventi, patebit ex Tabellà sequenti.

TERMINI ECLIPSIS LUNÆ												
	POSSIBILES						NECESSARII					
	Latitudo Vera ☾			Distantia à Nodo			Latitudo Vera ☾			Distantia à Nodo		
AUTHORES	Gr.	′	″	Gr.	′	″	Gr.	′	″	Gr.	′	″
Ptolomæus	1	8	43	12	12	0	0	55	38	10	50	0
Tycho	1	5	0	12	36	0	0	58	4	11	12	0
Lansbergius	1	4	8	12	3	0	0	53	2	10	11	18
Vendelinus	1	3	0	12	8	13	0	53	3	10	11	20
Ricciolus	1	6	0	12	50	0	0	52	6	10	0	0

Nota: secundùm rigorem Geometricum procedendo assumenda fuit ad Limites Eclipticos constituendos, non Latitudo Lunæ tempore ☍, sed perpendicularis à centro Umbræ ad Viam Lunæ; de quâ vide dicenda *num.* 23. Hìc tamen tanta præcisione opus non est, ut suprà monui.

NUMERUS XXI.

An Plenilunium sit Eclipticum, cognoscere.

Fig. 11. & sequ. o *Per num. 63. lib. 2.* i *Per num. 20.* m *Per eund.* a *Per nu. 19.* b *Per nu. 35. lib. 3.* d *num. 20.* e *Ibid.*

PEr *num.* 10. notum fiet Veri ☍ momentum; ad quod inquire o Latitudinem Veram Lunæ. Hæc si æqualis, vel minor sit Termino Ecliptico Necessario, nempè Minutis 52′. 6″, ☍ erit i Eclipticum: si æqualis, vel major Termino Possibili Grad. 1. 6′, non m erit; si verò inter Terminos Eclipticos media sit, minor nempè Grad. 1. 6. major Min. 52′. 6″: ☍, fortè Eclipticum erit. Utrùm verò sit, ita cognosces.

Ad momentum ☍ inquire Semidiametros Apparentes a Umbræ & b Lunæ, & in unam conjice summam: Si hâc summâ Latitudo Lunæ tum sit minor, ☍ erit d Eclipticum; si æqualis vel major, non e erit. Idem cognosces per distantiam à Nodo.

NUMERUS XXII.

Quantitatem Eclipseos Lunæ invenire.

Fig. 12. d *per num. 63. lib. 2.* e *per n. 19.*

§. 1. INveniatur Latitudo Vera d Lunæ AG ad momentum Ecliptici ☍ noti *per num.* 10. & Umbræ e Semidiameter AO Apparens: quam si minor est Latitudine Lunæ, ab hac subducito, & residuum OG aufer ab Apparente Semidiametro Lunæ GB, quæ nota fit per *num.* 33. *vel* 35. *l.* 3: relinquetur BO pars obscurata Diametri (sive, ut alij vocant, Scrupula deficientia Umbræ) penes quam Eclipsis quantitas æstimatur.

Fig. 13.

§. 2. Si Umbræ Semidiameter App. AO sit par Latitudini Lunæ AG, dimidia pars Diametri obscurabitur.

Fig. 14. 15. 16.

Si Umbræ Appar. Semidiameter AO sit Latitudine Lunæ AG major, hanc (AG) aufer à Semidiametro Umbræ AO, & residuum GO adde Apparenti Semidiametro Lunæ GB: prodibit BO obscurationis quantitas (sive, ut alij appellant, Scrupula Umbræ Deficientia) quæ numeratur à margine Lunari B, quæ prima Umbræ immersa fuit, usque ad O extimum Umbræ limbum.

Fig. 14.

Quod si obscurationis quantitas BO fuerit minor Diametro App. Lunæ BI, Eclipsis nondum erit Totalis.

Fig. 15.

Si æqualis fuerit, Eclipsis erit Totalis sine morâ: tunc enim Luna sic tota erit Umbræ immersa, ut eam tangat; ac proinde simul immersa fuerit, statim rursus incipiet emergere.

Fig. 16. 17.

Si major, fiet Eclipsis Totalis cum morâ, Lunâ videlicet intra Umbram ad tempus aliquod totaliter immersâ.

Fig. 17.

§. 3. Denique, si Latitudo Lunæ fuerit nulla, Eclipsis spectabitur omnium maxima, quæ Centralis dicitur, eò quòd Lunæ centrum G incidat in centrum A sectionis Umbræ. Quantitas obscurationis BO æqualis tunc est summæ Semidiametrorum Umbræ AO, & Lunæ GB.

§. 4. Solent Astronomi quantitates Eclipsium æstimare uncijs, hoc est particulis duodecimis Lunaris Diametri, ad quas Scrupula Deficientia Diametri Umbræ, sive quantitatem obscurationis §. 1. & 2 repertam, reduces hunc in modum: fiat ut Lunæ Diameter prout est Scrup. ex. grat. 30, ad Umbræ Scrupula Deficientia ex. grat. 32, ita Diameter Lunæ prout est 12, ad Quartum: dabit hoc Scrupula Deficientia reducta ad uncias Lunaris Diametri.

Hæ porrò Lunaris Diametri partes duodecimæ, Digiti Ecliptici solent appellari, penes quos eclipsium magnitudo sic æstimatur. Si deficiant Digiti Ecliptici 6, Lunæ pars media obscuratur; si 12, tota, sed absque morâ; si plures quàm 12, deficit tota & aliquamdiu manet Umbræ totaliter immersa.

Nota: Accuratiùs quantitas Eclipsis determinabitur, si pro Latitudine Lunæ ad momentum ☍ assumatur Distantia minima centri Umbræ à viâ Lunæ, de quâ num. seq.

NUMERUS XXIII.

Lunaris Eclipsis momentum medium, seu maxima obscurationis, ejusque distantiam à momento Ecliptici ☍, item distantiam minimam centri Lunæ à centro Umbræ invenire.

Fig. 19.

§. 1. SEctio Umbræ sit A E D O C; Ecliptica Q C D; ad hanc per centrum A perpendicularis O A E repræsentet segmentum plani Veri Syzygiæ, hoc *o* est circuli Maximi per Polos Eclipticæ, & centrum Solis ducti: via Lunæ esto F X Q; Nodus propior Q.

o Defin. 5. n.20.lib. 2.

His ita constitutis, cùm angulus Q A X sit rectus, oportet Q X A recto esse minorem. Unde arcus A X non est perpendicularis ad Q F viam Lunæ sed alius A B, viam Lunæ secans in puncto B, à Nodo Q minùs distante. Punctum igitur viæ Lunaris F Q Umbræ centro A vicinissimum est non X, sed B. Atqui Luna maximè obscuratur, cùm ejus centrum est proximum centro Umbræ. Ergo maximæ obscurationis momentum illud est, quo Lunæ centrum est in B. Quare cùm ☍ fiat centro Lunæ attingente Veræ Syzygiæ planum in X, liquet maximæ obscurationis momentum à ☍ momento esse diversum.

§. 2. Oporteat igitur hoc momentum & cætera quæ proposui, invenire. Inquire *a* motum Verum Latitudinis Lunæ ad momentum Veri ☍ Ecliptici inventum *num.* 21, hoc *b* est ad momentum, quo Lunæ Eclipsandæ centrum est in puncto X, in Veræ Syzygiæ plano. Inde scies uter Nodorum sit propinquior Lunæ, & quanta sit ejusdem à Lunâ distantia Q X. Quoniam igitur in triangulo X A Q rectangulo ad A, nota sunt basis Q X, & angulus Q *c* Grad. 5; ex his reperietur *d* arcus Q A. Rursum quia in trigono A B Q rectangulo ad B, nota jam sunt basis A Q, & angulus Q, ex his reperientur & arcus *o* B A, distantia minima centri Umbræ à viâ Lunæ (quod erat è quæsitis unum) & arcus *t* Q B: quo sublato ab arcu jam noto Q X, relinquitur arcus B X. Nunc tempus inveniendum restat quo motus Verus Lunæ à Sole absolvit arcum jam notum X B: quod ita fiet. Inveni *m* ad Ecliptici ☍ tempus motum Horarium Verum Lunæ à Sole. Deinde fiat, ut Scrupula Veri motus Hor. Lunæ à Sole ad Scrupula noti arcus X B, ita 1 Hora ad Quartum (quod fiet si Scrupula arcus X B dividantur per Scrupula motus Hor. Lunæ). Hoc erit tempus quo motus Verus Lunæ à Sole percurrit arcum X B, ac proinde quo momentum maximæ obscurationis distat à momento Ecliptici ☍, quod erat alterum quæsitorum. Postremò si Luna (ut *in præsenti schemate*) tendit ad Nodum, hoc tempus adde tempori Ecliptici ☍ per *num.* 21 noto; deme autem, si à Nodo recedit. Prodibit obscurationis maximæ momentum quæsitum.

a Per nu. 56.l. 2.
b Per def. 7.n.20.l.2.
c Per nu. 61.l. 2.
d Per trig. Sph. prob. 14.
o Ibid. prob. 2.
t Ibid. prob. 14.
m Per nu. 2.b4.

Scholium.

Distantia maxima obscurationis à momento ☍ permodica est. Quam Ptolomæus & Regiomontanus, quamvis turpe censerent hanc differentiam ab Astronomo ignorari, in praxi tamen negligendam judicarunt. Quod etiam à nobis factum alibi suprà *absque præjudicio ullo earum rerum, quæ ibi quærebantur. Nihilominus Astronomi recentiores, in consignando Eclipsium tempore rationem ejus habendam putaverunt. Si horum diligentia placeat, ex dictis modum jam habes, quem sequaris.*

NUMERUS XXIV.

Lunaris Eclipseos non Centralis initium, finem, durationem, atque omnes durationis partes invenire.

Fig. 19. 18.

§. 1. IIsdem positis, quæ *num: præced.* §. 1. Luna tangat sectionem Umbræ in P, & centrum ejus sit in F. Tunc igitur principium Eclipsi datur. A centro Umbræ ad centrum Lunæ ducatur recta A F. Transibit ea *a* per contactum P, ac proinde A F par est Semidiametris Umbræ & Lunæ. In triangulo rectangulo A B F nota sunt arcus *b* A B distantia minima centri Umbræ à viâ Lunæ, & *o* A F summa Semidiametrorum Appar. Umbræ & Lunæ.

a Per 12.3.
b Per nu. præced.
o Per nu. 19. lib. hujus & per nu. 33. ac 35.l. 3.
i Trig. Sph. prob. 8.

Ex his ergo innotescent *i* Scrupula arcus F B, quæ ab Eclipsis initio usque ad maximæ obscurationis momentum motus Verus Lunæ à Sole percurrit. Hæc deinde Scrupula arcus F B in tempus converte hoc modo: ut Scrupula motus Horarij Lunæ à Sole convenientis ☍ dato, per *num.* 2. invenienda, sunt ad Scrupula arcus F B, sic fiat 1 Hora ad Quartum (quod fiet arcum F B dividendo per motum Hor. Lunæ) hoc erit tempus, quo Luna motu Vero à Sole percurret arcum F B. Quare si tempus illud demas à tempore obscurationis maximæ, invento per *num. præced.* remanebit tempus initij Eclipseos.

§. 2. Ad finem Eclipseos Luna tangat Umbram in S, & centrum ejus sit in H, ducaturque A H, quæ quia transibit *c* per contactum S, erit par Semidiametris Umbræ ac Lunæ. Igitur A H & A F æquales sunt, ideoque *d* anguli A H F, A F H sunt æquales. Quare in triangulis A B H, A B F, latera *e* F B, H B æqualia erunt. Igitur arcum B H tempore æquali percurret motus Lunæ Verus à Sole, quo F B. Hoc tempus ergò duplicatum dabit Eclipseos durationem totam; additum verò tempori maximæ obscurationis in B, noto per *num. præcedentem*, dabit momentum, quo Eclipsis finitur in H. Ex quibus etiam patet momentum maximæ obscurationis, esse medium Eclipticæ durationis.

c per 12.3.
d per 5.1.
e per 26.1.

§. 3. In Eclipsi Totali cum morâ, moram ipsam ejusque initium, ac finem sic invenies. Tangat Luna Umbram interiùs primò in M, centro existente in I; deinde in N, centro existente in K. Patet Lunam obscurari totam, eo tempore toto & solo, quo ejus centrum motu Vero à Sole percurrit arcum I K. Ducantur A K, A I. Hæ protractæ transibunt per contactus N, M. Quare si M I, N K Semidiametros Lunæ *m* notas demamus à Semidiametris Umbræ A M, A N etiam *n* notis, remanebunt Scrupula, seu Minuta Laterum A I, A K. Cùm igitur in triangulo A B I rectangulo ad B, notum jam sit latus A I, & per *num. præced.* notum quoque sit latus A B minima centri Umbræ distantia ab F Q viâ Lunæ; ex his reperietur *o* I B; quot nempè Minuta, seu Scrupula contineat: quibus in tempus (ut *suprà*) conversis, prodibit tempus moræ dimidiatæ in Umbrâ; cui æqualis est moræ pars altera, eò quòd I B, B K per 5. & 26.l.1. *elem.* sint æquales. Hoc si demas à tempore obscurationis maximæ in B, prodibit momentum primum obscurationis Totalis in I; si addas, prodibit

Fig. 19.
m per nu. 33.l.3.
n Per nu. 19.
o Trig. Sph. probl. 8.

prodibit obscurationis Totalis in K momentum ultimum.

Rursum hoc moræ dimidiatæ tempus, si aufers à duratione Eclipsis dimidiâ §. 1. inventâ, prodibit tempus quo centrum Lunæ motu Vero à Sole percurrit arcum F I, hoc est tempus ab initio Eclipsis usque ad initium obscurationis Totalis; cui ob æquales arcus F I, K H, tempus à fine Totalis obscurationis in K, usque ad finem Eclipseos in H, æquale est.

Triangula hic resoluta cùm sint sphærica, etiam per Trigonometriam sphæricam resolvenda fuêre. Non multum tamen à Vero aberraveris, si ut rectilinea accipias, & solvas per cap. 3. Geom. Practica.

Fig. 19. 18.

a Per n.23. b Per num. præced. c Per num. 19. lib. hujus & per num. 33. & 35. l. 3. c Trig. Sph. prob. 8.

Scholium.

In Eclipsi Partiali & Totali sine morâ arcum F B (vide Fig. 18.) passim vocant Scrupula Incidentiæ; arcum B H, Scrupula Emersionis, seu Repletionis. In Eclipsi Totali cum morâ arcum F I (vide Fig. 19.) appellant Scrupula Incidentiæ; arcum I B, Scrupula moræ dimidiæ prioris; arcum B K Scrupula moræ dimidiæ posterioris; arcum K H, Scrupula Emersionis, seu Repletionis.

NUMERUS XXV.

Lunaris Eclipseos Centralis initium, finem, durationem ejusque partes invenire. Et quanta sit Lunarium Eclipsium maxima duratio.

Fig. 20.

CUm in Ecliptico *a* Centrali Lunæ centrum sit & in Nodorum alterutro (utpote carens omni Latitudine) & in centro Umbræ A, liquet tunc etiam Nodorum alterutrum in A Umbræ centrum incidere; ac proinde viam Lunæ F H secare Eclipticam C D, in A. Igitur sub Eclipsis initium Lunæ centrum sit in F, & Umbram tangat exteriùs in · P : in fine Eclipsis tangat in S, & centrum ejus sit in H: ad initium & finem immersionis Totalis tangat interiùs Umbram in P & S, centro existente priùs in I, dein in K, Manifestum est durationem Eclipsis esse tempus, quo motu Vero à Sole Luna percurrit *b* arcum F H, & moram in Umbrâ esse tempus, quo simili motu absolvit arcum I K. Arcus autem F H est summa Apparentium Diametrorum Umbræ & Lunæ: arcus autem I K est differentia eorumdem.

a per n.23. d per §. 1. e per 16.1.

Fig. 19.

§. 1. Igitur summa Diametrorum Appar. Umbræ & Lunæ conversa in tempus, hoc est divisa per motum Verum Horarium Lunæ à Sole, dabit durationem totam Eclipseos Centralis: & I K differentia Diametrorum Appar. Umbræ & Lunæ conversa in tempus, dabit moram in Umbrâ: & dimidium totius durationis demptum momento *a* (quod hîc à momento maximæ obscurationis non differt) Eclipsis initium exhibebit; additum verò, finem.

m per num. 33. l. 3. n Per num. 19.

o Trig. Sph. prob. 8.

§. 2. Duratio ejus Eclipseos omnium longissima est, quæ Centralis est, utroque Luminari existente Apogeo. Id esse verum comperies, si modo jam tradito durationes Eclipsium inventas inter se comparaveris. Quamvis enim circulus Umbræ, quem Luna Perigea pertransit, major sit eo, quem Apogea: tamen celeritas Lunæ Perigeæ majori proportione excedit celeritatem Lunæ Apogeæ, quàm circulus Umbræ, seu crassitudo transitus Perigei excedat crassitudinem transitus Apogei. Unde fit, ut Luna Apogea tardiùs percurrat minorem Umbræ circulum, quàm Perigea majorem. Requiritur porrò Sol in Apogeo, quia quò Sol à Terrâ longiùs distat, eò Umbra Terræ fit crassior.

Maxima Eclipsium Lun. duratio.

Ex datis a	est Hor.	′	″
Ptolomæo	4	6	42
Tychone	4	17	37
Lansbergio	3	57	40
Vendelino	4	13	0
Ricciolo	3	57	6

NUMERUS XXVI.

Utrùm in loco dato Luna Eclipsis videnda sit, invenire.

AD momentum initiale Eclipseos (quod notum fit per *num. 24. & 25.*) nota fac *a* Eclipticæ Puncta, Culminans, Oriens & Occidens: inde enim scies quis tum Eclipticæ semicirculus suprà dati loci Horizontem existat. Quare si ad idem initiale momentum Eclipseos inquiras locum Lunæ in Zodiaco, cognosces an Eclipseos initium in loco dato conspiciendum sit. Quod si eadem omnia fiant ad momentum ultimum Eclipseos, inde pariter intelliges, an etiam finis Eclipseos, adeoque an Eclipsis tota in loco dato spectanda sit.

a per n. 41; & 42. l. 3.

NUMERUS XXVII.

Quibus in Terris Luna Eclipsis spectanda sit invenire.

AD quæsiti consecutionem subserviet Porisma sequens.

Porisma.

Invenire punctum Terræ, cui ad momentum datum Ecliptici temporis verticale est centrum Lunæ.

Æquator esto B N C; Lunæ orbita D E, Meridianus loci, in quo es, A C X; centrum Lunæ in O; Declinationis circulus per illud transiens A N O X. Ad momentum datum inquire Declinationem *a* Lunæ, O N: tanta quoque erit Declinatio, seu Latitudo *b* Geographica puncti Terræ, cui O centrum Lunæ tum verticale est. Quod si Latitudo Lunæ sit valde exigua, assumi poterit O pro puncto Eclipticæ, ejusque Declinatio reperiri, per *num. 52. l. 1.*

Fig. 36.

a per n.8. lib. 3. b Vide def. 30. n. 1. l. 1.

Ut reperiatur dicti Terræ puncti Longitudo *c* Geographica, assumatur O locus Lunæ in suâ orbitâ, tamquam punctum Eclipticæ, & D E pro Eclipticâ: diversitas enim inde oritura in hoc negotio parvi erit momenti. Reperi igitur ad momentum datum Ascensionem Rectam ♈ N *d* puncti O; item Ascensionem Rectam *i* ♈ C Medii Cæli, sive tui Meridiani A C X: sic notus erit arcus Æquatoris N C. Et quia notum est Eclipticæ punctum O, utpote locus Lunæ, si etiam fiat *o* notum punctum E, quod eo momento Meridianum A C X pertransit, scies pariter sitne O respectu tui Meridiani A C X Occidentale, an Orientale; ac proinde cùm notus jam sit arcus N C, scies quantùm O, adeoque & suppositum illi Terræ punctum à tuo Meridiano in Ortum vel Occasum distet;

c Def. 29. nu. 1. l. 1.

d per n. 52. lib. 1. i per n. 49. lib. 3.

o per n. 49. lib. 3.

distet; atque ita nota erit dicti Terræ puncti Longitudo Geographica. Cùm ergo *suprà* etiam reperta fuerit ejusdem Geographica Latitudo, positio ejus in superficie Terræ *m* nota erit.

m Vide dicta ad def. 30. n. 1. l. 1.

Hoc præmisso.

Fig. 32. p per perif.

Ad initium, medium, finem Eclipsis (quæ nota sunt per *num.* 23. 24. 25.) reperi *p* Terræ puncta C, A, B, quibus centrum Lunæ est verticale. Cùm igitur Eclipsis Lunæ eodem momento spectetur à toto Hemisphærio cujus centrum est illud Terræ punctum, cui tùm Luna est verticalis, manifestum est initium Eclipsis spectari ab integro Hemisphærio, cujus centrum sit notum Terræ punctum C, finem verò ab eo Hemisphærio cujus centrum fit notum Terræ punctum B. Ex quo facilè cognosces quibus in Terris Eclipsis data sit apparitura.

CAPUT IV.

Via sternitur ad Eclipsim Solis.

NUMERUS XXVIII.

Defectum Solis causat Luna inter Solem & nostrum visum interposita.

ARgumentis id evidentibus planè constat 1, quia Sol numquam deficit, nisi cùm Luminaria conjunguntur; quando scilicet Luna, quam *lib.* 3. *nu.* 12. *&* 19. ostendi Sole esse demissiorem, potest inter oculum nostrum & Solem interponi. 2. Quia in ijs tantùm ☌ Sol deficit, in quibus Latitudo Lunæ Apparens minor est summâ Semidiametrorum Appar. Solis & Lunæ. 3. Quia dum Sol deficit in unâ Orbis parte, alibi eodem tempore lucet. clarissimè. 4. Quia defectus incipit ad limbum Solis Occiduum, prout nempè motus Lunæ ab Occasu in Ortum Solem assequentis, requirit. 5. Quia Sol partialiter deficiens, corniculatus apparet, quemadmodum Lunæ rotunditas ipsum tegentis postulat. Plura omitto, quòd hæc sufficiant.

NUMERUS XXIX.

Luminarium Synodus Visa, seu Apparens, quæ sit.

QUoniam Solis Defectus præcipuè pendet à Luminarium Synodo Visâ, seu Apparente, ut meliùs, quid ea fit, intelligatur, recolendæ sunt *Definitiones num.* 20. *l.* 2. præsertim *Def.* 6.8. 12. 14. de Luminarium Synodo Mediâ, & Verâ; item ea quæ exposui *l.* 3. *num.* 7. de triplici loco Solis & Lunæ: ac demùm ea, quæ *l.* 3. *num.* 38. *&* 39 dicta sunt circa Parallaxes Longitudinis & Latitudinis. Quibus suppositis,

Synodus Luminarium Visa, seu *Apparens*, est cùm loca Visa utriusque conveniunt Longitudine; ac proinde sunt in eodem plano circuli Longitudinis, per Zodiaci Polos descripti.

Synodus Visa Centralis, est cùm loca Visa Solis & Lunæ in unum idemque punctum coincidunt: *non Centralis*, cùm loca Visa Solis & Lunæ sunt diversa quidem ob Lunæ Latitudinem, seu recessum ab Eclipticâ, sed Longitudine conveniunt.

Igitur in Visâ Conjunctione Centrali tria centra Oculi, Lunæ, Solis sunt in unâ rectâ; in non Centrali hæc tria centra non sunt in unâ rectâ, sed in uno plano Longitudinis circuli.

Synodus Visa Centralis semper est Ecliptica, & tunc quidem Sol semper deficit vel totus vel ita certè, ut annulus tantùm lucidus relinquatur. Synodus Visa non Centralis quando Ecliptica sit, quando non sit, dicetur infrà.

NUMERUS XXX.

Exponitur Umbra & Penumbra Lunæ: ex qua species variæ Defectuum Solarium.

§. 1. UMbra Lunæ, est conus mucrone ad Terram directo (D X F) quem efficiunt radij Solem & Lunam tangentes (H D X, G F X). *Fig. 22.*

Penumbra Lunæ (D O P F) est pars coni mucronem V habentis sursùm, comprehensi à radijs (H F P, G D O) Solem & Lunam transversim tangentibus. Quare (D R Q S F) Umbra est pars Penumbræ (D O Z P F).

Penumbra mera, est id quod demptâ Umbrâ ex Penumbrâ relinquitur.

Umbræ & Penumbræ unus est Axis, linea nempè recta per Solis & Lunæ centra (E, I) incedens.

Superficiei Terrestris portio (R Q S) quam Umbra, & portio (O Z P) quam Penumbra inumbrant, brevitatis causâ ijsdem *Umbra* & *Penumbra* nominibus vocabuntur; Et quia illæ ex longinquo ex. gr. ex Lunâ spectatæ planæ apparerent, eas circulorum concentricorum loco habebimus, quorum commune centrum sit punctum (T) in quo communis Axis (EIA) Terrestri superficiei occurrit.

§. 2. Superficiei Terrestris (R T Q S) intra Umbram existenti, Sol deficit totus: & existenti (in T) ubi Umbræ & Penumbræ Axis (E I A) Terræ occurrit, Luminarium Conjunctio Apparens, est Centralis, adeoque & Solis defectus Centralis & maximus ibidem spectatur. *Fig. 22.*

§. 3. In merâ Penumbrâ existentibus (in Terrestris nempè superficiei portione O Z P S Q R) Sol deficit, sed non totus. Sumatur enim punctum in eâ quodvis N, à quo ducatur N M tangens Lunam. Quia hæc media est inter tangentes Lunam Solemque O D G, R D H, liquet eam Soli occurrere, putà in M. Quoniam igitur radius M N Lunam tangit, manifestum est Oculo posito in N, apparere Solis portionem M H; occultari verò portionem M G.

§. 4. Si mucro Umbræ Terræ superficiem contingit, (ex. gr. in P) in eo Terræ puncto Defectus Solis contingit Centralis Totalis sine morâ, hoc est totalis obscuratio Solis nonnisi momentanea erit. Propter Penumbram tamen (ut §. 3. jam exposui) Defectus Solis Partialis aliquamdiu durabit. *Fig. 24.*

§. 5. Si mucro Umbræ finiatur (in Q) sic ut ad Terram non pertingat, Eclipsis contingет Annularis: qualis nimirum in *schemate citato* repræsentatur. Ductis enim à puncto (P) ubi Axis Umbræ (id enim supponitur) occurrit Terræ, tangentibus Solem (P B, P D) & tangentibus Lunam (P I, P O) manifestum est obscurari totam eam Solis portionem, quæ radijs Lunam tangentibus (P I, P O) continetur, quæ nobis in Terrâ positis nigri instar circuli apparet; reliquam verò partem non occultari, quæ vita ex Terris instar annuli luminosi spectabitur. *Fig. 25.*

§. 6. Postremò si vertex Umbræ ultra Terræ superficiem porrigatur, contingent ea quæ §. 2. & 3 jam exposui: nimirum, intra Umbram Eclipsis erit Totalis cum morâ, & in merâ Penumbrâ Partialis. *Fig. 22.*

NU.

NUMERUS XXXI.

Eclipsis Terræ Visa ex Lunâ, ejusque connexio cum Eclipsi Solis.

SOlis Eclipsim semper comitatur Eclipsis Terræ. Luna enim inter Solem & Terram constituta non modò Solem visui nostro subducit, sed etiam Telluris partem aliquam privat luce Solari, eam videlicet in quam Umbra vel Penumbra incidit. Unde sicut Luna obscuratur cùm inter ipsam & Solem Terra interponitur, sic & Terra, cùm inter ipsam Solemque Luna media est, obscurabitur: cum hac tamen differentiâ, quod Terræ discus à Sole illuminatus, quia is (ut *a* ostendam *infra*) Penumbrâ major est, numquam totus Eclipsetur.

Fig. 22. *a num.* 35.

Porrò Terræ Eclipsis consideratur propter Eclipsim Solis, ut ex sequentibus clariùs apparebit. Eam primus expendit Keplerus: Bullialdus deinde, & ex eo Ricciolus excoluêre. Nos etiam hos secuti eamdem sed aliter, viâ nimirum demonstrativâ, contemplabimur. In primis sequentes Regulas propono, cætera suis locis expositurus.

Regula prima. Si aliqua est Eclipsis Terræ, aliqua erit & Solis. Nam si aliqua est Eclipsis Terræ, Penumbra Lunæ vel tota vel pars Penumbræ incidit in discum Terræ. Ergo aliqui existunt intra Penumbram. Existentibus autem intra Penumbram *b* Sol occultur vel totus vel ex parte. Ergo si aliqua est Eclipsis Terræ, aliqua erit & Solis.

b per § 2. *& 3 num. præced.*

Secunda. Si nulla est Eclipsis Terræ, nulla erit & Solis. Si enim nulla est Terræ Eclipsis, Penumbra Lunæ tota extra Terram cadet. Ergo nullus in Terrâ erit intra Penumbram. Ergo Sol nulli occultabitur. Ergo nulla Solis erit Eclipsis.

Fig. 22.

Tertia. Si Umbra tota Lunaris, vel pars ejus incidat in discum Terræ, eo loco, quem occupat, cernetur Solis Defectus Totalis; si tota cadat extra Terræ discum, nusquam Defectus Totalis apparebit. Patet ex §. 2. & 3. *num. præced.*

Quarta. Si Lunaris Umbræ & Penumbræ centrum commune (K) in discum Terræ incidat, ibidem Solis Totalis & Centralis Defectus spectabitur: si cadat extra Terræ discum, nusquam Defectus Totalis Centralis apparebit. Patet ex §. 2. & 3. *num. præced.*

Fig. 27.

Quinta. Quamdiu Penumbra aliquam disci Terreni partem infuscat (hoc est quamdiu durat Eclipsis Terræ) tam diu apparet alicubi *c* Eclipsis Solis. Alicubi inquam, quia cùm Eclipsis Solis in uno loco finita est, adhuc durat in altero. Patet ex §. 3. *nu. præc.*

Fig. 24. *c Patet ex reg.* 1. & 2.

Sexta. Quamdiu Umbræ ac Penumbræ centrum, Terræ discum perambulat, tamdiu apparet Solis Defectus Centralis, successivè videlicet per eum arcum Terræ, quem percurrit Penumbræ centrum. Patet ex §. 2. *num. præced.*

Fig. 25.

CAPUT V.

Lunaris Umbræ & Penumbræ dimensio.

NUMERUS XXXII.

Angulum & Axem Umbræ Lunaris ad tempus datum invenire.

Fig. 26.

CEntrum Solis esto E, Lunæ I: Solem verò & Lunam tangant radij M P X, G F X, determinantes Conum Umbræ Lunaris P X F, cujus Axis sit E I X. Ad contactus M, P, ducantur è centris rectæ E M, I P. Erunt *a* anguli ad P & M recti. Quare si ducatur I N parallela ad P M, erit I P M N *b* parallelogrammum rectangulum, ideoque M N *c* æqualis Veræ Semidiametro Lunæ P I, quæ nota *d* est. Hæc ablata à Semidiametro Verâ Solis E M etiam *e* notâ, notam relinquet E N. Deinde ad Synodi t. d. notæ *f* sunt distantiæ à centro Terræ Solis *e* E A, & Lunæ *d* I A. Si hanc illi subducas, nota remanebit I E Lunæ à Sole distantia ad Synodi t. d. Quoniam igitur in trigono I N E, rectangulo (ut ostendi *supra*) ad N, nota sunt latera N E, E I; ex his *o* reperietur angulus N I E: cui cùm ob parallelas M X, N I æqualis sit angulus *r* M X I, sive P X I, etiam hic, adeoque & totus P X F Umbræ Lunaris Angulus notus erit ad Synodi tempus datum.

a per 18. 3. *b per n.* 34. *lib.* 3. *o Ibidem. c per n.* 19. *& 18.* 13. *d per n.* 13. *lib* 3. *o per prob.* 4. *c.* 3. *pract. Geom. r per* 27. 1. *n per* 18. 3.

Umbræ Axem I X sic invenies. Quia I P ducta est centro ad contactum, trigonum X P I ad P, rectangulum *n* est: in quo, quia notum est latus I P, *m* Semidiameter Vera Lunæ, unà cum invento jam Umbræ Semiangulo P X I; ex his *q* reperietur I X Axis Umbræ Lunaris.

m per nu. 34. *lib.* 3. *q per probl.* 3. *c.* 3. *Geo, pract.*

Ricciolus ex datis sequentibus:

Distantiâ Solis Apogei, 7600. } Semid. Terr.
Perigei 7000

Solis Verâ Diametro 34, quarum Terræ Semid. est 1.

Distantiâ Lunæ Apogeæ. 64. 15'. } Semid. Terr.
Perigeæ 53. 45'.

Lunæ Verâ Diametro 31 ⅓, quarum Terræ Semid. est 100,

Collegit,

Sole Apogeo & Lunâ Perigeâ *a*	Sole Perigeo & Lunâ Apogeâ *b*
Axem Umbræ IX. 60. 40' Semid. Terrestr.	Axem Umbræ 52 [illegible] Semid. Terrestr.
Semiangulum Umbræ P X I. Min. 15'. 18''.	Semiangulum Umbræ Min. 16'. 39''.

a Cum nempè Umbræ Axis maximus est & Angulus minimus. b Quando nimirum Umbræ Axis minimus est, Angulus verò maximus.

NUMERUS XXXIII.

In Eclipsico ☌ inquirere an Umbra Lunæ ad Terram pertingat; an ultra porrigatur.

EXpendam hoc Problema & sequentia duo pro eo casu, quo Axis Coni Umbrosi Lunæ transit per centrum Terræ, quando nimirum Luna caret Latitudine, estque Synodus Centralis Vera. Differentia enim quæ extra hunc casum oritur, parvi momenti est.

Inquire ad datum tempus ☌ tam Umbræ *c* Axem, quàm distantiam *d* Lunæ à Terræ centro. Utraque inter se comparata dabunt quæsitum.

c per n. 32. *d per n.* 13. *lib.* 3.

NUMERUS XXXIV.

In Eclipsi Solis Totali cum morâ magnitudinem Umbræ Lunaris in Terra superficiem projectæ, metiri.

Fig. 21.

CEntrum Lunæ esto I, Terræ A: Umbræ Lunaris Conus D X F, ultra Terræ centrum extensus, Axis coni I T A X transiens per centrum Terræ (quando non transit per centrum Terræ, differentiola inde

inde orta curam Astronomi non meretur) : Umbra Lunæ in Terram projecta TQRS, cujus centrum T, arcus autem RTS quasi Diameter ejusdem. Hujus Oporteat magnitudinem invenire.

Ad d. t. inquire Axem *a* Umbræ IX, & AI distantiam Lunæ *b* à centro Terræ. Hanc illi si demas, nota remanebit AX. Ducatur ex A centro Semidiameter AS, & inquire ad d.t. Umbræ *c* Semiangulum AXS. Quoniam igitur in triangulo XAS, nota sunt latera AX, AS cum angulo AXS, ex his innotescet *d* angulus XAS, adeoque & *e* SAT. Quare ad d. t. arcus TS Umbræ RQS quasi Semidiameter, notus erit.

a per n. 32. *b per n.* 13. *lib.* 3. *c per n.* 32. *d per probl.* 11. *c.* 3. *Geo. pract.* *e per* 13.1.

Hunc in modum Ricciolus Diametrum Umbræ Lunaris cùm maxima est, nimirum Sole Apogeo & Lunâ Perigeâ, collegit Graduum Terrestrium 3.31'. 30", hoc est Milliariorum Bonon. 254. $\frac{11}{24}$ sive Horariorum ferè 85, ex datis sequentibus quæ etiam nos amplexi sumus; nempè ex angulo IAF. Scrup. 15'. 18"; Axe IX Semid. Terr. 60.40'; IA distantiâ Lunæ Perigeæ Semid. Terr. 53. 45'.

Corollarium.

Ex his & ex §. 2. *num.* 30, patet quantæ portioni Terræ eodem temporis momento Solis Defectus Totalis possit apparere, quando nimirum tota Umbra incidit in discum Terræ.

NUMERUS XXXV.

In Solis Defectu magnitudinem Penumbræ Terram infuscantis, invenire.

Fig. 22.

CEntrum Solis esto E, Lunæ I, Terræ A, radij Solem & Lunam transversim tangentes HFP, GDO determinent Penumbræ Conum VDOPF, cujus Axis VIT transeat per A centrum Terræ. Quamvis autem non transiret, nulla inde notabilis differentia in Penumbræ Terram infuscantis TOZP, quantitatem redundaret. Centrum Penumbræ sit T, ejusque quasi Semidiameter TP. Hanc invenire oportear.

Ex A Terræ centro ducatur AP : & Conus Umbræ Lunaris sit DXF, sive is terminetur in centro A, sive non. Quoniam respectu trianguli XHV angulus HVE est externus, hic æqualis *a* erit internis duobus HXV, seu HXE, & XHV, seu DHP. Primus HXE Semiangulus est Umbræ Lunaris, qui ad t. d. notus fit per *num.* 32: alter DHP est is, sub quo spectatur Luna ex Sole, notusque fiet *infra*. Quia igitur HVE duobus illis æqualis est, etiam ipse, adeoque & ipsi ad verticem existens FVI, notus erit ad t.d. Ducatur jam recta IF ex I centro Lunæ ad punctum F, quo radius HP Lunam tangit; eritque per 18.3. angulus IFV rectus. Quia igitur in trigono rectangulo VIF ad d. t. notus est angulus FVI, & per *num.* 34. *lib.* 3, notum fit latus IF Vera Lunæ Semidiameter, ex his *i* reperietur IV. Quare si inquiratur ad t. d. Lunæ à Terræ centro distantia *m* IA, tota AV nota erit. Quoniam igitur in triangulo AVP, nota sunt latera AV, AP, & angulus FVI, seu PVA, ex his *n* reperietur angulus VAP, seu TAP, quem metitur arcus TP Semidiameter Penumbræ quæsita.

a per 32. 1. *i per probl.* 3 *cap.* 3. *Geo. pract.* *m per nu.* 13 *l.* 3. *n per probl.* 11 *cap.* 3. *Geo. pract.*

Fig. 24.

Porrò angulus DHF sub quo spectatur Luna, ex Sole sic innotescet. In *Fig.* 24 angulus sub quo apparet ex Sole Semidiameter Lunæ, esto KGM. Inquire ad t. d. à centro Terræ distantiam Solis *o* GA, & Lunæ *p* KA. Hanc ab illâ aufer : remanebit GK distantia Lunæ à Sole. Cùm igitur in trigono rectangulo GKM notæ sint latera GK, & per *nu.* 34. *lib.* 3, MK, Vera Semidiameter Lunæ; ex his innotescet angulus MGK, sub quo in Sole appareret Lunæ Semidiameter.

o per n 19. & 18. *l.* 3. *p per num.* 13. *lib.* 3.

Diameter Penumbræ maximæ (videlicet Lunâ Apogeâ, & Sole Perigeo) est circiter Grad. 71 : minimæ (videlicet Lunâ Perigeâ, & Sole Apogeo) est Grad. 57.

Corollarium.

Ex his, & ex §. 3. *num.* 30, intelligitur in quantâ Telluris portione Solis Defectus eodem momento spectari possit : neque ullum posse Solis Defectum ab uno integro Hemisphærio eodem tempore conspici.

NUMERUS XXXVI.

Terra ex Lunâ visa Apparens Semidiameter est Lunæ Parallaxis Horizontalis.

Fig. 25.

CEntrum Terræ sit A, Lunæ K : ex quo Terram tangat radius KN, ducantur KA, AN. Angulus ANK per 18.3. rectus est. Liquet igitur ex *defin.* 12. *num.* 18. *lib.* 1. angulum NKA esse Parallaxem Horizontalem Lunæ, sub eoque ex Lunæ Centro K, spectari Terræ Semidiametrum.

Parallaxis Horiz. Lunæ inventa est *lib.* 3. *num.* 10, & 14. & quoniam in Syzygijs maxima Parallaxis Lunæ Horizontalis est Min. 63'. 55", minima Min. 53'. 30". tanta quoque in Syzygijs erit Terræ ex Lunâ visæ Apparens Semidiameter maxima, & minima.

NUMERUS XXXVII.

Umbra Lunaris in Terram illapsa ex Lunâ spectata Apparens Semidiameter habetur quàm proximè, si Semiangulus Coni Lunaris Apparenti Semidiametro Lunæ subducatur.

SUpponitur Lunaris Umbræ Semiangulus minor esse Semidiametro App. Lunæ, ad quod requiritur, ut Conus Umbræ Lunaris ultra Terræ centrum porrigatur.

Fig. 26.

Esto igitur Conus Lunæ PXF, extensus ultra Terræ centrum A, determinatus à radijs Solem & Lunam tangentibus GFX, MPX. Et quia Terra visa ex Lunâ apparet plana instar disci circularis, sit ille AVZC, cujus centrum sit A, quoad apparentiam à Vero Terræ centro non diversum. Umbræ Lunaris in Terræ discum projectæ Semidiameter sit AB; ductâque ad I centrum Lunæ rectâ BI, angulus AIB is erit, sub quo Semidiameter Umbræ AB Spectatori in Lunæ Centro I apparet. Angulus autem IBF assumi potest pro metiente Semidiametrum Apparentem Lunæ. Hic porrò IBF *d* æqualis est duobus internis IXB Semiangulo Umbræ, & AIB. Quare si IXB ad d. t. fiat *r* notus, & auferatur ab IBF, qui ad d. t. innotescet per *num.* 35, *lib.* 3, notus relinquetur AIB, sub quo spectatur è Lunâ, Semidiameter Lunaris Umbræ AB.

d per 32. 1. *r per num.* 32.

Hunc in modum reperietur Apparens Semid. Umbræ ex Lunâ visæ non excedere Minutum. 1'. 30".

NU-

NUMERUS XXXVIII.

Lunaris Penumbræ ex Lunâ visa Semidiameter Apparens, æqualis est Summæ Semidiametrorum Apparentium Solis & Lunæ, cum semisse circiter Parallaxeos Solis Horizontalis.

Fig. 23.

QUoniam Terra visa ex Lunâ apparet plana, discus ejus esto ANLK, cujus centrum A, à Vero Terræ centro, quoad apparentiam, non diversum. Radij Solem & Lunam transversim tangentes HFC, GDB, efficiant Penumbræ Conum BVC, cujus axis VIA transeat per centrum Terræ (si non transiret, nulla inde in Theoremate alicujus momenti differentia oriretur): Penumbra ipsa in Terram projecta, sit BRC, ejusque Semidiameter AB; ductâque è Lunæ centro IB, angulus Apparentem Penumbræ Semidiametrum è Lunâ visam metiens, sit BIA. Demonstrandum hunc proximè æqualem esse Summæ App. Semidiametrorum Solis & Lunæ.

Ducatur EB, & EM Terram ex E Solis centro tangat in M. Angulus MEA, erit Parallaxis Horiz. Solis, includens arcum TM Quadrante TN insensibiliter minorem. Quare cùm Umbræ Semidiameter quando maxima est, non excedat Gradus 35½, liquet BE cadere inter Axem AE, & ME, adeoque angulum BEA minorem esse Solis Parallaxi Horiz. MEA, & ferè ejus dimidium. Jam angulus BIA æquatur *a* duobus IBV, IVB: sed IVB *b* æquatur duobus EBV, BEV. Ergo BIA æquatur tribus IBV, seu IBD, & EBV, seu EBG, & BEV seu BEA. Horum trium primus IBD metitur Semidiametrum Appar. Lunæ, secundus EBG metitur Semidiametrum Appar. Solis, tertius BEA cùm multò minor sit ostensus Parallaxi Horiz. Solis, quæ nunquam *u* major est Minuto dimidio, ferè contemni potest. Ergo angulus BIA, sub quo ex Luna spectatur Penumbræ Semidiameter AB, proximè æqualis est Summæ Semidiametrorum Apparentium Solis ac Lunæ: cui si addamus circiter 15 Secunda pro BEA, ipse BIA prodibit exactior.

s per defin. 12. num. 18. l. 1.
t per num. 35.
a per 32. 1.
b per eamd.
u per num. 19. lib. 3.

Ex calculo Riccioli Semidiameter Apparens Penumbræ ex Lunâ visæ, cùm maxima est, nempè Lunâ, & Sole Perigeis, prodit Min. 33'.30"; cum minima nimirùm Sole & Lunâ Apogeis, Min. 29'.27".

CAPUT VI.

An, & qualis, & quantæ Durationis futura sit Eclipsis Solis, independenter à Parallaxi invenitur.

NUMERUS XXXIX.

Terminos Eclipticæ Synodi tam Possibiles quàm Necessarios invenire.

INsigni & compendioso artificio per Eclipsim Terræ è Lunâ visam Terminos Eclipticos, inter quos videlicet Solis Defectus continentur, ducibus Bullialdo ac Ricciolo, Astronomus jam reperiet, quos priores per Latitudinis Parallaxes, & operosè nec universaliter constituebant. Ut clarè res tota intelligatur, sequentes notas præmitto, quas quia Bullialdus, & Ricciolus non attulére, ex ipsis rei demonstratio non facilè intelligitur.

NOTA 1. *Discum Terræ* hic voco portionem à Sole illuminatam, quæ quoad sensum est par Hemisphærio, cùm id excedat *o* Minutis solùm 47'. 15". Hæc portio est alia continuò atque alia, cùm Solem ab Ortu in Occasum necessariò sequatur. *Centrum ejus*, est punctum illud, cui Sol Verticalis est.

o per num. 18.

2. *Basis disci*, est *a* circulus quoad sensum Maximus, centrum habens A cum Terrâ commune. In eâ concipiendum est vestigium, sive sectio plani Eclipticæ DAC, cum Polis suis, O, G; & sectio *x* plani Synodici, seu Veræ Syzygiæ OAG, nec non via centri Penumbræ FKH, quæ (ut *Notâ seq.* ostendam) quoad sensum tanto intervallo distat à vestigio Eclipticæ DAC, quanto via centri Lunæ ab Eclipticâ distat in cælo. Ex quo sequitur, si via centri Penumbræ ultra Terræ discum producta, intelligatur occurrere plano Eclipticæ in Q, sectionem Q, tanto intervallo distare à centro A, & plano Synodico, quanto Lunæ Nodus propior ab eodem plano Synodico distat in cælo, ideoque sectionem Q appellabimus *Nodum Centri Penumbræ*.

a Inspice fig. quæ media est inter 22. & 23. & numera caret, utpote reliquis jam delineatis inserta
x Defin. 5. n. 20. l. 2.

3. Centri Penumbræ Latitudo, seu ab Eclipticæ vestigio QAC distantia, in basi ipsâ disci Terrestris, ad momentum Veræ Synodi Eclipticæ spectatur ex Luna sub tanto quoad sensum angulo, quanta est Latitudo Lunæ Vera, hoc est, visa ex centro Terræ: quod sic ostendo.

Solis centrum esto in E, quod cum Terræ ac basis disci centro communi A jungat recta EA, & per hanc, ac Polos Eclipticæ ducatur planum Veræ Syzygiæ, efficiens in basi disci sectionem OAG. Cùm ergo *per hyp.* sit momentum veræ ☌, axis Coni Lunæ ACK incidet in rectam OG, puta in K, atque ibi tunc erit Centrum Penumbræ. Ex Lunæ Centro C ad rectam EA, quæ est in plano Eclipticæ, recta ducatur CP parallela ad OAG. Ea Latitudinem Lunæ repræsentabit. Si jam ex C ducatur C*q* parallela ad EA, æquales erunt A*q*, CP; adeoque angulus AC*q* sub quo ex Lunâ C spectatur A*q*, par est angulo CAP sub quo ex Terræ centro A spectatur Vera Latitudo Lunæ CP. Deinde quia C*q* parallela ad EA, erit angulus KCQ, par *a* angulo KEA. ac proinde minor quàm OEA, qui est Parallaxis Horizontalis Solis; quæ cùm non excedat Minutum dimidium, etiam KC*q* minor est *b* Minuto dimidio; ac proinde totus ACK sub quo videtur ex Lunâ C Latitudo Centri Penumbræ KA excedit AC*q*, hoc est CAP, sub quo ex Terræ centro apparet Latitudo Vera Lunæ CP, minùs quàm Minuto dimidio, quæ differentia contemni potest. Ergo KA Latitudo Centri Penumbræ tanta spectatur ex Lunâ, quanta est Latitudo Vera Lunæ, visa ex centro Terræ.

a per 27. 1.
b per n. 19. lib. 3.

Quod si Centrum Penumbræ incidat in disci marginem in O, excessus ille erit par Parallaxi Horizontali Solis; si parùm ultra, aliquanto major. Quare si tunc habenda ejus ratio videatur, ad Latitudinem Lunæ Veram 30 circiter Secunda, aut paulò amplius adjicies, ut Penumbræ Latitudo exactior habeatur. Quod si Centrum Penumbræ cadat extra Terræ discum plus quàm Minutis 33'. 30", quanta *i* est maxima Semidiameter Apparens Penumbræ ex Lunâ visæ, tunc ejus consideratio ad Terminos Eclipticos indagandos non pertinet.

i per num. 38.

4. Non solùm ad momentum Veræ ☌, quando Penumbræ Centrum est in rectâ OA sectione plani Syzygialis, sed etiam toto tempore Eclipsi Terræ,

quando Penumbræ Centrum est extra sectionem plani Syzygialis, ut in *Fig.* 27, nihilominus Latitudo Penumbræ ex Lunâ tanta proximè spectatur, quanta est Lunæ Latitudo Vera. Eò tamen differentiola fit major quò Centrum Penumbræ abfuerit longiùs à sectione plani Syzygialis O A. Hæc patent consideranti jam dicta.

5. In, & prope Eclipticam ☌ distantia Centri Penumbræ à Nodo suo propiore Q, æqualis est quoad sensum distantiæ Veræ Centri Lunæ à Nodo suo. Facilè colligetur ex dictis *Nota* 3.

His præmissis,

Fig. 27. 28.

Terminos Eclipticos reperiemus hunc in modum. In *Fig.* 27. & 28, in basi Terrestris disci sectio plani Eclipticæ sit D A C, plani Syzygialis O A E. Ad momentum Veræ ☌ (quod innotescit per *num.* 10) inquire Latitudinem Veram Lunæ; sic notam habebis Latitudinem Apparentem *a* A X Centri Penumbræ ex Lunâ visæ, cùm ea per *Notam* 3 æqualis sit Veræ Latitudini Lunæ. Accipiantur deinde disci Terrestris ex Lunâ visi maxima Apparens Semidiameter (A O), quæ est Min. 63′. 55″, & Penumbræ etiam ex Lunâ visæ Semidiameter Apparens maxima (X O) quæ est Min. 33′. 30″. Harum summa est Grad. 1. 37′. 25″, & quidem maxima. Quare si A X Apparens Latitudo Centri Penumbræ ex Lunâ visæ ad momentum Veræ ☌, est æqualis, aut major Grad. 1. 37′. 25″, videlicet summâ maximâ Semidiametrorum Apparentium disci A O, & Penumbræ X O ex Lunâ visarum, impossibilis erit Eclipsis Terræ, ac proinde *i* & Solis; si minor, erit Possibilis. Quemadmodum enim quantitates illæ Apparentes ex eodem intervallo, putà ex Lunâ, visæ se habent penes æqualitatem, excessum, defectum; ita se habent & Veræ.

a Fig. 28.

i per reg. 2. *nu.* 31.

Accipiantur deinde Semidiametri Apparentes minimæ, tam disci Terræ Minutorum 53′, 30″; quàm Penumbræ Minutorum 29′. 27″, quarum summa est Grad. 1. 22′. 57″. & quidem minima quæ esse potest. Si Apparens Latitudo Penumbræ superiùs reperta, sit par vel minor hâc summâ minimâ, liquet necessariò futuram Eclipsim Terræ, ac proinde *o* & Solis.

o per reg. 1. *num.* 31.

Eosdem Limites per distantiam Centri Penumbræ à propiore Nodo Q in plano disci existente, eo modo quem tradidi *num.* 20. §. 2, reperies adminiculo Terminorum Possibilis ac Necessarij, secundùm Latitudinem, jam inventorum.

Termini universales Synodi Ecliptica.

	Possibiles	*Necessarij*
Latitudo Penumbræ & Lunæ.	Grad. 1, 37′. 25″	Grad. 1. 22′. 57″
Distantia à Nodo propiore.	Grad. 18. 49′.	Grad. 15. 58′.

NUMERUS XL.

An fuerit, vel futura sit Eclipsis Solis, & cujus speciei, inquirere.

Fig. 28.

a per. num. 63. *lib.* 2.

b per not. 3. *nu. præc.*

§. 1. PEr *num.* 10 reperi momentum Veri ☌ cujuscumque. Ad hoc momentum *a* inquire Latitudinem Veram Lunæ; cui cùm par *b* sit Latitudo Apparens Penumbræ ex Lunâ visæ, etiam hæc nota erit. Si Latitudo Centri Penumbræ visæ ex Lunâ sit par vel minor Grad. 1. 22′. 57″, Termino Ecliptico Necessario, erit Eclipsis; si par vel major Gr. 1. 37′. 25″, Termino nempe Possibili, non erit: si media est inter Terminos, videlicet minor Grad. 1. 37′. 25″, major Grad. 1. 22′. 57″, deficiet Sol fortasse. Utrùm ergo deficiet nec ne, ita cognosces.

Inquire ad momentum Ecliptici ☌ Veri Parallaxim Lunæ *o* Horizontalem, hoc est *c* Semidiametrum Apparentem A O disci Terræ ex Lunâ visæ. Ad idem momentum inquire *d* Semidiametros Apparentes Solis & Lunæ; quarum summa aucta Secundis circiter 15 dabit *i* Semidiametrum Apparentem X O Penumbræ visæ ex Lunâ. Confer deinde in unam summam Semidiametros Apparentes disci Terræ, & Penumbræ.

o per num. 10. *l.* 2.

c per num. 36.

d per num. 35 *lib.* 3.

i per num. 38.

Si Latitudo Apparens Centri Penumbræ (superiùs inventa) sit par, vel major summâ Semidiametrorum Apparentium A O, X O disci & Penumbræ; nulla erit Eclipsis Terræ, adeoque nec Solis; erit autem, si minor. Patet ex *Reg.* 1. & 2. *num.* 31, quia tota Penumbra in casu primo tunc cadit extra discum Terræ, in casu secundo autem, vel pars Penumbræ, vel Penumbra tota disco Terræ excipitur.

Si Latitudo Apparens Centri Penumbræ, major est Diametro Apparente disci A O, nusquam continget Solis Defectus Centralis. Patet ex *Reg.* 4. *num.* 31; tunc enim Centrum commune Umbræ & Penumbræ cadit extra discum Terræ.

Si Latitudo Apparens Centri Penumbræ Apparentem disci Semidiametrum A O excedat Minuto 1. 30′, non solùm non Centralis, sed neque Totalis continget uspiam Solis Defectus. Patet ex *Reg.* 3. *nu.* 31; tunc enim Umbra tota, cujus Semidiameter apparens Oculo in Lunâ non excedit *r* Min. 1. 30′ cadit extra discum Terræ.

r per n. 37.

Si Latitudo Centri Penumbræ Apparens sit æqualis vel minor Semidiametro Apparente disci A O, spectabitur Eclipsis Centralis in uno loco. Totalis verò non Centralis in alijs. Patet ex *Reg.* 3. *num.* 31. tunc enim, & centrum Umbræ & pars Umbræ vel Umbra tota incidit in discum Terræ.

Utrùm verò Defectus Centralis, sit futurus Centralis *t* Annularis, an Centralis Totalis, ita scies. Inquire per *num.* 33 an mucro Coni Lunæ ad Terram pertingat. Si non pertingat, Defectus erit Annularis, ut patet ex §. 5. *num.* 30.

t Vide §. 5. *num.* 30.

Utrùm Eclipsis Totalis (sive ea Centralis sit, sive non) futura sit Totalis cum morâ, vel sine morâ, sic cognosces. Inquire per *num.* 33. an mucro Coni Lunæ ultra Terram porrigatur, vel an Terram contingat. Si primum, erit Totalis cum morâ; si secundum, erit Totalis sine morâ. Patet ex *num.* 30. §. 6. & 4.

NUMERUS XLI.

Durationem Eclipsis Terra ex Lunâ visa, & durationis partes, atque inde durationem integram Eclipsis Solaris invenire.

NOTA 1. PEr integram durationem Solaris Eclipsis intelligo non tempus, quo ea durat in uno loco; sed totum illud tempus, quo uspiam Terrarum successivè spectatur, licet in uno loco jam spectari desierit. Atque hoc sensu duratio tota Solaris Eclipseos æqualis est durationi Eclipsis Terræ.

2. Eclipsis Terræ incipit cùm Lunæ Penumbra disci

disci Terreni limbum primò tangit, putà in P totâ Penumbrâ adhuc existente in aëre extra Terram; finitur cùm Penumbra Terræ discum tangit ultimò, sic ut tota jam rursum existat in aëre: ejusque duratio est tempus quo Luna, seu Penumbra motu Vero à Sole percurrit arcum FBH.

3. Centrum Penumbræ ab Occasu in Ortum durationis Eclipticæ viam FH in disco Terræ perambulat celeritate non simili, seu proportionali, sed æquali ei, quâ centrum Lunæ in cælo motu Vero à Sole fertur: planè quemadmodum hominis in Sole deambulantis umbra, eâdem, quâ homo ipse, celeritate movetur. Quare motus hic Penumbræ in Terrâ, & motus Lunæ Verus à Sole in cælo, unus idemque motus est, & causa unica Terræ Solisque Eclipsim efficiens.

4. Quo tempore Penumbra Lunæ motu jam dicto ab Occasu in Ortum superficiem Terræ perambulans, causat Eclipsim Terræ & Solis, eodem tam Sol quàm Luna, & Penumbra Lunæ feruntur diurno motu ab Ortu in Occasum. Quò fit, ut discus Terræ illuminatus Solem perpetuò comitans, mutetur assiduè cum Sole ab Ortu in Occasum procedens. Verùm hoc non impedit, quò minùs quantitas arcus HF durationem Eclipsis juxta *Notationem* 2. definiat, circulo videlicet Disci ACEDO, disci non individuum, sed quantitatem repræsentante. Has notas quia Bullialdus & Ricciolus prætermittunt, ex ipsis rei Theorism non facilè Tyrones assequentur.

5. Sectio plani. Veræ Syzygiæ in disco Terræ sit OAE, occurrens viæ Centri Penumbræ in X: sectio autem plani Eclipticæ in eodem disco sit QDAC. Quoniam sectio Syzygialis, utpote transiens per Polos Eclipticæ, recta est ad QDAC sectionem Eclipticæ, eadem obliqua erit ad viam Centri Penumbræ QH, ac proinde angulus AXQ est acutus. Quare linea, sive arcus, qui per A transiens rectus sit ad FXH, cadet inter X, & F, putà in B. Unde arcus FH secatur bifariam non in X, sed in B, ac proinde momentum medium durationis Terrenæ Eclipsis illud est, quo Penumbræ Centrum est in B. Distantia hujus momenti à momento Veræ Synodi permodica est, vixque sensibilis. Quare ut eam ab Astronomo ignorari turpe, ita curari, nil magnoperè necessarium.

His præmissis,

Momentum medium Eclipsis Terræ, arcus, seu Scrupula Incidentiæ FB, & Emersionis BH, arcus seu Scrupula KB dimidiæ moræ Totalis Penumbræ suprà Terram, arcus seu Scrupula ϕB moræ dimidiæ Centri suprà Terram, duratio demum tota Eclipsis Terræ, & durationis partes, eodem prorsus modo reperiuntur, quo in Eclipsi Lunæ *Numeris* 23, 24, 25, si pro Semidiametris Apparentibus Umbræ & Lunæ assumantur Apparentes Semidiametri disci Terrestris, & Penumbræ, quæ per *num.* 36, & 38, sunt notæ. Adhibenda porrò est *Fig.* 27, & ubi illa deficit, inspiciantur *Fig.* 19.20.18, in quibus circulus DOCE hic repræsentabit discum Terræ, minores circuli Penumbram, quamvis proportio Penumbræ ad discum major sit quàm in istis Figuris exprimatur.

Ex Calculo Riccioli duratio maxima Eclipsis Terræ, Sole nimirum & Lunâ Perigeis, est Horarum 5. 52.

[Margin notes: o Vide nu. 6. num. 39. — r per n. 37.]

CAPUT VII.

Quibus in Terris Solis Defectus sit videndus, independenter à Parallaxi, definitur.

NUMERUS XLII.

Invenire situm puncti in superficie Terræ, cujus ad certum temporis momentum innotuerint distantia ab Ecliptica, & Longitudo, seu locus in Ecliptica. Fig. 29. 30.

IN Globo Terræ, in quo omnes sequentes circuli concipiendi sunt, esto Æquator RS; Meridianus loci G in quo es, IM; situs Eclipticæ (mutatur enim in Terrâ assiduè ob motum Primi Mobilis) respectu Meridiani IM pro certo temporis momento CD, ejusque tunc Polus in O; Polus Æquatoris I; Punctum quodvis in Terræ superficie, B; per quod ex Eclipticæ Polo O descriptus sit arcus Maximi circuli OBAN, occurrens Eclipticæ in A, & Æquatori in N. Igitur pro dicto temporis momento distantia puncti B ab Ecliptica est arcus BA *ex hypot.* nota, & locus ejusdem pro tunc in Ecliptica est punctum A, etiam notum *ex hyp.* His datis, oporteat situm puncti B in Globo Terræ, hoc est Geographicam *a* ejus Longitudinem, & Latitudinem reperire.

Per A & B ducantur Declinationum arcus IAP, IBQ. Quia notum est Eclipticæ punctum A, ejus ab Æquatore Declinatio AP nota fiet per *num.* 52. *lib.* 1. quâ demptâ, vel additâ Quadranti PI, notus fiet arcus AI: arcus autem AO est Quadrans, & OI distantia Polorum *b* nota est Grad. 23.30'. Igitur in triangulo AIO ex tribus lateribus notis reperietur *c* angulus IOA, seu IOB, cum IAO, seu NAP. Jam quia datur *d* AB, hoc dempto vel addito Quadranti AO, notus fit arcus BO. Igitur in trigono BIO ex notis lateribus BO, IO cum angulo IOB reperietur *i* IBO, seu NBQ unà cum BI. Deinde in triangulo NPA rectus est *m* angulus APN, seu IPR, & nota jam sunt latera AP, angulusque NAP: ex his ergo innotescet *o* NA; cui si addas, vel demas notum *per hyp.* arcum AB, innotescet arcus BN. Tandem, quia in trigono QNB, rectus *t* est NQB, & notus jam est arcus NB cum angulo NBQ, ex his reperietur *u* BQ distantia puncti B ab Æquatore, hoc est, Latitudo ejus Geographica. Ut ergo sciatur positio puncti B in Globo Terræ, superest indaganda ejusdem Longitudo Geographica, quod assequemur hunc in modum.

Quantitates inventæ	
AP	NBQ
AI, IO	BI
IOB	NA
IAO, seu NAP	NB
BO	BQ

In triangulo ABI, ex tribus lateribus notis (nam AI, BI inventa sunt *suprà*, & AB *ex hyp.* notum est) reperietur AIB, seu PIQ, quem quia metitur *x* arcus PQ, etiam hic erit notus. Inquiratur *z* deinde noti *per hyp.* Eclipticæ puncti A Ascensio Recta, seu Longitudo Æquatoria ab initio ♈, cujus terminus est in P. Inquire item *a* Ascensionem Rectam Medij Cæli (hoc est tui Meridiani IGM) quæ terminatur in M. Atque ita innotescet rectarum Ascensionum differentia PM: cui si demas vel addas notum jam arcum PQ, prodibit QM distantia Æquatoria

[Margin notes: a Defin. 29. & 30. nu. 1. lib. 1. — b per corol. nu. 31. l. 1. — c Trig. sph. probl. 18. — d Hyp. — i Trig. sph. probl. 19. — m per nu. 68. lib. 2. — o Trig. sph. probl. 12. — t Per num. 68. lib. 2. — u Trig. sph. probl. 14. — x Defin. 4. nu. 66. l. 2. — z Per nu. 52. lib. 1. — a Per nu. 40. lib. 3.]

ria puncti B à tuo Meridiano I M : unde nota fit Longitudo Geographica puncti B, si nota sit Longitudo Meridiani tui.

Ut verò scias distantia inventa Q M respectu Meridiani tui I M, sitne Orientalis an Occidentalis, sic procede. Ad momentum illud, ad quod Terræ punctum B habebat ab Eclipticâ situatâ pro tunc in C D, determinatam distantiam B A, inquire quodnam [b] Eclipticæ punctum transeat per Meridianum tuum I M. Cùm igitur notum quoque sit *ex hyp.* Eclipticæ punctum A, locus nempè Eclipticus pro eo momento puncti B, perspicuum erit utrùm locus B, adeoque & distantia Æquatoria Q M, respectu Meridiani I M sit Occidentalis, an Orientalis.

b per num. 41. lib. 3.

NUMERUS XLIII.

Invenire punctum Terræ, in quod tempore Veræ Synodi incidit Centrum Penumbræ.

Fig. 27.

Discus Terræ illuminatus esto A D O C E, in eoque sectio plani Eclipticæ C A D, secti plani Synodici, seu Veræ Syzygiæ O A E, via Centri Penumbræ F X H, occurrens sectioni Synodicæ O A E in X. Liquet Centrum Penumbræ quod est in unâ rectâ cùm centris Lunæ ac Solis, in momento Veræ ☌ esse in X. Oporteat notum reddere situm puncti X in Globo Terræ.

Cùm A centrum disci illuminatum sit perpendiculariter suppositum centro Solis, si notus fiat ad momentum Veræ ☌ locus Solis [a] in Eclipticâ, etiam notum erit punctum A in Eclipticâ Terrestri. Inquiratur deinde ad idem momentum Veræ ☌ Vera [b] Latitudo Lunæ: ita innotescet in disco Terræ Apparens Latitudo Penumbræ A X visæ ex Lunâ, cùm ea Veræ Latitudini Lunæ [c] sit æqualis. Tum reducatur Latitudo Apparens Penumbræ X A, quæ sit ex gr. Scrup. 16, ad Gradus Maximi Terræ circuli hoc modo. Reperi ad momentum Veræ ☌ [d] Parallaxim Horizontalem Lunæ; ea dabit [o] Diametrum Apparentem disci A O visi ex Lunâ, quæ sit ex. gr. Scrup. 63. Ut Scr. 63, ad Scr. 16, ita Gr. 90 fiant ad aliud; hoc dabit Gradus Maximi Terræ circuli, quibus æqualis est X A distantia Centri Penumbræ ab Eclipticâ Terrestri D A C. Quoniam igitur in superficie Terræ ad momentum Veræ ☌ nota sunt distantia X A puncti X ab Eclipticâ, ejusque in Eclipticâ locus A, ex his per *num. præced.* notus fiet in superficie Terræ situs puncti A, qui petebatur.

a per num. 55. lib. 2.
b per num. 63. lib. 2.
c per not. 3. num. 39.
d per num. 14. l. 3.
o per num. 36.

Scholium.

In eo Terræ puncto, in quod momento Veræ ☌ Ecliptica incidit Centrum Umbræ & Penumbræ, ☌ Vera & Visa coincidunt in idem momentum, ac proinde isthic Solis Defectus Centralis contingit in [o] Nonagesimo. Etsi quidem Vera ibi tunc est ex hypotesi, *est verò tunc ibidem, & ☌ Visa, quia ibi tunc est Centrum Umbræ ac Penumbræ; ubicumque autem illud fuerit, ibi est Synodus Visa.*

o Patebit ex nu. 53.

NUMERUS XLIV.

Invenire punctum Terræ, in quod momento medio Eclipsis Terrestris ex Luna visæ, incidit Centrum Penumbræ.

Iisdem positis quæ *num. præced.* manifestum est ex *Notâ* 5. *num.* 41. momentum medium durationis Eclipseos Terrestris esse illud quo Penumbræ Centrum attingit punctum B designatum à perpendiculari A B, cadente (ut ostendi *Notâ jam citatâ*) inter X & B. Oportet igitur puncti B situm in Globo Terræ notum efficere.

Fig. 27.

Per Centrum Lunæ, ac B Centrum Penumbræ & Polos Eclipticæ ducatur circulus Maximus Latitudinis, producens in disco Terræ sectionem B ♆, quæ erit perpendicularis [c] ad Eclipticam Terrestrem D A C, ac proinde ipsa est Latitudo Centri Penumbræ, & punctum ♆ est locus Centri Penumbræ B in Eclipticâ Terrestri, idem cum loco Lunæ in Eclipticâ cælesti. Quare si per *num.* 41. notum fiat momentum medium Eclipsis Terræ, quo Centrum Penumbræ (ut dixi) est in B, atque ad illud per *num.* 46, (*vel* 47) & 65. *lib.* 2. reperiatur locus Lunæ in Eclipticâ Cælesti, etiam notum erit punctum ♆ locus Centri B Penumbræ in Eclipticâ terrestri. Quod si deinde ad momentum idem nota fiat Latitudo Vera Lunæ, etiam nota [d] erit B ♆ Latitudo Apparens Centri Penumbræ ex Lunâ visæ. Reducatur deinde B ♆ sic nota, ad Gradus Maximi Terræ circuli, ut factum *num. præc.* Quoniam igitur ad momentum dictum in superficie Terræ nota sunt puncti B distantia B ♆ ab Eclipticâ D A C, ejusque in Eclipticâ locus ♆, ex his reperietur [e] puncti B situs in Globo Terræ.

c per n. 68. lib. 2.
d per not. 3. nu. 39.
e per n. 42.

NUMERUS XLV.

Invenire punctum Terræ (P) in quo Penumbra Terram primò continget, & punctum (S) in quo ultimò.

Fig. 27.

Inveni [a] momentum medium Eclipsis Terræ & durationem ejus dimidiam, quam si auferas à momento medio prodibit momentum, quo Penumbra Terram primò continget in P; si addas, prodibit momentum, quo ultimò in S. Ad momentum, quo Terram primò contigit in P, inquire [i] Latitudinem Lunæ Veram; sic nota erit [b] (F L) Latitudo Penumbræ visæ ex Lunâ, quæ (F L) ad Eclipticæ vestigium (Q D A C) perpendicularis [m] est. Ex P ad Q D A C perpendicularis etiam sit P V, quasi æquidistans ipsi F L; eritque P V Latitudo, seu distantia puncti P ab Eclipticâ Terrestri, V verò locus ipsius P in Terrestri Eclipticâ, idem qui Lunæ in Eclipticâ Cælesti pro dicto momento. Quare si ad illud per *num.* 46 *vel* 47 & per *num.* 65. *lib.* 2. reperiatur locus Lunæ in Eclipticâ Cælesti, etiam notum erit punctum V in in Eclipticâ Terrestri. Ad idem momentum reperi A Φ Apparentem Semidiametrum [o] disci & F P [p] Semidiametrum Appar. Penumbræ. Tum fiat ut summa F P A Semidiametrorum Apparentium disci & Penumbræ, ad P A Semidiametrum Appar. disci, ita F L Latitudo Penumbræ Apparens superiùs inventa, ad Quartum, dabit hoc P V in Scrupulis, secundùm quæ nota fuit F L: cùm enim P V, F L quasi æquidistent, erit ut F A ad P A, sic F L ad P V. Postremò P V jam nota in partibus ipsius F L reducatur

a per n. 41.
i per n. 64. lib. 2.
b per not. 3. num. 39.
m per nu. 68. lib. 2.
o per n. 36.
p per n. 68.

ratur ad Gradus Maximi Terræ circuli. Quoniam igitur ad momentum quo Penumbra Terram primò contingit in P, nota est in superficie Terræ puncti P distantia P V ab Ecliptica, ejusque locus in Ecliptica, ex his reperietur *r* situs puncti P in Globo Terræ.

r per n. 42.

Quod si ad momentum *suprà* inventum, quo Penumbra Terram ultimò tangit in S inquiratur, ut *suprà* Latitudo Penumbræ H ϖ, reperies eodem modo S θ, & punctum Eclipticæ θ, atque ex his situm puncti S in Terrâ.

Fig. 27.

NUMERUS XLVI.

Fig. 27.

Invenire punctum Terræ (φ), quod à Penumbræ Centro primum insidebitur, & punctum (ω) quod ultimò.

Inveni *a* momentum medium Eclipsis Terræ, & moram dimidiatam Centri Penumbræ suprà Terram; hanc si demas momento medio, prodibit momentum quo Penumbræ Centrum primò Terram insidebit in φ; si addas, prodibit momentum, quo Terram deseret in ω. Ad hæc momenta inquire *b* Latitudines Lunæ Veras & loca *c* Lunæ in Ecliptica. Sic notæ evadent distantiæ *d* punctorum φ, ω ab Ecliptica Terrestri D A C, & loca eorumdem in Ecliptica Terrestri: ex quibus per *num.* 42 innotescet eorum situs in Globo Terræ.

a per n. 41. b per n. 64. lib. 2. c per n. 46. (vel 47) & 65. l. 2. d per not. 3. num. 39.

NUMERUS XLVII.

Quibus in Terris Solis Eclipsis apparitura sit, invenire.

Fig. 32. a per n. 45. b per n. 43. c per n. 44.

Inveni *a* punctum Terræ (B) in quo Terram Penumbra primò tanget; & punctum (C) in quo ultimò. Deinde reperi (A) punctum Terræ, quod *b* in momento ☌ Veræ, vel punctum, quod in momento *c* medio Eclipsis Terræ, Centrum Penumbræ insidebit. Per hæc tria puncta jam nota intelligatur in superficie Terræ describi Arcus, seu spira (B A C). Quoniam igitur nota sunt puncta B A C, hoc est Geographica eorum tum Longitudo, tum Latitudo, etiam notæ erunt Terræ per quas incedit arcus B A C.

Omnes qui degunt in arcu B A C, videbunt Eclipsim Solis. Orientaliores quàm B, vel Occidentaliores quàm C, non videbunt: & qui in B, spectabunt omnium primi; & qui in C, omnium ultimi.

Horum omnium demonstratio patet *ex constructione & regulis 3 ac 5. num.* 31. Quod Solis Eclipsis Occidentalioribus appareat prius, ostendam *num.* 50.

Quoniam verò Penumbræ Centro perambulante arcum B A C, Penumbra ad utramque partem arcus B A C Terram similiter peragrando infuscat, fit ut non ij soli qui degunt in arcum B A C, Eclipsim Solis conspiciant, sed illi etiam quos ad utramque partem arcus B A C Penumbra pertransit. Porrò Diameter Penumbræ nota fit per *num.* 35, & quando maxima est, adæquat Gradus circiter 71.

NUMERUS XLVIII.

Quibus in Terris Solis Defectus Centralis appariturus sit, invenire.

Reperi *i* Terræ punctum (I) quod primum à Penumbræ Centro insidebitur, & punctum (K) quod ultimò. Inveni deinde punctum Terræ *m* (A) quod in momento Veræ ☌, vel punctum *n* quod in momento medio Eclipsis Terrenæ, Centrum Penumbræ insidebit. Per hæc tria puncta jam nota, arcus, sive spira intelligatur describi (I A K).

Fig. 31. i per n. 46. m per nu. 43. n per n. 44.

Qui degunt in arcu I A K, & soli, spectabunt Defectum Solis Totalem Centralem; primi quidem, qui in I; ultimi, qui in K. Demonstratio patet *ex constructione, & regulis 4 ac 6. num.* 31.

Quia porrò Umbræ *a* Meræ circellus ad partem utramque arcus I A K Terram infuscat successivè ad motum Centri ejus, fit ut Eclipsim Totalem (sed non Centralem) spectent etiam ij, quos ad utramque partem arcus I A K Umbræ circellus pertransit. Diameter Umbræ per *num.* 34. est Graduum 3. 31'. 30''. hoc est Milliariorum Horar. ferè 85.

a Quid sit, vide §. 1. num. 20.

NUMERUS XLIX.

Qualis Linea sit, quam in Terrâ Centrum Lunaris Penumbræ describit.

Fig. 31. 32.

Penumbræ Centrum per superficiem Terræ fertur duobus motibus. Primus, qui ipsam Eclipsim causat, fit ab Occasu in Ortum, sive in consequentia, per Eclipticæ planum; estque ejusdem celeritatis (ut dixi *num.* 41. *Not.* 3) vel potiùs idem, cum motu Vero Lunæ à Sole. Alter fit ab Ortu in Occasum, estque idem cum motu diurno; ac proinde fit per Æquatorem, vel Æquatori parallelum. Ex his duobus motibus Penumbræ, tertius ex utroque mixtus componitur, cujus proinde semita neque Ecliptica est (ea enim est semita motus primi), neque Æquator aut parallelus, nam is semita est motus secundi, seu Diurni; sed est linea quædam spiralis, quam de facto Centrum Penumbræ in superficie Terræ percurrit. Atque hæc est linea I A K in *Fig.* 31 suo ductu determinans loca, in quibus Eclipsis Centralis apparebit.

NUMERUS L.

Penumbra Lunæ absolutè movetur ab Occasu in Ortum: unde Occidentaliores priùs vident Solis Defectum, quàm Orientaliores.

Fig. 27. 20.

Via Lunaris, sive sectio Eccentrici Lunæ in disco Terræ sit F H. Contingat autem Penumbra Terram primò in P, deinde in S, Centro ejus existente primò in F, deinde in H, Tempus quo Penumbræ Centrum ab Occasu in Ortum percurrit arcum F H, est duratio Eclipsis Terræ. Ea autem cùm maxima est, explet *a* Horas 5. 52'. & tunc Luna in momento ☌ caret Latitudine Visâ, adeoque arcus F H (ut *in Fig.* 20.) tunc est æqualis summæ Diametrorum Disci & Penumbræ. Ergo tunc Horis 5. 52', Centrum Penumbræ absolvit ab Occasu in Ortum plus quàm Terræ Semicirculum. At motu Diurno ab Ortu in Occasum Penumbræ centrum Horis 5. 52', in

a per n. 41.

in Terræ itidem ſuperficie percurrit minùs Quadrante. Motus igitur quo Penumbræ Centrum per ſuperficiem Terræ fertur in Ortum, celerior eſt motu, quo idem Centrum per ſuperficiem Terræ movetur in Occaſum. Igitur motus Centri Penumbræ abſolutus, qui ex utroque priori componitur, Simpliciter procedit ab Occaſu in Ortum, ſive in conſequentia, per lineam Spiralem *Num. præc.* expoſitam, ſed tantò tamen tardiùs, quantùm ex ejus celeritate motus Diurnus in Occaſum, detrahit.

NUMERUS LI.

Primo Eclipſis Solaris Spectatori, Sol ad Eclipſis initium oritur; Spectatori ultimo occidit ad Eclipſis finem.

Fig. 34. RAdii Conum Penumbræ efficientes, ſint F A, K C; quorum is, qui tangit limbum Solis Occidentalem in F, & Orientalem Lunæ in I, contingat Terram in A. Manifeſtum eſt primum Eclipſis Spectatorem eſſe eum, qui degit in A. Ei autem Sol eodem momento oritur, quia ejus Horizon Viſibilis eſt A F, quem Sol motu Diurno tendens versùs G, tangit in F. Pari modo radius Penumbræ tangens Solis limbum Orientalem in G, & Lunæ Occidentalem in X, Terram contingat in B. Rurſum liquet ultimum Eclipſis Spectatorem eſſe illum qui habitat in B: pariterque clarum eſt illi Solem tunc occidere, cùm ejus Horizon Viſibilis ſit B G, infrà quem Sol jam totus deſcendit.

CAPUT VIII.

Quî Tempus, Duratio, Quantitas, Solaris Eclipſis reperiantur in loco dato.

HActenus Parallaxes evitavimus. In iis, quæ conſequuntur, earum uſus neceſſarius erit. Revocanda igitur huc ſunt, quæ *toto cap. 7. lib. 3.* de Parallaxi Longitudinis & Latitudinis expoſui.

NUMERUS LII.

Motum Horarium Apparentem, ſeu Viſum Lunæ à Sole in ☌ invenire.

AD momentum ☌ Veri inquire *b* Parallaxim Longitudinis Lunæ, & notam habeto Longitudinem Veram Lunæ, quæ tunc eadem eſt quæ Solis, inveniturque proinde per *num.* 55. *lib.* 1. Si tum *c* Luna exiſtat in Zodiaci Quadrante Orientali, Parallaxis Longitudinis addita Longitudini Veræ; Dempta verò, ſi in Occidentali, dabit Longitudinem Lunæ Viſam, ejuſque locum in Eclipticâ Viſum ad Veri ☌ tempus. Adjice deinde ad Veri ☌ tempus, vel ei deme Horam unam, atque ad illud ſic auctum vel minutum inquire *d* Parallaxim Longitudinis Lunæ ejuſque Longitudinem *e* Veram in Eclipticâ Parallaxis Longitudinis, addita, (ut priùs) vel dempta Longitudini Veræ, dabit Longitudinem Viſam Lunæ, adeoque & locum Viſum in Eclipticâ ad Veri ☌ tempus unâ horâ auctum minutumve. An porrò exiſtat Luna in Quadrante Orientali, an in Occidentali, cognoſces, ſi *per num.* 43. *lib.* 3. reperias quodnam Eclipticæ punctum ſit tunc in Nonageſimo, idque conferas cum Lunæ loco. His peractis, differentia Longitudinis Viſæ ad tempus ☌ Veri, à Longitudine Viſâ ad tempus Veri ☌ unâ horâ auctum, vel minutum, eſt motus Horarius Lunæ Viſus, ſeu Apparens ante vel poſt Synodum immediatè.

b Per num. 46. lib 3.
c Patet ex propr. 5. n. 39. l. 3.
d Per num. 46. l. 3.
e Per num. 40. & 65. lib. 2.

Eodem planè artificio reperietur motus Horarius Apparens Solis. Quare ſi hunc demas à motu Apparente, ſeu Viſo Lunæ, relinquetur motus Horarius Viſus Lunæ à Sole, immediatè ante vel poſt Veram ☌, qui quærebatur.

MOTUS HORARIUS VISUS LUNÆ A SOLE EX CALCULO RICCIOLI.

Sole & Lunâ Apogæis	*Sole & Lunâ Perigæis*	*Sole Apogæo & Lunâ Perigæâ.*	*Sole Perigæo & Lunâ Apogæâ.*
Min. 26′. 57″	32′. 56″	24′. 12″	30′. 44′.

Porrò motus Horarius Viſus Lunæ à Sole ante Veram ☌ provenit demendo Horam unam à tempore Veræ ☌: motus autem Horarius Viſus Lunæ à Sole poſt Veram ☌, reperitur tempus Veræ ☌ augendo Horâ unâ, ut patet *ex dictu*.

NUMERUS LIII.

In Quadrante Occidentali Eclipticæ Synodus Viſa ſequitur Veram, in Orientali Viſa Veram præcedit. Intervallum porrò utriuſque Synodi eſt tempus, quo Luna motu Viſo à Sole percurrit Parallaxim Longitudinis Lunæ à Sole. In Nonageſimo Synodus Viſa, & Vera coincidunt.

Fig. 33. 35. MEridianus ſit P Z Q; Horizon P Q; Zenith Z; Ecliptica L X, ejuſque Polus B; Polus Mundi A; circulus Longitudinis per Verticem Z tranſiens, B Z S, qui conſpicuum Eclipticæ Semicirculum *a* biſecat in M, & Quadrans Occidentalis *in Fig.* 33. eſt H M, Orientalis *in Fig.* 35. M V. Ad momentum ☌ Veræ exiſtat centrum Lunæ in R: per R duratur circulus Altitudinis Z R Y, & Longitudinis circulus B R K determinans in Eclipticâ locum Lunæ Verum K. Quoniam igitur ſupponitur tunc eſſe tempus ☌ Veræ, etiam locus Solis Verus *o* erit in eodem Eclipticæ puncto K. Lunæ Parallaxis in Altitudinis circulo ſit R F, adeoque locus Lunæ Viſus ſit F qui ducto per ipſum Longitudinis circulo B F I, reducatur ad Eclipticæ punctum I. Parallaxis Solis in Altitudinis circulo ſit K N, adeoque locus Solis Viſus N, qui ducto per ipſum Longitudinis circulo B N, reducatur ad Eclipticæ punctum O. Igitur locus Viſus in Eclipticâ, Solis quidem eſt O, Lunæ I, utriuſque Verus in K, Parallaxis Longitudinis, Lunæ quidem K I, Solis K O, Lunæ à Sole O I.

a per corol. 1. nu. 71. l. 2.
o per def 6. num. 20. lib. 2.

His, quæ utrique Schemati ſunt communia, hunc in modum conſtitutis, inſpiciatur jam ſolùm ſchema 33; in quo Quadrans Eclipticæ Occidentalis eſt H M, & Signorum ſucceſſio ſecundùm ordinem literarum X H M L. In hoc Quadrante igitur quo momento loca Vera Solis & Lunæ Longitudine

con-

conveniunt in K, hoc est quo ☌ Veræ celebratur Lunæ in Eclipticâ locus Visus I, est necessariò Occidentalior Solis in Eclipticâ loco Viso O, ab eoque adhuc distat arcu I O, Parallaxi nempè Longitudinis Lunæ à Sole. Quare ut locus Visus Lunæ I assequatur locum Solis Visum O, adhuc requiritur tantum tempus, quanto opus est, ut motus Visus Lunæ à Sole percurrat I O Parallaxim Longitudinis Lunæ à Sole. Igitur in Quadrante Occidentali Synodus Visa sequitur Veram eo temporis intervallo, quo Lunæ motu Viso à Sole Parallaxim Longitudinis Lunæ à Sole percurrit.

Fig. 35. Inspiciatur deinde solum *schema* 35; in quo Quadrans Orientalis est M V, & successio Signorum secundùm seriem litterarum L M V. Hic patet Lunæ in Eclipticâ locum Visum I Orientaliorem esse loco Viso in Eclipticâ Solis O, eo momento, quo Vera ☌ contingit in K, hoc est quo loca Vera Luminarium conveniunt Longitudine in K. Quare quando Vera ☌ fit in K, locus Lunæ Visus jam præterivit locum Solis Visum O, toto arcu O I, Parallaxi nempè Longitudinis Lunæ à Sole. Unde manifestum est Synodum Visam in Quadrante Orientali contingere ante Veram eo temporis intervallo, quo Luna motu Viso à Sole percurrit Parallaxim Longitudinis Lunæ à Sole.

Quando in Nonagesimum Eclipticæ Gradum M incidit Vera ☌, eodem momento etiam Synodus Visa contingit. Temporis enim discrepantia inter utramque Synodum oritur à Parallaxi Longitudinis, quæ in Nonagesimo *b* evanescit.

a Per num. 46. lib. 3. b Per num. propr. 5. 39. l. 3. d Per num. 46. l. 3. c Per num. 40. & 65. lib. 2. b per propr. 1. num. 39. lib. 3.

NUMERUS LIV.

Dato tempore Synodi Veræ, tempus Synodi Visæ invenire.

§. 1. Tempus ☌ Veræ notum fit per *num.* 10. Ad hoc inquire *d* Parallaxim Longitudinis Lunæ à Sole, quam in tempus converte hoc modo. Inveni motum *i* Horarium Visum Lunæ à Sole ante Veram Synodum vel post; qui sit ex. gr. Scrupulorum 30. Deinde fiant ut Scrupula motus Horarij Visi Lunæ à Sole, ad Scrupula Parallaxeos Longitudinis Lunæ à Sole, sic Hora una, sive Scrupula 60 ad Quartum. Prodibit tempus, quo Luna motu Viso à Sole percurrit Parallaxim Longitudinis Lunæ à Sole; hoc est, *m* tempus quo ☌ Visa Veram sequitur vel præcedit. Quare si ☌ Vera incidit in Eclipticæ Quadrantem Occidentalem., tempus jam inventum adde tempori Veræ Synodi, si in Orientalem, deme: prodibit tempus Synodi Visæ, ut patet *ex num. præc.*

d per num. 47 lib. 3. i per n. 52. m per nu. 53.

Pro inventione temporis, quo ☌ Visa & Vera distant, observa, utendum esse motu Horario Viso Lunæ à Sole post Veram Synodum, si ea incidit in Quadrantem Occidentalem; contra verò si in Orientalem, utendum esse motu Horario Viso ante ☌ Veram. Ratio est, quia motus Lunæ Visus mutatur assiduè, & multò ampliùs, quàm Verus: unde non licet motum Lunæ Visum promiscuè hic assumere.

§. 2. Tempus Visæ ☌ hoc modo repertum si voHeris, sic examina. Ad ipsum illud Visæ ☌ tempus inquire Parallaxim Longitudinis Lunæ à Sole, & Luminarium Vera loca atque inde Veram eorum distantiam in Zodiaco. Si hæc æqualis est Parallaxi, tempus ☌ Visæ exactè inventum fuit. Si distantia Luminarium major est Parallaxi, differentiam in tempus conversam juxta proportionem Horarij motus Visi Lunæ à Sole ad tempori Visæ ☌, in Quadrante Orientali; deme in Occidentali. Si distantia Luminarium est minor Parallaxi, contrarium facito. Ita ☌ Visæ tempus exactum prodibit.

Ratio est quia in momento Visæ ☌, distantia Vera Luminarium in Zodiaco necessariò æqualis est Parallaxi Longitudinis Lunæ à Sole: quod sic ostendo. Meridianus esto P Z Q; Horizon P Q; Zenith Z; Ecliptica L X; ejus Polus B; Parallaxis Lunæ in circulo Altitudinis sit R F, ac proinde locus ejus Verus R, Visus F. Parallaxis Solis in circulo Altitudinis sit O N, adeoque locus ejus Verus sit O, Visus N. Jam quia *per hyp.* est ☌ Visa, loca Visa Solis N, Lunæ F sunt in uno plano ejusdem Longitudinis circuli B F I N, reducunturque ad idem Eclipticæ punctum I, in quo proinde Visa ☌ celebratur. Ducatur deinde per Lunæ locum Verum R circulus Longitudinis B R M. Igitur in Eclipticâ, locus Verus Lunæ est M, locus Verus Solis est O, loca Visa Solis, & Lunæ sunt in I. Ergo Parallaxis Longitudinis Lunæ est M I, Solis O I, Lunæ à Sole M O. Atqui M O etiam est distantia loci Veri Lunæ M, à loco Vero Solis O. Ergo in Visâ ☌ Parallaxis Longitudinis Lunæ à Sole æqualis est distantiæ Veræ Luminarium in Zodiaco.

Fig. 37. 38.

Maximum intervallum ☌ Visæ & Veræ est Horarum 2 circiter.

NUMERUS LV.

Ad tempus Visæ ☌ Latitudinem Visam Lunæ à Sole invenire.

Iisdem positis & constructis quæ §. 2. *nu. præced.* Ad tempus ☌ Visæ, quod *per num. præced.* jam innotuit, inquire Latitudinem Veram *a* Lunæ M R, & Latitudinis *b* Parallaxim. Si R F Parallaxis Lunæ in circulo Altitudinis, deprimat locum Lunæ versùs unum Polum, putà ex R in F, & Latitudo Vera M R tendat ad Polum alterum B, ut *in Fig.* 37, contingit, aufer Parallaxim Latitudinis à Latitudine Verâ M R: relinquetur *c* Latitudo Lunæ Visa I F ad ☌ Visæ momentum. Si (quod *in Fig.* 38 accidit) Altitudinis Lunæ Parallaxis R F deprimat locum Lunæ versùs eundem Polum, ad quem tendit Latitudo Vera M R, Parallaxim Latitudinis adde Latitudini Veræ M R: summa dabit I F Latitudinem Visam. Postremò inquire *d* Solis Parallaxim Latitudinis I N, (quæ semper est ipsa Solis Latitudo Visa): quam Visæ Latitudini Lunæ I F, si Borea est (ut *in fig.* 37.) adde; si Austrina, (ut *in Fig.* 38.) deme: prodibit F N Latitudo Visa Lunæ à Sole ad tempus Visæ ☌, quæ petebatur.

Fig. 37. 38. a per num. 63. lib. 2. b per num. 46. lib. 3. c Def. 3. nu. 38. l. 3. d per num. 46. lib. 3.

Eodem modo reperietur Latitudo Visa Lunæ paulò ante, vel post ☌ Visam.

NUMERUS LVI.

Defectus Solaris quantitatem in loco dato invenire.

Sol esto C B D E, Luna B I, Ecliptica C D, via Lunæ Apparens, seu Visa F H.

Inquire ad tempus ☌ Visæ, quod per *num.* 54 jam innotuit, Visam Latitudinem *f* Lunæ à Sole, & Apparentes Semidiametros *i* Solis & Lunæ.

f per num. præced. i per num. 35. l. 3.

§. 1. Si Latitudo Visa Lunæ à Sole A G est æqualis

Fig. 37.

Iis summæ Apparentium Semidiametrorum Solis A O, Lunæ G B, Eclipsis erit nulla in loco dato. *Vide dicta num.* 20, §. 1.

Fig. 40. 41. 42. Si Latitudo Visa Lunæ à Sole A G, est minor summâ Appar. Semidiametrorum Solis A O, & Lunæ G B, in dato loco pars Solis obscurabitur. Sed obscurationis quantitas innotescet hunc in modum.

Fig. 40. §. 2. Si Latitudo Visa Lunæ à Sole A G, est minor summâ Semidiametrorum Apparentium Solis & Lunæ, sed major tamen Semidiametro Solis Apparente solâ A O; aufer A O Semidiametrum Apparentem Solis à Latitudine Visâ A G; & residuum G O aufer à Semidiametro App. Lunæ G B. Relinquetur O B pars obscurata Solaris Diametri, hoc est relinquentur O B Scrupula Deficientia.

Fig. 42. Si Latitudo Visa Lunæ à Sole A G, est minor Semidiametro Apparente Solis A O, aufer A G Latitudinem Visam à Semid. App. Solis A O, & residuum O G adde Semidiametro App. Lunæ G B: summa dabit O B partem obcuratam Solaris Diametri.

Fig. 41. Si Latitudo Visa Lunæ à Sole A G est par Solis App. Semidiametro A O, dimidium Solaris Diametri deficiet.

§. 3. Cùm Luna caret omni Latitudine Visâ à Sole, Eclipsis erit Centralis in loco dato, & si tunc Diametri Appar. Luminarium sint æquales, Eclipsis in dato loco erit Totalis sine morâ; si verò Solis Appar. Diameter O E sit minor, Eclipsis erit Totalis cum morâ: si demùm Appar. Solis Diameter sit major, Eclipsis spectabitur Annularis.

n *Vide* §. 4. *num.* 22. Fig. 40. 41. 42. §. 4. Digitos n Eclipticos sic invenies: ut Scrupula totius Diametri Solaris Apparentis O E ad Scrupula Deficientia O B. §. 2. jam reperta, ita fac 12 ad Quartum. Prodibunt Digiti Ecliptici, sive duodecimæ partes Diametri O E, contentæ in obscuratâ Diametri parte O B.

§. 5. In Eclipsi Centrali Annulari pauciores obscurantur Digiti quàm 12, quia Diameter App. Lunæ tunc est minor Diametro App. Solis. In Eclipsi Centrali Totali sine morâ, Digiti deficiunt 12, quia tunc Luminarium Appar. Diametri æquales sunt. In Eclipsi Totali Centrali cum morâ deficere dicuntur. Digiti plures quàm 12, quia cùm Diameter Solis App. tunc minor sit Diametro Apparenti Lunæ, etiamsi Solis App. Diameter augeretur, & fieret æqualis Lunari, adhuc tota posset à Lunâ tegi. Pro casu primo, & tertio Digitos Eclipticos invenies, si Diametrorum Apparentium Solis ac Lunæ differentiam convertas o in partes duodecimas Solaris Diametri, easque Digitis 12 in casu primo demas, in secundo addas.

o *Ut* §. 4.

NUMERUS LVII.

Defectus Solaris medium, initium, finem, durationem, & durationis partes in loco dato invenire.

Fig. 44. §. 1. Momentum medium Eclipsis, sive Obscurationis maximæ, quamvis modica differentia sit, non est idem cum momento Synodi Visæ, quando nempè centrum Lunæ attingit A X O planum ♂ Visæ, quod ad Eclipticam C D rectum est; medium quippe momentum illud est, quo centrum Lunæ attingit arcum A B, qui rectus est ad viam Lunæ Visam F H, ubi videlicet minimam habet centrum Lunæ distantiam Visam, à Solis centro A. Quod eodem modo hic ostenditur, quo in Defectu Lunari id ostensum *num.* 23. §. 1, & in Eclipsi Terræ *num.* 41. §. 5. Arcus porrò A B distantiæ minimæ, & momentum ipsum medium Eclipseos reperietur, ut *num.* 23. §. 2.

§. 2. Tangat Luna Solem in P, & eorum centra F, A, connectat linea A F, quæ per contactum P transibit. In triangulo A B F, quod ad B rectangulum est, nota sunt latus a A F summa Semidiametrorum Apparentium Solis & Lunæ, & latus b A B distantia minima centri Lunæ à centro Solis: ex quibus proinde innotescet linea F B, hoc est Scrupula Incidentiæ. Hæc juxta proportionem motus Visi Horarij Lunæ à Sole (ut factum *num.* 54. §. 1.) in tempus conversa, dabunt durationem dimidiam defectus Solis: quam si demas Eclipsis tempori medio, initium prodibit Eclipseos. Deinde quia o B H Scrupula Emersionis æquantur B F Scrupulis Incidentiæ, cùm nota jam sint B F, etiam B H nota erunt. Igitur B H in tempus conversa dabunt partem alteram durationis Eclipticæ: quæ addita momento medio Eclipsis, dabit finem Eclipseos. Verumtamen hic observa, ut F B Scrupula Incidentiæ vertantur in tempus, opus esse motu Viso Hor. Lunæ à Sole, ante ♂ Visam; ut verò Scrupula Emersionis B H in tempus convertas, opus esse motu Viso Horario post ♂ Visam.

a *per num.* 35. *l.* 3. b *per num.* 23. §. 2. o *Vide* §. 4. *num.* 24.

§. 3. In Solis Eclipsi Centrali via tota durationis Eclipticæ, quæ constat Scrupulis Incidentiæ F A, & Scrupulis Emersionis A H, æqualis est summæ Appar. Diametrorum Solis, & Lunæ, quæ juxta proportionem motus Hor. Visi Lunæ à Sole in tempus conversa, exhibet durationem totam Eclipseos. Si est Eclipsis Totalis cum morâ, excessus Lunaris Diametri App. suprà Diametrum Appar. Solis in tempus conversus, dabit moram obscurationis Totalis.

§. 4. Solaris Eclipseos duratio maxima reperitur Sole Apogeo, & Lunâ Perigeâ estque

	Hor.	ʹ.
Ptolomæo	3.	8.
Tychoni	2.	56.
Copernico	3.	18.
Lansbergio	3.	18.
Vendelino	3.	0.
Ricciolo	3.	8.

§. 5. Mora longissima totius Solis in tenebris est circiter Minutorum 9ʹ. 30ʺ, Sole itidem Apogæo, & Lunâ Perigæâ.

Lineæ hoc Numero assumptæ, quamvis sint arcus circulorum, possunt tamen absque notabili errore pro rectis assumi, & triangula ijs contenta, resolvi ut rectilinea.

Scholia.

Fig. 44. I. Ut reperiri possint initium, finis, duratio Eclipsis Solaris, assumi debet vel A X Latitudo Lunæ Visa ad tempus ♂ Visæ, more Antiquorum; vel cum Keplero & Ricciolo, arcus distantiæ minimæ A B. Utrumvis assumatur, aliquid in quæsiti accuratione desiderabitur. Ut enim notus fiat arcus A B eo modo, quem exposui *num.* 23. §. 2, pro viâ Lunæ Verâ assumi debet via Lunæ Apparens, seu Visa F H, & supponi angulum viæ Apparentis cum Eclipticâ non sensibiliter differre ab angulo viæ Lunaris Veræ cum eâdem Eclipticâ, qui i in ♂ & ☍ est Grad. 5. Id verò sæpè falsum est. Cùm enim Eclipses sunt parvæ, aut

i *per num.* 61. *lib.* 2.

via Visa Lunæ est valdè obliqua Eclipticæ, ostendit *a* Keplerus angulum Eclipticæ & viæ Visæ Lunaris, evadere interdum duplo, triplo, aut etiam quadruplo majorem. Nec evitabis, sed augebis potiùs errorem, si tum volueris uti Latitudine Visâ A X: Tunc enim insuper ob magnitudinem anguli jam dicti, etiam angulus A X F erit sensibiliter recto minor, ac proindè non poterit is sine errore aliquo assumi pro recto, nec triangulum A X F (quod tamen est necessarium) pro rectangulo. Accedit quod via durationis Eclipticæ F H assumatur ut arcus, vel linea recta, in uno Maximi circuli plano existens; cùm tamen (ut Keplerus etiam observat) ob varietatem continuam Parallaxeos sit flexuosa, ac proinde nequaquam unâ planâ superficie comprehensa. Nihilominùs idem Keplerus affirmat differentiam inde natam non videri sensibilem, nisi circa Nonagesimum, & Meridianum. Ex his manifestum fit, si methodo ordinariâ utamur, principium, finem, durationem Solaris Eclipsis minùs exactè reperiri, quàm reperiantur eadem in Eclipsi Lunari.

a Astron. opt. cap. 11. probl. 30.

a per num. 35. l. 3. b per num. 23. §. 2.

a Vide §. 2. num. 24.

Imò ne ipsum quidem momentum medium Solaris Eclipsis prorsus exactum est. Quamvis enim spatia F B, B H æqualia sint, tempora tamen quibus ea motus Visus Lunæ à Sole percurrit, ob variationem ejus assiduam, & inæqualem, non sunt exactè æqualia.

Enimverò potest, quemadmodum in alijs quàm plurimis, etiam in hoc negotio major præcisio obtineri. Sed pluribus opus esset, quàm ut paucis expediri res posset. Quare cum Ptolomæo, Ricciolo alijsque labore non admodum fructuoso supersedebimus.

II. *Cur in Solis Defectibus nihil immutet Refractio.*

Quemadmodum ex Parallaxi Altitudinis emanant Parallaxes Longitudinis & Latitudinis, ita ex Refractione Altitudinis, Refractio in Longitudinem quoque & Latitudinem enascitur. Cùm igitur difficultas præcipua Eclipsium Solis efficiatur à Parallaxi, suspicari eam possit novitius quispiam Astronomus, à Refractione augeri, ac proinde cùm Refractionis ratio habita sit nulla, Eclipticum negotium, hactenùs non ritè constitutum fuisse. At

Certum est Refractionem in Solis Defectibus nihil immutare. Ratio est quòd Refractiones Solis, & Lunæ *a* sint quoad sensum æquales. Quod si Luminarium Parallaxes etiam æquales essent, neque illæ quidpiam in Ecliptico negotio immutarent. Utrumque erit Refractionis ac Parallaxis naturam, & effectus consideranti manifestum.

a per n. 26, & 28 l. 3.

CAPUT IX.

Reliqua ad Solis & Lunæ Eclipses pertinentia.

NUMERUS LVIII.

Typum Eclipsis Lunæ describere.

Fig. 46.

Ex calculo Eclipsis Lunæ, jam notæ supponuntur Semidiametri Apparentes Umbræ ac Lunæ; item Latitudo Vera Lunæ ad initium, medium, ac finem Eclipsis.

Præsidio Scalæ in chartâ describe Semidiametros Appar. Umbræ A O, & Lunæ O Q, & centro A per O, & Q describe circulos. Erit A O C E D sectio Umbræ in loco transitus Lunæ; in quâ designet Eclipticam D C perpendicularis ad A Q. Rursum Scalæ adminiculo in rectâ A Q designa Latitudines Veras Lunæ A P ad initium Eclipsis, A N ad finem, A G ad medium; ducanturque P F, N H parallelæ ad Eclipticam C D, secantes extimam peripheriam in F, & H. Linea per puncta F, G, H incedens, designat viam Lunæ. Demùm centris G, F, H, intervallo Lunaris Semidiametri Appar. ex Scalâ acceptæ ter Lunæ discum describe. Ita typum habebis Lunaris Eclipseos.

Tacquet Astronomia.

NUMERUS LIX.

Typum Solaris Eclipsis describere.

Fig. 47.

Ex calculo Eclipsis Solaris notas habeto Semidiametros Apparentes Solis ac Lunæ; nec non Latitudinem Visam Lunæ ad initium Eclipsis, medium, ac finem.

Adminiculo Scalæ in chartâ describe Semidiametros Apparentes, Solis A O, Lunæ O B, & centro A per O, & B describe circulos, quorum interior A O P N Q Solem repræsentet. Recta autem G A I ad A B perpendicularis designet Eclipticam. Tum rursus adminiculo Scalæ in rectam A B transcribe Latitudines Lunæ Visas, A D ad Eclipsis initium, A C ad finem, A S ad medium. Deinde à punctis D, & C ducantur D E, C F ad I G parallelæ, occurrentes peripheriæ extimæ in E, & F. Linea incedens per E, S, F, est via Lunæ Apparens. Denique centris S, E, F, intervallo Lunaris Semidiametri Appar. ex Scalâ acceptæ ter Lunæ discum describito. Ita typum effinxeris Defectus Solaris, methodo omnibus Astronomis usitatâ. In quâ nihilominus quid desideretur juxta Kepleri observationes, collige *ex Scholio præcedenti*. Verùm tantâ præcisione hîc non est opus: satis erit typum vero affinem exhiberi.

NUMERUS LX.

De numero Eclipsium Solis & Lunæ.

1. Tam Sol, quàm Luna in 6 Mensibus Lunaribus possunt bis Eclipsim pati.

2. Possunt Sol & Luna in 5 Mensibus Lunaribus bis subire Eclipsim, sed parvam, & raram, præsertim Luna, cujus binæ Eclipses in 5 Mensibus, vix uno sæculo bis recurrunt.

3. Non potest in 7 Mensibus Lunaribus bis Eclipsari Luna, potest autem Sol, sed versus eundem Polum.

4. Possunt in unum Mensem Lunarem tres Eclipses incidere, duæ Solis, sed ad Polos oppositos, neque admodum magnæ, & una Lunæ; quæ tunc necessaria est & plerumque Totalis.

5. Possunt spatio Semestri Lunari fieri duæ Eclipses Solis Centrales, aut quasi Centrales; & tunc toto Anno Lunares sunt nullæ.

6. Nullo Anno aut pauciores fiunt Eclipses, quàm duæ, aut plures quàm octo.

7. Uno Anno possunt accidere vel tantùm duæ Solis absque ullâ Lunæ; vel duæ Lunæ cum unicâ Solis.

8. In eodem Anno Solari non plures Lunæ Eclipses possunt accidere quàm tres, Solis non plures quàm 5.

9. Uno Anno plerumque 4 Eclipses contingunt.

10. In

10. In eodem loco plures fiunt Eclipses Lunæ quàm Solis; in locis diversis plures Solis quàm Lunæ.

11. Totales Solis plures fiunt, quàm Totales Lunæ.

Horum omnium ratio ex duobus elementis pendet, nimirum ex quantitate motus Menstrui Lunæ in Latitudinem, & ex quantitate Terminorum Eclipticorum. Rem omnem ex Ptolomæo, Regiomontano, Keplero fusè deduxit Ricciolus *Almag. lib.5. cap.* 14. quem consule, si voles.

NUMERUS LXI.

Antitheses Eclipsium Solis & Lunæ.

APtè has collegit Ricciolus, ex quo ferè, ut apud eum jacent, describo.

ECLIPSIS LUNÆ.	ECLIPSIS SOLIS.
1. Est Vera obscuratio, seu Defectus Lunæ.	1. *Est Vera obscuratio, seu Defectus non Solis, sed Terræ.*
2. Est ab Umbrâ aut Penumbrâ Terræ, inter Lunam, & Solem interpositæ.	2. *Est ab Umbrâ aut Penumbrâ Lunæ inter Solem, & Terram interposita.*
3. Noctu tantùm, aut in extremis Noctis videri potest.	3. *Interdiu tantùm, aut in confinin Diei Noctisq; conspicitur.*
4. Fit tantùm in Vero ☍.	4. *Fit tantùm in Viso ☌.*
5. Apparet in toto Nocturno hemisphærio, ejusdem ubique magnitudinis, & durationis.	5. *Non apparet in toto Diurno hemisphærio, & aliquibus major ac diuturnior, aliquibus minor ac brevior apparet: alijs Totalis conspicitur, vel Annularis, alijs Corniculata, alijs nulla.*
6. Incipit in margine Orientali Lunæ, desinit in Occidentali.	6. *Incipit in margine Occidentali Solis, desinit in Orientali.*
7. Si Latitudo Vera Lunæ Borea est; in medio Eclipsis pars obscurata Lunæ vergit ad Austrum, si Latitudo Austrina, in Boream.	7. *Si Latitudo Visa Borea est, pars Solis obscurata in medio Eclipsis, vergit in Boream; si Australis, in Austrum.*
8. Ejus duratio maxima est Sole & Lunâ Apogæis, Horarum circiter 4.	8. *Ejus duratio maxima est Sole Apogæo, & Lunâ Perigæâ, Horarum circiter 3 in uno loco, Horarum circiter 5 in diversis.*
9. Contingit sæpius, quàm Solaris in eodem loco.	9. *Contingit sæpiùs, quàm Lunaris in locis diversis.*
10. In eodem Anno Solari non potest sæpiùs contingere quàm ter.	10. *In eodem Anno Solari non potest sæpiùs contingere quàm quinies.*

Horum omnium rationes suis quæque locis sunt exposita.

CAPUT X.

De Modo observandi Eclipses tam Solis quàm Lunæ.

ENumerantur à Ricciolo, *lib.5.cap.*15, accidentia 15, quæ circa Eclipses observari possunt. Præcipua sunt, Quantitas, Initium, Medium, Finis; quæ, omissis cæteris minùs necessarijs, breviter, nec enim multis opus, expediam.

NUMERUS LXII.

Magnitudinem Eclipsis Partialis observare.

Fig. 45. NOtum habe momentum medium Eclipsis, Lunaris quidem *per num.* 10. *vel* 23, Solaris *per num.* 44. *vel* 57. §. 1, atque illo, excipe in tabellâ candidâ (ut docui *lib.*3.*num.*30) speciem Luminaris, quæ sit CSFR, in cujus ambitu signa tria puncta S, C, R, in confinijs item lucis, & Umbræ alia imprime tria puncta S, P, R. Finitâ deinde Eclipsi, per S, C, R, describe circulum Luminaris; per S, P, R, verò alium circulum describe (cujus segmentum sit ESPRQ) qui in Eclipsi Lunari sectionem Umbræ in loco transitus Lunæ, in Eclipsi Solari discum Lunæ repræsentabit. Per centrum utriusque circuli ducatur recta CFG.

Si jam species Luminaris transmissa fuit per foramen armatum vitro convexo aut cavo (utrumlibet enim adhiberi potest) aut etiam Telescopio, segmentum SPRF, erit pars Luminaris deficiens, & SFR arcus obscuratus, recta autem PF erit pars Diametri obscurata; cujus quantitas nota fiet si tam ipsa FP, quàm tota Diameter FC Scalæ in minutissimas particulas divisæ, applicentur. Reductio autem partis obscuratæ PF ad duodecimas diametri, seu Digitos Eclipticos, ita fiet. Reperta sit ex. gr. PF 40, quarum CF est 100: ut 100 ad 40, ita 12 fiat ad Quartum: hic erit numerus Digitorum Eclipticorum in FP.

Quod si species Luminaris transmissa fuerit per foramen nudum, speciei Diameter, ut ex Keplero monui *num.*30.*lib.*3, erit justâ major quantitate Diametri foraminis: unde fit, ut neque segmentum SPRF, neque arcus SFR, neque recta PF, justam proportionem habeant. Quare adhibenda erit correctio ejusmodi. A Semidiametro speciei AF, aufer foraminis Semidiametrum DF, & centro A per D describe circulum AIMDN: hic erit species justa Luminaris. Deinde eandem foraminis Semidiametrum transcribe ex P in O, & centro G per O describe arcum MON. His peractis, segmentum Deficiens erit MOND, arcus Deficiens MDN, pars diametri Deficiens OD, quæ nota fiet, ut *supra*.

Hic modus plurimis Astronomis usitatus, nihil placet præ alijs, quos Ricciolus recenset *lib.* 5. *cap.* 15. *prob.* 1. Solari tamen Eclipsi, quàm Lunari accommodatior est.

NU-

NUMERUS LXIII.

Initium & Finem Eclipsis observare.

EX calculo, cujus modum toto hoc Libro 4 jam tradidimus, aut ex Ephimeride aliquâ, notum habeto tempus saltem utcumque quo Eclipsis inchoabitur: ut tempestivè omnia ad opus requisita disponi queant. Tum vel in specie Luminaris in tabellam candidam projectâ, vel telescopio vitris coloratis instructo in Luminare ipsum directo, observa quando incipiat margo Luminaris nigrescere, ac deinde sub finem, quando desinat. Si specie uteris, tabella quæ speciem excipit, moveri debet ad motum Luminaris, atque ipsi ita semper obverti, ut species sit non Ecliptica, sed circularis. Ubi etiam hoc observa, quod summi in hoc negotio momenti est, longè puriora magisque distincta fore lucis, & umbræ confinia, si species Luminaris per foramen vitro convexo, vel cavo obductum, transmittatur, quàm si per foramen nudum. Si verò placuerit Telescopium adhibere, illud non qualecumque sit oportet, sed eximium, & ejusmodi quod luminare totum intuitu uno exhibeat: qualia sunt quæ duobus vitris convexis sunt instructa.

Fig. 3. Cavenda porrò hîc fallacia quædam est, quâ imperiti observatores decepti, in observando Eclipsi Lunaris initio ac fine ad quadrantem Horæ integrum excedunt, adeoque durationem totam faciunt ultra Semihoram justâ majorem. In *Schemate* 3. Luna sit in GOIN, Terra in EDF. Manifestum est, priusquam Luna Umbræ Terrestri immergitur, dum ei proxima est, (*in Fig.* contactus exhibetur) portionem ejus GIN à toto Solis Hemisphærio CSB illustrari, portionem verò alteram quæ Orientalis est, GON solùm à Quadrante ASB, privari autem omnibus radijs profluentibus à Quadrante ASC. Unde fit, ut portio GON videatur pallore, & quasi fumo suffundi, ac proinde imperiti putent Eclipsim tunc inchoari, cùm Luna Terræ umbram nondum attigit. Cæterum hujus fallaciæ non ignari, faciles spuriam hanc umbram distinguunt à verâ, quæ non pallida, sed prorsus nigra est, atque ungulæ instar limbum Lunæ Orientalem incipit delibare.

NUMERUS LXIV.

Tempus initij ac finis, & durationem Eclipsis, ejusque partes observare.

AD momentum illud, quo *per num. prac.* observasti Eclipsim inchoari, instrumento nota fiat [a] Altitudo Solis, si Eclipsis est Solis, Altitudo alicujus Stellæ, si Lunæ; habitâ utrobique ratione Refractionis, si adsit (quæ nota fit *per num.* 27. *lib.* 3) & in Sole etiam Parallaxis [b]. Notâ porrò Altitudine Solis vel Stellæ, notum fiet & tempus, ut tradam *lib.* 5. *nu.* 45. Idipsum obtinebitur Horologio Horizontali Diurno, vel Nocturno, sed prior modus longè exactior est.

[a] *per num.* 28 *lib.* 1.
[b] *Quæ nota fit per nu.* 21. *lib.* 3.

Duratio Eclipsis, & durationis partes nimirum tempus Incidentiæ, tempus Emersionis, & mora obscurationis Totalis, accuratissimè mensurantur vibrationibus Perpendiculi, ut tradidi *num.* 4. *lib.* 3.

Scholium.

Finis observationis Eclipsium præcipuus est, ut ad eas Tabularum Astronomicorum fides exploretur. Si enim observatio ritè fuit peracta, & Eclipsis quantitas, initium, finis, duratio, ex calculo deducta cum observatione conveniant, meritò Tabulas, & quibus ea nituntur, Hypotheses, legitimas esse concludes. Et sanè non alia vel illustrior vel evidentior veritatis Astronomicæ comprobatio, quàm ex Lunæ ac Solis Eclipsibus haberi potest: quâ quidem hoc Astronomi sunt assecuti, ut omnem illam Hypothesium varietatem, & calculi ambages, & tot Geometrica ratiocinia, quatuor hisce libris jam explicata, quando ex his Solis ac Lunæ defectus in plura etiam Sæcula certissimè prænunciantur, ea ritè fuisse constituta etiam Astronomia imperiti intelligant.

FINIS LIBRI QUARTI.

ASTRONOMIÆ
LIBER QUINTUS
DE STELLIS FIXIS.

A Sole & Lunâ ad Stellas Fixas, seu Inerrantes, dilatis interim Planetis minoribus, gradum facio. Ita doctrinæ ordo postulat, quòd Planetarum motus & loca, Fixarum adminiculo constituantur. Ita porrò sunt appellatæ, non quia immobiles sint; sed quòd ita moveantur, ut eamdem semper distantiam tum inter se, tum ab Ecliptică retineant, quemadmodum ex omnium Sæculorum observationibus constat. Nam quo situ atque ordine, Hipparchi, ac deinde Ptolomæi ævo fuêre dispositæ, eodem post tot Sæcula à Tychone alijsque Astronomis sunt repertæ. Unde Empedocles & Anaximenes apud Plutarchum Inerrantes Stellas clavorum instar crystallo (hoc est Firmamento) infixas & illigatas esse censuerunt: & Sacer Textus *Iud. 5. c. De cælo* (inquit) *dimicatum est contra eos, Stellæ manentes in ordine & cursu suo, contra Sisaram pugnaverunt.*

CAPUT PRIMUM.

De Locis & Motu Fixarum.

HAbetur locus cujuscumque Astri, cùm sciuntur ejus *a* Longitudo & *b* Latitudo, vel ejus Ascensio Recta & *d* Declinatio. Sed Astronomi solent ex Longitudine potissimùm & Latitudine Astrorum loca æstimare, quòd motus propius Astrorum omnium ex Polis Eclipticæ peragatur; & Latitudo (ut ostendam *num.* 12,) semper invariata permaneat.

a *Def.* 32. *nu.* 1. *l.* 1. b *Def.* 33. *ibid.* c *Def.* 39. *ibid.* d *Def.* 28. *ibid.*

NUMERUS PRIMUS.

Stellæ Fixæ non sunt obnoxiæ Parallaxi sensibili.

ITa omnes Astronomi: quorum nullus indicium ullum Parallaxeos in Stellis Fixis deprehendit. Ex varijs modis, quibus Fixarum Parallaxis, si esset ulla sensibilis, observari posset, unum reliquis faciliorem propono. Meridianus esto A K H N; Polus Mundi B; Horizon K N. Ex Stellis numquam occumbentibus eligitur una, cujus Altitudo Meridiana minima K C sit extra refractionis aleam, putà non minor *a* Gradibus 40. Nocte aliquâ Hyemali, 12 nempè Horis longiori, Quadrante magno & exquisito observetur ejus *b* Altitudo Meridiana maxima K D & minima K C. Inquiratur item quàm accuratissimè Altitudo Poli K B: & sic notæ erunt B D, B C differentiæ Altitudinum maximæ ac minimæ ab Altitudine Poli K B; quas semper æquales esse reperies. Atqui deberet B C colligi major quàm B D, si Parallaxi sensibili Stella esset obnoxia. Cùm enim veræ distantiæ D B, C B ipsius Stellæ à Polo æquales sint; & Parallaxis in D deprimat Stellam à loco Vero D versùs Horizontem K, adeoque versùs Polum K; Parallaxis autem in C eamdem à Vero loco C deprimat Horizontem versùs, ac proinde à Polo B longiùs removeat, manifestum est differentias, seu distantias Apparentes Stellæ à Polo per observationem collectas, inæquales evadere, illam videlicet majorem, quæ in Altitudine Meridianâ minimâ K C colligitur. Nullam igitur Parallaxim sensibilem ea Stella admittit, ac proinde nec reliquæ.

Fig. 41. *lib.* 1.

a *Vide l.* 3. *n.* 28. *Coroll.* 4. b *per num.* 28. *lib.* 1.

Corollarium.

Hinc patet radium Terræ respectu radij Firmamenti insensibilem esse.

NUMERUS II.

Declinationes o ***Stellarum, sive distantias earum ab Æquatore invenire.***

o *Def.* 18. *nu.* 1. *lib.* 1.

MEridianus esto A S B T; Horizon A B; Æquator C D; Poli Æquatoris X, Z; Zenith, S.

Fig. 1.

Observetur appulsus Fixæ, cujus Declinatio quæritur, ad Meridianum, ut tradidi *lib.* 3. *num.* 2; ac tum aptetur instrumento *a* saltem decades Secundorum continente ejus Altitudo meridiana; à quâ refractio, si quæ fuerit, subducatur; quod quomodo absque circuli vitio fieri possit, ostendam *b* *infrà*. Inveniantur præterea *c* Altitudo Poli A X, & Altitudo *d* Æquatoris D B.

a *per num.* 28. *lib.* 1. b *num.* 6. *in Schol.* c *per n.* 27. *lib.* 1. d *Ibid.*

Itaque

Itaque si Fixæ Altitudo fuerit æqualis Altitudini Æquatoris D B, ejus Declinatio est nulla: si par Altitudini Verticis S B, à Quadrante S B aufer Altitudinem Æquatoris D B, relinquetur Fixæ Declinatio S D: si par Altitudini Poli X A, Declinatio Fixæ est Quadrans X D.

Si Altitudo Stellæ est B F minor, vel B I major (citra tamen Verticem S) Altitudine Æquatoris B D, ipsarum differentia D F, vel D I, est Declinatio quæsita.

Si Altitudo Stellæ est A G minor quidem Quadrante, sed major Altitudine Poli A X, Altitudinum differentia X G dempta Quadranti X D, dabit Declinationem G D. Si verò Altitudo Stellæ A O minor est Altitudine Poli A X, Altitudinum differentia O X addita Quadranti X D dabit Declinationem Stellæ quæsitam O D.

Quia Fixæ moventur sensim ab Occasu in Ortum super Polis Eclipticæ, ut dicetur *num.* 11 *&* 12, necesse est earum Declinationes sensim mutari, quæ quomodo ad aliquod tempus hic inventæ, accommodari possint tempori cuicumque, dicam *infrà num.* 17.

NUMERUS III.

Solis [a] *Declinationem & Ascensionem* [b] *Rectam invenire.*

a *Def.* 18. *num.* 1. *lib.* 1. b *Def.* 39. *ibid.*

Utrumque jam præstitimus *num.* 52. *lib.* 1. Sed locus invitat, ut aliam hic praxim adjiciamus. Meridianus esto A X B; Horizon A B; Æquator I D; ejus Polus X; Ecliptica F G. Observa [a] appulsum centri Solis ad Meridianum, capiaturque tunc ejus [b] Altitudo F B; quam (si opus fuerit) corrige addita [c] Parallaxi, & Refractione [d] subducta. Notam fac deinde [i] Altitudinem Æquatoris B D. Altitudinum Solis B F, & Æquatoris B D differentia F D, exhibet Declinationem Solis: quod erat primum.

Fig. 2. a *per n.* 26. *lib.* 1. b *per num.* 28. *lib.* 1. c *Vide nu.* 21. *lib.* 3. d *Vide nu.* 27. *l.* 3. i *per num.* 27. *l.* 1. m *per nu.* 68. *l.* 2. n *per n.* 31. *lib.* 1. o *per trigonum Sph. prob.* 10.

Deinde in triangulo C D F, rectangulo [m] ad D quia nota sunt latus F D, & angulus obliquitatis Eclipticæ F C D [n] Grad. 23. 30'; ex his innotescit [o] arcus C D; ex quo Solis Ascensio Recta innotescet. Casus omnes exposui *num.* 52. *lib.* 1. quos solves eo modo qui isthic traditur, si notum feceris locum Solis per *num.* 55. *lib.* 1.

NUMERUS IV.

Ascensionem [a] *Rectam, sive distantiam Æquatoriam Fixarum ab initio* ♈, *invenire.*

a *Def.* 39. *nu.* 1. *l.* 1.

Fig. 3. 4.

Meridianus esto A X B Z; Horizon A B; Æquator N D; ejus Poli X, Z.

Observa Stellæ, cujus Ascensio Recta quæritur, appulsum ad Meridianum, uti docui *num.* 2. *lib.* 3. Ut operatio, mox præscribenda reddatur facilior, tempus capta, quo Stella Meridianum transeat paulò ante Ortum Solis vel paulò post Occasum.

Fig. 3. a *per num.* 6. *lib.* 3.

Si Stella Meridianum transit ante Solis Ortum, à momento appulsus [a] metire tempus numerando vibrationes Perpendiculi, usque dum Sol altitudinem aliquam nactus, sit suprà Horizontem ex. gr. Gradus unius, vel 1. 30'; sic ut totum tempus sit unius Horæ aut paulò amplius, ne nimius numerandi sit labor, tum verò Solis Ascensio Recta sit ♈ D S. Quoniam igitur ad initium numerationis Stella fuit in Meridiano, puta in I, atque interim progressa fuit versùs Occasum, statuamus eam sub finem numerationis, quando Solis Altitudo erat ex. gr. Gradus 1. 30', motu Diurno processisse ex I in P; ducaturque per P Declinationis circulus X P C Z, secans Æquatorem in C. Quoniam igitur ex vibrationibus Perpendiculi notum est tempus quo Stella mota est ex I in P, cùm motus istius mensura sit Æquator, si tempus dictum convertatur [b] in partes Æquatoris, notus fiet arcus D C, distantia nimirum Æquatoria Stellæ à Meridiano ad momentum illud, quo Stella erat in P. Continuando deinde ab hoc momento vibrationes Perpendiculi usque ad Meridiem sequentem per *num.* 6. *lib.* 3. scies quot Horæ & Minuta ab eo momento sint ad Meridiem, adeoque momentum ipsum erit notum; & si Horæ illæ ac Minuta [d] convertantur in Gradus Æquatoris, notus erit Æquatoris arcus S D, distantia Solis Æquatoria à Meridiano X D Z: quà addita ad inventum *suprà* arcum C D, notus fiet arcus S D C distantia Æquatoria Solis ac Stellæ P. Postremò ad notum jam momentum, quo Stella in P, reperi per *num. præced. vel per num.* 52. *lib.* 1. Ascensionem Solis Rectam M C D S; cui si demas distantiam Æquatoriam S D C Solis ac Stellæ, nota relinquetur M C Ascensio Recta Stellæ P, quæ petebatur.

b *per num.* 51. *lib.* 1. d *Ibid.*

Fig. 4.

Quòd si Stella Meridianum pertranseat in R paulò post Solis Occasum, tunc à Meridie præcedenti usque ad momentum quo Sol fit propè Horizontem, numerandæ sunt vibrationes Perpendiculi, sic enim per *num.* 6. *lib.* 3. notæ fient Horæ & Minuta à præcedenti Meridie usque ad momentum quo Sol est propè Horizontem, adeoque momentum illud notum erit; & si Horæ illæ ac Minuta vertantur in partes Æquatoris, nota erit distantia Solis Æquatoria à Meridiano X D Z quæ sit D Y. Ad momentum porrò quo Sol adhuc erat suprà Horizontem, Stella *ex hyp.* nondum attigerat Meridianum, sed erat ex. gr. in Q, per quam ibidem ductus intelligatur Declinationis circulus X Q O Z. Tum à momento jam noto, quo Stella erat in Q & Sol propè Occasum, continuatis Perpendiculi vibrationibus notum fiat tempus usque dum Stella Meridianum attingat in R. Hoc tempus conversum in partes Æquatoris dabit arcum O D; qui additus invento priùs arcui D Y, dabit arcum O D Y distantiam Æquatoriam Stellæ à Sole. Quare si ad notum momentum, quo Stella est in Q, reperiatur Solis Ascensio recta ♈ Y, eique addatur arcus jam notus O D Y, nota fiet Stellæ Ascensio Recta ♈ Y D quæ petebatur.

NUMERUS V.

Ex notâ unius Fixæ Ascensione Rectâ, invenire Ascensiones Rectas aliarum.

Fig. 5.

Æquator esto C F; ejus Poli X, Y; Stella Fixa notam habens Ascensionem Rectam A; alia quævis Fixa B, vel I, vel D, cujus Ascensio Recta latet.

Per Stellas A & B transeant Declinationum circuli X A Y, X B Y, determinantes Æquatoriam Stellarum distantiam, sive Ascensionum Rectarum differentiam C I.

a *per num.* 2.

Si ambæ declinent versùs eundem Polum, ut A & B, earum distantiam A B instrumento metire, & per *num.* 2. Inveni utriusque Declinationes A C, & B I, quibus singillatim subductus à Grad. 90, arcus A X, B X noti erunt. Cùm igitur in triangulo A X B tria latera sint nota, ex his reperietur [a] angulus A X B, seu C X I, adeoque & arcus C I angu-

a *trig. Sph. prob.* 18.

 lum

b per dif. 4 num. 66. lib. 2. lum b metiens innotescit; qui additus vel subtractus notæ Ascensioni Rectæ Stellæ A, dabit Ascensionem Rectam Stellæ B. Addi debet, si B sequitur A (hoc est si B longiùs distat ab initio ♈ quàm A); debet subtrahi, si B præcedit.

Si una sit in Æquatore, putà in I, resolve triangulum A X I: Si una declinet ad Polum alterum, putà in D, solve triangulum A X D, in quo nota fiunt, *ut suprà*, latera A X, A D: latus autem X D componitur ex Quadrante X I, & D I Declinatione Stellæ D.

Scholium.

Ex hoc Numero & præcedenti omnium Fixarum Ascensiones Rectæ inveniuntur pro certo tempore. Sed quia Fixæ super Polis Eclipticæ (ut ostendam Num. 12.*) moventur sensim ab Occasu in Ortum, necesse est earum tam Declinationes ab Æquatore, quàm Ascensiones Rectas sensim immutari. Quomodo igitur illa semel ad aliquot tempus jam inventa, cuivis tempori possint accommodari, tradetur* infrà num. 17.

NUMERUS VI.

Refractiones Fixarum invenire.

Fig. 6. MEridianus esto A X B Z; Horizon Verus A B; ejus Poli X, Z, Æquator F Q; ejus Polus N. Eligatur Fixa, cujus Meridiana Altitudo sit non minor Gradibus 40. Quoniam igitur Sol in Altitudine Graduum 40 à Refractione c immunis est, & Fixæ (utpote Sole altiores) minùs refringuntur quàm Sol, etiam Fixa assumpta Altitudinem Meridianam habens 40 Gradibus non minorem, in Meridiano existens, à Refractione immunis erit. Quare tum ejus Declinatio per *num.* 2, Refractione nusquam se immiscente, reperietur. Sit ergo talis Fixa, infrà Horizontem Verum in G, sed per Refractionem appareat in Horizonte ipso in P. Igitur Verticalis circuli X P G Z arcus G P est quantitas Refractionis. Nulla porrò in Fixis est distinctio Horizontis Veri & Visi, cùm Fixæ omni careant o Parallaxi, ac proinde etiam Horizontali, quæ d Visi & Veri Horizontis intervallo æqualis est. Per Verum Stellæ locum G ducatur Declinationis circulus N G, secans Æquatorem in D. Arcus D F. erit distantia Æquatoria Fixæ G, à Meridiano. Inquiratur jam Ascensio Recta Stellæ, seu distantia Æquatoria O D ab initio ♈. Inveni quoque ad momentum idem O F Ascensionem Rectam q Medij Cæli, hoc est distantiam Æquatoriam Meridiani A F X ab initio ♈. Utriusque igitur distantiæ O D. O F differentia D F, nota erit. Quare cùm arcus D F metiatur m angulum D N F, seu G N X, etiam hic notus erit. Reperi deinde per *nu.* 2. Declinationem Stellæ G D; quod evitatâ Refractione fieri posse *suprà* ostendi. Arcus verò N X est complementum Altitudinis Poli B N. Unde si hæc nota fiat per *num.* 27. *lib.* 1, etiam arcus N X notus erit. Arcus autem N G, quia constat Quadrante N D, & jam inventâ Declinatione G D, etiam notus est. Cùm igitur in triangulo N X G, nota sint latera N X, N G, & angulus G N X, ex his n reperietur X G distantia Vera Stellæ G à Vertice X, quæ semper invenietur major Quadrante. Quare si ab X G dematur Quadrans X P; relinquetur O P quantitas Refractionis Horizontalis quæsita.

c per Coroll. 4 nu. 28. lib. 3.
o per nu. 1.
d Ostensum ad defin. 4. n. 22 lib. 3.
t per nu. 4.
q per num. 40. l. 3.
m per def. 4 n. 66. l. 2.
n trig. Sph. prob. 19.

Fig. 7. Eodem modo reperiuntur Refractiones Fixarum ad Gradus singulos Altitudinis Visæ suprà Horizontem. Appareat Stella suprà Horizontem in P, verè tamen existens infrà P in G, sive G sit suprà Horizontem, sive infrà. In triangulo X N G, latus N X, & angulus G N X innotescunt, *ut suprà in casu* 1. Ut innotescat latus N G, Declinatio Stellæ G D, si (*ut in hoc schemate*) est Austrina, debet addi Quadranti N D; demi verò, si Borea. Ita rursum ex duobus lateribus N X, N G, & angulo G N X innotescet X G distantia Vera Stellæ à Vertice. Quare si instrumento mensuretur Apparens à Vertice distantia X P, hæc subtracta distantiæ Veræ X G, dabit Refractionem G P, ad Visam Stellæ Altitudinem P M.

FIXARUM REFRACTIO HORIZONTALIS.

Æstiva	*Æquinoctialis*	*Hyberna*
Min. 29'. 50"	*Min.* 30'. 10"	*Min.* 30'. 30"

Ad Gradum Altitudinis 20, Fixarum nulla differentia Altitudinis Veræ, & Visæ percipitur, ac proinde Refractio evanescit.

Scholium.

Inventio Declinationis Fixarum Num. 2. *tradita notam requirit Altitudinem Meridianam Stellæ datæ cui, si ea minor est Grad.* 20, *subducenda est Refractio, ut exacta fiat: non potest autem subduci Refractio, nisi ea sit nota; ad notitiam porrò ejus, requiritur (ut* hoc Num. *jam vidimus) ejusdem Stellæ declinatio. Videtur ergo circulus committi. At circuli vitium jam evitavimus hunc in modum. Quantitatem Refractionis notam* hoc Num. *fecimus per Fixas, quarum Altitudo Meridiana, adeoq; & Declinationis inventio, à Refractione immunis est. Quare Refractio independenter à Refractione innotuit. Hâc porrò semel notâ, Declinatio Fixarum etiam 20 Gradibus minorem Altitudinem Meridianam, adeoq; Refractioni obnoxiam habentium, absque ullo circuli periculo,* per Num. 2. *reperietur.*

NUMERUS VII.

Fixarum o Longitudinem & p Latitudinem invenire.

o Def. 32. n. 1. lib. 1.
p Def. 33. nu. 1. l. 1.

HOc Problema, quod præcipuum in hac materiâ est, casus habet 26. Nihil tamen aut parùm multitudo ista facesset negotij, si methodo utamur, quam hic subjungo.

Assumuntur ut nota, 1. obliquitas a Eclipticæ, sive Declinatio ejus maxima, & distantia Polorum Æquatoris ac Eclipticæ, quæ ejusdem obliquitati semper a æqualis est. 2. Declinatio b Stellæ. 3. Ascensio c Recta.

a per nu. 31. l. 1.
o per cor. n. 31. l. 1.
b per nu. 2.
c per n. 4.

Fig. 8. §. 1. Colurus Solstitiorum esto B X C Z; Æquator B C; ejus Poli X, Z, Ecliptica D E; ejus Poli S, Y. Si Stellæ Fixæ, cujus Longitudo & Latitudo quæritur, Ascensio Recta per *num.* 4, inventa, sit Grad. 90, Stella erit in Coluri Semicirculo X B Z per

per ♋ initium transeunte: & quia Colurus Solstitiorum transit non solùm per Polos Æquatoris, sed etiam per Polos Eclipticæ, is simul est & Declinationis & Latitudinis circulus, ac proinde Stellæ & Declinationem, & Latitudinem metietur. Tunc igitur

Si Declinatio Stellæ est nulla, adeoque Stella sit in B, ejus Longitudo erit ♈ D Grad. 90; Latitudo autem erit B D, ipsa Eclipticæ Declinatio maxima, nempè *d* Grad. 23. 30′.

d per n. 31. lib. 1.

Si Stellæ Declinatio sit B O Borea, sed minor quàm B D Grad. 23. 30′, aufer B O à B D, relinquetur O D Latitudo Stellæ.

Si Declinatio Stellæ Borea sit æqualis B D, nempè Grad. 23. 30′, Stella est in Ecliptica, adeoque caret Latitudine.

Si Declinatio Stellæ Borea sit B F, major quàm B D, à B F aufer B D; relinquetur Latitudo Stellæ F D.

Si Declinatio Stellæ sit B G Austrina, hæc addita ad B D, dabit G D Latitudinem Stellæ quæsitam.

His quinque casibus alij totidem oriuntur similes cùm Stellæ Ascensio Recta est ♈ D ♎ E Graduum 270, sive trium Quadrantium, tunc enim stella est in altero Coluri semicirculo X C Z Longitudinem habens ♈ B ♎ C Graduum 270. Atque ita 10 primi Casus sunt expediti.

Pro reliquis Casibus nota in Figuris 9. 10. 11. 12, lineas D E, B C integros circulos repræsentare. Itaque ♈ B est Æquatoris Quadrans primus, B ♎ secundus, ♎ C tertius, C ♈ quartus; pari modo ♈ D est Quadrans primus Eclipticæ, D ♎ secundus, ♎ E tertius, E ♈ quartus. Si Stella igitur sit extra Colurum Solstitiorum, 4 casus existunt. Vel enim Stella erit in Æquatore ipso in P (& hic est Casus primus) vel extra eum in F; & tunc vel est in Ecliptica D E (ut in Fig. 10 & 12), vel (ut in Fig. 9. & 11.) extra Eclipticam cum Latitudine Boreâ, vel extra Eclipticam cum Latitudine Austrinâ, atque ita habentur tres Casus reliqui, qui juncti primo, efficiunt quatuor. Iam quia Ascensio Recta Stellæ terminari potest in Quadrante quolibet Æquatoris, fit ut in Quadrantibus singulis 4 Casus supradicti cum novâ in singulis varietate reperiantur, ac proinde Casus existant 16: quos si 10 prioribus adjungamus, universim orientur Problematis Casus 26. Restat igitur ut Casus 4 supradictos in singulis Quadrantibus expediamus.

Fig. 10. 12.

§. 2. Sit ergo Stella P in Æquatoris Quadrante quovis, ducaturque Latitudinis arcus S P occurrens Eclipticæ in M.

Fig. 10.

Si Stella P est in Quadrante primo ♈ B, solve triangulum ♈ M P *l* rectangulum ad M, in quo notum est latus ♈ P, Ascensio Recta, & angulus M ♈ P obliquitas *k* Eclipticæ Grad. 23. 30′: ex quibus reperientur Stellæ *m* Latitudo M P, & Longitudo ♈ M.

l per n. 68. lib. 2.
k per num. 31. lib. 1.
m per Trig. Sph. prob. 2. & 14.

Fig. 12.

Si Stella P sit in Quadrante secudo B ♎, solve trigonum rectangulum ♎ M P; in quo latus ♎ P notum fit, si Ascensio Recta ♈ B P dematur semicirculo ♈ B ♎. Sic ergo ex latere ♎ P & angulo M ♎ P Grad. 23. 30′ elicientur Latitudo Stellæ M P, & latus ♎ M; quod subtractum Semicirculo ♈ D ♎ dabit ♈ D M Longitudinem Stellæ.

Si Stella P existat in Quadrante tertio ♎ C; ab Ascensione Rectâ ♈ B ♎ P aufer semicirculum ♈ B ♎: ita notum erit latus ♎ P; ex quo & angulo M ♎ P reperientur M P Latitudo Stellæ, & latus ♎ M, quo addito ad semicirculum ♈ D ♎ prodibit Stellæ Longitudo ♈ D ♎ M.

Fig. 12.

Si Stella P sit in Quadrante quarto C ♈, Ascensio Recta ♈ B ♎ C P subtracta toti circulo ♈ B ♎ C ♈ relinquet latus ♈ P: cum quo & angulo M ♈ P reperientur Stellæ Latitudo M P, & latus ♈ M; quod subtractum toti circulo ♈ D ♎ E ♈ relinquet Stellæ Longitudinem ♈ D ♎ E M.

Atque ita primus Casus è quatuor in Quadrantibus singulis solutus est.

§. 3. Tres Casus reliquos, quando Stella declinat ab Æquatore in F, sive existat in Ecliptica ipsâ ut *in Fig. 10. & 12*, sive extra eam cum Latitudine Boreâ vel Austrinâ, ut *in Fig. 9. & 11*, solvemus hunc in modum. *In Fig. 9. 11. 10. 12.* ducantur per Stellam F arcus Latitudinis S F occurrens Eclipticæ in V, & Declinationis arcus X F, occurrens Æquatori in P, in quo proinde puncto terminabitur Ascensio Recta Stellæ F.

Fig. 9. 10.

Incidat primò Ascensionis Rectæ terminus P in Quadrantem primum ♈ B. Ascensio Recta ♈ P addita Quadranti dabit arcum P C, adeoque *n* & angulum P X C, seu F X S. Quod si Stella F ab Æquatore B C declinat ad Boream, Declinatio P F dempta Quadranti P X, dabit arcum F X; si ad Austrum, Declinatio F P addita Quadranti dabit arcum F X. Arcus verò X S distantia Polorum *o* est Grad. 23. 30′. In triangulo igitur F S X ex lateribus F X, X S & angulo F X S reperientur *q* angulus X S F, seu D S V (adeoque & arcus ipsum *p* metiens D V) & latus S F; quod, si fuerit Quadrante minus, demptum Quadranti S V relinquet Stellæ Latitudinem F V; si verò S F reperieris Quadrante majus, Quadrans illi subtractus relinquet Latitudinem Stellæ quæsitam F V. Aufer deinde inventum *supra* arcum D V ex Quadrante ♈ D, relinquetur ♈ V Longitudo Stellæ.

n per def. 4. n. 66. l. 2.
o per Cor. n. 31. l. 1.
p per def. 4. n. 66. l. 2.
q trig. Sph. prob. 19.

Fig. 9. 10.

Incidat deinde Ascensionis Rectæ terminus P in Quadrantem secundum B ♎. Igitur Ascensionem Rectam ♈ B P, aufer à tribus Quadrantibus ♈ B P ♎ C; ita notus erit arcus P C angulusque P X C, seu F X S. Quare soluto, ut priùs, triangulo F S X, reperientur F V Latitudo Stellæ, & arcus D V, qui additus Quadranti ♈ D dabit Stellæ F Longitudinem ♈ D V.

Fig. 11. 12.

Incidat tertiò Ascensionis Rectæ terminus P in Quadrantem tertium ♎ C. Tum verò Ascensio Recta ♈ B ♎ P dempta Quadrantibus tribus ♈ B ♎ P C, notum relinquet arcum P C, adeoque & angulum P X C, seu F X S in triangulo F S X; in quo latus F X innotescet, si Declinationem F P Quadranti D P demas vel addas. Latus autem X S distantia Polorum est Grad. 23. 30′. Quare ex lateribus F X, X S & angulo P X S reperientur *r* angulus X S F (adeoque *s* & arcus D ♎ V) & latus S F; quod, si est Quadrante minus, demptum Quadranti S V relinquet Stellæ Latitudinem V F; si est Quadrante majus, Quadrans illi subtractus dabit rursum Latitudinem Stellæ F V. Addatur deinde arcui *supra* invento D ♎ V Quadrans ♈ D, prodibit ♈ D ♎ V Longitudo Stellæ F quæsita.

r trig. Sph. prob. 19.
s def. 4. n. 66. l. 2.

Fig. 11. 12.

Incidat postremò P in Quadrantem quartum C ♈. Igitur Stellæ F Ascensio recta erit ♈ B ♎ C P, à quâ subtractis Quadrantibus tribus ♈ B ♎ C, notus fiet arcus P C, adeoque & angulus P X C, seu F X S. Quare soluto, ut priùs, trigono F S X, reperientur Stellæ F Latitudo F V, & arcus D ♈ V: quo dempto à semicirculo D ♈ E, notus fit arcus V E: cui si addantur Quadrantes tres ♈ D ♎ E, proveniet Stellæ F Longitudo ♈ D ♎ E V. Atque ita omnes Casus Problematis expedivimus.

NUMERUS VIII.

Longitudinem & Latitudinem Stellæ per duas alias notæ Longitudinis & Latitudinis invenire.

Fig. 13.

Ecliptica esto AB; Poli ejus X. Z: Ducantur tres Latitudinum circuli XAZ, XIZ, XNZ.

§. 1. Stella, cujus Longitudo & Latitudo quæruntur, sit in C; aliæ duæ Longitudinis & Latitudinis notæ in D, F, quas oportet Gradibus saltem 20 suprà Horizontem elevatas esse, ne eas cogamur à Refractione distantiæ, quod operosum est, expedire. Describantur deinde tres Maximorum circulorum arcus CD, CF, DF, qui distantias trium Stellarum metiantur, & horum quantitas instrumento in quo saltem decades Secundorum habeantur, fiat nota. Quoniam ID, NF Latitudines Stellarum D, F sunt notæ, etiam complementa earum DX, FX nota erunt. Rursum quia Longitudines Stellarum D, F sunt *a* notæ, etiam Longitudinum differentia IN, ac proinde angulus IXN, seu DXF, quem arcus *b* IN metitur, innotescet. In triangulo igitur FXD, quia nota sunt latera DX, FX cum angulo DXF, ex his *c* reperietur angulus FDX. In triangulo deinde CDF, cùm instrumento nota sint tria latera, ex his *x* innotescet ang. CDF. Quare si CDF, cùm FDX auferatur à Grad. 360, notus erit CDX: cum quo & notis lateribus DC, DX reperies *o* CX complementum quæsitæ Latitudinis CA Stellæ C, & angulum CXD, seu AXI, adeoque *d* & arcum AI, qui est differentia Longitudinum Stellæ A, & Stellæ D. Differentiam AI notæ Longitudini Stellæ D, adde, si C Orientalior est quàm D; deme, si Occidentalior: prodibit Longitudo quæsita Stellæ C.

a per hyp. b def. 4. n. 66. l. 2. c per trig. sph. prob. 19. x trig. Sph. prob. 18. o trig. Sph. prob. 19. d def. 4. n. 66. l. 2.

§. 2. Sit deinde Stella, de quâ quæritur, in D, & duæ aliæ notæ Latitudinis ac Longitudinis in C & F. In triangulo CXF cùm nota sint tria latera (nam CF notum fit instrumento, & CX, FX sunt complementa notarum Latitudinum CA, FN) ex his *r* reperies angulum CFX. Similiter quia in triangulo CDF nota sint 3 latera, ex his reperies *f* CFD, Aufer CFD à CFX: notus relinquetur DFX: cum quo & notis lateribus DF, FX reperies *t* DX complementum quæsitæ Altitudinis ID Stellæ D, nec non angulum DXF, seu IXN, adeoque & arcum IN, differentiam Longitudinum Stellarum D, F: quæ addita vel dempta notæ Longitudini Stellæ F, dabit Longitudinem quæsitam Stellæ D.

r trig. Sph. prob. 18. f Ibid. t trig. Sph. prob. 19.

§. 3. Si Stella, de quâ quæritur, sit in C, aliarum verò una in D cum Latitudine Boreâ DI, altera in K cum Latitudine Austrinâ KN; ducantur arcus distantiæ CK, DK, CD. In trigono CKD ex tribus per instrumentum notis distantijs inveni *u* angulum CDK. Tum in trigono DXK ex tribus notis lateribus DX complemento Latitudinis notæ, DK, KX (constat KX ex Latitudine notâ KN, & Quadrante NX) reperi ang. KDX; quem junge jam noto CDK, & summam aufer à Grad. 360: ita notus fiet CDX: cum quo & notis lateribus CD, DX reperies *a* CX complementum quæsitæ Latitudinis AC, Stellæ C, nec non angulum CXD, seu AXI, adeoque & arcum AI, differentiam quæsitæ Longitudinis Stellæ, C, & notæ Longitudinis Stellæ D.

u trig. Sph. probl. 18. a trig. Sph. prob. 19.

§. 4. Quod si Stella, de quâ quæritur, sit in D, aliarum verò una ad Boream in C, altera ad Austrum K, sic procede. Quia Longitudinum notarum differentia est arcus AN, etiam is, adeoque & angulus NZA, sive KZC, notus est: ex quo & notis lateribus KZ, CZ (nam KZ est compl. Latitudinis datæ NK, CZ verò constat datâ Latitudine CA, & Quadrante AZ) reperietur *b* ang. KCZ. Deinde in trigono CKD, ex tribus per instrumentum notis distantijs inveni *c* KCD: quem junge jam noto KCZ, & summam aufer à Grad. 180: ita notus fiet XCD: ex quo & notis CX, CD innotescet XD, complementum Latitudinis quæsitæ DI, nec non angulus CXD, sive AXI, adeoque & arcus AI, differentia notæ Longitudinis Stellæ C, & quæsitæ Longitudinis Stellæ D.

b trig. Sph. prob. 19. c Ibid. prob. 18.

§. 5. Postremò, si Stella de quâ quæritur, sit in C; aliarum verò una sit in F ad Boream, altera ad Austrum in K, sed ejusdem Longitudinis cum priori F, sic procede. In trigono CKF ex tribus lateribus notis (nam CK, CF, sunt notæ instrumento, FK verò est summa datarum Latitudinum FN, KN) inveni *d* CFK: quo dempto à Grad. 180, notus fit CFX: ex quo & notis CF, FX, reperietur *e* CX compl. quæsitæ Latitudinis AC, nec non angulus CXF, sive AXN, adeoque & arcus AN, differentia quæsitæ Longitudinis Stellæ C, & datæ Longitudinis Stellarum F, K.

d Ibid. prob. 18. e Ibid. prob. 19.

Hi sunt Casus præcipui, ex quibus reliqui faciliè construentur.

Scholium.

Ex hoc Numero & præcedenti, omnium Fixarum Longitudines & Latitudines ad certum tempus reperiuntur. Quâ in negotio cæterorum Astronomorum industriam Tycho Braheus superavit, qui adhibitis exquisitissimis organis ampliùs mille Fixarum Longitudines & Latitudines ad Annum Christi 1600, à se constitutas, posteritati transmisit. Verùm quia Fixæ (ut ostendam num. seq.) *lento motu super Polis Eclipticæ in consequentia, sive ab Occasu in Ortum moventur, necesse est earum Longitudines, hoc est distantias ab initio ♈ Primi Mobilis, sensim immutari. Oportebit igitur Longitudines Fixarum semel inventas ad aliquod tempus, certâ quantitate augere vel minuere, ut tempori cuicumque futuro vel præterito conveniant. Modus tradetur* infrà num. 16.

Latitudines, quæ (ut ostendam num. 12.) *non immutantur, semel ad aliquod tempus inventa inserviunt omni.*

NUMERUS IX.

Invenire Longitudinem & Ascensionem Rectam Stellæ ad datum tempus præteritum, ad quod notæ sit Declinatio Stellæ, & Quadrans ad quem pertinet.

Usui erit hoc Problema in constituendo motu Fixarum Annuo *num.* 14. Fig. 9.

Ecliptica sit DE, ejus Polus S; Æquator BC,

ejus

ejus Polus X: Stella in F, pertinens ad Quadrantes primos ♈D, ♈B. Ducatur Declinationis Quadrans XP, & Latitudinis Quadrans SV. Per *num. praeced.* nota fiat Latitudo Stellæ VF, (ea siquidem semper eadem perseverat, ut ostendam *nu.* 12.), quâ demptâ à Grad. 90, notus erit arcus FS. Deinde PF Declinatio Stellæ *per hyp.* nota, dematur à Grad. 90; ita notus erit arcus FX. Arcus autem XS, distantia Polorum *a* est Grad. 23. 30', utpote æqualis obliquitati Eclipticæ. Igitur in trigono SFX ex tribus lateribus notis, reperientur anguli *o* FXS, FSX. Angulum FSX metitur *b* arcus DV, qui proinde & ipse notus erit. Aufer DV à Quadrante ♈D, relinquetur Longitudo Stellæ ♈V ad datum tempus præteritum. Deinde FXS aufer à Grad. 180: ita notus erit BXP, & ex eo arcus ipsum *c* metiens BP; quo dempto à Quadrante ♈B, relinquitur ♈P Ascensio Recta Stellæ ad tempus præteritum datum.

n per Cor. n. 31. l. 1. *o trig. Sph. prob. 18.* *b per defin. 4. nu. 66. lib. 2.* *c per eand.*

Ex his & discursu *num.* 7. facilè reliquorum Casuum constructio colligetur.

NUMERUS X.

Invenire Declinationem & Ascensionem Rectam Stellæ ad tempus datum, ad quod nota sit ejus Longitudo.

Iisdem positis, sit Stella in F, ejusque Longitudo ad datum tempus nota sit ♈V, ad primum Quadrantem pertinens: hæc ablata à Grad. 90 ♈D, dabit arcum VD, adeoque & angulum *o* DSV, sive XSF. Latitudo Stellæ VF, quæ semper *m* eadem est, nota fit per *num.* 7. & 8, quâ demptâ vel additâ Grad. 90 VS, notus erit arcus FS. Arcus autem XS, distantia Polorum notus est per *Corol. num.* 31. *lib.* 1. Igitur in triangulo FXS, ex notis lateribus FS, XS, cum angulo XSE, innotescet *x* XF complementum Declinationis quæsitæ FP ad datum tempus, nec non angulus FXS: quo dempto à Grad. 180, notus erit BXP, & arcus ipsum *r* metiens BP, eoque dempto à Grad. 90 ♈B, nota fiet Ascensio Recta ♈P ad tempus datum.

Fig. 9. *o per def. 4. n. 66 l. 1.* *m osten-dam n. 12.* *x trig. Sph. prob. 19.* *r per def. 4. n. 66. l. 1.*

Ex his & discursu *num.* 7, facilè reliquorum Casuum constructio colligitur.

NUMERUS XI.

Stella Fixa sensim moventur ab Occasu in Ortum.

Hunc motum Astronomi ex Longitudinibus Fixarum sensim auctis deprehenderunt. Modum autem Fixarum Longitudines reperiendi *num.* 7. & 8. jam exposui. Timochares Annis ante Christum 294 invenit *Spicam* in Gradu ♍ 22. Hipparchus Annis ante Christum 128 in ♍ Grad. 24: Tycho in ♎ Grad. 18. *Regulum* invenit Hipparchus in ♋ Gradu 29: Tycho in ♌ Grad. 24. *Lucida Pleiadum* reperta est à Timocharide in ♈ Grad. 29; à Tychone in ♉ Grad. 24. Similia Longitudinis incrementa in alijs etiam Stellis sunt deprehensa. Quare, cùm Stellæ eamdem inter se perpetuò distantiam retineant manifestum est simul omnes ab occasu in Ortum, hoc est secundùm ordinem Signorum sensim promoveri. Atque id quidem extra omnem controversiam est. At super quibus Polis hic motus fiat, æqualisne sit an inæqualis, quanto tempore absolvatur, & quæ illius sit quantitas Annua, non perinde manifestum. Hæc igitur deinceps erunt disquirenda.

NUMERUS XII.

Fixæ moventur suprà Polos Eclipticæ, ac proinde Latitudines earum non mutantur.

Fixarum Latitudines, sive distantias ab Ecliptica easdem esse perpetuò, ac proinde earum motum ab Occasu in Ortum fieri per circulos Eclipticæ parallelos, adeoque super Polos Eclipticæ, ex omnium temporum observationibus Astronomi ferè omnes jam inde ab Hipparcho censuêre. Oppositum tenuerunt Thebit, Regiomontanus, Gauricus, Tycho, Longomontanus, Lansbergius. E quibus primi tres à cæteris abeunt longiùs; tres verò posteriores non aliam agnoscunt mutationem Latitudinis Fixarum, quàm eam, quæ à mutatione maximæ obliquitatis Eclipticæ efficiatur. Et Tycho quidem operosè deducit fundamenta opinionis suæ *Tomo* 1. *Progymn*, quæ nihilominus à Ricciolo subvertuntur *Cap.* 15. *lib.* 6. *Almag.* Advertantur Tychoni præcipuè ista.

1. Multò probabilius est obliquitatem Eclipticæ non mutari, ut ostensum est *lib.* 1. *num.* 32. Labante igitur mutabili obliquitate Eclipticæ, etiam mutabiles Fixarum Latitudines illâ nixæ collabascunt.

2. Etiamsi supponamus obliquitatem Eclipticæ mutabilem esse, eamque olim tempore Hipparchi & Ptolomæi fuisse circiter 22 Min. majorem, quàm modò sit, jam nihilominus multarum Stellarum quàm proximè eadem reperitur Latitudo, quæ fuit olim. Latitudo *Capellæ* Hipparchi tempore fuit Grad. 22. 50': nunc est Grad. 22. 50'. 30". Latitudo *Aldebaran* sub Hipparcho erat Grad. 5. 33': jam Grad. 5. 31'. Lat. *Reguli* sub Timocharide fuit Grad. 0. 23': nunc est Grad. 0. 26'. Idem in alijs Stellis quàm plurimis reperitur. Sed, si Latitudo Stellarum Fixarum eamdem mutationem subiret, quam obliquitas Eclipticæ, uportebat Fixarum omnium Latitudinem olim fuisse 22 Min. majorem quàm modò sit. Falsum est igitur Fixarum Latitudines eamdem mutationem subire, quam obliquitas Eclipticæ. Vide plura apud Ricciolum *loco citato.*

Tycho Fixarum Latitudines jam dictas, quæ à Ptolomæo ad nos sunt transmissæ, sibi fatetur adversari: sed conatur suspectas reddere vel ex imperfectione veterum observationum, vel ex numerorum vitiosâ transcriptione. Verùm eodem jure nobis suspectæ erunt illæ, quas ex eodem Ptolomæo sibi faventes adducit.

Sentio igitur cum Astronomis plerisque, Fixarum Latitudines probabiliùs non immutari.

NUMERUS XIII.

Fixarum motus Æqualis est.

Inæqualitas hujus motus jam confutata est *lib.* 1. *num.* 46. quem consule, atque isthic deductis hæc adjunge.

Assertores inæqualitatis sunt Copernicus, Maginus, Longomontanus, Lansbergius. Nituntur observationibus veterum; quæ, si, prout extant, accipiantur, videntur Fixæ unum Gradum absolvisse Annis 100, vel pluribus tempore Ptolomæi, at tem-

pore Albategnij Annis 66; nunc autem (ut patebit *num. seq.*) absolvunt Annis 72, aut 70. Sed fallaciam hujus fundamenti paucis aperio.

Certum est, quamvis Fixarum Longitudines sensim crescant, Longitudinum differentias semper easdem permanere, eò quòd situs Fixarum inter se perpetuò idem perseveret; unde etiam nomen Fixarum profluxit. Quare quæ hoc ævo differentia Longitudinum duarum quarumlibet Stellarum reperitur, eadem fuit & olim. Stellarum porrò ad hoc ævum Longitudines, adeoque & Longitudinum differentias constat à Tychone præsertim & Ricciolo esse accuratè constitutas. Quare si Longitudinum, quibus usi sunt Veteres, differentiæ à nostris notabiliter differant, certum erit Fixarum Longitudines, quibus Veteres utebantur, fallaces extitisse. Atqui tales sunt Longitudines *Spicæ, Reguli, Pleiadis,* & *Boreæ frontis Scorpij*, ex quibus collegit unum Gradum à Fixâ pertransiri Ptolomæus Annis 100, Albategnius Annis 66: earum quippe differentiæ plurimùm discrepant ab ijs, quæ hoc tempore sunt inventæ, quasque (ut dixi) constat esse exactas. Vitiosè ergo colligitur Stellas Fixas Ptolomæi ævo percurrisse Gradum unum Annis 100, Annis verò 66 tempore Albategnij. Corruit igitur basis præcipua opinionis contrariæ.

Deinde ex pluribus, & certioribus observationibus [a] ab Hipparcho ad Ptolomæum, & ab his atque ab Albategnio ad nos, colligitur motus Fixarum Annuus semper 50, aut 51 Secundorum quàm proximè. Longè igitur est verosimilius Fixarum motum esse æqualem. Dixi, *certioribus*, quia sunt vel recentiores, Tychonicæ nimirum & Riccioianæ, vel antiquæ, sed correctæ.

[a] *Ut patebit ex num. seq.*

Vide de his plura apud Ricciolum *l. 6. cap.* 17.

NUMERUS XIV.

Annuus Fixarum motus est Secundorum 50, vel 51, quàm proximè.

SEcunda 51 Annuo motui Fixarum adscribit Tycho, Ricciolus 50 Utriusque rationes, quarum alteræ alteras in discrimine tantillo confirmant, summatim complectar.

Tycho igitur *t. 1. pag.* 253 ex Copernico *l. 3. cap.* 3. assumit Declinationem *Spicæ* Anno 1515, observatam Fruenburgi, Grad. 8. 36′. Tum ex eâ juxta veriorem Poli Altitudinem correctâ, per modum *Num.* 9. traditum colligit ad Annum 1515 Longitudinem *Spicæ* in ♎ Grad. 17. 3′. 30″. Ipse verò eam reperit Anno 1585 in ♎ Grad. 18. 3′. Ergo Annis 70 processit Gradu 1, minùs 30 Secundis. Igitur Anno 1, promota est Secundis 51″.

Hipparchus apud Ptolomæum *l. 7. cap.* 3. Anno ante Christum 128, ex ejus tunc Declinatione Boreâ Grad. 9. 45′, invenit Regulum in ♋ Grad. 29. 50′. Eundem Tycho Anno post Christum 1585, reperit in ♌ Grad. 25. 5′. Annis igitur 1713 processit Gradus 24, 15′, ac proinde Anno uno, Secunda 50″. 59‴. 47⁗.

Venio ad Ricciolum, ex quo delibo comparationes 4 sequentes.

Hipparchus apud Ptolomæum *l. 7. cap. 2. Regulum*, seu *Cor Leonis*, Anno ante Christum 128, invenit in ♋ Grad. 29. 50′. sed quia Veteres observabant plerumque Stellarum loca per distantiam Æquatoriam Lunæ à Sole Occiduo, & distantiam Æquatoriam Stellæ à Lunâ nocte sequenti; Solem porrò vicinum Occidenti Refractio, quam Veteres ignorarunt, facit 30 circiter Minutis justo altiorem & Orientaliorem, factum est inde, ut distantia Æquatoria Lunæ à Sole, adeoque & Longitudo Lunæ ac Stellæ, justâ minor ad Minuta totidem evaderet. Quare ad Hipparchæam Longitudinem *Reguli* adjicienda erunt Min. 30. quæ proinde fuit in ♌ Grad. 0. 20′. Ricciolus autem Anno post Christum 1644 completo, nactus est *Regulum* in ♌ Grad. 24. 55′. 20″. Annis igitur 1772 processit Grad. 24. 35′. 20″: quibus per Annos 1772 divisis, proveniunt Secunda 49″ $\frac{6590}{1772}$, sive 50″ proximè.

Albategnius *cap.* 51 refert inventum à se *Regulum* Anno Christi 879, in ♌ Grad. 14; quibus adde Min. 30 ob rationem jam datam. Ricciolus verò Anno 1644 completo in ♌ Grad. 24. 55′ 20″. Igitur Annis 766 processit Grad. 10. 25′. 20″: quibus divisis per Annos 766, fit motus Annuus 49″ Secundorum. Quòd si locus Albategnianus assumatur, quem ponit Copernicus Grad. ♌ 14. 5′, Annis 766 processit Grad. 10. 50′. 20″, quibus per 766 divisis, provenient Secunda 51″ pro motu Annuo. Quare medium tenendo, erit Sec. 50.

Ptolomæus *l. 7. Almag. cap.* 3, refert observatam à se Declinationem Boream *Aldebaræ*, seu *Oculi Tauri* Anno Christi 137 Grad. 11: Ex quâ, & Latitudine ejusdem Australi Grad. 5. 30′, reperitur *per num.* 9. tunc Longitudo Aldebaræ in ♉ Grad. 14. 2′. At Ricciolus Anno 1644 *Aldebaram* deprehendit in ♊ Grad. 4. 48′. Ergo Annis 1506 processit Grad. 20. 46′: quibus per Annos 1506 divisis, fit motus Annuus Secundorum 49″. 40‴.

Ptolomæus Anno Christi 137 *Aldebaram* ex ejus tunc Declinatione Grad. 11; invenit in ♉ Grad. 14. 2′. Tycho autem Anno 1586, observavit Declinationem *Aldebaræ* Boream Grad. 15. 37′: ex quâ & Latit. Austr. Grad. 5. 30′. per *num.* 9. elicitur tunc Longitudo *Aldebaræ* in ♊ Grad. 4. 2′. Annis igitur 1449 absolvit Grad. 20. Igitur Anno uno absolvit Secunda 49″. 40‴.

Cùm igitur ex his, & quatuor alijs, quas omisi, comparationibus deducatur semper motus Annuus secundorum 50 proximè, non immeritò Ricciolus in hac annuâ quantitate acquiescit. Fatetur tamen æquè ferè probabilem esse Tychonicam Secundorum 51, ut ferè perinde sit, utrâ utaris. Tychoni consentiunt Keplerus, & Bullialdus, & ferè Gassendus ac Vendelinus; Ricciolo Petavius, & ferè Copernicus, Reinholdus, Mæstlinus. Expensis omnibus satis exploratum esse arbitror Annuum motum Fixarum quàm proximè Secundorum esse 50, vel 51.

Ex motu Annuo per *Reg. prop.* elicitur Periodus tota. Tychoni igitur Fixæ absolvunt Gradum unum Annis Iulianis 70⅝ totum verò Zodiacum Annis Iulianis 25806: Ricciolo autem, Annis Iulianis 72 Gradum unum, Annis Iulianis 25920 Zodiacum totum.

NUMERUS XV.

Quantitas Anni Siderei.

ANnus Sidereus est tempus, quo Sol ab aliquâ Stellâ Fixâ ad eandem revolvitur. Quare cùm Annus Solaris sit tempus, quo Sol ab aliquo puncto Eclipticæ revolvitur ad idem punctum, atque interim Fixæ prorepant in Ortum Secunda 51, vel

50,

50, manifestum est Solarem Annum à Sidereo excedi eâ temporis quantitate, quâ Sol motu Medio percurrit Secunda 51, vel 50, ut Stellam, cui fuerat conjunctus, denuò assequatur.

Ricciolo Zodiacum Sol percurrit Diebus 365. Horis 5. 48'. 40", ac proinde Secunda 50 absolvit Minutis Horarijs 20'. 18'". 25"". Quare illius Annus Sydereus est D. 365. H. 6. 8'. 57". 25"". Solarem excedens Min. Hor. 20' 17". 25"'.

Tychoni verò Sol absolvit Zodiacum D. 365. H. 5. 48. 45", ac proinde Secunda 51 percurrit Min. Hor. 20'. 41". 43"'. Quare illi Annus Sydereus est D. 365. H. 6. 9'. 26". 43"'. 30"". excedens Solarem Min. Hor. 20'. 41". 43"'. 30"".

NUMERUS XVI.

Fixarum Longitudines ad Aliquod tempus trigonometricè per num. 7. & 8. inventas, cuivis tempori accommodare.

SI Stellæ Fixæ non moverentur ab Occasu in Ortum, earum Longitudines non mutarentur; quæ proinde semel inventæ ad aliquod tempus, omni temporiconvenirent. Quia verò motui jam dicto sunt obnoxiæ, oportebit Longitudini ad tempus certum, ex. gr. ad Annum 1644 repertæ, motum Annuum, qui per *num.* 14, est Sec. 50, vel 51, toties addere vel demere, quot Annis tempus datum sequitur, vel præcedit Annum 1644.

Exemplum statuamus in *Regulo*. Anno 1644 *Regulus* erat in ♌ Grad. 24. 55'. 20". Oporteat ejus locum reperire pro Anno 1654. Tempus hoc posterius est Annis 10. Secunda 50, quæ debentur motui unius Anni, duc in 10: proveniunt Sec. 500", id est 8'. 20", debita Annis 10. hæc igitur adde loco Anni. 1644: proveniet locus *Reguli* in ♌ Grad. 25. 3'. 40", pro Anno 1654.

Quæratur deinde locus pro Anno 1634. Hic Annus quia præcedit Annum 1644, Annis 10, Min. 8'. 20" debita Annis 10, deme loco *Reguli* ad 1644: proveniet locus *Reguli* pro Anno 1634 in ♌ Grad. 24. 47'.

Pro calculi compendio utere Tabellâ sequenti.

MOTUS FIXARUM IN LONGITUDINEM.							
Anni	Grad.	'.	''.	*Anni*	Grad.	'.	''.
1	0	0	50	200	2	46	40
5	0	4	10	300	4	10	0
10	0	8	20	400	5	33	20
20	0	16	40	500	6	56	40
30	0	25	0	600	8	20	0
40	0	33	20	700	9	43	20
50	0	41	50	800	11	6	40
70	0	58	20	900	12	30	0
90	1	15	0	1000	13	53	20
100	1	23	20	2000	27	46	40

Corollaria.

I. Ex *hoc Num.* 16, unà cum *Num.* 7 & 8, Stellarum omnium loca in Longum & Latum reperiuntur ad tempus quodcumque.

II. Prima Stella ♈, fuit Anno Christi 1600, juxta Keplerum *in Rudolph.* in Grad. 27. 37'. ♈ Primi Mobilis: ergo fuit in initio ♈ Primi Mobilis Anno ante Christum 388 Ricciolicè; Anno 349 Tychonicè.

NUMERUS XVII.

Declinationes Fixarum per Num. 2, & Ascensiones Rectas per Num. 4. & 5, ad aliquod tempus constitutas, ad alio tempore ante vel post, intra unum circiter Sæculum extendere.

QUia Fixæ ab Occasu in Ortum moventur suprà Polos diversos à Polis Æquatoris, necesse est earum Declinationes ab Æquatore, & Ascensiones Rectas sensim immutari.

Inventæ sint igitur ex. gr. ad Epocham Anni 1600 Declinatio, & Ascensio Recta *Aldebara*, & oporteat eas ad quævis tempora intra Annum 1700 extendere. Per *Num. præced.* inveni Longitudinem *Aldebara* ad Annum 1700. Ex hac notâ jam Longitudine, ad eundem Annum 1700 reperies a Declinationem, & Ascensionem Rectam ejusdem Stellæ: quam conferendo cum Declinatione, & Ascensione Rectâ Anni 1600, utrarumque differentiæ innotescent. Tum ita ratiocinare. Petatur ex. gr. Declinatio *Aldebara* ad Annum 1620. Cùm Anni 100 Declinationum differentiam efficiant tantam......, Anni 20 quantam dabunt? per *Regulam prop.* differentia quæsita exhibebitur: quæ Declinationi Anni 1600 addita, si Declinatio crescit; dempta, si decrescit, dabit Declinationem Anno 1620 convenientem. Porrò Fixarum Declinatio (*vide Fig.* 14.) à ♑ per ♈ ad ♋ Borea crescit, Austrina decrescit: ab ♋ per ♎ ad ♑, Austrina crescit, Borea decrescit.

a *per num.* 10.

Pari modo cùm Anni 100 dent Ascensionum Rectarum differentiam tantam...., 20 Anni quantam dabunt? Rursus *prop. Regula* exhibebit differentiam quæsitam. Quid verò eâ faciendum? utrùm addi semper debet Ascensioni Rectæ præcedentis Epochæ, an etiam aliquando demi? Certum est, a si crescente Longitudine Stellæ, semper etiam crescat Ascensio Recta, differentiam proportionalem semper esse addendam Ascensioni Rectæ præcedentis Epochæ:

a *decidetur num.* 19.

chæ: Si verò crescente Longitudine Ascensio Recta aliquando decresceret, tunc differentiam proport. Ascensioni Rectæ præcedentis Epochæ oportêre subduci. Atqui crescente Longitudine Syderis, semper etiam crescere Ascensionem Rectam putasse hactenùs Astronomi videntur. Cæteris perspicacior Ricciolus hîc fuit, qui primus advertit, Stellarum intra Polares circulos existentium, hoc est quarum complementum Latitudinis minus est distantiâ Polorum, Ascensiones Rectas non semper crescere, quamvis Longitudo crescat. Res digna est quæ accuratiùs atque distinctiùs exponatur.

NUMERUS XVIII.

Fixarum intra Polares circulos existentium Ascensiones Recta aliquando crescunt, aliquando decrescunt, quamvis Longitudo semper crescat.

Fig. 14. 15. 16. 17.

Colurus Solstitiorum esto A D X C; Ecliptica C D; Æquator F G; Polus Eclipticæ A; Polus Æquatoris B, qui ambo sunt in Coluro. Sit deinde Stella P, per quam ducto Latitudinis Quadrante A V, sit Latitudinis Stellæ complementum P A minus distantiâ Polorum A B; descriptoque ex Eclipticæ Polo A semicirculo E P K, Eclipticæ C D parallelo, ducatur ex B Polo Æquatoris, Declinationis Quadrans B R, circellum tangens in Q in *Schemate* 14 & 16, in Z verò in *Schemate* 15. & 17. Denique per contactus Q & Z, ducantur Latitudinis Quadrantes A Q N, A Z N.

Fig. 14.

§. 1. Stellâ Boreali motu suo in Longitudinem percurrente arcum K Q, (cui in Eclipticâ respondet D N) ab ♑ per ♈ & ultra Ascensio Recta perpetuò crescit: percurrente verò eâdem Stellâ arcum Q E à contactu usque ad ♋, Ascensio Recta decrescit, quamvis (ut semper) crescat Longitudo. Maxima autem est Stellæ Ascensio Recta, cùm existit in contactu Q.

Sit enim primò Stella in K. Erit tunc ejus Recta Ascensio ♈ F ♎ G, trium nempè Quadrantium. Sit deinde in P, perque eam transeat Declinationis Quadrans B P S. Manifestum est hunc Æquatori occurrere inter G, & R. Ergo Stellæ existentis in P Ascensio recta est ♈ F ♎ G S major priori ♈ F ♎ G. Crescit igitur Ascensio Recta ex K in P, & sic deinceps usque ad contactum Q, in quo Stellæ Ascensio Recta ♈ F ♎ G R maxima est, quæ haberi potest.

Sit jam Stella in arcus Q E puncto quovis O: per quod transeat Declinationis Quadrans B O S. Hic necessariò secabit etiam arcum K Q, ac proinde Æquatori occurret inter R & G, in S. Quare Ascensio Recta ♈ F ♎ G S jam minor est maximâ ♈ F ♎ G R, ac proinde decrescit. Eodem modo Ascensiones Rectæ per totum arcum Q E continuè decrescunt eodem ordine, quo antè creverant in arcu K Q, donec Stella posita in E initio ♋ rursum Ascensionem Rectam habeat ♈ F ♎ G.

Fig. 15.

§. 2. Boreali Stellâ percurrente arcum E Z, sive C N, ab ♋ usque ad contactum alterum Z, Ascensio Recta pergit decrescere, donec minima fiat in contactu Z: Stellâ verò percurrente arcum Z K, à contactu secundo per ♎ ad ♑ rursum crescit usque in K, atque inde (ut §. 1. jam ostendi) pergit crescere, donec maxima evadat in contactu Q.

Sit enim Stella primò in E; tunc ejus Ascensio erit ♈ F ♎ G. Sit deinde in O, & sit Declinationis Quadrans B O S: erit tunc ejus Acensio recta ♈ F ♎ S minor priore, adeoque decrescit; & sic deinceps usque ad contactum Z, in quo Stellæ Ascensio recta ♈ F ♎ R, est omnium minima.

Sit jam Stella in arcus Z K puncto quovis P, ducaturque Declinationis Quadrans B P S. Erit tunc ejus Ascensio Recta ♈ F ♎ S, major priori ♈ F ♎ R, quàm habebat in Z. Igitur Ascensio Recta crevit ex Z in P.

Fig. 16.

§. 3. Per arcum E Q, (cui respondet Eclipticæ arcus D N) ab ♑ versùs ♈ usque ad contactum Q, Stellæ Australis Ascensio Recta decrescit, donec minima fiat in contactu Q. Nam ejus Ascensio Recta in E est ♈ F, in O est ♈ S priore minor, in Q est ♈ R minima.

Per arcum verò Q K (cui in Eclipticâ respondet N C) à contactu Q per ♈ ad ♋ ejusdem Stellæ Ascensio Recta crescit. Nam ejus Ascensio Recta, in Q est ♈ R, in P est ♈ S, in K est denuò ♈ F.

Fig. 17.

§. 4. Per arcum K Z (cui respondet in Eclipticâ, C N) à ♋ per ♈ ad contactum alterum Z, Stellæ Australis Ascensio Recta pergit crescere, donec maxima fiat in Z. Nam ejus Ascensio Recta, in K est ♈ F, in P est ♈ F S major priore, in Z est ♈ F R maxima.

Per arcum verò Z E, sive N D, à contactu Z ad ♑, ejusdem Stellæ Ascensio Recta decrescit. Nam ejus Ascensio Rectæ, in Z est ♈ F R, in O est ♈ F S, in E est rursum ♈ F.

Fig. 14. & 15.

§. 5. Stellæ Borealis maxima Ascensio Recta ♈ F ♎ G R (*Fig.* 14.) finitur in Quadrante Æquatoris quarto G ♈; minima ♈ F ♎ R (*Fig.* 15), in Quadrante tertio ♎ G.

Cùm enim tangant se duo circuli B R, K P E in Q vel Z, & per A Polum unius simul & per contactum Q vel Z, transeat circulus Maximus A Q N, vel A Z N, transibit n hic etiam per Polos alterius circuli B R. Ergo A Q N, seu A Z N ad P R o rectus est; ac proinde in triangulo A Q B, seu A Z B, angulus ad Q, vel Z, rectus est, & omnia latera sunt Quadrante minora. Ergo p anguli ad B, & A, sunt acuti in dicto triangulo. Quare cùm arcus G R metiatur angulum ad B, erit is minor Quadrante. Ex quo patet in *Fig.* 14, maximam Ascensionem Rectam ♈ F ♎ G R finiri in Quadrante quarto G ♈, minimam ♈ F ♎ R (vide *Fig.* 15) in tertio ♎ G.

n per 15. l. 2. Theodos.
o per num. 68. lib. 2.
p per 28. Clavij. trian. Sph.

Fig. 16. 17.

§. 6. Si Stella est propè Polum Australem (ut in *Fig.* 16. 17. in quibus A, B jam referunt Polos Australes), minima ejus Ascensio Recta ♈ R (vide *Fig.* 16) finitur in ♈ F Quadrante primo, maxima ♈ F R (vide *Fig.* 17.) in secundo F ♎.

Demonstratio similis præcedenti.

Fig. 14. 15.

§. 7. Cùm Stellæ Borealis Ascensio Recta est maxima in Q (vide *Fig.* 14), ejus Longitudo ♈ N finitur in Eclipticæ Quadrante primo ♈ C: cùm minima est in Z (vide *Fig.* 15), ejus Longitudo ♈ C N finitur in Quadrante secundo C ♎.

Jam enim §. 5, ostendi angulum Q A B, seu Z A B, esse acutum. Arcus igitur ipsum metiens C N est minor Quadrante. Ex quo patet Longitudinis ♈ N terminum N *in Fig.* 14, incidere in Quadrantem primum ♈ C, *in Fig.* verò 15 terminum N Longitudinis ♈ C N incidere in Quadrantem secundum C ♎.

§. 8. Cùm Stellæ Australis (*vide Fig.* 17.) procedentis secundùm ordinem Signorum ex K per Z, Ascensio Recta juxta §. 4. est maxima in Z, Longitudo ejus ♈ C ♎ N finitur in Eclipticæ Quadrante tertio ♎ D: quãdo (*vide Fig.* 16.) juxta

§. 3.

§. 3. est minima in Q, ejus Longitudo ♈ C ♎ D N finitur in Quadrante quarto D ♈.

Demonstratio similis præcedenti.

§. 9. Fixarum intra Arcticum circulum existentium Ascensiones Rectæ per totum Eclipticæ semicirculum Australem & partem Borealis assiduè crescunt, per reliquam Eclipticæ partem decrescunt, etiamsi Longitudo crescat. Fixarum verò intra circulum Antarcticum positarum Rectæ Ascensiones per totum Eclipticæ semicirculum Borealem, & partem Australis assiduè crescunt, per reliquam Eclipticæ partem decrescunt, licet crescat Longitudo.

Primum patet ex §.1.2.7: secundum ex §.3.4.8.

§. 10. Stellarum, quarum crescente licet Longitudine, Ascensiones Rectæ secundùm determinationes jam expositas decrescunt, sunt ad Boream 59, ad Austrum 35.

NUMERUS XIX.

Stellarum intra Polares circulos existentium Ascensiones maximam, & minimam invenire. Item reperire tempus, quo crescente licet Longitudine, Ascensiones earum Rectæ incipient, vel inceperint decrescere.

Fig. 14.

§. 1. Iisdem positis, constructis ac demonstratis quæ *Num. præcedenti* in triangulo AQB, quod *Num. præc.* §.5. ostendi esse rectangulum ad Q, notum est latus *a* A B distantia Polorum, & latus AQ complementum Latitudinis notæ *b* Q N. Ex quibus reperietur *c* angulus A B Q, adeoque & Æquatoris arcus ipsum *d* metiens G R: quem si addas tribus Quadrantibus ♈ F ♎ G, proveniet ♈ F ♎ G R Ascensio maxima Stellæ existentis in Q. Pari modo in *Fig.* 15. in triangulo A Z B innotescet angulus A B Z, ex eoque arcus G R; quo subducto à tribus Quadrantibus ♈ F ♎ G, remanebit ♈ F ♎ R, Ascensio minima ejusdem Stellæ positæ in Z.

a per cor. n. 31. l. 1.
b per nu. 7. 8. 12.
c trig. sph. probl. 1.
Fig. 15.
d per def. 4 n. 66. l. 2.

In Stellis Australibus eodem modo innotescet *o* F R quo G R *r* in Borealibus. Arcum igitur F R in *Fig.* 16. deme Quadranti ♈ F, remanebit ♈ R Recta Ascensio minima Stellæ: *in Fig.* 17. arcum F R adde Quadranti ♈ F; prodibit ♈ F R Ascensio maxima ejusdem Stellæ.

o Fig. 16. 17.
r Fig. 14. 15.

§. 2. In triangulo rectangulo AQB, quod §.1. solvimus, ex notis lateribus A B, A Q innotescit angulus *m* Q A B; ex eoque arcus Eclipticæ ipsum metiens NC: quo subducto à Quadrante ♈ C, relinquetur ♈ N Longitudo Stellæ quando posita in Q Ascensionem Rectam incipit minuere. Atqui etiam nota *o* est Longitudo Stellæ, quam habet hoc præsenti momento, ergo nota est utriusque Longitudinis differentia. Hanc *p* converte in tempus; quod tempori præsenti si addas vel demas, prodibit tempus, quo Stella Borealis incipiet, vel incepit crescente Longitudine Ascensionem Rectam diminuere.

Fig. 14.
m per trig. sph. probl. 13.
o per num. 7. 8. 16.
Fig. 17.
p per n. 14. & tabulam num. 16.

Ad Austrum, soluto triangulo A Z B, notus fiet angulus Z A B, ex eoque arcus Eclipticæ N D: quo addito ad semicirculum ♈ C ♎, prodibit ♈ D ♎ N Longitudo Stellæ quando existens in Z incipit diminuere Ascensionem Rectam. Reliqua operatio eadem erit, quæ ad Septemtrionem.

Corollarium.

Ex his patet quomodo Ascensionalis differentia *Num.* 17. modò addenda sit, modò subtrahenda, ut habeatur Stellæ intra Polares circulos constitutæ Ascensio Recta ad tempus datum.

Scholium.

Ascensio Recta Lucidæ in humero Ursæ Minoris *ab initio Mundi perpetuò decrevit, & decrescet usque ad Annum Domini* 2137. *Quod Tycho, ejusque Calculones (ut benè notat Ricciolus) videntur ignorasse, ac propterea Stellam tam insignem, utpote secundæ magnitudinis, in Catalogo Ascensionum Rectarum prætermisisse.*

NUMERUS XX.

De accessu Stellarum ad Polos Mundi, & de Stellâ Polari.

Cum Stellæ non moveantur suprà Polos Mundi, sed Eclipticæ; manifestum est eas ad Polos Mundi modò accedere, modò recedere.

Fig. 18.

§. 1. Stellarum Borealium distantia à Polo Mundi Boreo maxima est in principio ♑, inde per ♈ usque ad principium ♋ semper minuitur, donec minima fiat in principio ♋; hinc verò per ♎ usque ad initium ♑ perpetuò crescit donec rursum maxima fiat in principio ♑.

Colurus Solstitiorum esto C A D X; Ecliptica C D; Æquator F G; Polus Eclipticæ Boreus A; Polus Æquatoris, & Mundi Boreus B. Sit Stella quæpiam habens Borealem Latitudinem M D quamcumque. Hæc motu suo in Longitudinem describit circulum M N Eclipticæ D C parallelum. Cùm ea est in M principio ♑, ejus à Mundi Polo B distantia est M B, maxima quam habere potest. Inde procedens secundùm ordinem Signorum in P, distantiam habet à Polo P B minorem priore. Ducatur enim ex A Polo Eclipticæ ejusque paralleli M N, arcus A P. Per *Num.* 68. *lib.* 2, anguli A M P, A P M, sunt recti, adeoque B P M major recto. Ergo in triangulo M B P, arcus M B oppositus obtuso angulo, major *o* est arcu P B qui opponitur recto. Decrevit ergo Stellæ à Polo Mundi B distantia ex M in P; decrescetque eodem modo usque ad N principium ♋, ubi ejus à Polo B distantia B N erit omnium minima. Conferatur enim cum aliâ quâcumque B P. Quia jam ostendi angulum B P M esse obtusum, erit B P N, acutus. At B N P rectus *a* est. Ergo in triangulo P B N, arcus B N oppositus acuto B P N minor est *n* arcu B P qui opponitur recto B N P. Atque ex his perspicuum jam erit Stellæ à principio ♋ N, per ♎, distantiam à Polo rursum crescere donec maxima iterum fiat in M principio ♑.

o Clavij prop. 11. triang. Sph.
a per num. 68. l. 2.
n per prop. 11. Clavij de trian. Sph.

§. 2. Stellarum Australium à Polo Mundi Austrino distantia maxima est in principio ♋: inde per ♎ decrescit assiduè, donec in principio ♑ fiat minima. Hinc per ♈ rursum crescit, donec iterum maxima evadat in principio ♋. Ostenditur eodem modo, quo in §. 1.

§. 3. Stella, cujus Latitudo par esset B C complemento distantiæ Polorum A B, aliquando per Mundi Polum B transibit; tum videlicet, cùm erit in principio ♋, si Borealis est; vel cum in principio ♑, si est Australis. Quarum verò Latitudo dicto complemento est major minórve, earum nulla unquam transi-

transibit per Polum Mundi. Utrumque est manifestum.

§. 4. *Postrema in caudâ Ursæ Minoris* inter omnes jam Stellas Polo Mundi Boreo est proxima. Ex observationibus Tychonis distabat à Polo.

	Anno	Gr.	/.	//.
	1577	2	58	51
	1581	2	57	30
	1586	2	56	10
	1589	2	54	50
Ex observatione Riccioli				
	Anno	Gr.	/.	//.
compl.	1641	2	37	30
26. Decem.	1643	2	36	50

Ex quibus utriusque observationibus miro consensu Annuus hâc ætate *Polaris* Stellæ ad Polum accessus colligitur Secundorum 20.

Et hoc quidem, quo hæc scribimus, Anno 1658, illa est in Grad. 26. ♊, putà in O. Anno autem 2103 principium ♋ attinget; adeoque tum minimam *p* habebit distantiam I B à Polo; quæ ex mente Riccioli erit Min.7. Post annum 2103 à Polo iterum recedet; &, si Mundus tam diu duraturus est, aliquando desinet esse Polaris, Post Annos 12960 (tanto enim tempore semicirculum absolvit) erit in Q principio ♑, ubi maximam habebit à Polo B distantiam Graduum circiter 46. Quando interim Stellæ aliæ fient Polo viciniores: inter quas omnium proximè accedet *Præcedens duarum in Cygno versùs Lyram.*

p per §. 1.

§. 5. Quæ modò est Stella Polaris, neque erit semper, ut jam dictum est, neque semper fuit. Ævo quippe Hipparchi, quæ jam polo proxima est, à polo distabat Grad. 12. 24'. Tunc autem *Humerus ursæ Minoris* à Polo aberat Grad. 8.7', eratque inter omnes Fixas notabiles vicinissima Polo, ac proinde illa tum Polaris censebatur.

CAPUT II.

De Fixarum magnitudine, distantiâ, lumine, numero, speciebus, formis.

NUMERUS XXI.

Distantia Fixarum à centro Terræ excedit 70000, imò 100000 Semidiametrorum Terræ.

PRoinde (assumptâ Terræ minimâ *a* Semidiametro 3265 milliariorum Bonon.) distantia Fixarum excedit 228550000 milliariorum Bonon. hoc est 228 milliones, 550 millia: imò excedit milliar. Bon. 326500000, hoc est 326 milliones, 500 millia.

a Vide Geo. prac. cap.6. ante probl. 5.

Consentiunt omnes Astronomi, ut ostendam *lib. 7. num. 27.* independenter ab his, distantiam Saturni à Terrâ ferè decuplam esse distantiæ Solis à Terrâ. Quare cùm *lib. 3. num. 19.* ostensum sit distantiam Solis nunquam esse minorem 7000 Semidiametrorum Terræ, sive 22855000 milliariorum Bonon. his per 10 multiplicatis, distantia Saturni à Terrâ erit non minor 70000 Semid. Terr. sive 228550000 milliar. Bonon. Atqui Fixæ sunt altiores Saturno, cùm ab eo Eclipsentur. Ergo Fixæ distant à Terrâ plus quàm 70000 Semid. Terr. sive 228550000. milliar. Bonon.

Deinde *num. 1.* ostendi nullam potuisse umquam Parallaxim Fixarum observari: quæ si esset saltem 2 Secundorum, in triangulo rectangulo A B D colligeretur distantia 100000 Semidiametrorum Terræ. Igitur Fixarum distantia 100000 Semid. Terr. major est. Neque videtur illis posse minor assignari.

Fig. 8. lib. 3.

Notus est igitur (quod ipsum quidem monumentum Astronomiæ eximium est) distantiæ terminus, infrà quem Fixas non deprimi certum sit. Terminus verò distantiæ alter suprà quem non ascendant, explorari humano ingenio non potest. Fortassis Stellæ Fixæ tantùm à Saturno distant, quantùm ille à nobis. Credibile est etiam alias esse alijs altiores; quæ & forsan est causa, cur inæquales nobis appareant.

NUMERUS XXII.

Velocitas Fixarum quanta.

NUmero præcedenti ostensum est distantiam Fixarum a centro Terræ, hoc est, Semidiametrum Firmamenti excedere 7000 Semidiametrorum Terrestrium. Quare Firmamenti Diameter major est 140000 Semid. Terr. Assumptâ igitur proportione diametri circuli ad circumferentiam, quæ est *a* 113 ad 355, Firmamenti ambitus *b* reperitur major 439823 Semidiam. Terr. Tantum igitur spatium est ad minimum, quod Stella in Æquatore posita 24 Horis absolvit. Quod si 439823 dividantur per 24, provenient 18325 Semid. Terr. quas saltem Fixa in Æquatore existens unà horâ percurrit: & 18325 rursum divisis per 60, proveniunt Semid. Terr. 3053, quas saltem percurrit Minuto uno. Quod si radius Firmamenti assumâtur 100000, Semidiam. Terræ spatia jam dicta multò adhuc majora evadent.

a Vide cap. 12. probl. 1. Geo. prac.
b per probl. 3. cap. 12. Geo. prac.

NUMERUS XXIII.

Fixarum Diametros Apparentes inquirere.

DIfficillima hæc inquisitio est tum propter Stellarum parvitatem, tum propter radios adventitios & spurios, quibus Stellæ quasi quodam capilitio cinctæ apparent. Utrique incommodo præ alijs organis quibuscumque telescopium medetur: nec sine illo quidquam sperari potest hoc in negotio exactum. Quare Astronomi priores, nondum invento Telescopio, nihil solidi de Syderum Diametro Apparenti, & magnitudine constituere potuerunt.

Modos varios tum aliorum, tum suos Ricciolus *lib. 6. cap. 9.* recenset; è quibus unus ille placet, in quo tandem etiam ipse acquiescit *lib. 7. Sect. 6. cap. 11.* Comparantur Fixæ Stellæ cum Iove vel Saturno, quorum Apparens Diameter nota fit ad tempus aliquod eo artificio, quod exponam *lib. 7. num. 39*, atque inde quanta illa sit sub ipsum comparationis tempus innotescit eo modo, quem tradam *loco jam citato*. Deinde ex collatione Apparentis Diametri ♄ vel ♃ cum Fixarum Diametris, earum quantitas Apparens decernitur. Comparatio porrò illa sic instituitur.

Primò opus est Telescopio grandiori, cujus vitrum ab oculo remotius tegendum est lamellâ, quæ in medio foramen habeat, cujus diameter æquet quartam circiter partem unius pedis Romani. Sic enim Stella exactè rotunda, atque omnibus adscititijs radijs exuta apparebit. P. Grimaldus tubo sic instructo, atque 11 pedes Rom. longo, conspexit Iovem,

(ut

(ut testatur Ricciolus *Almag. lib. 6. pag. 710. col. 2. num. 3.*) nitidissimè rotundum, & denudatum ab omni capillamento spuriorum radiorum, & longè majorem circello A. Ejusmodi igitur tubo in Jovem directo, ejusque apparenti magnitudine æstimatâ, ea confestim in papyro exprimenda: quæ utrùm justa sit, oculo sæpiùs per tubum directo in Planetam, statimque relato ad circellum, dijudicabitur. Expediet autem plures ejusmodi circellos modicè differentes describere, pluresque adhibere Socios observandi peritos. Si namque plurium æstimatio in unum aliquem circellum consentiat, indicio id erit, hunc Planetæ Apparenti magnitudini æqualem esse. Circelli sic electi (hoc est ipsius Jovis) diameter in minutissimas dividatur æquales particulas, ex. gr. ducentas; eodemque artificio, quo in Jove usi jam fuimus, Fixæ datæ Apparentem magnitudinem in chartâ exprime, electo, ut *suprà*, ex pluribus circellis eo, qui tuo Sociorumque judicio omnium æqualissimus judicabitur. Tum hujus diametrum acutissimo circino acceptam, applica diametro Joviali in 200 particulas *suprà* divisæ. Ita demùm proportio diametri Apparentis Stellæ Fixæ ad Apparentem Jovis diametrum innotescet. Quare cùm diameter Apparens Jovis ad id tempus supponatur nota artificio exponendo *infrà l. 7. num. 39.* etiam nota erit Apparens diameter Fixæ datæ; si nimirum per *Reg. prop.* ut particulæ 200 diametri Jovis sunt ad particulas diametri Fixæ, ita Minuta Secunda diametri Jovis, fiant ad Quartum.

Fig. 19.

Ricciolus & Grimaldus sub finem Anni 1649, & principium 1650 repererunt Diametrum Jovis Secundorum 44″, Saturni Sec. 34″. 30‴. Adhibito deinde ingenti Telescopio tam utriusque Planetæ quàm Fixarum, quas venabantur, Apparentes magnitudines, ex suâ & plurium Sociorum æstimatione in eosdem circellos conspirante, in chartâ descripserunt. Tum Jovis diametro sectâ in partes 200, Saturni in 160, applicatisque ad eas Fixarum diametris, circino acutissimo eas repererunt quæ sequenti Tabellâ exhibentur.

STELLÆ	Qualium diam. ♄ 160. ♃. 200.	″	‴	Ordo magnitudinis.
Sirius	82	18	0	1
Lyra lucida	79	17	24	1
Arcturus	76	16	42	1
Capella	73	16	8	1
Aldebaran	70	15	24	1
Spica	68	15	5.	1
Regulus	64	14	5	1
Regel	62	13	40	1
Formahant	61	13	25	1
Antares	60	13	12	1
Hydra	58	12	45	1
Cauda ♌	57	12	30	1
Procyon	56	12	20	2
Aquila	50	11	0	2
Cing. Orionis	40	8	50	2
Corona lucida	38	8	21	2
Polaris	36	7	54	2
Caput Med.	32	7	3	3
Propus	28	6	10	4
Pletas lucidior	24	5	16	5
Alcor	20	4	24	6

Hæc Grimaldicæ & Ricciolanæ deductionis summa: quæ licet aliorum in hoc genere conatus antecellat, quia tamen æstimatione oculari tandem nititur, scrupulum semper aliquem incertitudinis relinquit. Verùm quando non videtur ultrà posse humanâ industriâ contendi, etiam ista nos, non ut omninò certa, sed tamquam cæteris meliora, amplectimur.

NUMERUS XXIV.

Magnitudinem Fixarum inquirere.

OPorteat ex. gr. inquirere magnitudinem *Sirij*. Hujus Apparens diameter per *num. præced.* est Sec. 18. Distat autem à Terrâ *a* non minùs 100000 Semid. Terr. Ex his, ut docui *num. 34. lib. 3,* reperietur Vera *Sirij* diameter esse ad diametrum Terræ, ut 8 $\frac{7}{18}$ ad 1. Quare si ratio 1. ad 8 $\frac{7}{18}$ per 4 terminos continuetur, erit *b* Terra ad *Sirium* ut 1. ad Quartum, qui est 815. Sirius igitur Terram continet vicibus saltem 815.

a per 2.21.

b per 18. 12.

Hunc in modum ex diametris Apparentibus *num. præced.* & distantiâ 100000 calculatæ sunt à Ricciolo Fixarum aliquot magnitudines, quas hic subjicio:

Ex-

Excedit Terram.

1	*Sirius*	815
1	*Arcturus*	512
1	*Aldebaran*	402
1	*Spica*	374
1	*Regulus*	249
1	*Regel*	220
2	*Procyon*	216 *Vicibus*
2	*Aquila*	137
2	*Polaris*	62
3	*Algol*	34
4	*Propus*	26
5	*Pleias*	18
6	*Alcor*	9

Itaque non tantùm Solis, ut *lib.* 3. *num.* 19. & 36 ostensum est, sed etiam Fixarum & distantia & moles longè major est, quàm hactenus plerique Astronomi existimaverint.

NUMERUS XXV.

Magnitudo Firmamenti.

Diameter Firmamenti est ad diametrum Terræ *b* saltem ut 100000 ad 1. Quare invertendo si hæc ratio per 4 terminos continuetur.

b per n.21.

1.——100,000——10,000 (000000——1000 (000000 (000000, erit Terra ad Firmamentum, ut *o* 1. primus terminus ad quartum 1000 (000000 (000000. Quare Firmamentum est Terrâ majus saltem millies millionesies millionesies.

o per 18. 12. & def. 10. 5.

Terra igitur Firmamento collata instar puncti est. Quod ipsum colligitur etiam evidenter ex *nu.*1. Cùm enim nulla umquam observari potuerit Fixarum Parallaxis, manifestum est semidiametrum Terræ ad semidiametrum Firmamenti nullam habere proportionem sensibilem; quandoquidem Parallaxis à Terræ semidiametro oriatur.

Quod si tanta Mundi hujus aspectabilis amplitudo est, quanta demùm erit illa regio Beatorum, quam cælum Empyrium Theologi appellant, in quâ sedem regni & gloriæ suæ domicilium Deus constituit. *O Israel quam magna est domus Dei, & ingens locus habitationis ejus! magnus est, & non habet finem excelsus & immensus.* Ast illam mortalium oculis vestrisque, ô Astronomi, observationibus subduxit Deus, voluitque eam vos non speculando, sed piè sanctèque vivendo promereri.

NUMERUS XXVI.

In Hypothesi Terra Mota, Orbis Magnus, sive Sphæra cujus semidiameter est distantia oculi nostri vel centri Terræ à Sole, ad Firmamentum instar puncti est.

Cum enim *a* in Stellis Fixis numquam ulla Parallaxis fuerit deprehensa, Parallaxis autem illa si qua esset, oriri deberet ab oculi nostri distantia à centro Firmamenti; perspicuum est distantiam illam ad distantiam Fixarum esse insensibilem. Atqui in Hypothesi Terræ Motæ, (hoc est, si Terrâ Eclipticam percurrente, Sol in Firmamenti centro quiescat) distantia oculi nostri à centro Firmamenti, est ipsa distantia oculi à Sole, hoc est Orbis Magni semidiameter. Ergo in Hypothesi Terræ Motæ semidiameter Orbis Magni ad distantiam Fixarum, sive Firmamenti semidiametrum, insensibilis est. Quare cùm sphærarum proportio *c* triplicata sit proportionis diametrorum, ipse Orbis Magnus ad Firmamentum à fortiori (ut loquuntur Philosophi) insensibilis erit.

a per n. 1.

c per 18. 12. & def. 10. 5.

Corollarium.

Hinc sequitur Orbem Magnum esse ad Firmamentum Copernicanum, hoc est debitum Hypothesi Terræ Motæ; ut Terra est ad Firmamentum commune; hoc est, debitum Hypothesi Terræ Stantis.

Porrò insensibilitas Orbis Magni ad Firmamentum alio adhuc modo demonstrabitur. Neque enim ea sola Parallaxis, quam efficit semidiameter Orbis Magni, sed etiam illa, quam diameter tota, in Terræ Motæ Hypothesi evanescit. Sit Orbis Magnus BFD, Firmamentum CIG; ejusque centrum A, in quo Sol immobilis hæreat, Terrâ motu Annuo Orbem Magnum percurrente. Eligatur Stella quæpiam cujus Altitudo Meridiana sit major 20 Grad. ac proinde refractioni *g* non obnoxia; & quando Terra ex. gr. est in D, observato Stellæ appulsu ad Meridianum, ut docui *l.* 3. *num.* 2, capiatur ejus à Vertice distantia, angulus nempè CDI. Deinde post 6 menses, cùm Terra emenso semicirculo est in B, notato rursum appulsu ejusdem Stellæ ad Meridianum, inquiratur, ut priùs, distantia ejus à vertice CBI. Reperietur hæc æqualis semper priori. Atqui reverà est major, cùm angulus externus CBI internum CDI excedat *i* angulo I, qui proinde utriusque differentia est, diciturque Parallaxis Orbis Annui, causata à totâ Orbis Magni diametro BD. Angulus igitur I insensibilis est: ac proinde etiam BD Orbis Magni diameter ipsum subtendens, ad Firmamenti distantiam nullam habet proportionem sensibilem.

Fig. 20.

g Vide n.6.

i per 32.1.

NUMERUS XXVII.

In Hypothesi Terra Mota, Stellæ Fixæ eam habent proportionem ad Orbem Magnum, quam habent in Terra Stantis Hypothesi ad Terram.

Cum Diameter Apparens cujusvis Fixæ, hoc est angulus sub quo Fixa videtur ex Terrâ, reperiatur præscindendo ab utrâlibet Hypothesi Telluris Motæ vel Stantis, ut patet ex *num.*23, liquet Fixam, ex. gr. *Spicam*, in utrâque Hypothesi æquè multa sui Firmamenti Minuta subtendere; tot nimirum, quot observatio exhibet. Igitur *Spica* Copernicæa est ad Firmamentum Copernicæum, ut *Spica* communis est ad Firmamentum commune. Atqui *m* Firmamentum Copernicæum est ad Orbem Magnum, ut Firmamentum commune ad Terram. Ex æquo igitur Spica Copernicæa est ad Orbem Magnum, ut *Spica* communis ad Terram.

m per Corol. præc.

NUMERUS XXVIII.

Enormis Fixarum Stellarum magnitudo in Terra Mota Hypothesi.

In Hypothesi Terræ Motæ, Stellæ Fixæ sunt orbe magno majores. Ex omnium quippe Astronomorum sententiâ pleræque Fixæ molem Terræ excedunt vel adæquant. Cùm igitur per *num. præced.* ita

se

ſe habeant Fixæ ad Orbem Magnum in Hypotheſi Terræ Motæ, ut eædem ſunt ad Terram in Hypotheſi Terræ Stantis; manifeſtum eſt in Terræ Motæ Hypotheſi pleraſque Fixas Orbem Magnum excedere vel æquate.

Nos autem cum Ricciolo oſtendimus *num.* 24. *Sirium* eſſe majorem Terrâ vicibus ſaltem 815; *Alcor* verò unam è minimis, ſaltem novies. Igitur in Hypotheſi Terræ Motæ *Sirius* 1. magn. ſaltem 815es, *Alcor* mag. 6. ſaltem novies toto Orbe Magno major eſt.

Galilæus in ſuo Mundi Syſtemate immanem iſtam Fixarum magnitudinem nequidquam conatur eludere à *pag.* 350 *uſque ad* 383 diſcurſu longiſſimo, ſed nihil eorum, quæ *num.* 26, 27, 28, jam demonſtravimus, infirmante.

NUMERUS XXIX.

Vnde lux & ſcintillatio Stellarum.

STellas omnes lumen à Sole mutuari ſenſêre Metrodorus, Albategnius, Vitellio, Reinholdus, Blancanus, Scheinerus. Oppoſitum tenuêre Macrobius, Jordanus, Brunus, Galilæus, Carteſius, Ricciolus. Quamvis nihil certi conſtitui de hac re poſſit, exiſtimo tamen probabilius eſſe Fixas lucere à ſeipſis: id enim fulgor earum maximè vividus, & multò, quàm ille Planetarum, rutilantior perſuadet.

Major eſt controverſia de causâ ſcintillationis Stellarum: ad cujus deciſionem hæc ex obſervationibus prænotanda. 1. Non ſolas Fixas ſcintillare, ſed etiam Planetas, maximè quidem *Venerem & Mercurium, Martem* obſcurè; *Iovem* autem & *Saturnum* minimè. 2. Stellas non eodem omnes modo ſcintillare; majora enim ſydera & clariora magis ſcintillant quàm minora. Deinde *Sirius* ſcintillat prolixiùs, *Arcturus* acutiùs, *Cor Scorpij* celeriùs quàm *Oculus Tauri*; *Venus* autem etiam cælo ſereno & aurâ perfrigidâ concitatiſſimè. 3. Stellas magis ſcintillare propè Horizontem, & flantibus ventis, aut humente aurâ. His Suppoſitis,

1. Ariſtoteles & Peripatetici, Cardanus, aliique ſcintillationis cauſam in viſum noſtrum rejiciunt ad longinqua trementem ac titubantem. At ſi hæc ſcintillationis tota cauſa eſt, deberent, *Mars, Iupiter, Saturnus* magis ſcintillare, quàm *Mercurius* & *Venus*, contra 1. ſuppoſitum.

2. Vitellio, Benedictus, Scheinerus, Blancanus, Bettinus aliique cauſam referunt in Vapores motos continuè celerrimeque, quos quia radij Fixarum ob nimiam diſtantiam vincere ac penetrare non ſatis poſſunt, eas ſemper & maximè ſcintillare ac tremere: Planetas autem, quorum utpotè viciniorum, validiores ſunt radij, minùs, quàm Fixas, & non ſemper, ſed tum ſolùm, quando vapores craſſiores & aquatici interveniunt: ſic enim caſu datur, cur Stellæ magis tremant circa Horizontem, & quando aura eſt ventoſa ac humida. Ita lapilli in fundo ſalebroſo amnis, per aquam ſuperfluentem & variè agitatam viſi, videntur tremere. Ita ſpecies Solis in tabellâ excepta, per fumum aut excitatum pulverem pertranſiens, aut reflexa à globis turrium inauratis, ſed rore madentibus, tremula apparet. Hæc Vitellio, Blancanus, Scheiner; qui poſtremus cauſam ſcintillationis, ut quidem ipſe putat, totam complexus, Stellarum ſcintillatio, inquit, eſt unica & ſola ſpecierum in oculum delapſarum interciſio, facta ab irrequietâ vaporum variè affectorum intercurſatione. Vaporibus adjungit Ricciolus innumeros pulviſculos ac fibras per aërem motu aſſiduò varioque agitatum volitantes, quod inſigni experimento confirmat: *a* obſervavit enim in templo S. Petronij Bononiæ, dum ſpeciem Solis in tabulâ excipiebat per foramen à tabulâ diſtans plus quam pedibus 170, ſpeciem illam tremore ingenti ac manifeſto fluctuare, ob irrequietam intercurſationem atomorum, in Solis radio evidenter miris vorticibus ebullientium.

a Almag. l. 6. P. 379.

Verùm, quamvis his omnibus egregiè probetur à Vaporibus & pulviſculis intercurſantibus ſcintillationem ſyderum adjuvari: nequaquam tamen hanc eſſe unam & totam ſcintillationis cauſam concluditur; aliàs *Mars, Iupiter, Saturnus* deberent contra 1. ſuppoſitum magis ſcintillare, quàm *Fixa*, & quàm *Venus*, cùm lux *Sirij* & *Arcturi* ſit rutilantior, adeoque ſuperandis vaporibus aptior; *Venus* autem non ſolùm lucis claritate, ſed etiam apparenti magnitudine illos ſuperet. Deinde per ſolos vapores ſalvari nequit ſecundum ſuppoſitum.

3. Jordanus Brunus *lib.* 4. de Maximo & Immenſo, ſcintillationem ſyderum cenſet oriri a circumvolutione eorum circa ſuos axes, quam pulchrè exponit Keplerus ſimilitudine adamantis, qui circa ſuum centrum celeriter converſus, diverſas facies atque angulos explicans, fulguraret. Credibile eſt enim Stellas, quod tubis longiſſimis videtur comprobari, non eſſe exactè Sphæricas ſed anguloſas, & fortè etiam diverſis coloribus & maculis aſperſas. Ubi rectè notat Ricciolus non opus eſſe integrâ converſione, ſufficere enim motum, ſeu mutationem ſuper axe reciprocam. Converſioni ſuprà axem Tycho adjungit vapores, Keplerus inſuper alterationem internam tamquam paroxiſmum & reciprocam productionem luminis per corpus diaphanum Stellæ, quaſi à corde ejus micante.

4. Vero ſimillimum videtur ſcintillationis cauſam ex omnibus jam relatis componi, nimirum ex agitatione vaporum, & atomorum, ex converſione Syderis ſuper axe, ex motu reciproco luminis in Sydere. Sic enim datur ratio eorum omnium, quæ circa ſcintillationes ſtellarum obſervata prænotavimus.

NUMERUS XXX.

Stellarum numerus, ſpecies, Figura, ſeu Conſtellationes. Via lactea.

§. 1. STellarum quædam nudo oculo ſunt aſpectabiles, quædam ſolo teleſcopio. Earum quæ nudo oculo videri poſſunt, plurium Aſtronomorum catalogi extant, è quibus duos ſeligo Ptolomæi, & Kepleri. Catalogi Kepleriani prima pars continet Stellas mille ex ſcedis Tychonicis accuratiores; ſecunda nonnullas Tychonicas minùs accuratas, & Ptolomaicas à Tychone omiſſas, & ex Græco potiùs codice, quam ex Arabico correctas; Tertia ſtellas exhibet auſtrales in noſtrâ Zonâ inobſervabiles. Solent autem ſtellas nudo oculo obſervabiles Aſtronomi in ſex magnitudinum claſſes dividere; quibus obſcuræ, ſeu Nebuloſæ ſeptimam quaſi claſſem conſtituentes accedunt. Sunt porrò Nebuloſæ, quas tanquam nebulas ſubalbidas nudus oculus æſtimat nihil aliud, quàm ſtellularum congeries, ut teleſcopij præſidio jam innotuit.

Magn.	Numerus Stellarum. Ptolomæo.	Keplero.
1	15	15
2	45	58
3	208.	218
4	474	494
5	217	354
6	49	240
Nebul.	14	13
Summa.	1022	1392.

Non conveniunt in ſtellarum numero Aſtronomi, 1. quia non omnes parem in obſervando diligentiam, & induſtriam adhibuerunt. 2. ob majus minuſve oculi acumen: quàm multi enim ſunt, inquit Ricciolus, qui neque *Alcor* in *caudâ minoris Vrſæ*, neque *ſeptimam Pleiadum*, neque alias ejuſmodi ſtellulas valent diſcernere, & Keplerus in diſſertatione cum Galilæi nuncio Syderio, ait Mæſtlinum numeraſſe in *Pleiadibus* 14 ſtellas abſque ullo tubo, quæ ab aliis vix 6 aut 7 numerantur; & notum ſibi eſſe virum Religioſum, qui in *Orionis clypeo* plures, quàm 40 numerarit, in quo alij vix 11 aut 12 obſervant. 3. Quia veteres ignorarunt ſtellas Auſtrales, à recentibus Orbis circumnavigatoribus detectas.

§. 2. Primæ magnitudinis ſtellæ ſunt apud omnes minimùm 15, quamvis non eædem omnibus. Extra controverſiam ſunt 13 ſequentes.

Alcarnar, in Extremo *Eridani*.
Aldebaran: ſeu *oculus Tauri*. *Pallicium*
Arcturus, ſeu *bulla fimbriæ Bootis*.
Canopus, in temone *Argonavis*
Capra, *Capella*, ſeu *Hircus* in humero *Aurigæ*.
Centauri ſumma in *pede dextro*
Fidicula Lyræ.
Fomahant, extrema in effuſione *Aquarij*,
Leonis Cauda
Leonis cor, ſive *Regulus*
Rigel in pede *Orionis*.
Sirius, ſeu *Alhabor* in ore *Canis*.
Spica Virginis.

Controverſæ ſunt.

Cor Scorpij, ſeu *Autares* Ptolomæo ejuſque ſectatoribus, eſt 1. magn. aliis 2.
Centauri lucida in coxâ poſteriori, Tychoni, & Bayero eſt 1, aliis 2. magn.
Cor Hydræ Ptolomæo eſt 2; Tychoni aliiſque eſt 1.
Orionis Humerus dexter, ſeu *ſequens*, Ptolomæo, & Bayero eſt 1, aliis 2.
Procyon Canis minor Tychoni, Ricciolo, aliiſque eſt 2, Ptolemæo, & Bayero 1.

§. 3. Conſtellationes, ſive aſteriſmi (alij Aſtra appellant) ſunt imagines quædam, ſeu formæ, ad quas ſtellæ à priſcis Aſtronomis ſunt redactæ, ut tanta earum multitudo per partes diſcerneretur. Pleræque ſunt ex fabulis Ethnicorum deſumptæ; quas ſanè expediret aboleri, & ad formam Chriſtianam revocari, niſi obſtaret confuſionis, & perturbationis periculum, quando obſervationes antiquæ cum recentioribus, quod ad conſtituenda Fixarum loca omnino eſt neceſſarium, comparantur.

Conſtellationes ſunt 62; nimirum antiquæ 50, & novæ 12. Solent in tres claſſes diſtingui. Prima continet eas quæ circa Zodiacum reperiuntur, ſecunda Boreales extra Zodiacum, tertia extra Zodiacum Auſtrales. Quæ ſingularum ſint nomina, & quot ſingulæ ſtellis conſtent, juxta Ptolomæum, Keplerum & Bullialdum, ſequens tabella exhibet.

	Conſtellationum nomina & ordo.	Numerus ſtellar. Ptolomæo	Keplero & Bullialdo
Zodiaci Boreal.	Aries	18	23
	Taurus	44	52
	Gemini	25	30
	Cancer	13	17
	Leo	35	40
	Virgo	32	41
Zodiaci Auſtr.	Libra	17	20
	Scorpius	24	27
	Sagittarius	31	31
	Capricornus	28	28
	Aquarius	45	45
	Piſces	34	42
extra Zodiacum Boreales	Urſa minor, Cynoſura, , Plauſtrum minus	7	20
	Urſa major, Helice, Plauſtrum majus.	35	56
	Draco	31	23
	Cepheus	13	12
	Bootes	23	29
	Corona	8	8
	Hercules	28	31
	Lyra. vultur. cad.	10	11
	Cygnus	19	38
	Caſſiopæa	13.	45
	Perſeus	29	34
	Auriga, Erichton.	14	27
	Serpentarius Ophiucus.	29	56
	Serpens	18	26
	Sagitta	5	8
	Aquila, vultur volans.	15	12
	Antinous	0	7
	Delphin	10	10
	Equiculus	4	4
	Pegaſus	20	24
	Andromeda	23	26
	Triangulum	4	4
	Coma Berenices	0	15
Extra Zodiacum Auſtrales antiqua	Cetus	22	25
	Orion	38.	62
	Eridanus	34	39
	Lepus	12	13
	Canis major	29	29
	Canis minor, Procyon	2	5
	Argonavis	45	53
	Centaurus	37	37
	Lupus	19	19
	Hydra	27.	33
	Crater	7	8
	Corvus	7	7

Ara.

RESIDVVM TABVLÆ PRÆCEDENTIS.			
	Ara. Thuribulum	7	7
	Corona Australis	13	13
	Piscis Aust.	18	17
Extra Zod. Australes novæ.	Grus		13
	Phœnix		15
	Indus		12
	Pavo		23
	Apus. Avis Indica		11
	Apis. Musca		4
	Camæleon		10
	Triangulum austr.		5
	Piscis volans.		7
	Dorado. Piscis Xiphias.		7
	Toucan. Anser Americ.		8
	Hydrus		21

Singularum Fixarum nomina nimis longum est recensere. Extant (ut dixi) plures earum Catalogi, nimirum apud Ptolomæum, Copernicum, Tychonem, Clavium, Reinholdum, Grimbergerum, Longomontanum, Lansbergium, Bayerum, Keplerum, Bullialdum. Constellationes porrò singulas & stellas, in ijs præcipuas, cum fabulis, & veterum Scriptorum ac Poëtarum locis accuratè, & eruditè describit Ricciolus, *Almag. lib. 6. cap. 3. 4. 5.*

§. 4. Stellarum multitudo absoluta est innumerabilis.

Id maximè patuit præsidio telescopij. Hoc instructus Galilæus, ut ipse refert in *Nuncio Sydereo*, detexit in *nebulosâ Orionis*, stellas 21, in *Pleiadibus* plures quàm 40; intra spatium *Cinguli* & *Ensis Orionis* saltem 80; in *Orione* intra spatium unius alteriusve Gradus plures quàm 500, ut deterritus fuerit ab integrâ Constellatione *Orionis* observandâ. *Galaxiam* autem, seu Lacteum circulum ait esse innumerabilium stellarum congeriem; in quamcumque illius partem telescopium dirigas, mox ingentem numerum stellarum occurrere, quarum complures satis magnæ ac lucidæ sint, sed exiguarum multitudinem prorsus inexplorabilem esse. Similia etiam ab alijs observata fuêre.

Porrò stellas esse innumerabiles, Scriptura non uno loco docet. Gen. 12. *Suspice in cælum & numera stellas, si potes*, & cap. 22. *multiplicabo semen tuum sicut stellas cæli, & velut arenam, quæ est in littore maris*, & Jerem. 33. *Sicut enumerari non possunt stellæ cæli, & metiri arena maris, sic multiplicabo semen David servi mei.*

Malè tamen ex his alijsve conclusit Jordanus Brunus stellas esse infinitas. Quamvis enim earum numerus explorari nequeat ab homine, is tamen est determinatus ac certus Angelis utique notus, & Deo, *qui numerat multitudinem stellarum, & omnibus eis nomina vocat.* *Psal. 146.*

§. 5. *Viam Lacteam* esse congeriem innumerabilium stellularum (ut dixi) jam constat. Idem veteres non pauci, sed tantùm per conjecturam, destituti scilicet præsidio telescopij, censuerunt, Democritus apud Plutarchum *de placitis Phil. lib. 3. cap. 1*, Ptolomæus *l. 8. cap. 2*, Albertus Magnus *cap. 5*; Manilius *de via Lacteâ* ita cecinit:

An major densâ stellarum luce corona
Contexit flammas, & crasso lumine candet,
Et fulgore nitet collato clarior orbis?

Situm *Galaxiæ* in cœlo inspectione Globi cælestis faciliùs, quàm ex longâ descriptione, addisces. Est porrò notatu dignum, quod oculatus testis refert Iosephus à Costa *l. 1. histor. de novo Orbe cap. 2. Viam Lacteam* circa Polum Australem mirè splendescere, & alicubi maculis ferrugineis, Lunæ Deficientis rubori similibus, rutilare; cujus utique hæc est causa, quod ea pars stellulis constet coloris subrufi, *Martis* lumen imitantibus. Postremò quæ hactenùs apparuerunt Stellæ novæ, omnes in *Via Lacteâ* sunt visæ, sed de his plura *libro 8. cap. 3.*

CAPUT III.

De ortu & occasu Stellarum.

NUMERUS XXXI.

Quotuplex sit ortus & occasus Stellarum.

Generalis divisio est in Absolutum, qui Astronomicus dicitur, & Relativum ad Solem, quem vulgò Poëticum appellant, non quia ad Astronomos non pertinet (pertinet enim ut qui maximè), sed quòd Poëtæ, dum Fastos, & tempestates agriculturæ idoneas describunt, suis illum carminibus celebraverint. Prior explicatione non indiget, cùm nihil sit aliud, quàm Stellæ ascensus suprà, vel descensus infrà Horizontem. Posterioris species 12 recenset Ricciolus, plerique cæteri tantùm sex, vel potiùs tres, singulas nempè tam ad occasum quàm ad ortum referendo. Et quando hæ ferè solæ usum habent præ cæteris, eas tantùm, omissis alijs, & eo, quo contingunt, ordine, hic attingam.

Primus est *ortus Matutinus* (quem appellant *Cosmicum*) quando Stella oritur cum Sole. Sed tunc sub radijs Solis delitescit.

Secundus est *prima emersio Matutina orientis Stellæ è Solis radijs*, qui vocari solet *ortus Heliacus*.

Tertius est *occasus Matutinus*, quando stella occidit Sole oriente, vocatur passim *occasus Cosmicus*.

Quartus est *ortus vespertinus*, quando Stella oritur Sole occidente. Appellatur vulgò *ortus Acronycus*.

Quintus est *prima occultatio vespertina occidentis Stellæ sub radijs Solis*. Vocari solet *occasus Heliacus*.

Sextus est *occasus stellæ Vespertinus*, quando occidit cum Sole. Vocatur passim *occasus Acronycus*.

De ortu & occasu Planetarum *vide lib. 7. num. 41 & 42.*

NUMERUS XXXII.

Respectu Horizontis dati, quæ Stellæ dato Sæculo semper appareant, quæ semper lateant, quæ quotidiè oriantur & occidant, invenire.

Horizon esto CD, Meridianus CADB; Æquator EF; ejus Poli A, & B. Notæ habeantur Declinationes Stellarum; quibus demptis à Grad. 90, Declinationum complementa nota erunt. His positis: *Fig. 21. 22. & 17.*

§. 1. Si Declinationis Boreæ XE complementum XA fuerit minus, vel æquale Altitudini Poli conspicui CA, Stella semper apparebit, & numquam

occidet. Illius namque Parallelus X Z, quem diurno motu percurrit, totus suprà C D Horizontem extat.

§. 2. Si Declinationis Austrinæ V F complementum V B sit minus Altitudine Poli Borei C A, seu depressione Austrini D B, Stella semper latebit. Tunc enim Stellæ Parallelus V P totus infrà Horizontem deprimitur.

Si tamen declinationis complementum à Poli inconspicui depressione D B deficeret minùs quàm 30 Minutis, quanta nimirum ferè est *b* Refractio Stellarum Horizontalis, posset Stella Meridianum attingens vi Refractionis usque ad Horizontem in D, vel suprà D attolli, ac proinde oriri & occidere.

b *Num.* 6.

§. 3. Si Declinationis Boreæ I E, seu K F, complementum I A, K A sit majus Altitudine Poli Borei C A, Stella quotidie orietur & occidet. Tunc enim pars una Paralleli I K, quem Stella motu diurno percurrit, suprà Horizontem C D extat, pars altera infrà Horizontem deprimitur. Quare Stellam quotidie oriri, & occidere est manifestum.

Si tamen Declinationis Boreæ complementum excederet Altitudinem Poli minùs quàm 30 Minutis, posset Stella, ubi Meridiani inferiorem semicirculum A C B attigerit, vi Refractionis attolli usque ad Horizontem in C, vel suprà C, ac proinde semper apparere.

§. 4. Si Declinationis Austrinæ M E, N F complementum M B, N B sit majus depressione Poli Austrini D B, vel ei æquale, Stella rursum orietur & occidet. Nam quando majus est, pars una Paralleli N M, quem motu diurno Stella percurrit, suprà Horizontem extat, ut priùs, altera verò infrà Horizontem deprimitur: quando autem æquale est, tunc Stella Meridiani superiorem semicirculum A D B attingens, verè quidem est in D margine Horizontis; at vi Refractionis suprà eum attollitur, ac proinde oritur occiditque, ut *suprà*.

Quia porrò Declinationes Stellarum sensim immutantur, perspicuum est non easdem semper Stellas aut fuisse, aut fore, sive perpetuò apparentes, sive perpetuò latentes, sive orientes & occidentes.

NOTA. Inter data reposui etiam Sæculum; non quia intra unum sæculum nulla fiat mutatio: sed quia modica. Aliàs si exactè velimus procedere, solvendum erit Problema ad dati Sæculi lustrum, vel decadem datam. Quod in *sequentibus* etiam *Numeris* observa.

NUMERUS XXXIII.

Sæculo dato, Eclipticæ punctum cum datâ Stellâ culminans, invenire.

Fig. 49. *lib.* 1.
a *per num.* 5. 17.
b *per num.* 68 *lib.* 2.
c *per num.* 31. *lib.* 1.
i *per trig. Sph. prob.* 12.

Æquator esto N M; Ecliptica M ♋ N ♑. Inveni Stellæ Ascensionem *a* rectam, quæ sit M F, terminata, in Æquatoris primo Quadrante M Q. Declinationis circuli per Stellam datam transeuntis segmentum sit A F, qui ad Æquatorem *b* rectus est. In trigono igitur rectangulo A M F quia nota sunt latus F M, & angulus *c* obliquitatis Eclipticæ F M A, ex *i* his reperietur basis ♈ A, Longitudo puncti Eclipticæ A. Atqui punctum A, & Stella *ex constr.* sunt in eodem Declinationis circulo, ac proinde simul culminabunt, hoc est simul Meridianum attingent. Ergò nota est Longitudo puncti Eclipticæ cum Stellâ datâ culminantis.

Constructio reliquorum casuum, quando scilicet Ascensio Recta Stellæ terminatur in Quadrante Æquatoris secundo, tertio, quarto, facilè colligitur tum ex his, tum ex *num.* 52. *lib.* 1.

NUMERUS XXXIV.

Tempus, quo Stella data cum Sole culminat, invenire in Sæculo dato.

Per *num. præced.* inveni punctum Eclipticæ culminans cum Stellâ datâ. Tum per *num.* 12. *l.* 4. vel ex Ephimeride tempus inquire quo Sol punctum illud Eclipticæ attingit. Hoc erit tempus quo Sol cum datâ Stellâ culminat.

NUMERUS XXXV.

Ascensionem & Descensionem obliquam Stellæ aut dati in cælo puncti invenire in Sæculo dato.

Fig. 22. 23.

Convenit etiam Problema Soli pro die dato. Meridianus esto F A N; Horizon F G; Æquator M B N O; ordo Signorum ex N ♈ per O, M, B; Polus Boreus A.

Fig. 22.

Si Stella declinat Australiter, & oriatur in C, ducatur per eam Declinationis arcus A P C. Stellæ C Ascensio recta est ♈ O M P, nota per *num.* 4. 5. 17. Ascensio obliqua ♈ O M B, Ascensionalis differentia P B, quæ addita Ascensioni rectæ obliquam exhibet ♈ O M B.

Si Stella declinans Borealiter oriatur in I, ducto Declinationis arcu A I Q, Ascensio recta est ♈ O M Q, Ascensio obliqua ♈ O M B, Ascensionalis differentia Q B, quæ proinde dempta Rectæ exhibet Obliquam ♈ O M B.

Fig. 23.

Si Stella Australiter declinans occidat in K, ducto Declinationis arcu A S K, ejus Descensio recta est ♈ O S, Descensio obliqua ♈ O, Descensionalis differentia S O: quæ proinde Descensioni rectæ subtracta dabit Obliquam ♈ O.

Si Stella Borealiter declinans occumbat in R, ducto Declinationis arcu A R V, Descensio recta Stellæ est ♈ V, Descensio obliqua ♈ V O, differentia V O: quæ addita Descensioni rectæ dabit Obliquam ♈ V O.

Fig. 22.
a *per num.* 2. & 17.
o *def.* 4.
l. 2. *n* 66.
r *trig. Sph. prob.* 10.

Quoniam igitur Ascensiones rectæ Stellarum notæ sunt per *num.* 4. 5. 17. ut habeantur Obliquæ, solæ restant differentiæ inveniendæ. Has porrò ita reperies. In Trigono C P B, quod per *num.* 68. *l.* 2. rectangulum est ad P, notum *a* est latus C P Declinatio Stellæ, cum angulo C B P, seu F B M, quem *o* metitur *o* arcus F M Altitudo Æquatoris nota per *num.* 27. *l.* 1. Quare non *r* latebit latus B P, Ascensionalis differentia. Eodem modo reperitur Asc. differentia B I, & differentiæ Descensionales O R, O K.

Inde Sole nota fit oportet præter propter Hora ortus & occasus ut ad eam inquiri possit ejusdem Ascensio recta per *num.* 52. *l.* 1 vel per *num.* 3. *l. hujus.* Cætera omnia, ut in Stellâ.

NUMERUS XXXVI.

Stellæ, aut dati in cælo puncti Amplitudinem Ortivam invenire in Sæculo dato.

Fig. 24.

Meridianus esto F A L; Horizon F G; Æquator M B N; Polus Boreus A; Stella oriens

in

in C cum Declinatione Australi, vel oriens in I cum Declinatione Boreali. His positis,

b def. 36. lib. 1. *Amplitudo Ortiva* b est C B, vel I B, quæ sic reperitur. Ducto Declinationis arcu A P C, in triangulo C P B, quod per num. 68. lib. 2. rectangulum est ad P, notum c est latus C P Declinatio Stellæ, cum angulo C B P, sive F B M, quem o metitur arcus F M Altitudo Æquatoris nota per num. 27. l. 1. Ex his igitur r innotescet C B Ortiva Amplitudo quæsita. Eodem modo reperitur I B, ducto Declinationis arcu A I Q.

c per num. 2. & 17. o def. 4. l. 2. n. 65. r trig. Sph. prob. 3.

NUMERUS XXXVII.

Arcum Diurnum vel Nocturnum Stellæ, aut dati in cælo puncti, atque inde spatium temporis quo Stella suprà & infrà Horizontem est, invenire in dato Sæculo.

Fig. 24. Meridianus esto F A L; Horizon F G; Æquator M B N; Polus Borcus A, Stella oriens in C cum Declinatione Australi, vel oriens in I cum Declinatione Boreali. His positis,

Ducantur per Stellam orientem in C vel I, circuli ad Æquatorem paralleli K C L, D I E. Manifestum est arcum semidiurnum Syderis esse C K, vel I D, ab Horizonte videlicet usque ad Meridianum, arcum verò seminocturnum esse C L, vel I E: quos hunc in modum reperies. Quoniam arcus Æquatoris B M ab Horizonte ad Meridianum est 90 Graduum, si ab hoc auferatur Ascensionalis differentia P B nota per num. 35. arcus residuus P M notus fiet. Quare cùm huic similis sit Paralleli arcus C K, etiam hic notus erit. Pari modo si Quadranti Æquatoris B M addatur Ascensionalis differentia B Q, notus erit arcus Q M, ac proinde etiam I D, similis ipsi Q M. Porrò Semidiurni arcus C K, I D duplicati, dabunt Diurnos integros. Hi verò subtracti à Grad. 360, exhibebunt Nocturnos. Demùm singulis in a tempus conversis, tempus prodibit, quo Sydus suprà vel infrà Horizontem moratur.

a per num. 58. lib. 1.

Convenit etiam problema Soli pro die dato.

Scholium.

Astrorum Diurni arcus non semper iidem perseverant, quia propter motum per Zodiacum Declinationes eorum ab Æquatore mutantur assiduè, ac proinde etiam arcus Diurni. Quare quò celeriùs Astrum in Zodiaco movetur, eò celeriùs Diurni arcus quantitas variatur. Hinc Diurni arcus immutatio, in Lunâ contingit omnium celerrimè; in Sole & Planetis tardiùs; tardissimè autem in Stellis Fixis, qua non nisi intra longum tempus sensibilem mutationem incurrunt.

NUMERUS XXXVIII.

Punctum Eclipticæ cum quo Stella dato sæculo oritur & punctum cum quo occidit, invenire.

Horizon esto A B, Æquator C P D, Ecliptica I O F.

Fig. 25. a per n. 35.

§. 1. Inquiratur a Stellæ orientis ex. gr. in Q Ascensio obliqua, quæ sit primò minor Gradibus 180, arcus videlicet O P, ac proinde initium ♈ sit in O. In triangulo O F P obliquangulo nota sunt angulus P O F n obliquitatis Eclipticæ, & O P F complementum ad duos rectos Altitudinis Æquatoris C P A notæ per num. 27. l. 1. & latus O P. Quare non p latebit arcus O F distantia Eclipticæ puncti F orientis cum Stellâ Q ab ♈ initio O.

n per n. 31. lib. 1. p trig. Sph. prob. 20.

Quod si Stellæ Ascensio obliqua sit major Grad. 180, ac proinde punctum O repræsentet initium ♎, situsque Eclipticæ sit *i* O *f*, tunc Ascensioni obliquæ Syderis deme Grad. 180, & residuum dabit arcum O P, eum quo & notis *suprà* angulis P O *f* & O P *f*, qui jam est ipsa Æquatoris Altitudo, reperies arcum O *f*; cui si addas Grad. 180 habebis distantiam Eclipticæ puncti *f* orientis cum Stellâ Q ab initio ♈.

Postremò si Stellæ Ascensio obliqua est Grad. 180, punctum Eclipticæ ipsi cooriens est principium ♎.

§. 2. Iisdem positis, ut invenias Eclipticæ punctum F cum quo occidit Stella Q, sic operare. Inquiratur Stellæ occidentis in Q Descensio obliqua, quæ primò sit minor 180 Gradibus; arcus videlicet O P, ac proinde initium ♈ sit in O. Pari modo processum reliquum §. 1. applica, pro Ascensione accipiendo Descensionem, & occasum pro ortu, atque ita quæsitum obtinebis.

Fig. 26.

NUMERUS XXXIX.

Horam, quâ Sol Die datâ oritur & occidit, invenire.

Per num. 37 reperi arcum Solis Semidiurnum; quem a in tempus, hoc est in Horas Solares & Horarum Scrupula, converte: habebis distantiam ortus & occasus Solis à Meridie, sive à fine Horæ duodecimæ Diurnæ. Sit ex. gr. arcus Semidiurnus Horarum 7. 15'. Igitur Sol eo Die occumbit post Horam 7. vespertinam Minuto 15. oritur post Horam 4. matutinam Minuto 45.

a per n. 51. lib. 1.

NUMERUS XL.

Horam, quâ Die dato Stella in dato Sæculo oritur, culminat, occidit, invenire.

§. 1. Inquire b Ascensionem obliquam tam Stellæ quam Solis. Sed pro Sole nota esse debet præter propter hora ortus, ut ad eam quæri possit obliqua Ascensio. Ascensionum differentia in tempus Solare, c conversa, dabit differentiam temporis inter ortus Stellæ ac Solis. Inquire igitur Horam ortus Solis d exactè; &, si Sol oritur ante Stellam, differentiam temporis prædictam adde tempori ortus Solaris; deme autem si Sol oritur post Stellam: prodibit tempus post Medinoctium quo Stella oritur die dato.

b per num. 35. c per n. 51. lib. 1. d per n. 39.

Oriatur ex. gr. Sol Horis 5, post mediam noctem; differentia autem temporis inter Solis & Stellæ ortus, sint Horæ 2. 10'. Si Solis ortus præcedit, Horæ 2, 10' additæ ad Horas 5 dabunt Horas 7. 10', ac proinde Stella eo die oritur Horis 7. 10' post mediam noctem. Si verò Solis ortus sequitur, Horæ 2. 10' demptæ Horis 5 relinquunt Horas 2. 50', ac proinde oritur Stella eo die post Medinoctium Horis 2. 50'.

§. 2. Inquiratur deinde e obliqua Descensio, tam Solis, quàm Stellæ ut *suprà* nec non tempus f quo Sol

e per n. 35. f per n. 39.

Sol occumbit. Differentia Ascensionum obliquarum in tempus Solare conversa addita tempori occasus Solis, si is occidit ante Stellam; dempta verò, si post Stellam, dabit tempus post meridiem, quo Stella occidit.

Oriatur ex. gr. Sol Horis 6 post Meridiem, & differentia Descensionum sit hora 1. 20'. si Sol ante Stellam occumbit, horis 6 adde horam 1. 20'. fiunt Horæ 7. 20'; ac proinde Stella eo die occidit horis 7. 20' post meridiem. Si Sol occidit post Stellam, horis 6 deme horam 1. 20' : relinquuntur horæ 4. 40'. Stella igitur eo die occidit post meridiem horis 4. 40'.

§. 3. Reperi arcum Semidiurnum m Stellæ, & in Solare tempus converte. Hoc additum tempori quo Stella oritur, dabit tempus, quo Stella culminat, seu Meridianum attingit.

m per nu. 37.

NUMERUS XLI.

Tempus culminationis, ortus, & occasus Stellarum quotidiè anticipat, seu retrocedit versùs initia Horarum Solarium.

SI Stella quæpiam hodie culminet cum Sole, hoc est Meridianum transeat Horâ 12, cras Meridianum transibit paulò ante 12, & post dies aliquot Horâ 11, & sic deinceps. Ratio est, quia Sol motu proprio ab Occasu in Ortum celeriùs fertur quàm Stella, cujus motus a tardissimus est, ac proinde Sol ab eâ quotidie Ortum versùs digreditur tanto ferè spatio, quantum uno die in Zodiaco secundum motum Medium percurrit, videlicet b Grad. 0. 59'. 8''. 19'''. Quo fit ut Stellâ postridie ad Meridianum reversâ, Sol eò nondum redierit, ac proinde nondum sit Meridies, seu Hora 12. Manifestum est igitur Stellam, quæ pridie cum Sole, hoc est Horâ 12 Meridianum transivit, postridie Meridianum ante Solem, hoc est ante 12 pertransire. Quantùm verò in dies singulos anticipat culminatio Stellæ, tantumdem etiam quotidie ortus occasusque anticipent necesse est.

a Vide nu. 14.

b per n. 36. lib. 1.

Porrò Stellarum culminatio, ortus occasusque quotidie anticipat Solaris temporis H. 0. 3'. 56''. 32'''. circiter; mensibus verò tribus circiter Horas 6, mensibus 6 Horas 12, mensibus 9 Horas circiter 18; mensibus 12, Horas 24. Quare, si culminatio Stellæ hodie fiat Horâ 12 meridianâ, postridie fiet ante 12, Horis 0. 3'. 56''. 32'''; post menses tres, Horâ 6 matutinâ ferè; post sex, Horâ 12 nocturnâ; post novem, Horâ ferè 6 pomeridianâ; post 12, Horâ rursum 12 meridianâ; eâdem videlicet Horâ Solari quâ ante Annum. Ratio horum est, quia Sol (ut dixi) quotidie motu Medio recedit à Stellâ in consequentia, Grad. 0. 59'. 8''. 19''' circiter, cum quibus motu Diurno ab Ortu in Occasum pertranseunt Meridianum Grad. 0. 59'. 8''. 20''' proximè; quæ in tempus Solare c conversa, efficiunt Horas 0. 3'. 56''. 32''' proximè : & tanta ferè est unius diei anticipatio. Mensibus autem 3 Sol à Stellâ recedit in consequentia Grad. 90, cum quibus Æquatorem Diurno motu pertranseunt, non quidem exactè 90, sed circiter, qui proinde in tempus conversi, efficiunt circiter Horas 6 : & tanta ferè est 4 Mensium anticipatio. Atque ita deinceps.

c per n. 51. lib. 1.

Quod si momentum quo Stella culminat die Anni dato, comparetur cum momento, quo culminat Anni die eodem, ast Sæculi alterius subsequentis, culminationis momentum prorepit versùs Horarum fines : quia Stellæ sensim in consequentia moventur. Eadem de ortu & occasu intellige.

NUMERUS XLII.

Tempus quo Stella Anno dato Cosmicè oritur, occiditve, item tempus quo oritur vel occidit Acronicè, invenire.

§. 1. INveni a Eclipticæ punctum, cum quo Stella oritur. Tum ex Ephimeride vel per nu. 12. l. 4. inquire diem, quo Sol in illo puncto existit. Is erit dies quo Stella cum Sole, hoc est Cosmicè, oritur.

a per n. 38.

§. 2. Inveni b punctum Eclipticæ cum quo Stella occidit. Deinde diem inquire quo Sol est in Eclipticæ puncto, isti jam invento diametraliter opposito: Hic est dies, quo Stella occidit oriente Sole, sive Cosmicè.

b per n. 38.

§. 3. Inveni Eclipticæ punctum, cum quo Stella oritur. Tum diem inquire, quo Sol est in puncto isti invento diametraliter opposito. Hic dies erit, quo Stella Acronicè oritur, hoc est Sole occidente.

§. 4. Inveni Eclipticæ punctum cum quo Stella occidit, deinde diem, quo Sol in eo puncto existit. Hic erit dies, quo Stella Acronicè occidit, hoc est unà cum Sole.

Quia porrò Stellæ sensim moventur in consequentia, etiam ortus & occasus Stellarum tam Cosmici, quam Acronici, sensim prorepunt in consequentia, seu versùs fines Mensium : ut si Stella jam oriatur Cosmice 1. Martij, post plures annos Cosmice oritur ex. gr. 4. Martij, & sic deinceps.

NUMERUS XLIII.

Tempus, quo Stella Anno dato Heliacè oritur vel occidit, invenire.

MEridianus esto B N E; Horizon B C; Ecliptica D A E, ejus polus M; Stella oriens vel occidens in I; Latitudinis arcus per Stellam transiens M I G. Sol autem existat in Eclipticæ puncto F infrà Horizontem, ducaturque Verticalis N O F, cujus arcus O F metitur depressionem Solis infrà Horizontem, quæ tanta sit, quantâ præcisè opus est, ne Stellam orientem vel occidentem in I, Sol extinguat; ita ut si ejus depressio esset minor, Stella non appareret. Hunc arcum Astronomi *Visionis arcum* appellant.

Fig. 27. 28.

Oportet igitur invenire Eclipticæ punctum F: quando enim Sol in eo puncto existit (quod sciri ex Ephimeride vel num. 12. l. 4. potest) Stella Heliacè orietur vel occidet. Punctum verò F hunc in modum reperies.

Inveni a Longitudinem Stellæ, quæ terminatur in G, & Longitudinem b Eclipticæ puncti A, cum Stellâ I orientis vel occidentis. Sic notus fiet arcus A G. Reperi deinde c Latitudinem Stellæ, quæ est arcus I G. Quoniam igitur in trigono A G I, quod rectangulum d est ad G, nota sunt latera A G, I G, ex his reperietur i angulus G A I, seu F A O. In triangulo deinde F O A, quod ad O m rectangulum est, notum est ex observatione (ut patebit ex Tabellâ subjectâ) latus O F, arcus nempe Visionis, & jam inventus est angulus F A O. Ex quibus reperietur n arcus A F, qui à noto jam puncto Eclipticæ A u numeratus in consequentia, dabit quæsitum Eclipticæ punctum F, ad quod ubi Sol pervenerit, Stella I orietur Heliacè : numeratus x verò in antecedentia dabit Eclipticæ punctum, quod cum Sol attinget, Stella Heliacè occidet.

a per nu. 7. & 16.
b per n. 38.
c per nu. 7.
vel 8.
d per n. 68. lib. 2.
i trig. Sph. prob. 31.
m per n. 68 lib. 2.
n trig. Sph. prob. 3.
u in Fig. 27
x in Fig. 28

Arcus

Arcus Visionis (OF) ex communiter observatis, ad mentem Ptolomæi, *l.* 8. *cap.* 6, & *l.* 13. *cap.* 7. sequenti Tabellâ exhibetur, qui quamvis sit pro Climate 4. poterit tamen etiam alijs absque notabili errore inservire.

Pro Fixis magn.	*Grad.*	*Pro Planetis*	*Grad.*
primæ	12	♄	11
secundæ	13	♃	10
tertiæ	14	♂	11. 30′
quartæ	15	♀	5
quintæ	16	☿	10
sextæ	17		
minimæ	18		

NUMERUS XLIV.

Attinguntur quædam de effectis Stellarum.

QUamvis de naturâ & viribus Stellarum hîc agere, minimè propositum mihi sit qui Astronomi partes non Astrologi tuendas suscepi: visum est tamen circa aëris mutationes pauca attingere, quæ Veterum scriptis, & versibus Poëtarum, atque in ipsis Divinis Eloquijs celebrantur.

Stellæ æstuosæ sunt *Leonis anteriores*, & *Canes major, minorque*: pluviosæ, *Hyades*, & *Pleïades*, ventosæ *Hædi* & *Capella*: tempestuosæ, *Arcturus*, *Hyades*, *Orion*, *Hædi*. Amos *cap.* 5. potentiam Dei in tempestatibus ciendis ita laudat: *facientem Arcturum & Orionem, & convertentem in mane tenebras, & diem in noctem mutantem, qui vocat aquas maris, & effundit eas super faciem Terræ: Dominus nomen est ejus.* Iobus verò *cap.* 9. ita loquitur: *qui præcipit Soli & non oritur, qui claudit Stellas quasi sub signaculo, qui facit Arcturum, & Oriona, & Hyadas & interiora austri:* Idem *cap.* 37. *ab interioribus egredietur tempestas, & ab Arcturo frigus.* & *cap.* 38. Deus ipse Jobum sic alloquitur: *Numquid conjungere valebis micantes Stellas Pleïadas, aut gyrum Arcturi valebis dissipare.* Nunc pauca de singulis.

Orion astrum procellosum præter eas, quæ telescopio detectæ sunt, Stellas complectitur 62; inter quas duæ magnitudinis primæ, una in *humero dextro*, Arabicè *Besalgenze* (quam tamen aliqui volunt esse magn. 2.), altera in *extremo pede sinistro*; dicta *Rigel*, seu *Regel*; & quatuor secundæ, quarum una est in *humero sinistro*, dicta *Bellatrix*, & tres in *cingulo*, sive *baltheo*. *Orion* oriens Cosmicè, seu cum Sole, excitat tempestates, pluvias, fulmina, tonitrua. Virgilius de *Orione* ita canit,

Cùm subitò insurgens fluctu nimbosus Orion.

Arcturus est Stella 1. magn. pendens à *cingulo Bootis inter genua*. Plinius sydus horridum appellat. Oriens Acronicè, seu vesperi tempestates ciet; oriens Cosmicè, id est cum Sole, adducit similiter tempestates ac imbres, & (ut Plinius) non fermè sine procellosâ grandine emergit.

Hyades, quæ etiam *Succulæ* dicuntur, sunt septem Stellæ in *capite Tauri*, quarum una est ipse *Tauri oculus sinister*, Arabicè *Aldebaran*, 1. magnitudinis. Hæc oriens Cosmicè producit ventos, pluvias, fulmina. *Hyades* omnes Cosmicè tam orientes quàm occidentes ventos & pluvias concitant. De his Ovid. *fast.* 5.

Ora micant Tauri septem radiantia flammis,
Navita quas Hyadas græcus ab imbre vocat.

Et Fastorum 6.

Postera lux Hyadas Taurinæ cornua frontis
evocat, & multâ terra madescit aquâ.

Pleïades, quæ etiam *Vergiliæ* olim dicebantur, quòd extremo tum Vere orirentur, sunt Stellæ septem in *dorso Tauri*, inter quas una, *Lucida Pleïadum* dicta, est 3. magn. Stellæ sunt pluviosæ: excitant enim pluvias occidentes Achronicè, seu vesperi. Inter *Pleïades* una difficilè ab alijs discernitur. Hinc illud Ovidij *Fast.* 3.

Quæ septem dici, sex tamen esse solent.

Capella, sive *Capra* est sydus 1. magnitudinis *in sinistro humero Aurigæ*: de quâ Ovidius *Fast.* 5. *Nascitur Olenia sydus pluviale Capellæ.* *Hædi Capellæ* sunt duæ Stellæ magnitudinis 4. De his Horatius,

Nec sævus Arcturi cadentis
impetus, aut orientis Hædi.

Sed nulla inter Fixas celebrior est *Caniculâ*: à quâ dies Caniculares sunt dicti. At cùm duo sint *Canes* in cælo, ob ortuum vicinitatem & effectus penè pares, dubium est uter è duobus nomine *Caniculæ* intelligi debeat. *Canis minor*, *Procyon* dictus Anno ante Christum 45 Romæ ex calculo Petavij oriebatur Cosmicè 6 Iulij; *Canis major*, sive *Sirius*, Iulij 18. Verùm Anno Christi 1644, Bononiæ ex calculo Riccioli oriebantur Cosmicè *Procyon* quidem 15 Iulij, *Sirius* 23 Iulij: stylo veteri uterque. Ex quo patet Dies Caniculares seriùs nunc incipere, quàm olim. Causam indicavi *nu.* 42. Est porrò *Sirius* Stella 1. magnitudinis in *ore Canis majoris*, omnium toto cælo fulgentissima maximaque: *Procyon* verò est magn. 2. in *femore Canis minoris*. Effectus Dierum Canicularium notissimi sunt omnibus. *Caniculæ exortu* (inquit Plinius) *accendi Solis vapores quis ignorat? cujus syderis effectus amplissimi in terrâ sentiuntur: fervent maria exoriente eo, fluctuant in cellis vina, moventur stagna. Canes quidem toto eo tempore maximè in rabiem agi non est dubium.* Accinit Ovidius *Fast.* 5.

Est Canis, Icarium dicunt, quo sydere moto
Tosta sitit tellus, præripiturque seges.

Et Horatius,

Te flagrantis atrox hora Caniculæ.

Adventu Solis ad *Regulum* (is ferè caret latitudine) *Caniculæ* ardores augentur. Est porrò *Regulus*, sive *Cor Leonis* 1. magn. Stella, & Cosmicè oritur aliquot diebus post *Sirium*. Sed de his jam satis.

CAPUT IV.

Problemata nonnulla circa Stellas.

NUMERUS XLV.

Temporis momentum per Stellas cognoscere.

HOc Problema utilissimum est, & in nocturnis observationibus ab Astronomis maximè usitatum.

Meridianus esto CBF; Horizon EF; Zenith B, Æquator CIDQ, ejus Polus A. Elige Stellam quampiam P: per quam ducti intelligantur Quadrans Altitudinis BPM, & Quadrans Declinationis APG. Cape instrumento *a* Altitudinem Stellæ PM, quam convenit esse non minorem Gradibus 20, ut evitetur Refractio; & per *num.* 2 *ac* 17, inveni Declinationem Stellæ PG. Altitudinem PM & Declinationem PG si demas à Quadrantibus, sive à Grad. 90, noti fient arcus BP, AP. Pari modo si Altitudo Poli EA nota per *num.* 27. *l.* 1. subducatur à Quadrante BE notus erit arcus AB. In triangulo

Fig. 29.

a n. 28. *l.* 1.

a trig. sph. prob. 18.
b per def. 4. n. 66. l. 2.
c per n. 4. s. 17.

gulo igitur A B P, ex tribus lateribus notis *a* reperietur angulus P A B, seu G A D, adeoque & arcus Æquatoris G D distantia Stellæ Æquatoria à Meridiano, metiens *b* angulum G A D. Inquiratur *c* deinde Stellæ Ascensio recta Q C G: cui adde arcum jam notum G D, si Stella (ut in *hac Fig.*) est Occidentalis; deme verò si Orientalis: ita prodibit ad momomentum quæsitum Ascensio recta Medij Cæli Q C D. Existat deinde Sol infrà Horizontem & nota sit præter propter Hora diei: ad quam reperi *d* Ascensionem Solis rectam quæ sit Q C O: quam aufer ab Ascensione rectâ Medij Cæli Q C D jam inventâ: relinquetur distantia Solis Æquatoria à Meridiano O D: quæ *i* conversa in tempus dabit exactè Horas quæ fluxerunt à meridie præcedentis diei usque ad momentum quæsitum.

d per n. 52. l. 1, vel per num. 3. hujus lib. 5.
i per n. 51. lib. 1.

Corollarium.

o def. 37. l. 1. n. 1.
n per def. 4. n. 66. l. 2.

Eâdem operâ reperitur dati Syderis *o* Azimuthum. Nam in triangulo P A B ex tribus lateribus notescet angulus A B P, adeoque etiam Stellæ P in Azimuthum M E, metiens *n* dictum angulum.

NUMERUS XLVI.

Lineam Meridianam invenire per Stellas.

Fig. 30.

Ope filaris trianguli A B C, de quo *num. 1. lib. 2*, vel Quadrantis ad Horizontem perpendiculariter erecti, designa planum Verticale alicujus Stellæ, cujus basis, sive sectio in Horizontali plano sit recta A Z: eodemque momento captâ per alium Altitudine ejusdem Stellæ, quam convenit majorem esse Grad. 20, ut evitetur Refractio, per *Num. praeced. ejusque Corollar.* inveni Azimuthum Stellæ. Sumpto deinde centro in rectâ A Z, describe in Horizontali plano circulum: in quo incipiens à rectâ A D Z, numera Gradus & Minuta inventi jam Azimuthi, versùs Ortum si tibi Septemtrionem spectanti Stella Occidentalis est, versùs Occasum autem, si Orientalis. Per terminum numerationis O ducta ex A centro recta A O erit Meridiana, ut ex *b* Azimuthi definitione patet.

b def. 37. l. 1. n. 1.

Ea praxis, quam tradidi num. 26. lib. 1, ab omni aliâ Astronomicâ operatione independens est: & talis isthic necessaria fuit, cùm ab inventione lineæ Meridianæ Astronomiæ totius constituendæ principium ducatur.

NUMERUS XLVII.

Altitudinem Poli per duas Stellas (quarum notæ sint Declinationes & Ascensiones rectæ) simul orientes, invenire.

Fig. 31.

Meridianus sit B A E, Horizon B D; Æquator C E; ejus Polus A; Stellæ simul orientes O, P; per quas ducantur Declinationum Quadrantes A O M, A P N. Arcus *a* M N est Ascensionum rectarum Stellis O, P competentium differentia. Quare cùm Ascensiones rectæ sint notæ, etiam arcus M N, adeoque quem metitur, angulus O A P notus erit. Deinde quia notæ sunt Declinationes M O, N P, etiam earum complementa O A, P A, erunt nota. Igitur in triangulo O A P ex noto angulo ad A & binis notis lateribus O A, P A innotescet angulus A O D. Deinde in trigono A D O rectangulo *a* ad D, ex notis latere O A, & angulo A O D *b* reperietur A D Altitudo Poli quæsita.

u vide dicta nu. 43.
a per n. 68. lib. 2.
b per trig. sph. prob. 19.

Praxis ea, quam num. 27. lib. 1. ad constituenda Astronomiæ principia adhibuimus, ab omni aliâ operatione Astronomicâ fuit independens, ut circulus vitiosus evitaretur. Hæc autem quod binas eâdem nocte observationes non requirat, Astronomiâ jam constitutâ videri subinde possit illâ commodior.

NUMERUS XLVIII.

Altitudinem Stellæ absque instrumento invenire, si alia Stella in eodem Verticali appareat.

Fig. 32.

Meridianus sit C X B; Horizon A B; Æquator C D, ejus Polus Z; Zenith X; Stella, cujus Altitudo quæritur, in F; verticalis per eam X L. Ope filaris trianguli, de quo *num. 2. lib. 3*, observa, an alia Stella in eodem Verticali existat, putà in E, & per utramque sint Declinationum Quadrantes Z G, Z I. Inquire *b* utriusque Stellæ Declinationes F G; E I: quibus subductus à Grad. 90, nota erunt complementa Z F, Z E. Inveni deinde *c* utriusque Stellæ Ascensiones rectas: ita notus erit arcus G I, qui est *d* Ascensionum differentia. Quia verò arcus G I metitur *i* angulum G Z I, seu F Z E, etiam is erit notus. In triangulo igitur F E Z ex notis lateribus Z F, Z E, & angulo F Z E *m* innotescet angulus Z F X. Deinde in triangulo F X Z cùm nota jam sint latus Z F & angulus Z F X, latus autem Z X sit complementum Altitudinis Poli A Z notæ per *num. 27. lib. 1*, ex his reperietur *o* latus F X distantia Stellæ F à Vertice, cujus complementum est F L Altitudo Stellæ quæsita.

b per n. 2. & 17.
c per n. 4. s. 17.
d vide dicta n. 43.
i per def. 4. n. 66. l. 2.
m trig. sph. prob. 19.
o ibid. prob. 22.

FINIS LIBRI QUINTI.

ASTRO-

ASTRONOMIÆ
LIBER SEXTUS
DE MOTU
PLANETARUM
MINORUM
IN LONGITUDINEM.

CAPUT PRIMUM.

Præambula & Phœnomena.

NUMERUS PRIMUS.

Planetarum Numerus, Nomina, Characteres.

PLanetæ, quos Græci πλανήτας hoc est Errones appellant, sunt septem, nimirùm *Sol, Luna, Mercurius, Venus, Mars, Iupiter, Saturnus.* Ex his Sol & Luna ab Astronomis passim *Luminaria* vocantur Scripturæ phrasi: reliqui autem quinque *Planetæ Minores* dicuntur, quorum motus flexusque admirabiles, Deo juvante, breviter hoc libro exponemus. Characteres singulorum hi sunt.

Mercurius	☿	Caduceus, seu virga duobus serpentibus circumplicata
Venus	♀	Speculum cum manubrio
Mars	♂	Sagitta cum clypeo
Iupiter	♃	prima littera Græci nominis intersecta
Saturnus	♄	quasi falx.

Plura de his qui volet, Ricciolum legat *Almag. lib. 7. sect. 1. cap. 1.*

Signum Conjunctionis est ☌; Oppositionis ☍.

NUMERUS II.

Modus observandi loca Planetarum.

INveni Declinationem Planetæ eo modo quem tradidi *lib. 5. num. 2.* Deinde per stellam, cujus *a* (*a per lib. 5. num. 4. vel 5. & 17.*) nota sit Ascensio recta, inquire Ascensionem rectam Planetæ eâ methodo, quam exposui *num. 5. lib. 5.* Tum ex Planetæ Declinatione & Ascensione rectâ jam notis reperies Planetæ Longitudinem ac Latitudinem eo artificio, quod tradidi *lib. 5. num. 7.*

Aliter idem obtinebitur per duas stellas notæ Longitudinis & Latitudinis, methodo explicatâ *num. 8. lib. 5.*

Itaque per stellas Fixas primus aditus ad scrutandos Planetarum motus aperitur. Verùm utrolibet utaris modo, captandum est tempus, si fieri potest, quo Planeta Altitudo non sit obnoxia Refractioni: quod ipsum in stellis ad hoc opus deligendis observa. Insuper in modo secundo vitabis stellas, quæ cum Planetâ triangulum nimis acutum efficiunt.

NUMERUS III.

Quæ circa motum in Longitudinem quinque Minorum Planetarum, sint hactenus observata.

PRæter motum Diurnum Horarum 24 ab Ortu in Occasum omnibus Astris communem, habent Planetæ omnes motum sibi proprium ab Occasu in Ortum sub Zodiaco. Compertum est enim Planetas à stellis Fixis, quibus ante erant conjuncti, sensim versùs Ortum recedere. Atque hic est motus Planetæ in Longitudinem: in quo duplex inæqualitas observata est, quam primam & secundam dixêre. In ♄. ♃. ♂. inæqualitas prima nullum habet respectum ad Solem, quæ propterea *Soluta* dicitur: secunda est respectiva ad Solem quoad motum Epicycli per quem salvatur, ut patebit ex *num. 5. §. 5. & num. 10. §. 4. & 5.* In ♀ & ☿ contrarium evenit, in his siquidem prima inæqualitas est alligata Soli, secunda absoluta, ut dicetur *num. 29. §. 2.*

Prima inæqualitas.

§. 1. Primò igitur comparatis revolutionibus Superiorum Planetarum tum ad eandem stellam Fixam, tum ad idem punctum Zodiaci Primi Mobilis, per modum traditum *num. præcedenti*, compertum est eas esse, in eodem licet plano, inæquales, hoc est non æquali dierum ac horarum numero absolvi. Sed medijs inter maximas, & minimas electis, observatum est redire ad idem punctum Zodiaci.

Martem Anno Ægyptio 1, Diebus circiter 321, id est, D. 686.

Iovem Annis Ægyp. 11. Diebus ferè 315.

Saturnum Annis Ægyp. 29. Diebus ferè 161.

Venerem & Mercurium unà cum Sole.

§. 2. Neque verò tantùm integræ revolutiones ejuſmodi, ſed etiam ejuſdem revolutionis partes ſunt inæquales. Obſervando quippe ſæpiùs Planetarum loca artificio jam tradito *num. præc.* vel ſimili alio, compertum eſt Planetam æqualibus temporibus inæqualia in Zodiaco ſpatia percurrere, & ſpatia æqualia temporibus inæqualibus; etiamſi Planeta eſſet in pari utrobique diſtantiâ à Sole, per quod inæqualitas prima ſeparatur, & diſcernitur à ſecundâ quæ non variatâ Planetæ diſtantiâ à Sole per ſe non variatur, ut dicetur *infra*.

§. 3. Et ſemel quidem intrà tempus unius revolutionis integræ motus Planetæ tardiſſimus cernitur, ſemel velociſſimus, ſic ut inter utrumque hunc terminum, dimidium unius revolutionis tempus intercedat, & Zodiaci loca in quibus contingunt, diametraliter ſint oppoſita.

§. 4. Atque hæc eſt Planetarum prima inæqualitas, quæ in unâ revolutione per Zodiacum bis evaneſcit. Diſtinguitur à ſecundâ mox exponendâ tum indicio jam paulò ante allato, tum etiam quòd in ☌ & ☍ Planetæ cum Sole maniſeſtò hæc appareat, quando illa (ut dicam §. 10) eſt nulla.

Notandum porrò hìc eſt inæqualitatem revolutionum ad idem punctum Zodiaci pertinere potiùs ad inæqualitatem ſecundam quàm primam, quia dicta revolutionum inæqualitas maximè cernitur extra ☌ & ☍ Planetæ cum Sole, quod tempus eſt proprium inæqualitati ſecundæ.

Secunda inæqualitas.

§. 5. Comparatis deinde inter ſe revolutionibus Solis ad Planetam, ſeu Planetæ ad Solem, compertum eſt etiam has inæquali tempore abſolvi. Sed medijs inter longiſſimas, & breviſſimas electis, patuit Solem redire ad ♄ Diebus 378, ad ♃ Diebus 399, ad ♂ Diebus 780, vel 783 : ♀ ab unâ Conjunctione cum Sole ad aliam ejuſdem ſpeciei (ſunt enim duæ, ut dicam *infra*) revertitur Diebus circiter 584; ☿ autem Diebus ferè 116. Sed inter tres Superiores ♄. ♃. ♂, & duos Inferiores ♀. ☿, ea hic differentia eſt, quod ♄. ♃. ♂. ad perfectam cùm Sole Oppoſitionem perveniant, ſed ♀ & ☿ non niſi ad certos limites à Sole digrediantur; ♀ nempè non ultra 50. Gradus, neque ☿ ultra 30. unde fit, ut (quemadmodum ſuo loco exponetur) bis Soli conjungantur in ſingulis ſecundæ inæqualitatis revolutionibus, ſemel nempè in Apogeo Epicycli, & ſemel in Perigeo. Quibus autem vijs hæc omnia ſunt comperta, ſuis locis tradetur.

§. 6. At Secunda inæqualitas in hoc potiſſimùm conſiſtit, quòd Planetæ admirabili ad Solem harmoniâ motum ſuum per Zodiacum ſic attemperent, ut circa Conjunctionem cum Sole (in ♀ & ☿ intellige ☌ Apogeam) velociſſimè per Zodiacum procedant; circa Oppoſitionem verò (pro quâ in ♀ & ☿ intellige ☌ Perigeam) in Zodiaco retrocedant; temporibus intermedijs bis fiant Stationarij, quaſi in eodem hærentes Zodiaci loco. Atque hæc anomalia in ♄ ♃ ♂ cum reditu Solis ad Planetam reſtituitur. Itaque intra unam revolutionem integram, ante & poſt ☌ cum Sole (intellige ☌ Apogeam in ☿ & ♀) Planeta in Zodiaco velociſſimè progreditur, diciturque Directus: ante & poſt ☍ cum Sole (pro quâ in ♀ & ☿ intellige ☌ Perigeam) retrocedit, diciturque Retrogradus: temporibus inter Aſpectus dictos intermedijs, quod bis omninò accidit, nec progreditur nec regreditur, ac Stationarius appellatur.

Ut verò hæc inæqualitas ritè à primâ ſecernatur, notandum eſt tam velociſſimam illam Planetæ progreſſionem per Zodiacum, quàm retrogradationem ejuſdem in Zodiaco obſervari etiam in eodem Zodiaci loco. Ex quo liquet eas non oriri ab inæqualitate primâ, cujus effectus ob tardiſſimum Apogei motum intra longiſſimum tempus ſenſibiliter non variatur. Et denique evidenter apparet ſecunda inæqualitas cùm prima evaneſcit; quando nempè (ut dicam *infra*) centrum Epic. tenet Apogeum vel Perigeum Ecc.

Prætereà circa dictum Planetæ progreſſum, & retrogreſſum hæc ſunt ab Aſtronomis obſervata.

§. 7. Planeta celeriùs progreditur, quàm regreditur. *Mars* enim ex. gr. Diebus Conjunctioni hinc inde proximis procedit quotidie Min. 47 : diebus autem Oppoſitioni proximis quotidie regreditur tantùm Min. 24.

§. 8. Si progreſſio Directa unius revolutionis comparetur cum progreſſione Directâ revolutionis alterius, & Statio unius cum Statione alterius, & Regreſſio unius cum Regreſſione alterius; altera alteri reperitur inæqualis (quamquam hic effectus potius ſit inæqualitatis primæ, quàm ſecundæ) non ſolùm quoad ſpatium in Zodiaco confectum, ſed etiam quoad tempus quo ſingulæ durant. Et hæc inæqualitas in *Marte* major eſt quàm *Iove* & *Satur.*

§. 9. Sed medio inter has inæqualitates electo,
Directa Progreſſio ♄ eſt Dierum ferè 244. ♃ 284. ♂ 705. ♀ 542. ☿ 93.
Statio ♄ eſt Dierum ferè 8. ♃ 4. ♂ 2. ♀ 1. ☿ $\frac{1}{2}$.
Regreſſio ♄ eſt Dierum ferè 136. ♃ 119. ♂ 75. ♀ 42. ☿ 22.

Stationarij fiunt
♄ inter Aſpectum cum Sole □ & △
♃ in Aſpectu △ præcisè
♂ inter octavas & duas quintas diſtantiæ à Sole.

§. 10. Atque hæc eſt Planetarum ſecunda inæqualitas, quæ in Conjunctionibus cum Sole, & Oppoſitionibus evaneſcit; cùm in ijs §. 6. recenſita accidentia nunquam fuerint deprehenſa. Nam ſi ad momentum ☌ vel ☍ Planetæ cum Sole, ſupputetur locus Medius Planetæ, is per Simplicem Æquationem Eccentrici (ut tradam *infra*) exæquatus, concordat cum loco ejuſdem obſervato. Ex quo patet in ☌ & ☍ ſolam reperiri inæqualitatem eam, quæ per Eccentricum ſalvatur, ut dicetur *num. 6.* ac proinde tunc locum Planetæ Verum, & Medium non differre à loco Vero & Medio centri Epicycli.

Motus in Altitudinem.

§. 11. Superiores Planetæ propè Conjunctionem cum Sole inſigne patiuntur luminis, & Apparentis magnitudinis decrementum: oppoſiti verò Soli & maximi apparent & lucidiſſimi. Unde colligitur eos in Conjunctione, à Terrâ remotiſſimos eſſe, in Oppoſitione viciniſſimos.

Comparatis deinde inter ſeſe diſtantijs à Terra tam maximis, quàm minimis, compertum eſt unam maximam eſſe majorem aliâ maximâ, & minimam unam aliâ minimâ minorem.

Motus Apogei inæqualitatis primæ.

§. 12. Inæqualitas prima, ut mox videbitur, exponetur

ponetur per Eccentricum; cujus Apogeum æquali motu, sed tardissimo, in consequentia deferri inde compertum est, quod ex longissimi temporis observationibus tandem patuit summam tarditatem primi motus in Longitudinem, quæ tum habetur, cùm Planeta Apogeum Eccentrici attingit, non contingere sub eodem loco Zodiaci, sed sub locis magis semper magisque Occidentalibus. Hic verò motus Apogeorum Planetariorum adeò lentus est, ut Astronomi usque ad Copernicum putaverint æqualem esse motui Fixarum. De hoc plura suis locis.

CAPUT II.

Proponitur & exponitur Hypothesis antiqua, seu Ptolemaica ♄. ♃. ♂. in Longitudinem.

NUMERUS IV.

Definitiones Hypotheseos antiquæ, seu Ptolemaica pro ♄. ♃. ♂.

Ecliptica sit ♈ L ♎ V; ejus ac Mundi centrum A; diameter L A V. In hac suprà A accepto intervallo A B, describe centro B Eccentricum B D Φ R ω; sumptoque alio intervallo B C æquali primo A B, describe centro C alium Eccentricum priori æqualem C G O β ♄. Accepta deinde in peripheria D Φ R ω centro I describe Epicyclum I N X ω. His positis,

1. *Eccentricus*, sive *Deferens*, est circulus BDΦRω, per cujus circumferentiam volvitur in consequentia Epicycli centrum, ut dicam *infra*. Atque ea est causa cur hic circulus simpliciter vocetur *Eccentricus Planetæ*, etiamsi Æquans etiam sit eccentricus.

2. *Æquans*, est circulus C G O β ♄ Deferenti æqualis, cujus centrum C tantùm distat à B centro Deferentis, quantùm hoc à Mundi centro A. Ab æquandi munere ita dictus, ut exponetur *infrà*.

3. *Apogeum Eccentrici*, seu *Deferentis*, est D; *Perigeum* R.

4. *Apogeum Æquantis* est G; *Perigeum* β.

Horum apogæorum, & perigæorum loca in Ecliptica sunt L. V.

5. *Linea Apogæi*, sive *Apsidum*, est ipsa diameter L V.

6. *Apogeum Verum Epicycli* est punctum N, quod in peripheria Epicycli designatur à recta A I N, à Mundi centro per Epicycli centrum emissâ; quæ idcircò vocatur *Linea Apogæi Veri centri Epicycli*.

7. *Apogæum Medium Epicycli* est punctum P in Epicycli peripheria designatum à recta C I P, ex centro Æquantis per Epicycli centrum emissâ; quæ idcircò vocatur *Linea Apogæi Medij centri Epicycli*.

Quando centrum Epicycli est in lineâ Apsidum Deferentis L V, Apogæa Verum, & Medium centri Epicycli coincidunt in Q. Extra lineam Medium modò precedit Verum, modò sequitur, ut exponetur infrà.

8. *Perigea Verum & Medium centri Epicycli* sunt Z, K, puncta Epicycli opposita Apogeis Vero ac Medio.

9. *Linea Medij motus centri Epicycli*, est recta A M ex Mundi centro ad Zodiacum ducta, parallela rectæ C I O, quæ ex Æquantis centro C, per Epicycli centrum I emittitur.

10. *Linea Veri loci, seu motus centri Epicycli*, est recta A I F, ex Mundi centro A per centrum Epicycli extensa.

Tacquet Astronomia.

11. Punctum F, quod in Zodiaco linea Veri loci designat, est *Verus locus centri Epicycli* sive *locus Centricus Planetæ*.

12. *Anomalia Media Eccentrici vel centri Epicycli*, sive *Anomalia Centrica Planetæ in Æquante*, est arcus Æquantis G O in consequentia computatus ab Æquantis Apogeo G usque ad lineam C I O, ab Æquantis centro B per Epicycli centrum ductam.

13. *Anomalia Media Eccentrici vel centri Epicycli*, sive *Anomalia Centrica Planetæ in Zodiaco*, est arcus Zodiaci L M in consequentia computatus a lineâ Apsidum L A, usque ad A M lineam Medij motus centri Epicycli.

Quia porrò M A, C I O sunt parallelæ, anguli ad centra L A M, L C O sunt per 27. 1. æquales, ac proinde Anomalia in Zodiaco L M, & in Æquante G O per Corol. 2. pag. 33. lib. 6. elem. sunt arcus similes.

14. *Anomalia vera, seu coæquata Eccentrici, vel centri Epicycli*, est arcus Zodiaci L F computatus in consequentia à lineâ Apsidum L A usque ad rectam A I F, ex Mundi centro per centrum Epicycli ad Zodiacum emissam.

15. *Longitudo Media*, sive *motus Medius Eccentrici, vel centri Epicycli* (quæ dicitur etiam *Longitudo Media Planetæ*), est arcus Zodiaci ♈ L M, computatus in consequentia ab initio ♈ usque ad A M lineam Medij motus centri Epicycli.

16. *Longitudo Vera*, sive *motus Verus centri Epicycli*, *seu Longitudo centri coæquata*, est arcus Zodiaci ♈ L F, computatus in consequentia ab initio ♈ usque ad lineam A I F ex centro Mundi per centrum Epicycli ad Zodiacum eductam.

17. *Æquatio Eccentrici*, sive *centri Epicycli*, est angulus A I C, seu N I P (quem metitur arcus N P) comprehensus à rectis A I N, C I P ex centris Mundi, & Æquantis per Epicycli centrum emissis.

Sive, est arcus Zodiaci M F, quo differunt Anomaliæ centri Epicycli Media L M, & Vera L F; item quo differunt centri Epicycli motus Medius ♈ L M, & Verus ♈ L F.

Ratio hujus identitatis est, quod ob parallelas A M, C I O, angulus M A F, quem metitur arcus M F, sit æqualis alterno sibi angulo C I A.

Æquatio centri Epi. (adeoq; & prima inæqualitas) evanescit, cùm centrum Epicycli est in lineâ Apsidum LV. Dividitur porrò in duas partes Physicam & Opticam.

18. *Æquatio Physica centri Epic.* est angulus B I C comprehensus à rectis ex centris Deferentis B, & Æquantis C ad Epic. centrum emissis.

19. *Æquatio Optica centri Epic.* est angulus A I B comprehensus à lineis ex centris Mundi A, & Deferentis B ad Epic. centrum eductis.

Cur ita vocentur patebit ex num. 5. §. 1.

20. *Anomalia Orbis* (hoc est *Epicycli*) *Media*, sive *Argumentum Medium*, sive *motus Medius Planetæ in Epicyclo*, est arcus P X computatus in consequentia ab Apogeo Medio Epicycli P usq; ad centrū Planetæ X.

21. *Anomalia Vera Orbis*, hoc est *Epicycli*, sive *Argumentum Verum*, sive *Planetæ motus Verus in Epicyclo*, est arcus N X computatus in consequentia ab Epicycli Apogeo Vero N, usque ad centrum Planetæ X.

22. *Longitudo Vera, seu motus Verus Planetæ*, est arcus Zodiaci ♈ L S computatus in consequentia à principio ♈ usque ad lineam A X S ex Mundi centro per Planetæ centrum eductam: quæ propterea dicitur *Linea Veri motus Planetæ*.

23. *Æquatio Anomaliæ Orbis*, sive *Argumenti* (quæ

 etiam

etiam *Æquatio Epicycli* dicitur) est arcus F S, differentia Longitudinis Veræ centri Epicycli ♈ L F, & Longitudinis Veræ Planetæ ♈ L S, ejus mensura est angulus F A S.

Hæc æquatio (ac proinde & secunda inæqualitas) evanescit, cùm Planeta est in Epicycli Apogeo Vero N, aut Perigeo Vero Z: Maxima est, cùm linea ex mundi centro per Planeta centrum ducta, Epicyclum tangit.

24. *Longitudo Apogei Eccentrici*, sive *motus Apogei eccentrici*, est arcus ♈ L computatus in consequentia ab initio ♈ usque ad lineam Apogei.

25. *Longitudines Mediæ Eccentrici* puncta φ, ω, quæ in Deferente determinat recta φ B ω, per ejus centrum lineæ Apsidum perpendicularis. *Longitudines Mediæ Epicycli* sunt puncta E, H, quæ designat diameter E D H ad diametrum Apsidum Q ♆ recta.

26. Signum *Conjunctionis* est ☌, *Oppositionis* ☍.

NUMERUS V.

Exponitur Hypothesis Ptolemaica ♄. ♃. ♂.

IN exponendâ Superiorum Planetarum Hypothesi erratum est ab Astronomis non paucis. Et universim, in toto negotio Hypothesium, studiosis Astronomiæ authores plerique non satisfaciunt, quod non declarent, qui per Hypotheses Phænomena per observationem cognita salventur. Quare quod in Sole & Lunâ *libro* 1. & 2. jam præstiti, etiam hic conabor efficere, ne meam operam studiosi hac in parte desiderent.

Hypothesis Ptolemaica tribus constat motibus præcipuis, videlicet, motu centri Epicycli, motu Apogeorum, & motu Planetæ in Epicyclo.

Motus centri Epicycli.

Fig. 1. §. 1. Primò igitur, suppositis circulis, & lineis descriptis ac definitis *num*. 3. Epicycli centrum Deferentem D φ R ω secundùm ordinem Signorum Zodiaci ex D versùs I percurrit, tanto ferè temporis spatio, quanto Superiores Planetæ singuli *nu*. 3. §. 1, sunt observati Zodiacum absolvere. Hic autem motus sic peragitur, ut recta linea C I O ex Æquantis G O β ϑ centro C per Epicycli centrum I ad Æquantis peripheriam educta, æqualibus temporibus æquales arcus in Æquante conficiat. Ex quo necessariò consequitur, ut Epicycli centrum ipsum I æqualibus temporibus arcus absolvat *a* inæquales non solùm respectu Zodiaci, sed etiam in Deferente suo D φ R ω. Unde fit, ut motus centri Epic. inæqualis sit in proprio circulo, ac proinde secundùm se inæqualis verè & propriè, cùm æqualitatem aliam non habeat quàm extrinsecam, prout nempè ad alienum circulum, in quo verè non est, modo jam dicto refertur. Quæ quidem motus physica & realis inæqualitas, quamvis Astronomis nonnullis recentioribus displiceat, ingeniosè tamen, ut ex sequentibus patebit, ad explicandas Planetarum apparentes inæqualitates adhibetur. Mensura porrò, sive Æquatio hujus inæqualitatis realis, quæ proinde dicitur Æquatio physica, est angulus B I C: quod sic ostendo. In *Fig*. 5. sit A M parallela ad C I, & A T parallela ad B I. Per dicta ad *defin*. 13, arcus L M similis est arcui G O, eodemque modo arcus L T similis est arcui D I. Sed M T, sive angulus M A T, est differentia arcuum L M, L T. Ergo etiam angulus M A T est differentia arcuum G O, D I. Jam ob parallelas A M, C I, totus ang. M A F æqualis est toti C I A, & ob parallelas A T, B I, ang. T A F æqualis est B I A. Ergo reliquus M A T æqualis est reliquo B I C. Quare cùm M A T sit differentia arcuum G O, D I, etiam erit B I C differentia eorumdem.

a per Porism. 27. lib. 2.

Fig. 5.

Inæqualitatis autem quam respectu Zodiaci, & centri Mundi habet motus centri Epicycli æqualis in Æquante, Æquatio sive mensura est totus angulus A I C, sive (ut patet *ex dictis ad defin*. 17) arcus M F. Is enim est differentia Anomaliæ Mediæ centri Epic. G O, vel L M, & Veræ L F, itemque est differentia (*repete Fig*. 1) Medij motus centri Epic. ♈ L M, & Veri ♈ L F. Hæc verò totalis Æquatio, seu differentia A I C, componitur ex Reali seu Physica B I C suprà expositâ, & ex alterâ A I B, quæ dicitur Apparens, seu Optica, quòd oriatur à solo visu Epicycli centrum I, observante ex A. Si enim Epic. centrum moveretur æqualiter in Deferente D I R, differentia motus Æqualis D I, & Veri L F esset solus angulus A I B, sive arcus T F.

Cur verò Ptolomæus motum centri sic ordinaverit, totamque Eccentricitatem A C bisecuerit, ejusque tantùm semissem A B Deferenti assignaverit, dicam *num*. 8.

Motus Apogeorum Epicycli.

Fig. 2. Quoniam angulus A I C, seu N I P, qui Æquatio centri Epicycli appellatur, ad motum centri I assiduè augetur vel diminuitur, necesse est Apogea Medium P, & Verum N, quæ à lineis dictum angulum continentibus determinantur, assiduè modò accedere ad invicem, modò recedere. Et quando hujus motus non injucunda theoria est, in eâque exponendâ plerique erraverunt, erit illa paulò accuratiùs hic explicanda. Agam primò de motu Apogei Medij qui hic præcipuè attenditur, de motu deinde Apogei Veri, postremò de utriusque motu ad invicem relato.

§. 2. Ducatur recta B I O ex Deferentis centro B per Epicycli centrum I usque ad summam Epicycli pheripheriam in O. Punctum O ab hac lineâ designatum inter duo Apogea N, P, dicitur Punctum concavitatis; quod in Epicycli peripheriâ manet semper immotum, quamvis Epicyclus cum suo centro per Deferentem moveatur, ac proinde ab illo, tanquam immobili termino, utriusque Apogei motus spectatur. Ducatur item non per B centrum Deferentis (quod factum ab aliis, at malè, ut mox patebit) verùm per C centrum Æquantis recta S C F perpendicularis ad lineam Apsidum Deferentis L V, dividens Deferentem ipsum in quatuor arcus D S, S R, R F, F D. Quando igitur centrum Epicycli est in D in lineâ Apsidum concurrunt in Q punctum concavitatis & duo Apogea. Centro moto ex D versùs I, S, Z, hæc tria puncta ab invicem separantur, & Apogeum Medium à puncto concavitatis O recedit in P, sec. ord. Sig. Quia verò angulus B I C, sive O I P (qui est Æquatio Physica) à D usque in S perpetuò crescit donec maximus fiat in S, inde fit, ut Apogeum Medium P, quamdiu ecutrum Epicycli percurrit arcum primum D S, magis magisque à puncto O recedat. S. O, Sign. sive in consequentia, versùs X, donec centro existente in S, maximam habeat distantiam à puncto O, quam habere potest. Porrò Signorum ordo hic attenditur in Epicyclo dispositus

positus secundùm seriem litterarum G O X K. Jam quia angulus B I C, sive O I P ab S versùs R perpetuò decrescit, donec evanescat in R, etiam Apogeum Medium P centro Epicycli percurrente secundum arcum S R denuò accedit punctum O donec cum eo concurrat in T, qui accessus necessariò fit C. O. Sig. sive in præcedentia versùs G. Rursum quia angulus B I C, seu O I P ab R Versùs F continuè crescit, donec iterum maximus fiat in F, Apogeum Medium P, centro Epic. percurrente tertium arcum S R, elongatur denuò ab O, & centro existente in F maximam rursus distantiam habet ab O, quam habere potest: elongatio autem illa, sive recessus necessariò etiam ab O versùs G, fit in præcedentia. Postremò quia dictus angulus ab F versùs D assiduè decrescit donec evanescat in D, Apogeum Medium P, centro Epic. percurrente arcum quartum F D, rursum incipit accedere ad punctum O, usque dum cum eo concurrat in Q; qui accessus necessariò fit ab O versùs X, in consequentia, sive S. O. Sig. Itaque, ut omnia jam dicta complectamur, centro Epicycli percurrente superiorem Deferentis portionem F D S ex arcu primo D S, & quarto F D compositam, Apogeum Medium P movetur in consequentia, nempè à G versùs X, at centro Epic. percurrente partem Deferentis inferiorem S R F ex arcu secundo S R, & tertio R F compositam, Medium Apogeum P movetur in præcedentia, hoc est ab X versùs G. Porrò quantitas librationis hujus ultra citraque concavitatis punctum O, est angulus maximus B S C, sive O S P bis sumptus.

Atque ex his manifestus fit error, in quem omnes, quos legi, Astronomi, & cum his doctissimus etiam Ricciolus noster inciderunt. Ducunt illi per B centrum Deferentis rectam φ B ω lineæ Apsidum L V perpendicularem, asseruntque Apogeum Medium moveri in consequentia per totum semicirculum ω D φ, in præcedentia verò per semicirculum φ R ω, quod (ut ex discursu jam facto patet) verum esse non potest, nisi angulus B I C, seu O I P maximus fiat in φ & ω. Atqui hoc falsum esse liquet ex *theor. 4. num. 19. lib.* 1. Isthìc enim demonstratum est, si in circuli (D φ R ω) diametro (D R) extra centrum (B) sumatur punctum (C), à quo & centro (B) ad circumferentiam inflectantur duæ rectæ, angulum ab ijs ad circumferentiam tunc fieri maximum, quando recta (C S), per (B) centrum non transiens, est perpendicularis ad diametrum. Quare maximus ad circumferentiam angulus ex basi B C non fit ad φ & ω, sed ad S, & F: ac proinde Apogeum Medium P movetur in consequentia, non per semicirculum ω D φ, sed solummodò per arcum F D S; in præcedentia verò non per semicirculum φ R ω, sed per arcum eo majorem S R F.

§. 3. Intellecto motu Apogei Medij, facilè Apogei Veri motus intelligetur. Theoriam habet non absimilem, quæ pendet à mutatione anguli B I A, sive O I N, qui Æquatio Optica appellatur. Per A Mundi centrum ducatur Z A Y perpendicularis ad lineam Apsidum L V. Angulus B I A, sive O I N à D (ubi nullus est) perpetuò crescit usque ad Z, ubi *s* maximus est; à Z decrescit usque ad R, ubi rursum nullus est; ab R iterum crescit usque ad Y, ubi denuò fit maximus, ab Y rursum decrescit usque ad D, ubi iterum evanescit. Ex quo dicti anguli incremento decrementoque fit, ut Apogeum verum N in arcu primo D Z, & tertio R Y recedat à puncto O, in arcu secundo Z R, & quarto Y D ad punctum O accedat. Ex quo patet Apogeum Verum N per totum arcum Y D Z moveri in præcedentia ab X versùs G, per arcum verò S R Y in consequentia à G versùs X, contra planè quàm fiat in Apogeo Medio. Quantitas librationis totius ultra citraque O, est angulus maximus B Z A bis sumptus; ac proinde æqualis quantitati librationis Apogei Medij, cùm anguli B Z A, B S C æquales sint.

s per theor. 4. num. 19. lib. 1.

§. 4. Superest motus Apogeorum Veri ac Medij respectu invicem. Is verò pendet ex incremento ac decremento totius Æquationis centri Epic. A I C. Per B Deferentis centrum ducatur φ B ω ad lineam Apsidum L D R V perpendicularis: ita sectus erit Deferens in quadrantes quatuor. Ostendam Æquationem centri A I C, seu N I P maximam esse ad φ & ω.

Fig. 3.

Per C centrum Æquantis, A centrum Mundi, & φ describe circulum φ O A C. Quoniam C B, A B sunt *l* æquales, & φ B *ex hyp.* est perpendicularis ad C A, erit *m* centrum circuli φ O A C in rectâ φ B: in quâ, cùm etiam sit B centrum Deferentis circuli D φ R ω, patet *n* hos circulos se mutuò contingere in φ. Sit jam quivis angulus C K A diversus ab angulo C φ A. Latus A K necessariò secatur à circulo tangente φ O A C, putà in O. Ducatur ergo ad sectionem recta C O. Angulus C φ A æquatur *o* angulo C O A. Sed C O A major *p* est quàm C K A. Ergo etiam C φ A major est quàm C K A: qui cùm sit assumptus quicumque, erit C φ A omnium maximus.

l per defin. 2. num. 4.
m per corol. p. 1. l. 3. elem.
n ex 11. 3. elem.
o per 21. 3. elem.
p per 32. 1. elem.

Fig. 2.

Quoniam igitur angulus A I C, sive N I P, maximus est in φ & ω, nullus in D, & R, liquet eum in Quadrante primo D φ continuè crescere, ideoque Apogea Verum N, & Medium P ab invicem elongari, donec maximè distent in φ. In Quadrante secundo quia angulus A I C, seu N I P decrescit donec evanescat in R, etiam Apogea N, P, ad invicem accedunt donec jungantur in T. In Quadrante tertio R ω, quia angulus A I C, seu N I P denuò crescit usque dum maximus fiat in ω, Apogea N, P divaricantur, donec maximè distent in ω. In Quadrante quarto ω Q, quia angulus iterum decrescit evanescitque in D, etiam Apogea N, P, ad se mutuo accedunt, donec iterum jungantur in Q.

Postremò notatu dignum hoc est: cùm Æquatio tota centri Epicycli A I C maxima sit in φ, & ω, ejus partes Physicam B I C, & Opticam B I A, in φ non esse maximas: rursum cùm Physica B I C maxima sit in S, Optica B I A in Z; totam nihilominus neque in S, neque in Z maximam esse.

Apogeum Deferentis D, in hac Hypothesi motu æquali, sed tardissimo, defertur in consequentia semper, unà cum Deferente & Æquante suprà Mundi centrum A.

Motus Planetæ in Epicyclo.

Fig. 1.

§. 5. Peragitur secundùm ordinem Signorum in Epicyclo fictum ab Q versùs E: ac proinde in superiori parte Epicycli H Q E Planeta movetur secundùm ordinem Signorum Zodiaci; at in parte inferiori E ♆ H, fertur contra ordinem Signorum Zodiaci. Hic motus tres habet proprietates insignes.

Prima Proprietas. In omni Conjunctione Mediâ *a* Planetæ, & Solis, Planeta est in Apogeo Vero N sui Epicycli, in Oppositione verò Mediâ, existit in Z Epicycli Perigeo Vero. Temporibus intermedijs tantus est Planetæ in Epicyclo motus Verus, sive tantùm ab

a in hoc tamen corrigetur Ptolomæus num. 9. §. 2.

ab Epicycli Apogeo Vero N Planeta elongatur, quantum Sol à Conjunctione Mediâ cum Planetâ eodem tempore in Zodiaco recessit: hoc est, si Planeta sit in X, & linea Medij motus Solis in Zodiaco sit A Y, tantus est arcus Epicycli N X ab Apogeo Vero N usque ad Planetæ centrum X, quantus est Zodiaci arcus F Y, à linea A I F Veri motus centri Epicycli usque ad A Y Medij motus Solis lineam; ac proinde linea I X ab Epicycli centro ad Planetam, & linea Medij motus Solis A Y *u* æquidistant. Planeta igitur Epicyclum absolvit tempore tanto, quantum est ab unâ ejus Conjunctione Mediâ cum Sole ad aliam.

u per 33.6. & 32.1. elem.

Quæ mirabilis sanè, & pulchra Planetæ suum Epicyclum percurrentis cum motu Solis harmonia, ut ritè intelligatur, notandum est in Hypothesi Ptolemaicâ Conjunctionem Mediam Planetæ & Solis tunc accidere, quando linea Medij motus Solis transit per centrum Planetæ: tunc verò fieri Oppositionem Mediam, quando linea Medij motus Solis ex. gr. A 6, ultra Mundi centrum versùs Planetam protracta, transit per Planetæ centrum. Quare cùm in Mediâ Conjunctione Planetæ centrum sit in Epicycli Apogeo Vero N, at in Oppositione Mediâ occupet Perigeum Verum Epicycli Z, fit manifestum eo-trum Planetæ cum Parallelâ Medij motus Solis conjungi in ipsâ lineâ Veri motus centri Epicycli A Z I N F.

Corollarium. Ex hac *primâ Propr.* sequitur, si à motu Solis Medio ♈ L Y auferatur motus Verus ♈ L F centri Epicycli, relinqui N X Argumentum Verum, sive motum Verum Planetæ in Epicyclo. Arcus enim F X quo Sol recessit à Conjunctione Mediâ cum Planetâ, quæ fit in rectâ A I F, similis est arcui N X.

Egregiè notatur hîc à Ricciolo error Purbachij, Urstisij, & aliorum multorum, qui Planetam malè statuunt tempore ☌ Mediæ in Epicycli Apogeo Medio P; tempore ☍ Mediæ in Perigeo Medio K. Sic enim, quod toti Astronomiæ veteri repugnat, in ☌ & ☍ Mediâ non evanesceret inæqualitas Secunda, cujus mensura est Argumenti Æquatio S A F: quæ evanescere non potest, nisi Planeta existat in Apogeo Vero N, vel Perigeo Vero Z, in rectâ videlicet A I F.

Fig. 1.

§. 6. *Secunda propr.* Planeta æqualibus temporibus per æquales arcus ab Epicycli Apogeo Medio P elongatur. Sequitur ex *Proprietate primâ*: quod sic demonstro. Sit Planeta in X, linea Medij motus Solis A Y, linea Medij motus centri Epic. A M, æquidistans scilicet lineæ C I O. Quia per *Propr.* 1. similes sunt arcus N X, F Y, & ex ostensis ad *defin.* 17. similes sunt arcus N P, F M, similes erunt reliqui P X, M Y similes erunt. Itaque tantùm elongatur Planeta ab Apogeo Medio P, quantum A Y linea Medij motus Solis eodem tempore recedit ab A M lineâ Medij motus centri Epicycli. Atqui A Y ab A M æqualibus temporibus per æquales arcus Zodiaci recedit, ambæ siquidem moventur æqualiter *ex hyp.* Ergo etiam Planeta X in Epicyclo ab Apogeo Medio P æqualibus temporibus per æquales arcus elongatur.

Hîc verò lapsus est errore vel potiùs memoriâ P. Ricciolus, cùm *Almag. lib.* 7. *pag.* 509. *num.* 9, ita scripsit: *Tantus est motus Medius Planetæ in suo Epicyclo, quanta est elongatio Solis secundum sui motum Medium à mediâ Conjunctione cum Planetâ.* Quod falsum esse ex jam demonstratis liquet: ostendi enim motum Medium P X Planetæ in Epic. æqualem seu similem esse arcui M Y, ac proinde inæqualem arcui F Y, quo Sol secundùm motum Medium elongatur à ☌ Mediâ cum Planetâ.

Corollar. Ex *Proprietate secundâ* sequitur, si à motu Solis Medio ♈ L Y auferatur motus Medius ♈ L M centri Epicycli, relinqui Argumentum Medium P X. Relinquitur enim arcus M Y, quem ostendi similem esse ipsi P X.

Quæres an Planeta ab Epicycli Apogeo Vero N, etiam recedat æqualibus temporibus per arcus æquales.

Respondeo nequaquam. Nam per §. 5. tantùm Planeta X elongatur ab Apogeo Vero N, quantum A Y linea Medij motus Solis recedit eodem tempore à lineâ A I F Veri motus centri Epicycli, in quâ fit Media ☌ Solis cum Planetâ. Atqui A Y ab A I F recedit æqualibus temporibus per arcus non æquales, cùm A I F (ut ex §. 1. patet) per Zodiacum inæqualiter moveatur, A Y verò æqualiter. Ergo etiam Planeta X in Epicyclo recedit ab Apogeo Vero P per arcus non æquales.

§. 7. *Tertia Propr.* Planeta celeriùs movetur in Epicyclo, cumque citiùs absolvit, quando & quamdiu Epicycli centrum I est in superiori Deferentis portione F D S, quam determinat recta S F non per B centrum Deferentis (in quo rursum errant plerique) sed per Æquantis centrum C ad lineam Apsidum L V perpendicularis: movetur verò tardiùs Planeta in Epicyclo, quando & quamdiu Epicycli centrum est in portione Deferentis inferiori S R F. Sequitur ex *Proprietate secundâ* & ex *dictis* §. 2. *de motu Apogei Medij*: quod sic demonstro. Ordo Signorum in Epicyclo fingatur secundùm seriem litterarum G O X K, quem solùm hîc attendemus. Planeta X movetur in Epicyclo S. O. Sign. G O X K; & Apogeum Medium P libratur ultra citráque concavitatis punctum O, modò. S. O. Sign. G O X K *i* accedendo ad Planetam X, modò. C. O. Sign. à Planetâ recedendo. Quare, cùm *m* Planeta æqualibus temporibus per æquales arcus ab Apogeo Medio P elongetur, necesse est Planetam in Epicyclo ferri celeriùs, cùm Apogeum Medium P motum. S. O. Sign. ad Planetam X accedit, tardiùs verò cùm Medium Apogeum P motum. C. O. Sign. à Planetâ recedit. Atqui Apogeum Medium P movetur. S. O. Sign. G O X K. centro Epicycli percurrente arcum Deferentis F D S, & Apogeum Medium fertur. C. O. Sign. adeoque abit à Planetâ, centro Epicycli percurrente arcum S R F. Ergo Planeta percurrit Epicyclum celeriùs, centro Epic. permeante arcum F D S, tardiùs verò centro Epic. percurrente arcum S R F. Universim autem inæqualitas motus Planetæ in Epicyclo breviter sic ostenditur. Motus æqualis à termino non fixo, sed moto inæqualiter, absolutè est inæqualis. Sed talis est Planetæ motus in Epicyclo: recedit enim semper æqualiter ab Apogeo Medio, cujus libratio ultra citráque O inæqualis est. Ergo motus Planetæ in Epicyclo absolutè inæqualis est.

Fig. 2.

i per §. 2.

m per propr. 2. §. 6.

Hactenus Ptolomæi Hypothesim exposuimus. Deinceps quomodo Phœnomenis *num.* 3, recensitis satisfaciat, videamus.

NU-

NUMERUS VI.

Per hanc Hypothesim quomodo Phænomenis satisfiat.

Salvatur prima inæqualitas.

Fig. 1.

§. 1. QUæ ad primam inæqualitatem ſpectant recenſita *num.* 3. §. 2. 3. 4, ſalvantur per motum centri Epicycli I, (in quo tunc concipitur eſſe centrum Planetæ) irregularem quidem in Deferente D I R ω, ſed regularem in Æquante G O β δ, ac proinde irregularem in Zodiaco & reſpectu centri Mundi A, ut *num.* 5. §. 1. expoſui, ex tali quippe motu planetæ per Deferentem contingit, ut in centro Mundi A, appareat Æqualibus temporibus arcus inæquales in Zodiaco abſolvere, quod obſervatio requirebat 2. §. & ut circa Apogeum Deferentis D motus Planetæ in Zodiaco videatur tardiſſimus, circa Perigeum verò R celerrimus, quo ſatisfit §. tertio; & ut bis intra unius revolutionis tempus, nimirum in Apogeo Deferentis & Perigeo, evaneſcat omnis inter motum Verum ac Medium differentia, ſive Æquatio, quo ſatisfit quarto §. Quæ omnia demonſtrantur eodem modo, ut in Sole *lib.* 1. *num.* 23, & *ibidem num.* 25. *Propr.* 1. 11. 7. Vide etiam *Poriſma num.* 27. *lib.* 2. ubi Apparentis in Zodiaco inæqualitatis geometrica demonſtratio exhibetur.

Inæqualitas, ſive inæqualis duratio revolutionum Planetæ ab uno puncto Zodiaci ad idem (de quâ *num.* 3. §. 1.) prout ad primam inæqualitatem ſpectat (magis quippe ad ſecundam pertinere quàm ad primam monui *num.* 3. §. 4.) non differt ab eâ, quam inter ſe habent revolutiones centri Epicycli ab uno Zodiaci puncto ad idem; quandoquidem hic centrum Planetæ in ipſo Epicycli centro, ſive in lineâ A I F Veri motus centri Epic. ſtatuatur. Ea verò exponitur ac demonſtratur per motum illum tardiſſimum Apogei Deferentis D in conſequentia, prorſus ut in Sole *lib.* 1. *num.* 48, & apparet tunc ſolùm (ſi tamen ipſam ſinat ejus exilitas apparere) cùm revolutiones dictæ in ☌ vel ☍ Planetæ cum Sole & incipiunt & finiunt.

Salvatur inæqualitas ſecunda.

Fig. 1.

a *per* §. 5. *num.* 5.
b *per* §. 1. *num.* 5.

§. 2. Pars inæqualitatis ſecundæ præcipua, quam retuli *num.* 3. §. 6, pulcherrimè demonſtratur per motum Planetæ in Epicyclo expoſitum *num.* 5. §. 5. Cùm enim tam a Planeta ſuperiorem Epicycli partem H Q E, quàm centrum b Epicycli Eccentricum percurrens moveantur ſecundùm O. S. Zodiaci; liquet motum Planetæ per ſuperiorem Epicycli partem in quâ eſt Apogeum Q, favere motui centri D ſub Zodiaco: ac proindè Planetam tunc procedere per Zodiacum motu duplicato, uno videlicet ſibi proprio in Epicyclo, altero ipſius centri D, quo ipſe unà cum Epicyclo defertur. Atqui Planeta ante & poſt ☌ cum Sole percurrit ſuperiorem Epicycli partem, in ipſâ enim ☌ eſt in Vero Apogeo c Epic. Q. Patet igitur cur ante & poſt ☌ cum Sole celerrimè per Zodiacum videatur moveri. Rurſum, quia motus Planetæ per Epicycli partem inferiorem fit C. O. Sign. Zod. ex E per ☋ versùs H, is tunc adverſatur motui centri D, quo Planeta unà cum Epicyclo per Zodiacum defertur S. O. Signorum. Atqui Planeta decurrit inferiorem partem Epic. ante & poſt ☍ cum Sole, cùm in ☍ ipſâ ſit in d Perigeo Vero ☋. Liquet igitur cur ante & poſt ☍ cum Sole progreſſio Planetæ per Zodiacum tantopere retardetur. Inde tamen nondum apparet cur Planeta fiat Retrogradus. Ad hoc enim requiritur non ſolùm ut Planeta in Epicyclo feratur C. O. Sign. Zod. ſed inſuper ut D ☋ radius Epic. ad ☋ A diſtantiam d Perigei Epic. à centro Mundi majorem habeat rationem, quam velocitas centri Epic. ad velocitatem Planetæ in Epicyclo. Ineſſe porrò hanc conditionem Planetis quinque minoribus, adhæc in quibus punctis Epic. incipiant Stationes, & in quo puncto Retrogradatio, ac proinde quanti ſint arcus progreſſionis Directæ, Stationum, & Retrogradationis, demonſtrabitur *lib.* 7.

d *Ibid.*
d *oſtendam n.* 20. *l.* 7.

§. 3. Interim ex modò dictis facilè apparet cur (quod *num.* 3. §. 7. fuerat obſervatum) Planetæ progreſſio Directa in Zodiaco ſit Retrogradatione velocior; quia nempè ad Progreſſionem Directam concurrunt & motus centri Epic. & motus Planetæ in Epic. S. O. Sign. Zod. Retrogradationem verò cauſat ſolus Planetæ per Epic. motus C. O. Sign. Zodiaci (adjunctâ tamen conditione ſuperiùs indicatâ) motum centri Epic. elidens & ſuperans.

§. 4. Quod autem (ut *num.* 3. §. 8. retulimus obſervatum) comparando progreſſionem Directam Planetæ unam cum alterâ, & Retrogradationem unam cum alterâ (in diverſis nempè revolutionibus Solis ad Planetam) eæ non ejuſdem ſemper velocitatis vel tarditatis reperiantur, oritur partim ex inæquali velocitate Planetæ in Epicyclo, de quâ vide §. 7. *num.* 5. partim ex inæquali motu centri Epicycli per Zodiacum, ſalvante inæqualitatem primam, ut expoſui §. 1.

Cur longiori tempore duret una progreſſio Directa quàm altera, & una Retrogradatio, quàm altera, tum ex jam dictis, tum ex ijs quæ *lib.* 7. dicturi ſumus, intelliges.

§. 5. Quòd verò etiam revolutiones integræ Solis ad Planetam, ut *num.* 3. §. 5. eſt obſervatum, tempore non æquali abſolvantur, rurſum fit partim ex motu inæquali centri Epicycli per Zodiacum, oſtenſo *num.* 5. §. 1, partim ex diverſâ velocitate Planetæ in Epicyclo probatâ *num.* 5. §. 7. quod ſic oſtendo. Conjunctio Media Solis cum Planetâ fit in lineâ A I F Veri motus centri Epicycli, quando nimirum centrum Planetæ & linea Medij motus Solis coincidunt in rectâ jam dictâ A I F, ut patet ex dictis *num.* 5. §. 5. Atqui ob inæqualem progreſſum centri Epicycli I per Zodiacum linea A M Medij motus Solis digrediens à lineâ A I F, modò tardiùs ad eamdem redit, modò citiùs; & Planeta ſimiliter ob diverſam in Epicyclo velocitatem etiam ipſe à rectâ A I F digrediens, modò citiùs ad eamdem revertitur, modò tardiùs. Ergo ex duplici illâ causâ revolutio Solis ad Planetam jam minori tempore abſolvitur, jam majori.

Fig. 1.

§. 6. Inæqualitas revolutionum Planetæ ab uno puncto Zodiaci ad idem, prout ad ſecundam inæqualitatem pertinet, & multò major eſt eâ, quam expoſui ſub finem. §. 1, in hac Hypotheſi ſic oſtenditur. Sub initium revolutionis ſit Planeta in Q Apogeo Vero Epicycli, ac proinde & centri Epicycli D, & Planetæ unus ſit idemque in Zodiaco locus L. Quoniam revolutiones Planetæ per Zodiacum, & Epicyclum non ſunt æquales, ut patet ex *num.* 3. §. 1. & 5, manifeſtum eſt ſub finem revolutionis per Zodiacum Planetam poſſe exiſtere in alijs atque alijs Epicycli punctis.

punctis. Existat ergo sub revolutionis finem in puncto 2, sitque tum locus Planetæ in Zodiaco punctum 5. Incipiant ergo tam centrum Epicycli quàm centrum Planetæ simul recedere à lineâ A D Q L in consequentia versùs S. Quando igitur D centrum Epic. Zodiaco peragrato redierit in L, Planeta jam transilierit punctum L, eritque in 5. Quare tempus revolutionis Planetæ per Zodiacum minus est tempore revolutionis centri Epicycli per Zod. eâ temporis quantitate, quâ percurritur arcus L 5. Quòd si Planeta sub revolutionis finem sit in Epicycli puncto 3, tempus revolutionis Planetæ per Zod. excedet tempus revolutionis centri D, eo tempore quo percurritur arcus 4 L. Quare si revolutio Planetæ prior comparetur cum posteriore, tempus posterioris excedet tempus prioris eo tempore, quo percurritur arcus totus 4 L 5.

§. 7. Postremò liquet in hac Hypothesi, quomodo in ☌ & ☍ Planetæ cum Sole secunda inæqualitas evanescat; quod *num.* 3. §. 10. observabatur. Planeta enim per §. 5. *num.* 5. in ☌ & ☍ cum Sole est in lineâ A Z I N F Veri Apogei ac Perigei Epicycli: quare tunc linea A X S Veri motus Planetæ eadem est cum A Z I N F, ac proinde S A F Æquatio Anomaliæ Orbis, seu Argumenti, qui est mensura inæqualitatis secundæ, necessariò evanescit. Nulla igitur differentia tum est inter motum Verum Planetæ, & motum Verum centri Epicycli, quem determinat recta A Z I N F, adeoque secunda inæqualitas etiam nulla est.

Salvatur Planetarum incrementum ac decrementum Apparens.

Fig. 1. *m per* §. 5. *num.* 5.

De quo §. 11. *num.* 3. Ratio hujus Phœnomeni in promptu est. Planeta enim *m* Soli conjunctus est in N Apogeo Epicycli, Soli oppositus in Z Perigeo. Quare in ☌ maximè distat à Mundi centro A, in ☍ minimè. Quod autem hæ ipsæ distantiæ maximæ inter se collatæ sint inæquales, sint item inæquales & minimæ, inde fit, quia centro Epicycli accedente ad Deferentis Apogeum D, ac proinde longiùs à Mundi centro A recedente, necesse est etiam Epicycli Apogeum N, longiùs à Mundi centro removeri. Quare si Planeta existat in Q Apogeo Epicycli, quando centrum Epicycli attingit D Apogeum Deferentis, Planeta erit ἀπογειότατος, seu maximè Apogeus, hoc est remotissimus à Terrâ. Contra verò Epicycli centro accedente ad Perigeum Deferentis, tam ipsum, quàm Perigeum Epicycli fit Mundi centro vicinius: ac proinde si Planeta fit in Epicycli Perigeo θ, cùm centrum Epic. est in R Perigeo Deferentis, Planeta erit περιγειότατος, seu maximè Perigeus, hoc est Terræ vicinissimus.

NUMERUS VII.

Modus Geometricè supputandi ad datum tempus Vera loca ♄ ♃ ♂ in hac Hypothesi.

Fig. 1.

Cum solum hic intendamus formam calculi exponere, supponuntur jam data, quæ postea reperientur, nimirum motus Æqualis Apogei Deferentis ♈ L, motus Æqualis, seu Medius centri Epicycli ♈ L M ad datum tempus uterque; radius Deferentis B I, Eccentricitas A C, ejusque semisses A B, B C, radius Epicycli I X. In schemate autem supponuntur circuli & lineæ Hypotheseos descriptæ ac definitæ *num.* 4. His ergo datis, invenire oporteat Planetæ Verum motum ♈ L S ad tempus datum.

§. 1. Apogei motum ♈ L aufer à Medio motu ♈ L M centri Epic. ita notus erit arcus L M, sive G O Anomalia Media Eccentrici (vide *def.* 12. & 13. *num.* 4.) adeoque angulus D C O, seu D C I etiam notus erit. Aufer D C I à Grad. 180, fietque notus I C B. In triangulo igitur B C I cùm dentur angulus I C B, & duo latera, B I radius Eccentrici, B C semissis Eccentricitatis A C, ex his reperietur *o* B I C Æquatio Physica, quam serva. Deinde, quia I B A externus *d* æquatur duobus internis jam notis B I C, & I C B, etiam ipse notus erit. In triangulo igitur A B I cùm dentur I B A & latera B I radius Deferentis, A B semissis altera Eccentric tatis, non latebit *m* A I distantia centri Epic. à Mundi centro, & A I B Æquatio Optica; quæ juncta Physicæ B I C, dabit angulum A I C, hoc est arcum *n* F M, Æquationem totam centri Epicycli. Hæc in priori Anomaliæ semicirculo D I R (ut in hoc schemate contingit) dempta motui Medio centri Epic. ♈ L M, addita verò in posteriori R ω, D dabit motum Verum centri Epic. ♈ L F ad tempus datum.

o per probl. 11. *cap.* 3. *Geo. pract.* *d per* 32. 1. *elem.* *m per prob.* 10. *cap.* 3. *Geo. pract.* *n vide def.* 17. *n.* 4.

§. 2. Inquire ad t. d. Medium *o* Solis motum ♈ L Y: à quo aufer motum Verum centri Epic. ♈ L F: ita notus fiet arcus F Y, hoc est *i* N X Argumentum Verum: quo dempto à Grad. 180, notus erit arcus X Z, adeoque & angulus X I A. In trigono igitur A I X cùm dentur angulus X I A, & latera duo, A I distantia centri Epic. à centro Mundi, I X radius Epicycli; ex his *p* innotescet A X distantia Planetæ à centro Mundi ad t. d. & angulus X A I, sive arcus F S Æquatio Argumenti, seu Anomaliæ Orbis: quæ in priore Anomaliæ Orbis semicirculo N X Z (ut in hoc schemate) addita motui Vero centri Epic. ♈ L F, dempta verò in posteriori Z ω N, dabit motum Planetæ Verum ♈ L S ad tempus datum in suâ orbitâ.

o per n. 54. *lib.* 1. *i per Corol.* §. 5 *n.* 5. *p per prob.* 10. *cap* 3. *Geo. pract.*

NUMERUS VIII.

Quare Ptolemaus introducto Æquante Eccentricitatem bisecuerit.

Fig. 1.

Ptolemæus, ut *num.* 4. *in definitionibus*, & *num.* 5. §. 1. exposuimus Eccentricitatem A C, quæ basis est Æquationis A I C debitæ inæqualitati primæ, bisecuit, & semissem ejus A B solùm attribuit Deferenti Epicyclum B D I R ω: totam verò assignavit Æquanti C G O β δ, quem voluit esse mensuram & vehiculum æqualis motus I centri Epicycli (ipsiusque adeo Planetæ) quamvis illud non in Æquante, sed in Deferente statueret: unde consequens necessariò fuit, ut centrum I in proprio suo circulo inæqualiter moveretur. Mirum istud tyronibus Astronomiæ videri possit; & meritò sanè, quando ejus rei causam etiam magni Astronomi ignoraverunt. Keplerus siquidem in *Mysterio cosmog. cap.* 22. & Mæstlinius *ibidem* in appendice, arbitrati sunt Ptolomæum id cæcâ conjecturâ ductum præstitisse. In quo quidem illi vehementer errant, ut egregiè ostendit Ricciolus *Almag. lib.* 7. *sect.* 2. *cap.* 1. *sch.* 1. & *cap.* 6. *prop.* 5. à quo isthic dicta clariùs adjecto schemate exponam.

Videtur igitur advertisse Ptolomæus si tota semper

per & eadem Eccentricitas AC primæ inæqualitati debita, tribuatur Deferenti; sic ut is sit circulus GOβδ centrum habens in C, Æquationes centri Epicycli crebrò injustas prodire, & circa Perigeum β justò majores. Id porrò deprehenderit locum Planetæ ex supputatione juxta methodum *num. præc.* collectum, conferendo cum Planetæ loco per *num.* 1. observato. Quare ut Æquationes centri hoc vitio liberaret, retinuit quidem Eccentricitatem totam AC, tamquam basim Æquationis desideratæ, sed ejus tantùm semissem AB Deferenti assignavit, sic ut Deferens centri Epic. esset DφRω, ejusque centrum in B. Quo artificio est assecutus ut Æquationes centri circa Perigeum justo aut ferè justo decremento minuerentur, augerentur verò circa Apogeum. Res ex schemate fiet manifesta. Esto primùm Deferens GOβδ, centrum habens in C, & Epicycli centrum sit propè Perigeum β in P; ductisque rectis CP, AP, Æquatio centri Epic. esto CPA, quam, ut dixi, deprehendit esse justo majorem. Statuatur deinde Deferens in DφRω centrum habens in B puncto medio Eccentricitatis totius AC; sumptoque arcu RI æquali ipsi βP, sit Epicycli centrum in I. Manifestum est ductis rectis CI, AI Æquationem centri Epic. CIA, in pari distantiâ à Perigeo minorem jam esse priori CPA; ac proinde vitiosum ejus excessum sic resecari: quod erat intentum.

Fig. 4.

Secundò animadvertit Ptolomæus si Deferenti tota Eccentricitas AC tribuatur, sic ut ipse sit in GOβδ, centrumque ejus in C, distantias centri Epicycli propè Apogeum G esse nimis magnas, circa Perigeum β nimis parvas; ac proinde si eadem semper Epicycli Semidiameter retineatur, Æquationes Argumenti etiam injustas provenire, & longè evidentiùs circa Perigeum majores quàm ferant Planetarum loca observata. Hunc excessum eâdem illâ Eccentricitatis bisectione temperavit. Sit enim primò (ut *supra*) Deferens in GOβδ ejusque centrum in C; Epicycli centrum in P propè Perigeum β; Planeta in X; ductisque è Mundi centro A rectis AP, AX, Æquatio Argumenti sit XAP. Hanc, ut dixi, Ptolomæus invenit justâ majorem. Detur deinde Deferenti Eccentricitatis tantùm semissis AB, sic ut ipse sit in DφRω, ejusque centrum in B; sumptoque rursum arcu RI æquali ipsi βP, centrum Epicycli jam sit in I, Planeta verò in X, eandem habens Anomaliam Orbis NX, quam in situ priori P. Manifestum est Æquationem Argumenti XAI jam esse minorem priore XAP; adeoque sic resecari excessum observationibus repugnantem, quod erat propositum. Quare non casu, aut cæcâ conjecturâ, sed magno consilio atque ingenio Ptolomæus Æquantem circulum bisectionemque Eccentricitatis adhibuit.

Fig. 1. & 4.

Fig. 4.

Fatendum est nihilominus discrepantiam prædictam loci Planetæ obtenti per calculum, ab observato, à Ptolomæo emendatam esse quidem, sed non penitus sublatam. Multò id sanè exactiùs obtinebitur, si Æquante & Eccentricitatis bisectione omissis, aut Eccentricitas, aut Epicycli semidiameter, aut simul utraque varientur, ut ostendam *infrà num.* 10.

NUMERUS IX.

Quæ in Hypothesi antiquâ Ptolomaicâ ♄, ♃, ♂ videantur desiderari.

§. 1. IN primis Copernico, Tychoni, Longomontano displicet Eccentricitatis bisectio, quòd hæc efficiat, ut a Planeta, sive Epicycli centrum motu realiter inæquali moveatur, æqualitatem obtinens nonnisi fictitiam in Æquante. At non displicuit Keplero, non Bullialdo, qui Planetas omnes per Ellipseos perimetrum circumducunt, atque Eccentricitatem bisectam conatu summo, quamvis Ellipsis (ut apparet) amore potissimùm ducti, tuentur. Cur verò id haberi debeat absurdum, ego quidem prorsus non video, cùm nobis minimè constet utrùm Planetæ pluribus de facto motibus agantur, an spiralem lineam ex pluribus motibus compositam, motu unico immediatè percurrant. Quod postremum si verum est, erit Planetæ motus verè & simpliciter irregularis. Quid igitur peccat Ptolomæus, si motum Planetæ faciat inæqualem in Hypothesi, qui fortè talis est realiter & absolutè? Præsertim cùm æqualitas motus eo maximè consilio sit in Hypotheses introducta, ut calculo facilitas conciliaretur, quam æquè ac illi, Æquante suo Ptolomæus est assecutus.

a *Vide* §. 1. *num.* 5.

§. 2. Istud magis Ptolomæo obest, in quo ipsum Astronomi usque ad Tychonem omnes, Copernicus etiam ipse & Lausbergius sunt imitati, quod secundæ inæqualitatis principium (ut dixi §. 5. *num.* 5.) ducat à Conjunctione Solis cum Planetâ non Verâ, sed Mediâ, & Argumentum, seu Anomaliam Orbis, ejusque Æquationes investiget adhibendo motum Solis Medium, cùm debuisset Verum. Quamvis enim propè ☌ & ☍ Planetæ cum Sole, locus adhibito Medio Solis motu supputatus non multum dissideat à loco observato: tamen extra ☌ & ☍ dissidium valdè sensibile deprehenditur; nullum verò aut saltem longè minus, si Solis Motus Verus adhibeatur. Ex quo patet inæqualitatem secundam evanescere in ☌ & ☍ Planetæ cum Sole non Mediis, sed Veris, ejusque mensuram à Solis motu non Medio, sed Vero esse derivandam.

§. 3. Postremò etiamsi ad investigationem Argumenti & Æquationum ejus, Veri Solis motus adhibeantur, nihilominus Planetæ locus juxta leges Ptolomaicæ Hypotheseos supputatus, non satis adhuc convenit cum observato, præsertim in *Marte*. Ratio est, quia licet Deferenti assignando tantùm semissem Eccentricitatis totius calculi & observationis dissidium minuatur, non tamen penitùs tollitur, eò quòd in hac Hypothesi tam Deferentis Eccentricitas quamvis diminuta, quàm Epicycli Semidiameter, semper eædem permaneant, cùm debuissent vel utræque, vel saltem alterutra certis legibus (ut *num. seq.* dicam) variari.

Volui nihilominus hanc Hypothesim exactè & clarè exponere, quòd ea Ptolomæi sit, & totius doctrinæ Planetariæ fundamenta contineat.

CAPUT III.

Proponitur & exponitur Hypothesis nova ♄, ♃, ♂ in longitudinem.

EST ea *Ioannis Baptistæ Riccioli* Astronomi præstantissimi Societatis Jesu, quam exponit ipse *Almagesti sui lib. 7. sect. 2. cap. 6.* Ego eam paulò aliter concinnatam hic exhibebo.

NUMERUS X.

Nova Hypothesis ♄, ♃, ♂.

Fig. 6. §. 1. ZOdiacus esto ♈ ♉ H T; ejus ac Mundi centrum A; diameter H A ♆, Eccentricus sit β V E ϑ X; Apogeum ejus E; Perigeum X, linea Apsidum H E A X ♆, eadem nempè quæ diameter; Eccentricitas minima sit A B, maxima A D, harum differentiâ B D bisectâ in G, Eccentricitas Media, seu mediocris, sit A G. Describatur autem centro G circa diametrum B D circellus: juvabit is conceptum librationis centri Epicycli mox exponendæ.

§. 2. Centrum Epicycli, quod in primâ inæqualitate est idem cum centro Planetæ ab Apogeo E versùs V in consequentia movetur motu æquali per peripheriam Eccentrici, eamque absolvit eâ temporis quantitate, quæ singulis convenit Planetis, ut dixi *num.* 3. §. 1. Interim verò centrum Eccentrici per circelli diametrum B D descendit ascenditque hunc in modum.

§. 3. Epicycli centro existente in Apogeo E, centrum Eccentrici est in D, cujus tum maxima est Eccentricitas A D. Cùm Epicycli centrum confecit unum Quadrantem E β, centrum Eccentrici est in G circelli centro, habeturque Eccentricitas Media A G. Quando centrum Epicycli est in Perigeo X, centrum Eccentrici est in B, fitque minima Eccentricitas A B. Percursis ab Epic. centro Quadrantibus tribus Anomaliæ E β X ϑ, centrum Eccentrici rursum est in G. Denique Epic. centro reverso ad Apogeum E, centrum Eccentrici denuò ascendit in D.

Universim centrum Eccentrici per circelli diametrum B D ascendendo ac descendendo, ipsam perpetuò eâ proportione secat, quâ V Y sinus Anomaliæ Medij Eccentrici E V secat Eccentrici diametrum E X: ut si Epicycli centrum confecerit Anomaliæ arcum E V, cujus sinus est V Y, centrum Eccentrici erit in puncto I, sicut D I sit ad I B, sicut E Y ad Y X. Cùm centrum Epic. est in secundo Quadrante in Z, attenditur sinus Z θ arcus Z X, qui est complementum Anomaliæ E Z ad Grad. 180; si in tertio in ω, attenditur sinus ω θ arcus X ω, quo Anomaliæ E Z X ω excedit Grad. 180; si in quarto in φ, cape sinum φ Y arcus φ E, qui est Anomaliæ E Z X φ complementum ad Grad. 360. In schemate unus exhibetur situs Eccentrici, centrum videlicet habentis in I.

Elegit porrò Ricciolus Eccentricitatis variationem hujusmodi, quia post multam ac diuturnam collationem calculi cum observatione comperit, hâc assumptâ, propè veras ☌ Planetæ cum Sole, & in ipsis veris ☍, cùm (ut ostendi *num.* 9. §. 2.) sola prima inæqualitas dominatur, Æquationes centri A V I, seu T Q, justiores provenire, adeò ut loca Planetæ supputata cum observatis, satis exactè consentiant. Et quidem omninò decrescere proportione jam dictâ Eccentricitatem ab Apogeo ad Perigeum, liquidò apparebit ex *num.* 24.

Atque hæc est pars prima Hypotheseos, quâ satisfit inæqualitati primæ.

§. 4. Ut salvetur secunda inæqualitas, Planeta volvitur per Epicyclum, sic ut in omni ☌ verâ Planetæ cùm Sole (sic enim oportere ostendi *num.* 9. §. 2.) Planetæ centrum sit in M Apogeo Vero Epicycli, & in omni Verâ ☍, in Perigeo Vero L: extra verò hos articulos tantus est Planetæ in Epicyclo motus M S ab Apogeo Vero M, quantus est Solis motus Verus à Verâ ☌ cum Planetâ, sive quantus est Zodiaci arcus Q 4, quo Sol recessit à lineâ A V M Q Veri loci centri ac Apogei Epicycli. Ita quidem phœnomenis plerisque satisfit; Æquationes tamen, nisi varietur Epicyclus, non satis justæ reperiuntur. Vult igitur Ricciolus Epicycli radium ab Eccentrici Apogeo E usque ad Perigeum X perpetuò decrescere, sic ut maximus sit in Apogeo, minimus in Perigeo. Proportiones autem istius decrementi easdem constituit, quibus suprà ab Apogeo ad Perigeum decrevit Eccentricitas: ita enim horum Planetarum loca supputata cum observatis convenire. Verum, cùm stante hoc decremento Epicycli, Ricciolus Planetæ motum in Epicyclo non satis declaret, suamque Hypothesim fateatur non habere Geometricam acribiam, eam illi conciliare hîc conabimur.

§. 5. Epicyclus maximus pro Apogeo Eccentrici esto E M S, minimus pro Perigeo E 2 N, interque hos infiniti alij medij concipiantur eodem E centro descripti. Centro Epicycli existente in Apogeo E, Planetæ centrum sit in maximi Epicycli puncto quovis S, ad quod ducatur ex centro Epic. recta E N S, sitque radij maximi, & minimi differentia N S. Deinde recta E S, seu V S secum perpetuò deferens Planetæ centrum moveatur per Epicycli maximi omniumque intermediorum peripherias, juxta leges §. 4. præscriptas, nimirum ut in omni Verâ ☌ & ☍ Planetæ cum Sole, recta E S seu V S, sit in lineâ Apogei Veri Epicycli A E M, seu A V M; extra verò hos articulos tantus sit rectæ V S motus M S ab Apogeo Vero Epic. M, quantus est motus Verus Solis à ☌ Verâ cum Planetâ, hoc est à lineâ A M Q. Porrò rectæ V S, Planetam Deferentis motum in Epicyclo exhibet non solùm arcus M S Epicycli maximi, sed etiam cujuslibet Epicycli intermedij arcus ex. gr. 5 C; omnes enim arcus concentrici sunt, ijsdemque radijs V M, V S intercepti, ac proinde inter se, *per Cor. 3. p. 33. lib. 6. elem.* Atque ita obtinetur anologia debita motus Planetæ in Epicyclo cum motu Solis. Superest ergo ut decrementum Epicycli cum dictâ anologiâ conjungamus. Id verò præstabit Planetæ descensus ascensusque per differentiam S N, hoc modo. Cùm Epicycli centrum est in E Apogeo Eccentrici, Planeta sit in rectæ E S summitate S. Quo autem tempore centrum Epicycli percurrit primum Anomaliæ semicirculum E Z X, Planeta descendat per totam differentiam S N; & centro Epicycli percurrente semicirculum secundum X ϑ E, Planeta rursum ascendat per eandem differentiam totam N S. Hic porrò ascensus, & descensus ita peragatur, ut centrum Planetæ differentiam S N, eâ semper proportione secet, quâ (V Y) Sinus Anomaliæ Mediæ centri Epic. (E V) secat diame-

trum

trum Eccentrici E X, planè ut fiebat §. 3. in ascensu ac descensu centri Eccentrici per rectam D B.

Itaque cùm Epicycli centrum ab Apogeo E processerit in V, Planeta descendit in suâ lineâ deferente ab S in C, sic ut S C sit ad C N, ut E Y ad Y X. Et Epicycli centro delato in β, Planeta descendit in O sic ut S O sit ad O N, ut E I, ad I X. Epicycli centro ulteriùs progresso in Z, etiam Planeta ulteriùs descendit in P, estque S P ad P N, ut E ϑ ad ϑ X. Demùm ubi centrum Epicycli attigerit Perigeum X, Planeta, percursâ differentiâ totâ S N, sistitur in N. Deinde centro Epicycli peragrante secundum Anomaliæ semicirculum X ϑ E, Planeta ijsdem legibus ex N iterum ascendit versùs S; & Epicycli centro reverso ad Apogeum E, etiam Planeta redit ad lineæ deferentis summitatem S. Interim verò dum Planeta per rectam suam deferentem sic ascendit, descenditque, recta illa ipsa Planetam secum deferens, movetur in orbem circa centrum commune Epicyclorum ad leges præscriptas suprà, ac proinde Planetæ motum Soli analogum non solùm in Epicyclo maximo, sed etiam in minimo infinitisque intermedijs designat. Quo fit ut salvâ acribiâ & concinnitate Geometricâ, per motum circularem & rectum obtineatur, & Soli analogus Planetæ per Epicyclum motus, & decrementum continuum Epicycli ac radij ejus, ab Eccentrici Apogeo ad Perigeum: quod *suprà* requiri diximus, ut Æquationes Argumenti S A E, C A V, O A β, P A Z, N A X, P A ω &c, quibus secunda inæqualitas exæquatur, justæ proveniant. Et omninò decrescere hac proportione Epicycli radium ab Apogeo ad Perigeum, liquebit ex *num.* 26. §. 4.

Definitiones ad hanc Hypothesim spectantes intelliguntur satis ex definitionibus Hypotheseos Ptolemaicæ *num.* 4.

NUMERUS XI.

Forma supputationis Geometricæ ad datum tempus locorum in Zodiaco ♄. ♃. ♂. juxta hanc Hypothesim.

[*Fig.* 6.] Suppositis lineis, circulis, & punctis hujus Hypotheseos *præcedenti Numero* descriptis expositisque, ad datum tempus Epicycli centrum sit in V, Planetæ in C. Ex I, quod pro tempore dato est centrum Eccentrici, & à centro Mundi duc rectas I V, A V Q, & A T parallelam ad I V, nec non per centrum Planetæ rectam A C R. Erit igitur ad t. d. ♈ Q motus Verus centri Epicycli; ♈ Q T motus ejusdem Medius; ♈ H motus Apogei Eccentrici; ♈ R motus Verus Planetæ, quem oportet supputare.

Quoniam verò hic solùm proponitur supputationis forma, supponemus esse data, quæ posteà invenientur locis in margine annotatis: nimirum motum *r* Apogei ♈ H, motum *ſ* Medium Planetæ, seu centri Epic. ♈ Q T, item Eccentricitatem minimam *s* A B, maximam D, A harum differentiam B D; radium *t* Epicycli maximum V S, minimum *u* V N, horum differentiam N S; omnia in partibus radij Eccentrici 100000. His ergo positis,

[*r Vide nu.* 23.] [*s vide n.*21] [*t Vide n.*24] [*u vide nu.* 26.]

§. 1. Eccentricitatem A I congruentem tempori dato, inquires hoc modo. Apogei motum ♈ H aufer à motu Medio ♈ H T centri Epicycli; ita notus erit arcus H T, sive E V *a* Anomalia Media Eccentrici, quæ si minor sit Grad. 90, quære *b* Sinum ejus versum E Y in partibus Sinus totius E I 100000, qui est ipse radius Eccentrici. Tum fiat ut tota Eccentrici diameter E X nempè 200000, ad E Y Sinum versum, ita D B circelli diameter, differentia nempè Eccentricitatis maximæ, & minimæ ad Quartum, nempè D I. Cùm ergo sit *c* ut E X ad E Y, ita D B, ad D I, & tria prima dentur in partibus radij Ecc. I E, etiam Quartum D I in ijsdem partibus erit notum. Sed etiam A D Eccentricitas maxima in ijsdem partibus datur. Ergo si D I auferas ab Eccentricitate maximâ A D, relinquetur A I Eccentricitas quæsita ad t. d. in ijsdem quoque partibus Radij E I nota.

[*a vide def.* 12 & 13. *num.*4.] [*b in tabulis sin.*] [*c patet ex* §. 3. *nu.* 10.]

Si anomalia Media Eccentrici sit E V X φ finita in Quadrante quarto, eam aufer à Grad. 360 ut notus fiat arcus E φ, cujus Sinum versum E Y quære, & operare ut *suprà*.

Si Anomalia sit E Z, finita in Quadrante secundo, eam aufer à Grad. 180, ut notus fiat arcus Z X, cujus quære Sinum versum X ϑ: si Anomalia sit E V X ω finita in Quadrante tertio, ab ipsâ aufer Grad. 180 ut notus fiat arcus X ω, cujus similiter quære Sinum versum X ϑ. Tum in hoc utroque casu postremo fiat ut E X 200000 ad ϑ X, ita D B ad Quartum: dabit hoc B K (est enim ut E X ad X ϑ, ita D B ad B K, per §. 3. *num.* 10): quo addito ad Eccentricitatem minimam A B, nota fiet Eccentricitas quæsita A K in partibus Radij Eccentrici I E, seu I V.

§. 2. Inventa Eccentricitate A I, Æquationem centri A V I, seu T Q, adeoque motum Verum centri ♈ H Q inquires hunc in modum. Ex Anomaliâ Mediâ E V jam inventâ, si ea est minor semicirculo, notus est angulus F I V: quo dempto à Grad. 180, notus *l* fit A I V. In triangulo igitur V I A cùm dentur latera duo, A I Eccentricitas, & I V Radius Eccentrici, cum angulo A I V, ex *m* his reperietur A V distantia centri Epic. à centro Mundi (quam serva), & Æquatio A V I, hoc est (ob parallelas I V, A T) angulus *n* V A T, seu Q A T, hoc est arcus Q T: qui in primo Anomaliæ semicirculo (ut hic contingit) demptus motui Medio ♈ H T centri Epic. dabit ejusdem motum Verum ♈ H Q ad t. d.

[*l per* 13. 1. *elem.*] [*m per probl.* 10. *cap.* 3. *Geo. Pract.*] [*n per* 27. 1. *elem.*]

Si Anomalia Media reperiatur E Z X φ major semicirculo, ejus complementum φ E ad circulum, notificat angulum E I φ: quo cognito reperitur A φ, & Æquatio A φ I, sive 7, 3, ut *suprà* eaq; addita motui Medio centri ♈ 3 exhibet ejusdem motum Verú ♈ 7.

§. 3. Epicycli radius V C conveniens tempori dato, reperitur eodem modo, quo Eccentricitas A I §. 1. Eâdem *p* enim proportione is variatur, quâ Eccentricitas, eâ videlicet quâ Sinus Anomaliæ diametrum E X Eccentrici secat.

[*p per* §. 5. *num.* 10.]

Si Anomalia Media Eccentrici sit E V finita in Quadrante primo, quære ejus Sinum versum E Y; si Anomalia est E V X φ finita in Quadrante quarto, quære E Y Sinum versum ejus ad Grad. 360 complementi φ E. Tum fiat ut diameter Ecc. 200000 ad E Y Sinum versum, ita S N maximi, & minimi radij Epicycli differentia ad Quartum: dabit hoc S C, cùm *o* sit ut E X ad E Y, ita S N ad S C. Aufer igitur S C à radio maximo S V, seu S φ: eritque notus V C radius Epicycli ad t. d. in partibus radij Eccentrici I V.

[*o per* §. 5. *num.* 10.]

Quod si Anomalia Media Ecc. sit E Z finita in Quadrante secundo, quære X ϑ Sinum versum ejus ad Grad. 180 complementi Z X; si verò Anomalia est E Z ω finita in Quadrante tertio, quære Sinum Versum X ϑ arcus X ω, quo ea Grad. 180 excedit. Tum fiat rursum ut diameter Ecc. 200000 ad Sinum

versum X θ, ita S N ad Quartum: dabit hoc N P, cùm sit ut q E X ad X θ, ita S N ad N P. Adde igitur N P radio minimo Z N, seu ω N: eritque notus Z P, seu ω P radius Epicycli ad t. d.

q per §. 5. num. 10.

§. 4. Reliquum est, ut R Q, vel 6, 7, Æquationem Argumenti, seu Anomaliæ Orbis, atque inde tandem Verum Planetæ motum eliciamus solvendo triangulum A C V, vel A C φ. Inquire ad t.d. motum r Solis Verum ♈ Q 4: à quo si aufers motum Verum ♈ Q centri Epicycli §. 2. jam repertum, notus fiet arcus Q 4: cui cùm æqualis, seu similis sit arcus M S, seu 5 C Anomalia Orbis, ut patet ex §. 5. num. 10, etiam hæc nota erit. Si jam Anomalia Orbis M S sit minor semicirculo, eam aufer à Grad. 180, fietque notus arcus S L, adeoque & angulus S V L, sive C V A. In triangulo igitur A C V cùm repertum sit §. 2. latus A V, & §. 3. latus V C, ex his & noto jam angulo C V A innotescet s Æquatio Argumenti, angulus nempè S A V, & arcus R Q; qui additus motui Vero ♈ Q centri Epic. dabit Planetæ motum Verum ♈ Q R. Eadem operâ etiam notâ fit A C distantia Planetæ à centro Terræ ad tempus datum.

r per num. 55. lib. 1.

s per Prob. 10. cap. 3. Geo. Pract.

Quod si Anomalia Orbis sit M 8 L S major semicirculo, eam aufer à Grad. 180: ita notus erit arcus L 8 S, adeoque & angulus L φ S, seu A φ C: quo cognito, solvendo triangulum A C φ, ut suprà A C V, nota fiet Æquatio 6, 7, quæ jam demenda est motui Vero ♈ 7 centri Epic. ut prodeat Verus Planetæ motus ♈ 6 ad t. d.

Exemplum calculi exhibet Ricciolus in *Marte*; quem Anno 1582 Dec. 26, *Stylo veteri*, Horâ post Merid. 8. 30' observavit Tycho in ♋ Grad. 17. 40'. 30". quem calculus secundùm hanc Hypothesim institutus exhibet in ♋ Grad. 17. 45'. 17", discrimine equidem in re tam perplexâ non magno; quod non magis in Hypothesim debeat quàm in observationem conferri.

Scholium.

Si Sinus versos (E T, X θ) in Tabulâ non reperias, expediet adhibere Sinus secundos T I, θ I. Tum verò, si centrum Epic. sit in Quadrante primo vel quarto, fac ut I E Sinus totus 100000 *est ad Sinum secundum T I, ita Radium circelli D G ad Quartum, nempè I G. Hoc additum Eccentricitati Mediæ A G, dabit quæsitam A I ad t.d. Si verò centrum Epic. sit in Quadrante secundo vel tertio, fiat ut Sinus totus I X* 100000 *est ad Sinum secundum θ I, ita circelli Radius G B ad K G: hoc demptum Eccentricitati Mediæ A G, dabit quæsitam A K ad t. d. Eodemq; modo reperies partem proportionalem S C, vel N P iisdem legibus addendam vel subtrahendam radio Epicycli Medio V O, seu Z O. Est porrò radius Epicycli Medius, qui finitur in puncto O bisecante differentiam S N radii maximi & minimi.*

NUMERUS XII.

Iudicium de hac Hypothesi.

Placet hæc Hypothesis 1, quia clara est & intellectu perfacilis, & prout à nobis *num.* 10. §. 5. ordinata est, Geometricâ acribiâ non caret. 2. Quia cùm tota Planetæ inæqualitas dividatur in primam quæ ad Eccentricum pertinet, & in secundam quæ ad Epicyclum, æquum fuit, ut ea partim in variatam Eccentricitatem Eccentrici, partim in variatam Epicycli semidiametrum distribueretur; quod hac Hypothesi præstatur. 3. Quia loca Planetæ juxta eam supputata, satis exactè cum locis observatis plerumque consentiunt. Fatetur tamen Ricciolus aliquando non satisfacere ad amussim. Verùm cùm ex hactenus inventis id nulla præstet, ea optima censebitur, quæ aberret quàm minimùm.

Quod ad phœnomena attinet *num.* 3 recensita, ea salvat eodem modo, imò expeditius atque simpliciùs, quàm Ptolemaica. Relege & applica quæ *num.* 5. scripsi paucis §. 6. immutatis. Sed inprimis egregiè salvat evidentem illam diversitatem in *Marte* observatam, quam multi hactenus in Solaris Eccentricitatis variationem *lib.* 1. *num.* 41 rejectam, contulerunt. Cùm enim ♂ Zodiacum celeriter percurrat, diebus nempè 686, illo temporis intervallo juxta hanc Hypothesim totam Epicycli & Eccentrici variationem subibit.

Erit fortasse cui displiceat 1. quòd tam motus Planetæ in Epicyclo quàm libratio ejusdem in radio Epicycli sit inæqualis. 2. quod Planeta per viam circularem non incedat. 3. quod pro Æquatione centri reperienda sit nova semper Eccentricitas, & pro Æquatione Argumenti radius Epicycli semper novus.

Ad 1. respondeo id minimè videri absurdum, ut *num.* 9. §. 1 ostendi, si calculi facilitatem id non impediat, qui finis Hypothesium præcipuus est. Deinde quoad primam partem id planè est necessarium; si, quod *a* observationes requirunt, velimus secundæ inæqualitatis initium, & Æquationes Anomaliæ Orbis ducere à motu Solis, non Medio, sed Vero. Ad 2. Dico in nullâ Hypothesi motum Planetæ ultimatum, utpote ex pluribus compositum, esse circularem. Quare si hoc vitium censetur, omnibus est Hypothesibus commune. Quare satis erit ut motus singuli, ex quibus ultimus Planetæ motus componitur, circulares existant. Ad 3. Fateor, optanda Hypothesis esset, quæ vel ita variaret Epicyclum, ut cùm semper eâdem Eccentricitate, vel ita variaret Eccentricitatem ut cùm Epicyclo non mutato observationibus satisfaceret. Verùm talis fortè possibilis non est; certè hactenus nulla talis inventa. Fortasse eam aliquando dabit Ricciolus noster, ubi plures in pluribus Eccentrici locis observationes, præsertim Tychonicas, fuerit adeptus.

a num. 9. §. 2.

NUMERUS XIII.

De aliis Hypothesibus.

Cæteras aliorum Hypotheses recensere, & prolixum est & parum utile. Quare paucis hæc habeto.

Triplex forma Copernici innititur Hypothesi Terræ motæ, quam ut Divinis litteris repugnantem prorsus rejicio. Et quidem si formam ipsam spectando abstra-

abstrahas à correctione numerorum, seu mensurarum, Ptolemaicæ æquipollet, ac proinde non magis satisfacit observationibus, quàm illa. Hoc tamen eam commendat, quòd inæqualitatem secundam, non per motum Planetæ in Epicyclo, sed per solam visus apparentiam salvet.

Hypotheses Tychonis & Longomontani multiplicant circulos: nam præter duos Epicyclos, habent Orbem centro Mundi Eccentricum: ad hæc Planetam per flexus nimis anfractuosos sibique contrarios circumducunt.

Lansbergiana à Copernici secundâ non differt.

Kepleri & Bullialdi Elliptica, licet magno ingeniò excogitata, & summo nisu asserta, mihi quidem non placet. 1. Ob motum terræ quem supponit. 2. Ob Eccentricitatem bisectam quæ vitari debet, si aliter possit, (ut certè potest) observationibus satisfieri. 3. Ob difficultatem, & ageometriam in calculo: quæ ratio vel sola mihi sufficit, ut circulum Ellipsi anteponam; quando Hypothesium finis potissimus est, ut syderum motus ad numeros tevocentur.

CAPUT IV.

Inæqualitas utraque trium Superiorum Planetarum investigater.

HOc est, inquiruntur motus Planetæ Medius, locus & motus Apogei, Eccentricitas, quæ ad primam inæqualitatem petinent; Epicycli semidiameter, & alia cum his connexa, quæ ad secundam. Investigatio porrò ista multis magnisque difficultatibus implicatur. Primò enim ut cognoscatur prima inæqualitas, à quâ dependet cognitio secundæ, unum illud tempus idoneum est, quo Planeta Soli opponitur. Tum siquidem & spectari potest, & exutus inæqualitate secundâ, soli primæ obnoxius est. In Conjunctionibus autem inæqualitate secundâ exuitur quidem, sed ob Solis splendorem inobservabilis est. Difficillimum porrò est ita tempus captare, quo Planetæ locum in Zodiaco observes, ut observatio in ipsum incidat ☍ momentum. *Omnes enim observationes, quas* (inquit [a] Ricciolus) *nacti sumus apud alios, aut ipsi instituimus, extra ☍ momenta inciderunt*; ad quæ proinde eas oportet reducere; quæ quidem reductio quid requirat operæ, ex *num.* 15. patebit. Deinde ad hoc negotium non paucæ aliquot ☍ observationes, sed multæ requiruntur, & quidem in diversis Zodiaci locis, imò in singulis, si fieri potest, Signis: ad quas in *Saturno* requiruntur Anni 30, in *Iove* 12, in *Marte* quamvis celeriùs moveatur quàm ♄ & ♃, tamen ob implexum ejus motum Anni 24. Licebit tamen aliorum insignium Astronomorum observationibus paucitatem propriarum compensare. Præterea tarditas revolutionum ♄ & ♃ efficit, ut parvus error in observando commissus, magnum errorem causet in loco, & plurium dierum differentiâ eorum Conjunctiones aliosque Aspectus acceleret vel retardet. Ex his & aliis, quos hic omisi, difficultatibus factum est, ut omnium Astronomorum calculus in his Planetis ad Tychonem usque sæpè enormiter à cælo aberraverit. Nunc tamen recentiorum Astronomorum industriâ certior de his atque amplior habetur notitia, ad quam Tyrones ordine scientifico, quod adhuc fecimus, ubique servato, quasi manu deducam.

[a] Almag. lib. 7. pag. 543.

NUMERUS XIV.

Mediorum motuum ♄. ♃. ♂. prima investigatio.

§. 1. MOtus Medius Planetæ est ipse motus æqualis centri Epicycli in Æqoante Eccentrico juxta Hypothesim Ptolomæi, in Eccentrico Deferente juxta Hypothesim alteram, quam hic sequor. Quare ut motus Planetæ Medius investigetur, captanda sunt ea temporum momenta, quibus ipse eodem cietur motu quo Epicycli centrum. Id [o] verò tantùm accidit in Veris ☌ & ☍ cum Sole; tunc enim secundâ inæqualitate exuitur, manetque solâ involutus primâ, quæ per Eccentricum salvatur; adeoque Planetæ motus à motu centri Epicycli non differt. Extra verò Conjunctionum & Oppositionum articulos, quia non solùm inæqualitate primâ involvitur, sed etiam secundâ, quæ per Planetæ motum in Epicyclo explicatur, manifestum est tunc Planetæ motum, differre à motu centri Epicycli, ac proinde sola Verarum ☌ & ☍ cum Sole momenta idonea esse, ut motus Planetæ Medius investigetur. Quia porrò [a] Planeta Soli conjunctus ejus fulgore impeditus non apparet, ac proinde inobservabilis est, Oppositiones solæ poterunt ad hoc negotium adhiberi. His præmissis, videamus quo artificio potuerit Mediorum motuum ♄. ♃. ♂. primà cognitio obtineri.

[o] §. 10. n. 3.

[a] per n. 1.

§. 2. Primùm ex comparatione simplici horum Planetarum cum Stellis Fixis utcumque innotuit singulorum revolutionis periodus, hoc est tempus quo Zodiacum absolvunt. Verùm hæc determinatio nimiùm rudis, & crassa est ob inæqualitatis præsertim secundæ admixtionem, ut patet *ex* §. 1. *hic, & ex* §. 6. *num.* 6. Necesse igitur fuit ad ☍ artitulos (ut *suprà* dixi) confugere hunc in modum.

§. 3. Quia tempore quocumque notus esse potest in Zodiaco locus, Planetæ quidem per *num.* 1. *hujus libri*, Solis verò per *num.* 55. *lib.* 1; observationibus sæpè repetitis sciri potuit tempus præter propter, quo Planeta futurus esset Soli oppositus. Circa illud igitur tempus iteratis observationibus venati sunt (quantùm licuit) ipsum Oppositionis articulum; momentum verò temporis in quod incidebat, innotuit per *num.* 45. *lib.* 5. Expectandum deinde fuit donec Planeta in eodem rursus Zodiaci loco Soli opponeretur, & temporis momentum (ut prius) per *num.* 45. *lib.* 5, debuit reperiri; sic enim intervallum ☍ primæ & secundæ notum fuit. Quia igitur in Veris ☍, centri Epicycli idem est motus qui Planetæ, Planeta verò in utrâque ☍ fuit in eodem puncto Zodiaci, liquet centrum Epicycli ab ☍ primâ ad secundam integras periodos absque fractionibus absolvisse. Ex rudiori autem notitiâ *præcedentis* §. sciri potest quot integræ periodi ab ☍ primâ ad secundam essent absolutæ. Quare temporis intervallo per numerum periodorum diviso, prodijt tempus, sive quantitas unius periodi.

§. 4. Verùm, quia difficile est reperire duas Veras ☍ Planetæ in eodem puncto Zodiaci; & si harum ☍ intervallum valdè magnum sit, ex §. 2, non potest sufficienter cognosci revolutionum numerus interea peractarum: eligantur duæ ☍, sive in diem incidant Zodiaci punctum sive non; distantes quidem magno temporis intervallo, non tamen tanto, quin ex notitiâ hactenus acquisitâ sciri possit quot interea revolu-

volutiones integræ citra errorem unius integræ, sint peractæ. Inciderit igitur prima ☍ in Zodiaci punctum H, ☍ secunda in T; à primâ autem ad secundam peractæ sint revolutiones 10, & per *num.* 45. *lib.* 5 inventis utriusque ☍ momentis notum fiat temporis intervallum. A primâ igitur ☍ ad secundam Planeta absolvit integros cir. 10, sive Gradus 3600, atque insuper arcum HT, qui notus est, eò quod H, & T sint loca Planetæ per *r* observationem nota. Quare si temporis intervallum dividatur per summam Graduum, quam efficiunt 10 circuli cum arcu HT, prodibit tempus, sive quantitas unius periodi: quæ hunc in modum obtineri poterit saltem tam exacta, ut per eam possis certò sciri, quot periodi integræ in magno temporis intervallo absolvantur.

Fig. 6.

r num. 1.

§. 5. Eligantur demùm Oppositiones binæ quàm maximo distantes intervallo, quarum una videlicet observata sit ab Antiquis, altera à teipso, vel à Tychone, aliòve Astronomo: incidant autem ex. gr. in Zodiaci puncta H, T. Jam ex notitiâ §. 4. acquisitâ constare certò potest, quot integras periodos præter arcum HT, ab ☍ primâ ad secundam Planeta absolverit. Quare operando ut *suprà* §. 4. prodibit quantitas unius revolutionis priore multò accuratior.

Illi tamen adhuc duplex imperfectio adhæret, prima est, quòd deducta sit ex locis Veris Planetæ quæ in Veris ☍ habebat, cùm debuisset deduci ex Medijs. Rationem collige ex dictis *num.* 35. *lib.* 1. *in scholio.* Altera est quod observationes vix unquam in ipsa Oppositionum momenta incidant. Hæc *num. seq.* emendabitur. Prior tantisper erit dissimulanda donec motibus horum Planetarum utcumque constitutis, possimus ex Vero loco dato Medium elicere.

§. 6. Ex quantitate notâ unius revolutionis, motus Medios unius Diei, Horæ &c. unius Mensis, Anni, 2 Annorum &c. elicies per *Reg. propert.* ut tradidi *lib.* 1. *num.* 36. & *lib.* 2. *num.* 34. §. 5.

NUMERUS XV.

Ex observatione factâ paulò ante vel post Oppositionem Veram ♄. ♃. ♂. cum Sole, momentum ipsum Veræ Oppositionis, & locum Verum Planetæ, quàm proximè colligere.

IMperfectio temporis Periodici *num. præcedente* acquisiti, Mediorumque motuum inde deductorum, hinc potissimùm erat profecta, quod observationum momenta non in ipsa Verarum ☍ momenta inciderent. Hic defectus emendabitur, si ex momento observationis, & loco Planetæ, quem tum habet, colligatur momentum ipsum Veræ Oppositionis Planetæ, & locus ejus. Id verò hunc in modum obtinebimus.

Fig. 12.

§. 1. Zodiacus esto BKC, ejusque centrum A: Ordo Signorum ex B per D in M: Planeta in C, per quem diameter transeat CAD, quæ cum Planetâ S. O. Sign. moveatur circa centrum A. Ita fit, ut punctum Planetæ oppositum D (quod *Oppositionis punctum* vocabo) eodem feratur motu quo Planetæ, qui in ♄. ♃. ♂. est tardior motu Solis. Observatus sit igitur Planetæ locus in C paulò ante Oppositionem Veram cum Sole, nimirum Sole posito in B, & nondum assecuto Oppositionis punctum D. Igitur aliquantò post observationem factam Sol Oppositionis punctum assequetur; quando ex. gr. Planeta processerit in E, & Oppositionis punctum in G. Oporteat hoc temporis momentum, & locum Planetæ E invenire.

Per *num.* 45. *lib.* 5. notum fiat momentum, quo Planetæ locus est observatus in C. Tum reperi ad hoc momentum locum Solis B per *num.* 55. *lib.* 1. & *per num.* 2. *lib.* 4. Solis notum Verum Horarium, qui sit ex. gr. Min. 2'. 23". 30'". Deinde per §. 6. *Numeri præced.* inquire motum Horarium Medium Planetæ, qui licet non sit planè (ut isthic docui) exquisitus, sufficiet tamen ut per ipsum ad accuratiorem majorem veniatur. Motum Planetæ Horarium aufer ab Horario motu Solis, & differentiam serva. Jam quia notus est locus Solis B tempore observationis, & per observationem ipsam, (quæ fit per *num.* 1. *hujus libri*) notus est locus Planetæ C, adeoque etiam locus D puncti Oppositionis, nota quoque erit BD distantia Solis ab Oppositionis puncto, D. Distantiam igitur notam BD divide per Horariorum motuum differentiam: prodibit numerus Horarum aut Minutorum, qui additus tempori observationis jam noto, (quo Planeta in C, & Sol in B) dabit tempus in cujus momento ultimo Sol assequetur Oppositionis punctum in G: & si supradictum numerum Horarum ducas in motum Solis Horarium, proveniet arcus BG, in cujus termino G, Sol Planetæ fiet oppositus, quod utrumque demonstravi. *Arithm. Pract. lib.* 5. *cap.* 6. *quæst.* 5. Cùm verò notus sit locus Solis B, itemque arcus BG, hic additus loco Solis B, dabit locum G, adeoque & Planetæ locum in E, quem in ipso Oppositionis momento habiturus est.

Sit deinde Planetæ locus observatus in F, & punctum ☍, K; Sol autem in observationis momento existens in N punctum ☍ jam pertransierit, sic ut Oppositio Vera contigerit cùm ex. gr. Planeta fuit in I, & punctum ☍ in M. Tum verò operare per omnia ut *suprà*; sed ubi per differentiam motuum Horariorum diviseris arcum KN, quo Sol in momento observationis distat ab Oppositionis puncto K, numerum Horarum, Min. &c. inde natum aufer à tempore observationis: sic enim relinquetur tempus in cujus termino Sol in M oppositus fuit Planetæ existenti in I. Rursum, ubi numero Horarum & Minutorum suprà invento per motum Solis Horarium multiplicato, repereris arcum NM, hunc aufer à Solis loco noto N; relinquetur locus M, quem Sol in ipso Veræ ☍ momento habuit.

§. 2. Ita quidem ad momentum Veræ ☍ quàm proximè accessimus; ipsum tamen nondum exactè prorsus sumus assecuti duplici ex causâ. Prima est, quia usi fumus Planetæ motu Medio, cùm uti Vero oportuisset: altera, quod cùm *ex hypothesi* observatio sit peracta paulò ante vel post Veram, motus Planetæ non fuerit idem qui centri Epicycli, affectus nempè non solâ inæqualitate primâ, sed etiam secundâ, ut ex dictis §. 1. *n.* 14. patet. Nihilominus cùm supponatur observationis momentum à momento ☍ abfuisse nonnisi modicè, & tardi sint horum Planetarum motus; neque motus Planetæ Medius, qui tantillo temporis intervallo debetur, valde sensibiliter differt à Vero, neque ipse motus Planetæ inæqualitatem secundam sensibiliter participat, adeoque à motu centri Epicycli vix quidquam differt. Quare jam instituta Oppositionis Veræ determinatio nihil magnoperè vitij habebit, quin per illam liceat ad præcisiorem adhuc Mediorum motuum inventionem pervenire.

§ 3. Po-

§. 3. Postremò notandum est, cùm Astronomi usque ad Tychonem omnes spectarint Oppositiones non Veras, sed Medias, ac proinde usi sint loco Solis, non Vero, sed Medio, etiam hae in parte observationis eorum corrigendas esse: quod fiet, si ex loco Solis Medio, quem tempore observationis antiquæ habebat, eliciatur Verus ad idem tempus: & cum eo, ut §. 1. jam docui, procedatur.

Quod si laborem reductionis jam traditæ evitare placuerit, adi Tabulam Scholij post num. 19.

NUMERUS XVI.

Mediorum motuum ♄. ♃. ♂. exactior determinatio.

ELigantur rursum duæ Veræ Oppositiones eædem quæ *supra* §. 5. *num.* 14: sic enim apparebit quid novo hoc scrutinio fuerit profectum: tum ex observationibus paulò ante vel post Oppositiones factis, colligatur, ut docui *num. præc.* §. 1. momentum ipsum Oppositionis Veræ, vel utriusque si fieri potest, antiquæ videlicet & recentis, vel saltem recentis: sed tum antiqua corrigatur saltem secundùm dicta §. 3. *num præced.* Cognitis hunc in modum momentis utriusque Oppositionis, scietur temporis intervallum quod ab antiquâ effluxit ad novam. Numerus autem revolutionum integrarum inter utramque Oppositionem peractarum, certò inibitur, si per quantitatem unius revolutionis §. 4. *vel* 5. *num.* 14, acquisitæ, jam notum temporis intervallum dividatur. Quare peragendo cætera ut *num.* 14. §. 4; prodibit quantitas unius revolutionis Planetæ per Zodiacum priore accuratior. Hinc jam Planetæ motus Medij, qui debentur Diei, Horæ, Minuto &c. per *Regulam Proportionum* reperientur ut *Lib.* 1. *Num.* 36.

Verùm, quia quantitas Periodica (ut monui *supra num.* 14. §. 5.) hactenus inventa, est Vera, non Media; etiam motus Medij ex eâ deducti non erunt usquequaque absoluti, quamvis differentiâ adeo parvâ, quæ ferè contemnenda videatur. Licebit tamen postea regressu facto, etiam hunc, siquis est, defectum corrigere, ut *num.* 14. §. 5. jam fuit insinuatum.

NUMERUS XVII.

Ex tribus Veris ♄. ♃. ♂. cum Sole Oppositionibus, Eccentricitatem, locum Apogei, locum Medium Planetæ, ad ipsa Oppositionum momenta, invenire.

Fig. 7.

§. 1. ECcentricus Planetam deferens esto FKE, Zodiaci ac Mundi centrum A. Eligantur tres Veræ ☍, & nota fiant per *num.* 45. *lib.* 5, momenta temporis quibus accidunt; per observationem verò juxta methodum *num.* 1. reperiantur Planetæ loca Vera ad singularum ☍ momenta jam nota. Quod si observatio in momenta ☍ non inciderit, momenta ipsa, & in ijs loca Planetæ Vera per *num.* 15 reperies. Vel utere Tabulâ *Scholij post num.* 19, ut laborem istum effugias. Ad momentum ☍ primæ Planeta fuerit in Eccentrici puncto C, ad momentum secundæ in D, ad momentum tertiæ in E: ducanturque rectæ AC, AD, AE, quæ postrema continuetur in F; item rectæ DC, CF; item perpendicularis CP, FI, FN. His ita constitutis,

§. 2. Ante omnia notandum est, ut Eccentricitas & locus Augis, seu Apogei reperiantur, opus esse, ut notus existat Planetæ motus Æqualis in Eccentrico, sive motus Anomaliæ, ut ex discursu toto sequenti patebit. Reperitur ille si à Planetæ motu Medio in Zodiaco *x* auferatur Apogei motus. Quare, cùm inventus quidem jam sit *Numeris præced.* motus Medius, Apogei verò motus nequaquam, necesse est motum Anomaliæ adhuc nesciri. Verùm quia ex observationibus antiquis & novis ut *num.* 3. §. 12. indicatum est, certò constat Apogei motum esse tardissimum ac ferè parem motui Fixarum, constabit pariter motum Anomaliæ, à motu Medio in Zodiaco sensibiliter non differre, cùm ipsorum differentia sit lentissimus ille Apogei motus. Quare, quod hic omnes Astronomi faciunt, sed Lectore plerumque non præmonito, utemur motu Medio tamquam motu Anomaliæ, & cogitabimus tantisper Apogeum non moveri, sed sub eodem Zodiaci puncto ad tempus hærere. Ita enim ejus in Zodiaco locum, ad tempus datum absque errore (ex hoc quidem capite) notabili assequemur. His præmissis,

x propr. 5. *n.* 25. *l.* 1.

§. 3. Jam ad indaginem propositam aliquando accedemus. Quoniam nota sunt momenta trium ☍, etiam notum erit tempus à primâ C ad secundam D, & tempus à secundâ D ad tertiam E. His temporibus qui debeantur motus Medij, sive arcus Zodiaci, scitur ex *num. præced.* ac proinde juxta monitum præmissum scientur etiam motus Anomaliæ ijsdem temporibus debiti, ac proinde abjectis integris circulis, noti sunt arcus Eccentrici CD & DE, quos serva.

§. 4. Quia ex §. 1. nota sunt Planetæ loca Vera in secundâ ☍ D, in tertiâ E (quæ in Zodiaco determinant rectæ AD, AE ultra D & E ad Zodiacum protractæ) notus erit *o* angulus DAE, sive FAN. Quare in trigono FNA rectangulo ad N nota erit *a* proportio AF ad FN, & angulus *q* NFA. angulus autem DFE, sive DFA notus est *b* propter arcum DE ex §. 3. notum. Ergo totus DFN notus est. Ergo in trigono DNF rectangulo ad N, nota est ratio DF, ad FN. Quare cùm nota sit ratio AF ad FN, & DF ad FN, etiam DF ad FA *f* nota erit.

o per 33.6. *elem.*
a per probl. 1. *c.* 3. *Geo. prac.*
q per 32.1.
b per 33.6. *elem.*
f per lem. 2. *ante num.* 41. *lib.* 2.

§. 5. Quia ex §. 1. nota sunt Planetæ loca Vera in primâ ☍ C, & in tertiâ E, notus erit *c* angulus EAC, eorum distantiam in Zodiaco mensurans. Ergo etiam *d* CAF, sive IAF. Quare in trigono AIF rectangulo ad I, nota fit ratio AF ad FI. Rursum propter arcum CDE ex §. 3. notum, angulus *e* EFC, seu AFC, notus erit. Notum verò jam feci CAF. ergo & tertius *f* FCA, sive FCI notus erit. Igitur in trigono CIF rectangulo ad I, nota fit ratio *t* CF ad FI. Cùm igitur nota jam sit ratio AF ad FI, & CF ad FI, etiam AF ad CF, sive CF ad FA nota erit. Atqui ex §. 4. etiam nota fuit ratio DF ad FA. Ergo etiam ratio CF ad DF nota erit.

c per 33. 6.
d per 13. 1.
e per 33.6.
f per 32. 1.
t per probl. 1. *cap.* 3. *Geo. pract.*

§. 6. Quia ex §. 3. notus est arcus DC, etiam *i* angulus CFD, sive CFP notus erit. Igitur in trigono CPF rectangulo ad P, nota fit ratio *k* CF ad FP & CP. Sed ex §. 5. nota fuit ratio CF ad totam DF. Ergo etiam ratio CF ad DP erit nota. Atqui jam statim etiam nota erat ratio CF ad CP. Ergo & DP ad CP nota erit. Quare cùm in trigono CPD rectangulo ad P, nota sit ratio duorum laterum DP, CP, per *prob.* 5. *cap.* 3. *Geom. pract.* notum fiet latus DC in partibus laterum DP, CP, hoc est in partibus ipsius CF, ac proinde ratio DC ad CF erit nota.

i per 33. 6.
k per probl. 1. *cap.* 3 *Geo. pract.*

nota. Jam quia ex §. 5. notus est arcus C D, subtensa D C etiam *m* nota erit in partibus Sinus totius, qui est radius Eccentrici F D E. Quare cùm nota jam sit ratio D C ad C F, etiam *p* C F in partibus Sinus totius nota erit. Igitur arcus *n* C F non latebit: quo addito ad arcum C D E notum ex §. 3, etiam totus F C D E notus erit: cujus quantitas indicabit utrùm centrum Eccentrici sit in portione E D F, (quod hîc contingit) utrùm in portione alterâ, an in rectâ ipsâ E A F.

m per lem. ante probl. 1. cap. 2. Geo. pract. p per reg. proport. n per prob. 9. cap. 2. Geo. pract.

§. 7. Sit ergo Eccentrici centrum B, per quod & per A centrum Mundi ducatur Apsidum linea K M. Quia ex §. 5. nota est ratio A F ad C F, & jam statim nota fuit C F in partibus Sinus totius, seu B K radij Eccentrici, etiam A F in iisdem erit nota. Rursum, quia propter notum jam arcum F C D E, etiam notus est residuus E G F, ejus subtensa E F in partibus radij Eccentrici B K fiet nota. Quare cùm in iisdem etiam nota jam sit A F, erit & reliqua A E. Rectangulum igitur E A F, hoc *t* est K A M, notum est in quadratis partibus radij B K. Sed aggregatum ex rectangulo K A M & quadrato B A, æquatur quadrato radij *u* B K. Quare si rectang. K A M demas à quadrato radij, remanebit quadratum B A notum, adeoque *x* & latus ejus B A, nempè Eccentricitas quæsita, in partibus radij Eccentrici nota erit.

t per 35. 3. u per 5. 2. x per ex tract. rad.

§. 8. Ex centro Eccentrici B ducatur B O G perpendicularis ad E F, quæ per §. 3. bisecta erit in O. Quia ex §. 7. notæ sunt A F, E F in partibus radij B K, etiam semissis O F erit in iisdem nota: quâ demptâ ex notâ A F, reliqua A O in partibus radij nota erit: in quibus cùm etiam nota sit Eccentricitas B A, in trigono B O A rectangulo ad O, innotescet angulus A B O, & arcus M G. Hunc si demas ex arcu noto E G (est enim E G semissis arcus E G F noti ex §. 6.), notus relinquetur arcus M E: quî demptus à semicirculo notam relinquet E K Anomaliam Mediam Planetæ in momento tertiæ *ϑ*. Rursum ab arcu jam noto E K aufer E D ex §. 3. notum; nota remanebit D K Anomalia Media Planetæ ad momentum *ϑ* secundæ: & si D K subducas ex D C noto per §. 3: notus relinquetur arcus C K, quo dempto à Grad. 360, notus relinquetur K E C, Anomalia Media Planetæ ad momentum *ϑ* primæ.

Fig. 8. §. 9. Ductis deinde radijs B C, B D, B E, constituuntur anguli A C B, A D B, A E B. Hi sunt Æquationes Centricæ, seu primæ inæqualitatis, quæ Planetæ in singulis *ϑ* competunt. Quia arcus K C ex §. 8. adeoque & angulus K B C notus est, etiam C B A notus erit. Eccentricitas porrò A B in partibus radij B C est jam nota ex §. 7. Ex notis igitur binis lateribus A B, B C cum angulo C B A *y* reperietur Æquatio A C B. Eodem modo ex notis jam arcubus D K, E K, reperiuntur Æquationes A D B, A E B. Æquationes jam inventas locis Veris Planetæ ex §. 1. notis, adde *o* vel deme: prodibunt loca Media in Zodiaco ad singula *ϑ* momenta.

y per probl. 10. cap. 3. Geo. pract. o vide propr. 6. an. 25. lib. 2. a per 32. 1.

§. 10. Postremò locum Apogei in Zodiaco sic invenies. Quia ex §. 8. notus est arcus Anomalisticus D K adeoque angulus D B K, is verò *a* æqualis est summæ duorum D A B, A D B, etiam hæc summa erit nota: à quâ si demas A D B ex §. 9. notum, relinquetur notus D A B, seu D A K, metiens distantiam loci Veri Planetæ à loco Vero Apogei. Quare cùm ex §. 1. notus sit locus Verus Planetæ etiam locus Verus Apogei notus erit ad momentum *ϑ*, quo Planeta erat in Eccentrici puncto D. Eodem modo ex notis arcubus G K, B K &c. locum Apogei ad duas *ϑ* reliquas facilè elicies.

NUMERUS XVIII.

Eadem aliter efficere.

Prior modus fuit Ptolomæi, & Regiomontani ex illo: hic verò est Herigonij. *Fig. 9.*

§. 1. Eccentricus Planetam deferens esto F C E, ejus centrum K; Zodiaci ac Mundi centrum B; linea Apogei H K B F. Eligantur tres Veræ *ϑ*, & nota fiant tam momenta temporis quibus accidunt, quàm loca Planetæ in Zodiaco ad singula illa *ϑ* momenta, ut *num. præced.* Sit autem ad momentum primæ *ϑ* Planetæ centrum in Eccentrici puncto C, ad momentum secundæ in D, ad tertiæ in E: ducanturque rectæ K E, K D, K C, B C, B D, B E quæ postremæ continuentur in G; item E D, D C, C G, D G.

§. 2. Ex differentijs Mediorum motuum intervallis Oppositionum temporaneis debitorum, noti sunt arcus C D, D E, C E, anguliquc C K D, D K E, C K E, juxta dicta *num. præced.* §. 3. & 2. Quia autem nota sunt ad *ϑ* singulas loca Planetæ Vera, etiam Verorum locorum distantiæ, adeòque & anguli C B D, D B E, C B E eas mensurantes, noti erunt Supponitur verò Apogei H locus in Zodiaco ex observatione ex. gr. maximæ tarditatis crassò saltem modo esse cognitus, ut sciri possit, inter quas binas *ϑ* Veras è tribus, ille versetur, ac proinde inter quæ ex tribus C, D, E Planetæ locis in Eccentrico, Apogeum H consistat. His positis, solutione 5 triangulorum B D G, B C G, B D C, D K C, B D K quæsita obtinebimus.

§. 3. Ponatur B D esse 200000. Quia notus est *a* angulus D B E, & *b* D B G; & quia notus *c* est D K E, etiam nota erit semissis ejus *d* D G E. In triangulo igitur B D G ex angulis notis *e* nota fiet B G in partibus B D.

a ex §. 2. b per 13. 1. c ex §. 2. d per 20. 3. e per probl. 7. cap. 3. Geo. pract.

§. 4. Quia notus *f* est C B E, erit & *g* C B G, & quia notus est C K E, erit & *i* semissis ejus C G E nota. In triangulo igitur B C G, ex notis angulis & latere noto B G in partibus B D, notum *m* fiet latus B C in iisdem.

f per §. 2. g per 13. 1. i per 20. 3. m per probl. 9. cap. 3. Geo. pract.

§. 5. In triangulo igitur B D C, nota sunt duo latera B D, B C (nam ex §. 4, B C nota fuit in partibus ipsius B D) & angulus C B D ex §. 2. notus est. Ex his ergo reperies *n* angulum B D C, & latus D C in partibus B D.

n per prob. 10 cap. 3. Geo. pract.

§. 6. In triangulo æquicruri D K C quia notus *o* est angulus ad K, etiam summa *p* angulorum ad basim nota erit. Quare cùm *r* hi sint æquales, etiam eorum unus K D C notus erit. Ab hoc si demas notum *s* B D C, notus relinquetur B D K. Deinde in eodem æquicruri triangulo ex notis jam angulis, & latere D C *a* noto in partibus B D, notum fiet *b* latus K D in iisdem.

o ex §. 2. p per 32. 1. r per 5. 1. s ex §. 5. a ex §. 5. b per probl. 9. cap. 3. Geo. pract.

§. 7. In triangulo B D K ex *t* notis lateribus B D, K D, & *u* angulo B D K, innotescet *x* Eccentricitas B K, in partibus nimirùm, quarum B D erat 200000: innotescent item angulus B D K qui est Æquatio, & K B D, sive H B D, metiens distantiam loci Apogei in Zodiaco à loco, quem Planeta positus in Eccentrici puncto D, in Zodiaco obtinebat. Is autem ex observatione notus est. Ergo etiam locus Apogei ad momentum illius *ϑ*, quo Planeta erat in Eccentrici puncto D, notus erit.

t per §. 6. u per eund. x per probl. 10. cap. 3. Geo. pract.

Ut

Ut verò BK Eccentricitas nota fiat in partibus, quarum Eccentrici radius KD est 100000, sic age. Quoniam KD, BK, inventæ sunt in partibus, quarum BD erat 200000, sit KD 17256, & BK 3247, Tum fiat ut KD 17256 ad BK 3247, ita KD 100000 ad Quartum 18817: erit Eccentricitas BK 18817 quarum radius KD est 100000.

z vide propr. 6. nu. 25. lib. 1.

§. 8. Æquationem BDK §. 7. repertam adde z vel deme loco Planetæ Vero, quem in Zodiaco sortitur ad momentum ☍, quo ipse erat in Eccentrici puncto D: prodibit locus ejusdem in Zodiaco Medius ad momentum idem.

a per 32. 1.
c ex §. 2.

§. 9. Quod si etiam desideras Anomalias Medias HE, HEFC, HEFD, ita procede. Quoniam HKD angulus a æquatur duobus KBD, BDK ex §. 7. jam notis, etiam ipse, adeoque & arcus HD, notus erit, quo dempto à Grad. 360, nota relinquitur Anomalia HEFD. Deinde quia notus c est arcus ED, & pars ejus HD, etiam reliquus, Anomalia nempè EH, notus erit. Postremò, quia HD & ex §. 2. DC noti sunt, erit etiam notus HC: quo dempto à Grad. 360, nota fit Anomalia HEFC.

o per 33. 6.
b per 13. 1.
n per prob. 10. cap. 3. Geo. Pract.

§. 10. Postremò, si etiam ad duas ☍ reliquas C, E, expetitur locus Apogei & locus Planetæ Medius; sic age. Quia ex §. 9. notus est arcus HC, adeoque & angulus o HKC, etiam b BKC notus erit. Ex §. autem 7. notæ sunt BK, KC. In triangulo igitur KBC, ex notis BK, KC, BKC, n innotescent angulus HBC (metiens distantiam loci Veri Apogei tempore ☍ C, à loco Vero Planetæ positi in C), & angulus Æquatorius BCK; qui additus vel demptus loco Vero Planetæ, dabit locum Medium Planetæ in Zodiaco tempore ☍ C. Non absimili modo reperietur locus Apogei Verus, & Planetæ Medius ad ☍ tertiam E.

NUMERUS XIX.

Locum Apogei, & Planetæ locum Medium ad alicujus Oppositionis momentum exactiùs determinare.

DUobus Numeris præcedentibus ita processum fuit, ac si Eccentrici centrum ad tres ☍ assumptas eamdem retinuisset distantiam à Zodiaci centro A. Atqui secundùm Hypothesim quam secuti sumus, quamque *num.* 10. *sub finem* §. 3. phœnomenis consentaneam esse insinuavimus, non fuit eadem, sed diversa ad singulas. Unde neque locus Apogei, neque Planetæ loca Media ad dictarum ☍ momenta eam præcisionem habent, quæ scopum attingat: Eccentricitas quippe sic reperta, media quædam est inter eas, quæ singulis ☍ debetur. Difficillima porrò est hujus negotij investigatio, in quâ mirum dictu quantùm summi quique Astronomi, Ptolomæus, Regiomontanus, Copernicus, Keplerus, Bullialdus alijque laboraverint. Cæteris accuratiores videntur hic fuisse Keplerus, & Bullialdus; & ipsi tamen, ut reliqui omnes, non nisi à posteriori, & quasi tentando varieque limitando ad quæsitum enituntur, ac tandem aliquid conjecturæ æstimationique coguntur relinquere. Qui modos eorum desiderat, ipsos adeat authores. Eos sanè eorum conatus reperiet, quales dixi; adhæc obscuros satis & explicatu intellectuque non admodum faciles. Via, quam hîc subjungo, plana est & captu facilis, neque minùs, quàm cæteræ, ad quæsitum obtinendum (nisi fallor) idonea.

Eligatur Vera aliqua ☍ Planetæ cum Sole, ad cujus momentum velis locum Apogei & Planetæ locum Medium inquirere; quam ☍ primam appellabimus. Huic alias duas ☍ adjunge, & cum hac ☍ trinitate inquire per *num.* 17. *vel* 18 ad momentum primæ ☍ locum Apogei & Planetæ locum Medium. Muta deinde triadem illam, unam ☍ novam vel duas assumendo, primâ retentâ; & cum hac novâ triade locum Apogei & Planetæ locum Medium ad ejusdem primæ ☍ momentum rursus inquirito. Hunc in modum si triadem Oppositionum (retentâ semper ☍ primâ) sæpius variando, scrutinium jam dictum identidem iteraveris, acquires ad momentum primæ ☍ plura Apogei loca, inter quæ medium quemdam elige, quem non immeritò judicabis propius accedere ad veritatem. Pari modo ex multis ad ejusdem primæ ☍ momentum acquisitis locis Medijs æstimatione factâ, mediocris deligetur. Ita manum tollo de Tabulâ.

Reliquum est, ut quo loco Apogeum diversis temporibus à præcipuis aliquot Astronomis repertum fuerit, subjectâ Tabellâ indicemus. In quâ videbis ad Annum 1600 Longomontanum & Lansbergium Gradibus integris dissidere. Multùm quoque ab alijs dissentit Copernicus. Neque absimilis est inter Keplerum & Bullialdum discrepantia in loco Aphelij, quamvis eam prætermiserim in Tabellâ exprimere. Unde non immeritò *supra* dixisse mihi videor, eâ, quam isthic exposui, viâ haud longiùs profectò nos abituros à vero, quàm si aliam quamcumque ab Authoribus illis traditam, tenuerimus.

APOGEI LOCA AD ANNOS CHRISTI COMPLETOS REPERTA.

	Plan.	Sign.	Grad.	′	″
à Ptolomæo Anno 136.	♄	♏	23	0	0
	♃	♍	11	0	0
	♂	♋	25	30	0
ab Albategnio Anno 880	♄	♐	14	58	0
	♃	♍	24	58	0
	♂	♌	6	18	0
à Copernico Anno 1525	♄	♐	27	42	0
	♃	♎	6	21	0
	♂	♌	27	0	0
à Longom. An. 1600	♄	♐	26	26	57
	♃	♎	7	31	58
	♂	♌	28	41	56
à Lansbergio An. 1600	♄	♐	25	55	12
	♃	♎	3	8	55
	♂	♌	25	32	6
à Ricciolo An. 1644.	♄	♐	27	13	20
	♃	♎	8	36	0
	♂	♌	29	50	2

Scholium.

Quando primæ inæqualitatis investigatio ♄, ♃, ♂ omnis ducitur ex Veris eorumdem cum Sole Oppositionibus, neque semper propriæ observationes in promptu sunt, necessarium judicavi sequentes ex Keplero & Longomontano Tabellas hic apponere.

OPPOSITIONES VERÆ ♄, ♃, ♂, CUM SOLE EX LONGOMONTANO.

Ordo	Stylo veteri Anni	Mens.	D.	Hafniæ H.	l.	Locus Planetæ observatus. Sig.	grad.	l.	Locus Planetæ supputatus. Sig.	grad.	l.
					Pro ♄						
1	1582	Aug.	21	2	0	♓	7	26	♓	7	$22\frac{1}{3}$
2	1583	Sept.	3	1	0	♓	19	50	♓	19	$48\frac{1}{3}$
3	1584	Sept.	15	6	30	♈	2	34	♈	2	$35\frac{1}{4}$
4	1585	Sept.	28	19	30	♈	15	$39\frac{1}{2}$	♈	15	$39\frac{1}{4}$
5	1586	Octob.	12	11	0	♈	29	2	♈	29	4
6	1587	Octob.	26	9	0	♉	12	46	♉	12	46
7	1588	Nov.	8	10	10	♉	26	44	♉	26	$44\frac{1}{3}$
8	1589	Nov.	22	14	30	♊	10	53	♊	10	$53\frac{1}{3}$
9	1590	Dec.	6	20	30	♊	25	10	♊	25	$8\frac{1}{3}$
10	1591	Dec.	21	1	0	♋	9	$24\frac{1}{2}$	♋	9	23
11	1595	Ian.	30	21	0	♌	21	$15\frac{1}{2}$	♌	21	$10\frac{1}{3}$
12	1608	Iul.	9	3	0	♑	26	53	♑	26	$57\frac{1}{2}$
13	1609	Iul.	21	13	0	♒	8	31	♒	8	$31\frac{1}{5}$
14	1610	Aug.	2	22	30	♒	20	10	♒	20	$14\frac{1}{4}$
15	1611	Aug.	15	16	0	♓	2	12	♓	2	$13\frac{1}{2}$
					Pro ♃						
1	1583	Sept.	6	20	10	♓	23	33	♓	23	$38\frac{1}{7}$
2	1584	Octob.	13	7	20	♉	22	0	♉	22	$0\frac{1}{4}$
3	1591	Apr.	23	19	0	♏	13	10	♏	13	9
4	1595	Sept.	12	6	10	♓	18	56	♓	18	$54\frac{1}{4}$
5	1596	Octob.	18	12	0	♉	5	40	♉	5	35
6	1607	Sept.	17	11	10	♈	4	10	♈	4	$8\frac{1}{2}$
7	1610	Dec.	30	14	40	♋	19	36	♋	19	$38\frac{1}{2}$
8	1613	Mart.	1	22	0	♍	21	45	♍	21	$42\frac{1}{4}$
					Pro ♂						
1	1580	Nov.	18	1	30	♊	6	$27\frac{1}{2}$	♊	6	$27\frac{1}{3}$
2	1582	Dec.	28	4	0	♋	16	$54\frac{1}{2}$	♋	16	$55\frac{1}{2}$
3	1585	Ian.	30	19	15	♌	21	$35\frac{1}{2}$	♌	21	37
4	1587	Mar.	6	7	20	♍	25	42	♍	25	$42\frac{1}{2}$
5	1589	Apr.	14	6	20	♏	4	23	♏	4	$26\frac{1}{2}$
6	1591	Iun.	8	7	45	♐	26	42	♐	26	$45\frac{1}{3}$
7	1593	Aug.	25	17	30	♓	12	15	♓	12	$14\frac{1}{4}$
8	1595	Octob.	31	0	40	♉	17	$30\frac{1}{1}$	♉	17	$29\frac{1}{6}$
9	1597	Dec.	13	16	0	♋	2	27	♋	2	26
10	1600	Ian.	18	14	0	♌	8	37	♌	8	$37\frac{1}{6}$
11	1602	Febr.	20	14	15	♍	12	26	♍	12	24
12	1604	Mart.	28	16	40	♎	18	$36\frac{1}{6}$	♎	18	$36\frac{1}{3}$
13	1608	Iul.	24	2	0	♒	11	10	♒	11	$13\frac{1}{3}$
14	1610	Octob.	8	16	50	♈	25	30	♈	25	$26\frac{1}{7}$

NUMERUS XX.

Motus Medios ♄. ♃. ♂. denuò ad limam revocare atque ultimò tandem determinare.

Resumantur binæ ♂ Veræ quàm longissimo temporis intervallo distantes, eædem quæ fuerant assumptæ *num.* 14. §. 5. *&* *num.* 16. ut appareat quid extremo hoc conatu fuerit profectum. Si observatio Veræ ♂ recentis inciderit in ipsum Veræ ♂ momentum, id notum fiat per *num.* 45. *lib.* 2. si non inciderit, momentum ipsum Veræ ♂ & locus Planetæ Verus in eo, colligantur *per num.* 15. Idem perage circa ♂ antiquam, aut, si id non licet, corrigatur ea saltem juxta dicta §. 3. *num.* 15, ipsiusque momentum, & locus Planetæ Verus in eo, prout ex fide antiqui Observatoris nota sunt, assumantur. Ad momenta igitur nota utriusque Oppositionis Veræ oportet loca Planetæ Vera ad Media reducere hunc in modum.

Per *num.* 17. 18. 19, notus est Planetæ motus Medius ad aliquod momentum temporis, quod assumo pro Epochâ. Temporis intervallum inter hanc Epocham & momentum Veræ ♂ antiquæ vel novæ datur.

tur. Igitur per *num.* 16 collige motum Medium huic intervallo debitum; quem, si Epocha præcedit momentum ☍, adde Medio motui Epochæ; deme si sequitur: prodibit [a] motus & locus Medius Planetæ ad momentum Veræ ☍ antiquæ vel novæ, ut patet ex *num.* 53. *lib.* 1.

[a] *Vide dictum num.* 54. *lib.* 1.

Ex locis Planetæ Medijs ad utriusque ☍ Veræ momenta jam notis quantitas accurata unius revolutionis Mediæ centri Epicycli elicietur. Ad momentum Veræ ☍ antiquæ locus Medius Planetæ, seu centri Epicycli (idem quippe tunc est utriusque) sit in 3. ad momentum Veræ ☍ recentis, esto in T. Per quantitatem unius revolutionis inventam *num.* 16. divide tempus, seu intervallum ☍ antiquæ & recentis. Prodibit numerus integrarum revolutionum, quas eo intervallo centrum Epic. absolvit citra errorem unius integræ, ad quod certò cognoscendum, quantitas *num.* 16. inventa plus quàm satis exacta est.

Fig. 6.

Igitur ab ☍ antiquâ ad novam centrum Epic. absolvit integros circulos ex. gr. 40, atque insuper arcum 3 T, qui notus est, cùm loca Mediæ, 3, T sint nota. Quare si Epicycli centrum 40 circulos, sive Grad. 14400 cùm arcu 3 T ex. gr. 87 Gr. motu Medio percurrit ab ☍ antiquâ ad novam Annis ex. gr. 1206: igitur unum circulum nempè Grad. 360, quot Annis motu Medio absolvit? Divide Annos 1206 per Grad. 14400†87, prodibunt anni, quibus motu Medio centrum Epicycli, seu Planetæ unum Zodiacum percurrit; hoc est prodibit quantitas unius revolutionis Mediæ accuratior ijs, quæ *num.* 14 & 16 sunt inventæ.

Ex quantitate justâ revolutionis Mediæ jam notâ, per Regulam proport. reperientur justiores etiam motus Medij unius Horæ, Diei, Anni, &c. plurium Horarum, Dierum, Annorum &c. ut docui *num.* 36. *lib.* 1.

Una revolutio Media Copernico est.						
	Ann. Ægyp.	D.	H.	I.	II.	III.
♄	29.	161.	22.	28.	3.	22.
♃	11.	315.	15.	2.	10.	30.
♂	1.	321.	22.	19.	49.	48.

Ejus motum Medium, seu Longitudinis Diurnum, & Annuum vide apud ipsum. Accuratiores sunt motus Longomontani, Kepleri & Riccioli, quos in Tabulâ subjectâ exhibeo.

	Motus Medij ex Longomontano.							
		Gr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Diurnus.	♄	0	2	0	35	24	43	46
	♃	0	4	59	15	54	13	8
	♂	0	31	26	39	28	14	20
Annuus.	♄	12	13	35	23	33	16	50
	♃	30	20	31	44	0	0	0
	♂	191	17	10	6	0	0	0

	Motus Medij ex Keplero.							
		Gr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Diurnus.	♄	0	2	0	35	25	21	19
	♃	0	4	59	15	59	8	42
	♂	0	31	26	39	11	41	11
Annuus.	♄	12	13	35	29	14	39	34
	♃	30	20	32	14	47	54	29
	♂	191	17	8	26	5	31	55

	Motus Medij ex Ricciolo.							
		Gr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Diurnus.	♄	0	2	0	35	25	21	19
	♃	0	4	59	15	59	8	42
	♂	0	31	26	39	11	41	11
Annuus.	♄	12	13	35	29	14	39	34
	♃	30	20	32	14	47	54	30
	♂	191	17	8	26	5	31	55

Si per Annuum motum singulorum dividatur totus circulus seu Grad. 360, prodibit tempus unius integræ revolutionis Mediæ secundùm singulos Tabellarum Authores.

NUMERUS XXI.

Radicem motus Medij ♄, ♃, ♂ ad datam Epocham statuere: atque inde motum Medium eorumdem ad tempus quodcumque invenire.

Epocha data sit initium Annorum Christi Dei, ad quam oporteat Radicem Medij motus statuere. Per *num.* 17.18.19. sed utendo in eâ motibus Medijs *præcedenti Numero* jam ultimò elimatis, reperiatur ad aliquod temporis momentum Planetæ motus Medius, seu Longitudo Media. Deinde per *Num.præced.* collige motum Medium debitum intervallo temporis, quo momentum illud distat ab Epochâ Christi; hoc est reperi quot Gradus (abjectis integris circulis) eo temporis intervallo Planetæ, sive Epicycli centrum, motu Medio præcesserit in Zodiaco. Hos Gradus, si Epocha Christi præcessit momentum temporis, ad quod Longitudo Media Planetæ fuit reperta, deme Longitudini Mediæ repertæ; adde, si sequitur. Prodibit Radix quæsita, nempè Longitudo Media, seu motus Medius Planetæ ad Epocham Christi. Ratio patet ex *num.* 54. *lib.* 1.

Motu Medio ad datam Epocham sic constituto, exinde motum Medium ad momentum temporis quodcumque tam subsequens Epocham quàm præcedens, eodem prorsus modo reperies, quo is ad ipsam Epocham fuit repertus.

Demonstratio patet ex *num.* 54. *lib.* 1.

Radices Medii motus ex Longomontano ad annum 1. Christi ineuntem in meridie Diei 1. Ian. Hafniæ.

	Sig.	Grad.	/.	//.
♄	2	12	32	51
♃	5	29	56	46
♂	1	9	39	14

Radices Medii motus ex Keplero in meridie Diei 1. Ian. Anni 1. Christi Uraniburgi.

	Sig.	Grad.	/.	//.
♄	2	12	36	23
♃	5	29	49	33
♂	1	10	32	10

Radices Medii motus ex Ricciolo ad annum 1. Christi ineuntem in ultimo meridie Decembris præceo. sub meridiano Bononiensi.

	Sig.	Grad.	/.	//.
♄	2	12	33	50
♃	5	29	45	0
♂	1	10	0	50

NUMERUS XXII.

Motum Apogei ♄. ♃. ♂. Diurnum, Annuum &c. invenire.

Comparentur duo Apogei loca quàm longissimo temporis intervallo distantia, vel eo artificio quod exposui *num.* 17, 18, 19, vel quocumque alio reperta. Quorum utrumque vel alterum si tuo marte reperire desideras, per methodum *num.* 17. & 18, in eâ exequendâ utere Medijs motibus *num.* 20 elimatis. Deinde differentiam Longitudinum inventorum locorum divide per dies vel annos intervalli. Prodibit Apogei motus Diurnus vel Annuus; ut patet ex Regulâ proportionum.

Exemplum sit in ♄. Ptolomæus Anno Christi 136 completo, nactus est Apogeum ♄ in ♏ Gradu 23: Ricciolus Anno 1644 completo in ♐ Gradu 27. 13'. 20''. differentia Longitudinum est Grad. 30. intervallum temporis sunt Anni 1508. Quoniam igitur Apogeum ♄ Annis 1508 percurrit in Zodiaco Grad. 30; igitur Anno uno quot Minuta absolvit? Per Reg. prop. prodibit Apogei ♄ motus Annuus, qui petebatur.

Motum Diurnum vel Annuum aggregando, hoc est per datum Dierum vel Annorum multiplicando, procreantur motus Apogei dato Dierum vel Annorum numero congruentes.

Una revolutio Apogei ♄, ♃, ♂ Copernico est Annorum Ægyptiorum

♄ 14917
♃ 21237
♂ 16416

	Motus Apogei ex Longomontano.							
		Gr.	/.	//.	///.	IV.	V.	VI.
Diurnus.	♄	0	0	0	13	10	31	17
	♃	0	0	0	9	30	22	10
	♂	0	0	0	12	18	0	7
Annuus.	♄	0	1	20	12	0	0	0
	♃	0	0	57	52	0	0	0
	♂	0	1	14	52	0	0	0

		Motus Apogei ex Keplero.						
		Gr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Diurnus.	♄	0	0	0	12	25	53	1
	♃	0	0	0	7	45	2	17
	♂	0	0	0	10	59	50	18
Annuus.	♄	0	1	15	36	27	29	4
	♃	0	0	47	8	58	56	27
	♂	0	1	6	54	0	59	30

		Motus Apogei ex Ricciolo.						
		Gr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Diurnus.	♄	0	0	0	16	26	23	0
	♃	0	0	0	14	50	0	0
	♂	0	0	0	11	30	0	0
Annuus.	♄	0	1	40	0	0	0	0
	♃	0	1	30	0	0	0	0
	♂	0	1	10	0	0	0	0

Corollarium.

Motus Anomaliæ Diurnus, Annuus &c. habetur, si à motu Medio Diurno, Annuo &c. per *num.* 20 reperto, subducatur motus Diurnus, Annuus &c. Apogei. Patet ex *lib.* 1. *num.* 25. *propr.* 5.

NUMERUS XXIII.

Radicem motus Apogei ♄. ♃. ♂, atque inde motum Apogei eorumdem ad tempus quodcumque, invenire.

Epocha detur initium annorum Christi Dei, ad quam oporteat motus Apogei Radicem statuere. Per *num.* 17, 18, 19, sed adhibitis Medijs motibus *num.* 20 elimatis, reperiatur Apogei locus, seu Longitudo ad aliquod temporis momentum. Deinde per *num. præced.* reperi motum Apogei debitum temporis intervallo, quo momentum illud distat ab Epochâ Christi; hoc est, reperi quot Gradus eo temporis intervallo Apogeum processerit in Zodiaco. Hos Gradus, si Epocha præcessit momentum ad quod Apogei locus repertus fuit, deme loco reperto; adde, si sequitur. Prodibit Radix quæsita, nempè locus ad Epocham Christi.

Apogei loco ad datam Epocham sic constituto, exinde locum ejusdem ad temporis momentum quodcumque tam subsequens Epocham quàm præcedens, eodem prorsus modo reperies, quo is ad ipsam Epocham inventus fuit.

Utriusque *Demonstratio* patet ex *num.* 54. *lib.* 1.

Radices motus Apogei ex Longomontano ad Annum Christi 1. in meridie Diei 1. Ian. Hafniæ.

	Sig.	Grad.	I.	II.
♄	7	20	48	12
♃	5	11	48	50
♂	3	15	25	20

Radices motus Apogei ex Keplero ad Annum 1. Christi in meridie Diei 1. Ian. Uraniburgi.

	Sig.	Grad.	I.	II.
♄	7	22	19	36
♃	5	15	53	50
♂	3	29	14	40

Radices motus Apogei ex Ricciolo ad Annum Christi 1. ineuntem in ultimo meridie Decembris præced. sub meridiano Bononiensi.

	Sig.	Grad.	I.	II.
♄	7	11	33	23
♃	4	27	30	2
♂	3	27	43	22

Corollarium.

Anomaliam Mediam ♄. ♃. ♂, ad datum tempus sic reperies. Sit ex. gr. Planeta in V. ad d. t. inquire motum Medium centri Epic. ♈ H T per *num.* 21, & motum Apogei ♈ H per *num.* 23. Hic illi demptus dabit H T, sive E V Anomaliam Mediam ad t. d. centri Epicycli, sive Planetæ. Fig. 6.

NUMERUS XXIV.

Eccentricitatem maximam, mediam, minimam ♄. ♃. ♂, invenire.

§. 1. Oporteat invenire primò Eccentricitatem maximam. Observa aliquam ☍ Veram Planetæ cum Sole, hoc est observa locum aliquem Verum Planetæ oppositum Vero loco Solis, vel ab alio observatum assume: sed eo tempore oportet Planetam esse quàm proximum Apogeo E. Utrùm Fig. 10.

verò sit proximus, ita cognosces. Ad momentum observationis (vide Fig. 6) inquire *a* motum Planetæ Medium ♈ H T, & motum *b* Apogei ♈ H: quem si ab illo demas, remanebit Anomalia Media Eccentrici H T, sive E V, hoc est distantia Planetæ V ab Apogeo E. Hanc igitur, ut dixi, oportet esse, quàm minimam, qualis est (*repete Fig.* 10) V E, vel quàm proximè circulo æqualem, qualis est E F X T; quæritur enim Eccentricitas maxima, quæ tum *c* est, quando Planeta obtinet Eccentrici Apogeum. Porrò in *Figura* assumptæ sunt distantiæ V E, T E, justo majores, ut triangula A V I, A T I conspicua evaderent. Igitur ad momenta talis Oppositionis Eccentrici centrum esto in I; ac proinde Eccentricitas tum sit A I; quam hoc modo efficies notam. Ex A centro Zodiaci, & I centro Eccentrici ducantur rectæ A V, I V, vel A T, I T. Inquire ad momentum ☍, locum *d* Medium Planetæ: locus autem Verus ejusdem notus est per observationem. Quare utriusque differentia, quæ est *i* angulus A V I, nota erit. Deinde angulus E I V notus *m* est ex Anomalià E V jam *suprà* repertà, ac proinde per 13. 1. etiam V I A, & per 32. 1 etiam V A I noti erunt. In triangulo igitur A V I ex notis omnibus angulis nota *n* fiet proportio laterum I V, A I. Quare si I V radius Eccentrici statuatur 100000, in iisdem partibus nota erit Eccentricitas A I. At quia Planeta non erat in Eccentrici Apogeo, sed illi quàm proximus, Eccentricitas jam reperta A I, non erit maxima, sed propinqua maximæ. Quare illi aliquantillum adjicies ut maximam A D adipiscare. Quantùm porrò debeas adjicere ex calculi cum observationibus convenientiâ, à posteriori addisces.

a Per n. 21. b Per num. 23. c Per §. 3. num. 10. d Per num. 21. i Per def. 17 nu. 4. & per §. 10. num. 3. m Per 33. 6. n per probl. 7. c. 3. Geo. Pract.

§. 2. Oporteat deinde reperire Eccentricitatem Mediam, quæ sit A G: tunc autem Eccentricus sit in P F N M, ejusque centrum in G. Ex §. 3. *num.* 10 patet Anomaliam Mediam Planetæ tunc esse parem Quadranti uni P F, vel tribus P F N M, ductisque lineis A F, G F, A M, G M, triangula haberi rectangula A G F, A G M. Observetur igitur ☍ Vera, sive Planetæ Verus locus oppositus Vero loco Solis, quando Planeta (in F vel M) distat ab Eccentrici Apogeo P Gradibus 90, vel 270. Utrùm verò tantùm distet, cognosces si ad observationis momentum inquiras, ut *suprà*, Anomaliam Planetæ Mediam. Jam in trigono rectangulo A G F, notus fit, ut *suprà*, angulus A F G; est enim ille differentia locorum Planetæ Veri ac Medij ad ☍ momentum; locus autem Verus ex observatione notus est, & Medius per *nu.* 21. innotescit. Quare laterum G F, A G proportio *o* non latebit. Unde si G F radius Eccentrici statuatur 100000, in iisdem partibus nota erit Eccentricitas media A G.

o per prob. 7. c. 3. Geo. Pract.

§. 3. Inventâ Eccentricitate maximâ A D, & media A G, habetur & minima A B, si mediam A G demas maximæ A D; sic enim nota relinquitur G D differentia maximæ & mediæ, cui *p* æqualis est G B differentia mediæ & minimæ: quæ subtracta mediæ A G, dabit minimam A B.

p Per §. 3. num. 10.

§. 4. Si nequeas adipisci ☍ Veram, sive locum Verum Planetæ oppositum loco Vero Solis, quando Planeta est proximus Apogeo, venare ☍ aliquam, cùm Planeta est proximus Perigeo. Tum verò Eccentricus sit in Q F Y, ejusque centrum in K, ducanturque ad Planetam propè Perigeum Y in Z, vel S constitutum rectæ K Z, A Z, vel K S, A S. Sic enim ope trianguli A Z K, vel A S K eâ methodo, quam §. 1. jam exposui, acquires Eccentricitatem A K; cui modicum quid detrahendo, obtinebis minimam A B: eâque demptâ à mediâ, nota fiet B G, adeoque etiam ipsi æqualis G D; quâ ad mediam A G adjectâ, prodibit maxima A D. Porrò arcus Z Y, S Y, qui ad solvenda triangula jam dicta, noti esse debent, sunt differentia Anomaliarum Q F Z, Q F S à semicirculo Q F Y.

§. 5. Quod si obtineri nequeat ☍ Vera, cùm Planeta distat ab Apogeo Gradibus 90 aut 270, in F, vel M, tunc per duas ☍ Veras, ad quarum unam Planeta sit proximus Apogeo, ad alteram proximus Perigeo, reperies per §. 1, & 4, Eccentricitatem maximam A D, & minimam A B, quarum differentiâ B D bifariam divisâ, prodibit media A G.

§. 6. Postremò observa si methodo jam explicatâ Eccentricitatem inquiras ad alia atque alia Planetæ Soli verè oppositi in Eccentrico loca, manifestè comperies eam ab Apogeo ad Perigeum decrescere eâ ferè proportione, quæ *num.* 10. §. 3 exponitur; quod quidem Hypothesim Ricciolanam egregiè confirmat.

Ex mente Riccioli, qualium radius Eccentrici est 100000 Eccentricitas.

		Maxima	*Media*	*Minima*
	♄	12200	11500	10800
Est	♃	9960	9530	9100
	♂	20000	18635	17270

NUMERUS XXV.

Locum Verum ♄. ♃. ♂ in Conjunctionibus & Oppositionibus Veris cum Sole, quando nimirum primæ solùm inæqualitati sunt obnoxij, Geometricè supputare.

Sive, ad datum tempus supputare locum Verum centri Epicycli.

Cum enim hi Planetæ Soli opponuntur, eorum motus & locus non differunt *a* à motu & loco centri Epicycli.

Ad datum tempus reperi, motum *b* Apogei ♈ H, & motum Medium *c* centri Epicycli ♈ H T; item Eccentricitatem *d* maximam A D, ac minimam A B: cum quibus operare ut præscribitur *num.* 11. §. 1. & 2. Ita reperies motum Verum ♈ H Q centri Epicycli existentis ex. gr. in Eccentrici puncto V.

Fig. 6. a Per §. 10. num. 3. b Per nu. 23. c Per nu. 21. d Per nu. 24.

Atque hunc in modum investigationem primæ inæqualitatis absolvimus: quæ quantis difficultatibus sit involuta, ex toto Capitis hujus decursu patet. Deinceps ad secundæ inæqualitatis investigationem accingemur, quæ quidem primâ jam cognitâ, nihil admodum difficultatis habebit.

NUMERUS XXVI.

Radium Epicycli ♄, ♃, ♂, maximum, medium, minimum invenire.

§. 1. Oporteat primùm radium Epicycli maximum reperire. Inveni (ut docebo *infrà* §. 5) tempus, quo centrum Epicycli futurum est in E Apogeo Eccentrici: tunc enim *o* maximus est E M, seu E S Epicycli radius, & Eccentricitas quoque *x* maxima A D, Eccentrici nempè centro tunc constituto in D. Sit tum Planeta in Epicycli puncto quo-

Fig. 6. o Per §. 4. & 5 n. 10. x Per §. 3. num. 10.

cumque

cumque S, ad quem ex A centro Zodiaci ducatur A S continuata usque ad Zodiacum in 9; jungaturque Epicycli radius E S, ut habeatur triangulum A S E. Ad tempus deinde, quo cognovisti centrum Epicycli futurum in Apogeo E, inquire locum *a* Apogei H, & observa locum *b* Planetæ 9. Ex horum locorum differentia notus erit arcus 9 H, adeoque & *c* angulus S A E. Ad tempus idem inquire *d* Verum locum Solis, qui sit ex. gr. in 4. Ita notus erit arcus H T 4 distantia Veri loci Solis ab H loco Apogei Eccentrici, qui tunc non differt à loco Apogei Epicycli M. Jam, cùm, *e* quanta est distantia 4 T H Veri loci Solis à lineâ A E M H lineâ Apogei Epicycli, in quâ *e* Sol cum Planetâ conjungitur, tanta sit S M distantia Planetæ ab Epicycli Apogeo M, etiam arcus S M notus erit. (Quod si distantia Veri loci Solis à lineâ Conjunctionis A E M H, adeoque & distantia Planetæ ab Apogeo Epicycli sit Gr. 180 major, ex. gr. M S L C, Planetâ existente in C, ea subtracta ex Grad. 360 dabit arcum M C). Aufer deinde arcum S M ex. Grad. 180, notusque fiet arcus S L, & per hunc *i* angulus S E A. In triangulo igitur A S E, quia noti sunt anguli S A E, S E A, adeoque *m* & tertius E S A, non *n* latebit proportio laterum A E, E S. Atqui A E nota est in partibus radij Eccentrici taxati ad 100000, componitur enim ex D E radio ipso, & A D Eccentricitate *r* maximâ, quæ per *num.* 24 nota est in partibus radij. Ergo etiam E S, radius Epicycli maximus in partibus radij Eccentrici ad 100000 taxati notus erit.

[Margin: *a* Per nu. 23. *b* Per nu. 1. *c* Per 33.6. *d* Per nu. 55. lib. 1. *e* vid. n. 10. §. 4. & 5. *i* Per 33.6. *m* Per 32. 1. *n* per prob. 7. cap. 3. Geo. Pract. *r* Per §. 3. num. 10.]

§. 2. Oporteat deinde radium Epicycli minimum reperire. Inveni tempus quo centrum Epicycli erit in Eccentrici Perigeo X: tunc enim *p* minimus erit Epicycli radius X 5, & minima quoque *q* Eccentricitas A B, Eccentrici nempè centro constituto in B, quamvis eum situm figura non exprimat. Tum verò Planeta sit in Epicycli puncto quovis N: ad quem ex Mundi centro A ducatur recta A N ad Zodiacum usque continuata, jungaturque Epicycli radius X N, ut habeatur triangulum A N X: quod solvendo, ut *suprà* triangulum A S E, notus reddetur minimus Epicycli radius X N in partibus radij Eccentrici.

[Margin: *p* Per §. 4. & 5. n. 10. *q* Per §. 3. num. 10.]

§. 3. Radius tandem Epicycli medius X O, seu β O, ϡ O obtinebitur, si differentiæ N S minimi à maximo semissem addas minimo, vel maximo subtrahas, uti patet ex §. 4. & 5. *num.* 10.

§. 4. Postremò si ex loco Planetæ observato ad varias distantias centri Epicycli ab Eccentrici Apogeo, radius Epicycli eliciatur, reperietur ille ab Apogeo ad Perigeum decrescere eâdem proportione, quâ Eccentricitas, eâ inquam, quæ explicatur *num.* 10. §. 3. & 5: quo quidem Hypothesis Ricciolana non parùm stabilitur. Modus autem deductionis erit hujusmodi. Sit Planeta in C, ejusque Verus in Zodiaco locus R, per observationem fiat *a* notus. Ad momentum observationis (quod innotescet per *nu.* 45. *lib.* 5) reperi per *num.* 25. centri Epicycli V, locum Verum Q (eâdem operâ innotescit A V distantia centri Epic. à centro Mundi, ut patet ex §. 2. *num.* 11). Sic nota erit utriusque differentia R Q, adeoque, & angulus C A V. Reperi deinde ad momentum idem Longitudinem Solis *b* Veram ♈ Q 4, ab eâque aufer Longitudinem Veram ♈ Q centri Epicycli *suprà* inventam. Ita notus erit arcus Q 4, adeoque & *c* æqualis *c* ipsi 5 C, seu M S distantia Planetæ ab Apogeo Epicycli; unde etiam angulus S V L, seu C V A notus erit. Cùm igitur in triangulo A C V, notum sit latus A V cum angulis C A V, C V A, ex his reperietur ad momentum datum Epicycli radius V C in partibus secundùm quas nota est A V, hoc est in partibus radij Eccentrici.

[Margin: *a* Per n. 1. *b* Per nu. 55. lib. 1. *c* Per §. 4. & 5. n. 10.]

§. 5. Reliquum est, ut, quod *suprà* tanquam fictum supposuimus, tempus inveniatur quo Planeta futurus est in Apogeo vel Perigeo Eccentrici. Ad quodvis tempus *o* inveni Anomaliam Mediam centri Epic. ex. gr. E Z Grad. 150; quibus subductis à Grad. 360 notus fit arcus Z X E Grad. 210, quem absolvere debet centrum Epic. ut redeat ad Apogeum E. Si per motum Diurnum vel Annuum Anomaliæ, qui notus est per *Coroll. num.* 22, dividatur arcus Z X E Grad. 210, prodibit tempus, quo Epicycli centrum attinget Apogeum E, ut patet ex Regulâ proportionum.

[Margin: *o* Per corol. nu. 23.]

Ex mente Riccioli qualium Eccentrici radius est 100000, Radius Epicycli.

Est	*Maximus*	*Medius*	*Minimus*
♄	11300	10700	10100
♃	20320	19390	18460
♂	70957	66057	61157

Corollarium.

Ex *hoc numero* & 24. facilè colligemus distantias maximas & minimas à Terrâ ♄. ♃. ♂, & differentias earum; quæ quidem in ♂ planè enormis reperitur: ejus enim distantia maxima excedit minimam plus quàm octies. Id visum hic est breviter ostendere; alibi *a* pleniùs de Planetarum distantijs à Terrâ, & Sole tractaturi.

[Margin: *a* lib. 7. c. 3.]

Esto igitur centrum Epicycli in Apogeo Eccentrici, ac proinde situs Eccentrici ♂ sit D E R Z, maximam habens Eccentricitatem A D. Sit autem ♂ in Epicycli Apogeo M. A D per *num. præc.* est 20000, quarum radius D E est 100000. Quare, A E est 120000: cui si addas E M radium Epicycli, qui tunc etiam maximus est, nempè 70957; fit A M distantia maxima ♂ 190957.

[Margin: Fig. 13.]

Sit deinde Epicycli centrum in Perigeo Eccentrici, adeoque Eccentricus fit B K Y X minimam habens Eccentricitatem B A; ♂ autem sit in 2 Perigeo Epicycli. B A per *num.* 24 est 17270, quarum radius B X est 100000, aufer 17270 à 100000: remanet A X 82730. Hinc rursum deme radium Epicycli minimum X 2 qui est 61157: relinquitur distantia ♂ minima 21573.

Igitur ♂ distantia maxima A M est ad minimam A 2, ut 190957 ad 21573. Unde factâ divisione maxima excedit minimam plus quàm octies.

NUMERUS XXVII.

Locum Verum ♄. ♃. ♂. ad datum tempus extra ☌ & ☍ cum Sole, quando nempè duplici inæqualitati subjacent, Geometricè supputare.

§. 1. Sit ex. gr. centrum Epicycli in V, & Planetæ centrum in C. Ad datum tempus inquire *a* motum *a* Apogei ♈ H, & motum Medium *b* centri Epicycli ♈ H T. Assumatur deinde *c* Eccentricitas maxima A D, & minima A B; item *d* radius Epicycli maximus E S, & minimus E N. Cum his omnibus

[Margin: Fig. 6. *a* per n. 23. *b* per n. 21. *c* ex n. 24. *d* ex n. 26.]

nibus operare ut præscribitur toto *num.* 11. Sic acquires motum Planetæ Verum ♈ H R ad tempus datum.

§. 2. Quod si placuerit juxta Hypothesim Ptolemaicam supputare, operare ut præscribitur *num.* 7: sed utere motu Apogei *num.* 23, & motu Medio *num.* 21, Eccentricitate verò & radio Epicycli infrà scriptis.

	Eccentricitas tota	*Eccent. semissis*
♄	11514	5757
♃	9621	4810
♂	18566	9278.

Radius Epicycli.

♄	10563
♃	19264
♂	65777

Hæ siquidem mensuræ sunt mediæ inter repertas à Copernico, Lansbergio, Longomontano, Keplero, Bullialdo, Ricciolo.

§. 3. Inter hosce duos supputandi modos, medium tenebis, si retentâ eâdem semper Eccentricitate, mediâ videlicet inter maximam & minimam *num.* 24. repertas, sed Epicycli semidiametro pro tempore variatâ, procedas, ut præscribitur *Num.* 11. omisso primo §: vel si non variatâ semidiametro Epicycli varietur Eccentricitas, procedaturque ut traditur in Hypothesi Terræ Motæ.

Modi secundus & tertius sunt breviores, sed primus locum Planetæ supputatum exhibet ejusdem loco observato magis consentientem. Quamquam ne hîc quidem, vel ipso fatente Ricciolo, semper ad amussim satisfacit. At cùm nullus id hactenus sit assecutus, optimum esse illum dicamus, qui minimis urgetur. Ulteriorem interim hujus negotii limam à magno illo Astronomo expectabimus, quam spondet ipse Almagesti lib. 7. pag. 539 hisce verbis. Quapropter magno desiderio Tychonicarum observationum editionem præstolamur, ut eas examinare profundiùs, & nostrarum Hypothesium mensuras ex illis ac Nostris observationibus, quibus adhuc insistimus, ad ultimam limam revocare possimus.

Hic ego inæqualitatis utriusque ♄. ♃. ♂: investigationem concludo; si priùs, quod jam sæpe insinuavi, Tyrones monuero, fidem calculi per observationes examinari oportere. Comparanda nimirum sunt Planetarum loca quàm plurima in diversis Eccentrici locis, sive per teipsum, sive per alios observata, atque ad observationum momenta eadem loca per calculum investiganda: a *quæ si cum locis observatis conveniant, licebit concludere & Hypotheses & Hypothesium mensuras, totumque calculi processum rectè se habere.*

a *Illa vide in Schol. num.* 19.

NUMERUS XXVIII.

De æquationibus maximis, deque Tabulis Æquationum construendis.

§. 1. ÆQuationes Eccentrici ad singulos Gradus Anomaliæ Eccentrici reperiuntur per §. 1. & 2. *num.* 11. Neque hîc, ut in Lunâ, pluribus Tabulis opus est quàm unâ: quamvis enim ad singulos Gradus Anomaliæ varietur Eccentricitas, a quælibet tamen determinata Eccentricitas determinato Anomaliæ Gradui semper eidem respondet, secùs quàm in Lunâ accidat, cujus unaquæque Eccentricitas potest incidere in quemvis Gradum Anomaliæ; quandoquidem Lunaris Eccentricitas varietur b pro distantiâ Lunæ à Sole, quælibet autem Lunæ à Sole distantia in quemvis Anomaliæ Gradum c possit incidere. In primâ columnâ hujus Tabulæ scribantur Gradus Anomaliæ Eccentrici, à 1. ad 180. in secundâ columnâ Æquationes Eccentrici singulis Gradibus Anomaliæ respondentes.

a *per* §. 2. & 3. *n.* 10.

b *per* §. 3. *n.* 13. *l.* 2. & *per* §. 4. *n.* 16 *lib.* 2.

c *vide* §. 3. *n.* 5. *lib* 2. & *nu.* 45. *lib.* 2.

§. 2. Quantitas Æquationis maximæ Eccentrici, & Gradus Anomaliæ in cujus termino contingit, secundùm Ptolomæum, Longomontanum, Keplerum, Ricciolum, Tabellâ sequenti exhibentur.

		Æquatio maxima Eccentrici			*Anomalia Eccentrici.*		
		Grad.	I.	II	Grad.	I.	II.
♄	*Ptolem.*	6	32	0	93	16	0
	Longom.	6	38	17	93	19	8
	Kepler.	6	32	0	93	16	0
	Букciol.	6	39	24	93	19	12
♃	*Ptolem.*	5	16	0	92	38	0
	Longom.	5	26	59	93	30	0
	Kepler.	5	31	37	93	45	0
	Ricciol.	5	28	30	93	40	0
♂	*Ptolem.*	11	32	0	95	46	0
	Longom.	10	34	20	95	17	10
	Kepler.	10	37	0	95	18	30
	Ricciol.	10	37	10	95	30	0

Fig. 13. Porrò Æquationem maximam Eccentrici contingere in termino Anomaliæ hac Tabellâ expressæ, ex ipso opere inventionis Æquationum constat. Quare punctum Anomaliæ, in quo contingit Æquatio maxima, non reperitur (quemadmodum fiebat in Sole & Lunâ, & fiet mox etiam in maximis Æquationibus Orbis, seu Epicycli) si Quadranti, hoc est Gradibus 90, addatur ipsa Æquatio; neque ea accidit in puncto, ubi recta A L, quæ per Mundi centrum ad lineam Apsidum perpendicularis est, Eccentricum intersecat, sed suprà illud putà in O; adeoque non colligitur in trigono rectangulo, sed obliquangulo, putà

putà A O G. In Hypothesi Ptolemaicâ (*vide Fig.* 1.) Æquatio maxima *o* contingit in Gradu quidem 90, φ, Deferentis, sed huic respondet Anomalia G 8 (quæ in Æquante numeratur) Gradibus 90 major.

o per §. 4. num. 5.

Fig. 13.

§. 3. Maxima Æquatio Anomaliæ Orbis, seu Epicycli, in quovis Anomaliæ Gradu fuerit centrum Epicycli, reperitur hac methodo. Sit primò centrum Epicycli in E Apogeo Eccentrici, & A C ex Mundi centro Epicyclum tangens, definiat Æquationem maximam E A C; ducaturque E C: situs autem Eccentrici sit D E F Z. Igitur tunc per §. 4. & 5. *num.* 10 E C est radius Epicycli maximus, qui notus est per *num.* 26. Eccentricitas quoque tunc est A D omnium *o* maxima, quæ cùm *a* nota sit in partibus radij D E taxati ad 100000, tota A E nota erit. In triangulo igitur A C E, quod ad *b* C rectangulum est, ex binis lateribus E C, A E jam notis reperietur *d* Æquatio Orbis maxima E A C ad Apogeum Eccentrici, quæ est inter maximas minima.

o per §. 3. num. 10. a per n. 24. b per 18. 3. d per prob. 4. cap. 3. Geo. pract. e per §. 4. & 5. n. 10. f per §. 3. num. 10. i per n. 24. m per 18. 3.

Sit deinde centrum Epicycli in Perigeo X, Eccentrico tunc existente in B K Y X. Tunc igitur & Epicycli radius X 2 *e* minimus est, qui innotuit per *num.* 26. & Eccentricitas A B etiam *f* minima; quæ cùm nota *i* sit in partibus radij B X 100000, si subtrahatur à radio B X, etiam A X nota erit. Rursum ergo in trigono A S X, quod ad *m* S rectangulum est, ex binis lateribus notis X S, A S, reperietur *n* Æquatio maxima X A S ad Perigeum Eccentrici, quæ est maxima inter maximas.

n per prob. 4. cap. 3. Geo. pract.

Quod si Epicycli, centrum fuerit in quovis alio Anomaliæ puncto V, Æquatio maxima V A F reperietur solvendo triangulum rectangulum A F V, in quo latera A V, V F fient nota ex §. 2. & 3. *num.* 11. Ad motum porrò centri Epicycli ab Eccentrici Apogeo ad Perigeum, Æquationes Orbis maximæ perpetuò decrescunt.

Anomalia Orbis, seu Epicycli in cujus termino maximæ Orbis Æquationes contingunt, sic invenitur. In triangulo A C E, quod *p* ad C rectangulum est, duo reliqui anguli E A C, A E C, conficiunt unum *q* rectum, seu Grad. 90. Quare si E A C jam inventum subtrahas à Grad. 90, notus fit A E C, adeoque & *r* arcus ω C; quo dempto ex Grad. 180, nota erit M C Anomalia Epicycli, in cujus termino fit maxima Æquatio E A C. Eadem Anomalia reperitur quoque si ad Grad. 90 adjicitur ipsa Æquatio.

p per 18. 3. q per 32. 1. r per 33. 6.

Quantitates Æquationum maximarum ad Apogeum & Perigeum Eccentrici, & Gradus Anomaliæ Orbis, in cujus termino contingunt, secundùm Ptolomæum, Longomontanum, Keplerum, Ricciolum, exhibentur Tabellâ sequenti.

		Æquatio max. Orbis ad Apog. Eccen.			*Anomalia Orbis.*			*Æquat. max. Orbis in Perigeo Eccent.*			*Anomalia Orbis*		
		Grad.	/.	//.	Grad.	/.	//.	Grad.	/.	//.	Grad.	/.	//.
♄	*Ptolom.*	5	53	0	95	53	0	6	36	0	96	36	0
	Longom.	5	39	15	95	39	15	6	21	20	96	21	20
	Kepler.	5	43	0	95	43	0	6	38	10	96	38	10
	Ricciol.	5	45	0	95	45	0	6	30	0	96	30	0
♃	*Ptolom.*	10	34	0	100	34	0	11	35	0	101	35	0
	Longom.	10	38	33	100	38	33	11	43	2	101	43	2
	Kepler.	10	34	0	100	34	0	12	5	0	102	5	0
	Ricciol.	10	39	0	100	39	0	11	43	0	101	43	0
♂	*Ptolom.*	36	45	0	126	45	0	47	1	0	137	1	0
	Longom.	38	8	0	128	0	0	47	26	0	137	26	0
	Kepler.	36	55	0	126	55	0	48	30	0	138	30	0
	Ricciol.	36	15	0	126	15	0	47	40	0	137	40	0

Fig. 13.

§. 4. Æquationes Orbis ad Gradus singulos semicirculi M C ω Anomaliæ Orbis quæ Geometricè reperiuntur, ut docui *num.* 11 *toto*, ad unam aliquam Tabulam redigi non possunt. Cùm enim ad motum centri Epicycli per Eccentricum in nostrâ Hypothesi tam radius Epicycli, quàm distantia centri Epicycli à centro Mundi, in aliis verò saltem distantia centri Epic. varietur, necesse est ad eumdem Anomaliæ Orbis Gradum aliam atque aliam pro tempore Æquationem contingere. Ex. gr. sit Epicycli centrum primò in E, deinde in V, & sint utrobique Anomaliæ Orbis M 8, H φ Grad. 20: major est Æquatio V A φ ad vigesimum Anomaliæ Gradum Epicycli centro posito in V; quàm sit Æquatio E A 8 etiam ad vigesimum Anomaliæ Gradum, centro Epicycli sito in E. Pari modo de Æquationibus ad reliquos Gradus Anomaliæ Orbis ratiocinare. Oporteret igitur 180 Tabulas Æquationum Orbis conficere: quod quia nimis laboriosum est, artificiosa tanti laboris compendia Astronomi excogitarunt.

§. 5. Primus modus, quo cum Ptolomeo plerique antiquiores Astronomi, & ex recentioribus etiam Longomontanus atque Lansbergius usi sunt, est ejusmodi. 1. Reperi *a* Æquationes Orbis maximas, posito Epicycli centro in singulis Gradibus semicirculi Anomaliæ Eccentrici, ab Apogeo nempè ad Perigeum, easque in Tabulâ singulari digere. 2. Æquationem E A C minimam maximarum, quæ sit ad Eccentrici Apogeum E, aufer à singulis maximis, & excessus, seu differentias serva. 3. Differentia maximarum Æquationum EAC, XAS ad Apogeum & Perigeum differentia æstimetur 60, atque ad has partes reducantur differentiæ cæteræ: quod ita fiet. Differentia Æquationum maximarum E A C, X A S reperta sit ex. gr. Minutorum 40, differentia verò maximarum Æquationum E A C, V A F Minutorum 18. Fiat ut 40 ad 18, ita 60 ad 27: erit 27 differentia Æquationum maximarum EAC, VAF reducta ad partes 27, quarum differentia ipsarum EAC, X A S est 60. Eodem modo reducentur differentiæ cæteræ processu secundo repertæ: quæ sic reductæ vocantur *Scrupula Proportionalia*, ponunturque in tertiâ columnâ Tabulæ Æquationum Eccentrici (§. 1. *constructæ*) è regione Graduum Anomaliæ Eccentrici: ipsa verò Scrupula 60 scribuntur è regione Gradus Anomaliæ 180, seu Signorum sex 4. Posito Epicycli centro primùm in Apogeo E, deinde in Perigeo X, reperi *b* ad singulos Gradus semicirculi Anomaliæ Orbis MCω, PS2, Æquatio-

a per §. 3. *b per n. 11. totum.*

quationes Orbis, & singulas Æquationes ad Apogeum E aufer à singulis ad Perigeum X, atque hos excessus, seu differentias scribe in tertiâ columnâ novæ Tabulæ, quæ vocatur *Tabula Æquationum Orbis*; in secundâ autem columnâ repone Æquationes singulas repertas ad Apogeum E, in primâ Gradus Anomaliæ à 1. ad 180. §. Hisce tabulis ita ordinatis ad quemvis Anomaliæ Orbis Gradum, putà ad ϕ vigesimum, Epicycli centro existente in quovis Anomaliæ Eccentrici Gradu, putà in V quadragesimo, Æquationem Orbis V A ϕ reperies hunc in modum. Ex Tabulæ Æquationum Eccentrici columnâ tertiâ excerpe Scrupula proportionalia ex. gr. 27 adscripta Gradui 40. V Anomaliæ Eccentrici. Tum ex Tabulæ Æquationum Orbis columnâ secundâ excerpe Æquationem Orbis M A δ debitam Anomaliæ Orbis Gradui vigesimo δ, quando centrum Epicycli esset in Apogeo E; & in columnâ tertiâ excerpe adscriptam illi differentiam, seu excessum ex. gr. 2. Grad. Postremò fiat ut Scrupula 60, differentia nempè maximarum Æquationum E A C, X A S, ad Apogeum & Perigeum Eccentrici, ad Scrupula proportionalia 27, differentiam nempè Æquationum maximarum EAC, V A F, ita grad. 2 nempè excessus, seu differentia Æquationum E A δ, X A β ad Grad. Anomaliæ Orbis 20, posito Epicycli centro in Apogeo & Perigeo, ad aliud: dabit hoc differentiam Æquationum E A δ, V A ϕ; quâ additâ ad Æquationem E A δ, prodibit Æquatio Orbis V A ϕ quæsita.

§. 6. Hic est modus quo plerique veteres (ut dixi) utebantur, cujus fundamentum est tale: sunt M δ, H ϕ, P β Anomaliæ Orbis æquales, putà Grad. 20. Putabant illi, ut est differentia maximarum Æquationum E A C, X A S, ad differentiam maximarum E A C, V A F, ita esse differentiam Æquationum E A δ, X A β ad differentiam Æquationum E A δ, V A ϕ. Verùm hanc anologiam non esse exactam, præsertim in ♂, Astronomi recentiores deprehenderunt. Ratio prima est, quòd licet Æquationes non maximæ E A δ, X A β, V A ϕ existant ad eumdem Gradum Anomaliæ Orbis, omnes ex. gr. ad vigesimum, tamen Æquationes maximæ E A C, X A S, V A F, ad eumdem Anomaliæ Orbis Gradum non contingant. In ♂ siquidem maxima Æquatio Apogea E A C Anomaliam sortitur M C Grad. 126. 15', Perigea verò X A S Anomaliam P S Grad. 137. 40', ut patet ex Tabulâ tertij §. Ratio altera cur nequeat condi una Tabula, quæ per Scrupula proportionalia & excessum, seu differentiam, exhibeat justas Æquationes Orbis, præsertim in ♂, hæc est, quòd Epicycli radius & distantia à Terrâ continuè varientur, quæ variatio maxima est in ♂ ut patet ex Tab. *num. 26. & ex Corol. num. 26.*

Qui porrò voluerit inquirere Prosthaphæresim Orbis ex Tabulis more antiquo constructis, pro ♂ adhibeat correctionem quam tradit Lansbergius *Præcepto 16*; vel eam, quam Longomontanus *lib. 2. Theoricorum cap. 9. & 12.*

§. 7. Ob causas igitur præcedenti §. indicatas recentiores Astronomi pro 5 Planetis Tabulam condidêre generalem Æquationum Orbis ad singulos Orbis Anomaliæ Gradus, si non ad omnes situs Epicycli, saltem ad aliquos, quorum ope per partem proportionalem satisfiat etiam reliquis. Tabulam ejusmodi reperies in Tabulis Mediceis apud Vincentium Reinerium aliosque. Construitur solutione trianguli V A ϕ, quam tradidi *num. 11.* Fig. 13.

CAPUT V.

Veneris & Mercurij phœnomena & Hypotheses.

NUMERUS XXIX.

Phænomena, quibus ♀ & ☿ differunt à ♂, ♃, ♄.

Phœnomena *Veneri & Mercurio* cum tribus Planetis majoribus communia recensui *num. 3.* Nam & ipsi tam primæ inæqualitati quàm secundæ obnoxij sunt; salvaturque prima per Eccentricum, secunda per Epicyclum; quamvis non sine aliquâ à tribus majoribus differentiâ *a* inferiùs exponendâ. Nunc quæ ♀ & ☿ propria sunt videamus. a §. 2.

§. 1. Prima differentia est quòd hi Planetæ numquam Soli conspiciantur oppositi. Et *Venus* quidem numquam digreditur à Sole ad Gr. 50, *Mercurius* vix unquam ad 30. apparentque ambo modò manè, modò vesperi: unde factum est ut *Venus*, quæ frequentiùs & evidentiùs conspicitur, nunc *Lucifer* dicatur & sit, nunc *Hesperus*. Adhæc, quod omnis antiquitas ignoravit, telescopij adminiculo deprehensum est, utrumque Planetam jam falcatum apparere, ut Lunam, jam bisectum, jam gibbosum, jam rotundum & quasi plenum. Ex quibus omnibus manifestè patuit, eos modò infrà Solem, modò suprà ferri; Orbemque, seu Epicyclum quem perambulant, ita Solem ambire ut Terram non includat. Aliàs enim, cùm Soli numquam opponantur, non possent illas phasium diversitates subire.

Ortuum porrò & occasuum utriusque Planetæ modus & ordo est hujusmodi. Terra sit in A; Horizon K P; Occidens in P; Oriens in K; Orbis, seu Epicyclus ♀ vel ☿ B C D E Solem ambiens. Quamvis autem schema Solem exhibeat in Epicycli centro, scire oportet rarò ipsum præcisè in centro existere, sed ab eo plerumque (ut suo loco dicam) licet non longè, declinare. Apogeum Epicycli esto D; Perigeum B, quæ designantur à lineâ A B D à visu nostro in A per Epicycli centrum eductâ. Manifestum est igitur Planetam in revolutione unâqualibet bis eum Sole conjunctum apparere, in Perigeo nempè B & Apogeo D, adeoque tunc nec manè nec vesperi apparere. Intelligatur jam Planeta cum suo Epicyclo positus in Oriente K. Ubi Planeta à Perigeo B progressus aliquousque fuerit in O, cùm ipse Horizontem attinget, Sol adhuc infrà Horizontem erit, ac proinde Planeta jam à Sole remotior manè suprà Horizontem incipiet apparere; quæ prima apparitio *Ortus Heliacus matutinus* vocatur. Quò deinde Planeta longiùs à Sole digreditur, eò manè quotidie altior suprà Horizontem conspicitur usque ad digressionem maximam, quæ contingit in puncto E. ubi recta A E ex Terrâ Epicyclum tangit. Inde pergens ad Epicycli Apogeum D, in dies singulos minùs minusque suprà Horizontem manè attollitur, ac tandem propè Conjunctionem cum Sole Apogeam (in R) Solaribus radijs absorptus, manè definit apparere; quæ apparitio postrema *Occasus Heliacus matutinus* appellatur. Post dies complures, superato Apogeo D, ubi jam ingressus Orientalem Epicycli semicirculum D E B, elongationem aliquam à Sole acceperit in I, apparere denuò incipiet, sed vesperi post occasum Solis. Quando enim (verte oculos ad Occidentem Fig. 11.

P) Sol occumbet in P, Planeta positus in I adhuc supra Horizontem existet, ac proinde post Solis occasum apparere incipiet; quæ prima apparitio *Ortus Heliacus vespertinus* dicitur. Post hunc Planeta vesperi quotidie altior atque altior supra Horizontem conspicitur usque ad secundam digressionem à Sole maximam in contactu E. Unde rursum descendens ad Conjunctionem cum Sole Perigeam in B, quotidie magis magisque deprimitur, ac tandem vesperi apparere desinit: quæ apparitio ultima, *Occasus Heliacus vespertinus* appellatur.

Fig. 14. Phasium autem ♀ & ☿ forma & ordo hic est. Superatâ ☌ Perigeâ in B, post ortum Heliacum matutinum in C apparent cornuti: ad maximam digressionem matutinam in D, bifidi, seu bisecti & semipleni: inde sensim gibbosi evadunt; at propè occasum Heliacum in E rotundi ferè ac pleni conspiciuntur. In Apogeo F sub radijs Solis latent. Digressi deinde à ☌ Apogeâ post ortum Heliacum vespertinum in G, rursum videntur gibbosi: ad digressionem maximam vespertinam in H, iterum bisecti: inde sensim cornua resumunt: demum propè occasum Heliacum vespertinum in I, planè cornuti apparent; ac tandem circa Perigeum B evanescunt. In ☌ Perigeâ B, visus est à Gassendo Anno 1631. 7. Nov. *Mercurius* instar maculæ nigerrimæ particulam disci Solaris Eclipsans. Tycho autem in ☌ itidem Perigeâ, *Venerem* conspexit illuminatam, adeoque extra Solem ob enormem, quam tum habebat, latitudinem, Graduum videlicet novem.

§. 2. Altera differentia est, quòd in ♀ & ☿ motus Medij centri Epicycli per Eccentricum semper Medio Solis motui sit æqualis, unusque sit atque idem in Zodiaco locus Medius centri Epicycli cum Medio loco Solis. In *Fig.* 1. centrum Epicycli ♀ aut ☿ sit in I; *Fig.* 1. linea Medij motus centri A M; motus centri Medius ♈ L M; locus Medius M. Erit quoque A M linea Medij motus Solis, & ♈ L M Medius motus Solis; & M locus Solis Medius.

Itaque motus centri Epicycli per Eccentricum, quo salvatur prima inæqualitas in ♀ & ☿, motui Solis alligatur, in ♄. ♃. & ♂. ab eo respectu solutus est. At contrà, motus Planetæ in Epicyclo, in ♀ & ☿ solutus est à motu Solis; at in ♄. ♃. & ♂. Soli alligatur, cùm tantus semper sit ipsorum motus ab Epicycli Apogeo, quantus est Solis motus Verus ab ipsis, ut suo *a num.* 10. *a* loco jam exposuimus. *§.* 4. *&* 5.

Quamvis autem Medius locus centri Epicycli ♀ & ☿ in Zodiaco semper idem sit cum Medio loco Solis, Verus tamen hujus plerumque differt à Vero centri *b ut patebit ex nu.* 42. Epic. illorum, eò quòd loca Apogeorum *b* sint diversa, ac proinde idem locus Medius diversam Æquationem, seu differentiam à loco Vero fortiatur in ♀ & ☿, quàm in Sole.

Fig. 1. §. 3. Atque hinc tertia enascitur differentia, quòd ♀ & ☿ in motu Eccentrico se attemperent motui Solis, non Vero, sed Medio, ac proinde ut habeatur Anomalia Eccentrici Media L M, auferendus sit Apogei motus ♈ L à motu Solis, non Vero, sed Medio ♈ L M. At tres Planetæ Superiores in suo motu Epicyclico se conformant motui Solis, non Medio, sed Vero, adeoque ut habeatur Anomalia Orbis Media, auferendus est motus Verus centri Epicycli à Solis motu Vero, uti in *c* prioribus jam explicavimus. *c vide §.* 2. *n.* 9. *& §.* 4. *ac §. n.* 10.

§. 4. Postremò notandum est Conjunctionem Perigeam ♀ & ☿ cum Sole respondere Oppositioni trium Superiorum cum Sole; ac proinde quemadmodum hi in Conjunctione & Oppositione, ita ♀ & ☿ in Conjunctione tam Apogeâ quàm Perigeâ ina qualitate secundâ liberantur.

NUMERUS XXX.

Phænomena quibus ♀ differt à ☿.

§. 1. Claritatis causâ quædam de maximis Digressionibus prænotanda sunt.

Eccentricus ♀ aut ☿ sit D S T, ejusque centrum Z; Zodiacus K R G; ejusque centrum A; linea Apsidum F B Z A C G. *Fig.* 15.

Nota I. Si Epicycli centrum fuerit in Eccentrici Apogeo B, vel Perigeo C, Digressiones maximæ ♀ & ☿ à loco Solis Medio non differunt à maximis Æquationibus Orbis F A K, F A L; & matutina æqualis est vespertinæ. Tunc enim linea Medij motus centri Epicycli est ipsa Apsidum linea F B Z A C G. Quare cùm linea *b* Medij motus Solis semper eadem sit cum lineâ Medij motus centri Epicycli ♀ & ☿, etiam hæc *b per §* 2. *n. præc.* tunc coincidet cum lineâ Apsidum; ac proinde locus Solis Medius tunc erit F, vel G, idem nempè cum loco Vero centri Epicycli. Quare Digressiones maximæ à loco Solis Medio tunc erunt K F, L F, vel H G, I G, ipsæ videlicet Orbis Æquationes maximæ. Ex quo jam patet maximam Digressionem matutinam L F æqualem tunc esse maximæ vespertinæ K F.

Nota II. Si Epicycli centrum sit extra Apsides, putà in S, Digressiones maximæ ♀ & ☿ à loco Medio Solis, differunt à maximis Æquationibus Orbis: & matutina non est æqualis vespertinæ. Tunc enim linea Medij motus centri Epicycli ex. gr. A Q differt à lineâ Veri motus centri Epic. A S N. Quare cùm A Q sit etiam *c* linea Medij motus Solis, adeoque *c per §* 2. *n. præc.* Medius Solis locus sit Q, liquet maximas R Q, M Q à loco Solis Medio Degressiones differre à maximis Orbis Æquationibus R N, M N, quantitate ipsius Æquationis Eccentricæ Q N.

Nota III. Quando hîc comparantur Digressiones maximæ cum alijs maximis, ex. gr. maximæ, cùm Epicycli centrum est B, cum maximis Epicycli centro posito in S, comparandum est aggregatum L K ex matutinâ L F & vespertinâ K F, cum aggregato R M ex matutinâ M Q & vespertinâ R Q.

Nota IV. Aggregatum ex duabus Digressionibus maximis unâ matutinâ M Q, & alterâ vespertinâ R Q, in quarum utrâque Epicycli centrum fuerit in eodem Anomaliæ Eccentricæ puncto S, semper duplum est Æquationis maximæ ibidem. Cùm enim in utrâque centrum Epicycli fuerit in eodem Anomaliæ puncto S, etiam A Q linea Medij centri Epicycli, adeoque & linea Medij motus Solis, quæ ab hac non *a* differt, eadem fuit in utrâque. Ex quo patet duas simul Digressiones maximas R Q, M Q æquari duabus maximis Æquationibus R N, M N, ac proinde duplas esse unius R N, seu M N. His prænotatis, *a §* 2. *n. præc.*

§. 2. Observatum est *Veneris* Digressiones maximarum minimas à loco Medio Solis semper contingere in Apogeo Eccentrici B, maximas maximarum in Perigeo C: *Mercurij* verò maximarum minimas quidem semper itidem in Apogeo contingere, maximarum tamen maximas non in Perigeo, sed in trientibus, ad Gradus videlicet Anomaliæ Eccentrici 120 & 240, hoc est in duobus punctis S. T. quæ binis utrimque Signis, gradibus nempè 60 distant à Perigeo C.

Ptolomæus siquidem centro Epicycli ☿ posito propè Grad. 12 ♈, hoc est propè Perigeum quod tunc erat in ♈ Grad. 10, reperit Digressionem ☿ maximam à Medio loco Solis Grad. 23. 15', quæ duplicata, (sunt enim, ut prænotatum est, in & propè Apogeum ac Perigeum matutina ac vespertina æquales) aggregatum exhibet Grad. 46. 30'. At centro Epicycli posito in S propè Grad. 10 ♒ hoc est Gradibus 60 à Perigeo C, reperit maximam ☿ Digressionem vespertinam R Q Grad. 21. 15': & cum alio tempore ibidem esset Epicycli centrum, nactus est maximam matutinam M Q Grad. 26. 30'. quæ simul junctæ efficiunt aggregatum M R Grad. 47. 45'. Rursum centro Epicycli posito in T, propè Grad. 10 ♊, hoc est Gradibus 60 à Perigeo C, deprehendit ☿ Digressionem maximam vespertinam Grad. 26. 30', matutinam verò (cùm alio tempore ibidem esset Epicycli centrum) Grad. 21. 15'. quæ simul junctæ rursum efficiunt Grad. 47. 45.

Mercurius igitur à *Venere* differt, primò quòd Digressiones ejus maximæ fiant extra Perigeum, secundò quòd in duobus Eccentrici locis, nimirum in trientibus ab Apogeo Eccentrici. Quæ porrò dicta sunt de maximis Digressionibus, de maximis etiam Orbis Æquationibus intelligenda, ut patet ex *Not.* 4.

§. 3. Alia *Mercurij* à *Venere* & omnibus Planetis hæc insignis differentia est, quòd Epicyclum suum circa Solem percurrat celerrimè, diebus nempè *l* 116 ferè, adeoque ter in anno: *Venus* autem absolvit tantum diebus circiter 584, *m* sive mensibus 19.

l Ostendam infrà.
m Ostendam infrà.

Ex hisce porrò proprietatibus tam diversis *Mercurij* motus valdè implexus ac difficilis redditur, & Hypothesim longè aliam quàm *Venus* cæterique Planetæ requirit.

Modus observandi Digressiones maximas, tradetur infra.

NUMERUS XXXI.

Hypothesis antiqua, seu Ptolemaica Veneris in Longitudinem, & supputationis Geometrica juxta eam forma.

§. 1. NOn differt ea ab Hypothesi trium Superiorum, quam exposui *Numeris* 4. 5. 6. solæ (quod in quàvis Hypothesi accidit) variantur mensuræ, quas *infra* suis locis invenire docebimus.

Fig. 1.

Habet igitur ♀, ut ♂. ♃. ♄, Eccentricum Deferentem B D I R, & huic æqualem Æquantem eccentricum C G O β ♁, centrumque Deferentis B pari intervallo dissitum à Mundi centro A, & Æquantis centro C. ac proinde Eccentricitatem totam A C bisectam in B. Habet & Epicyclum, cujus centrum I, ita percurrit Deferentem, ut motus ejus sit æqualis, non in Deferente ipso, sed in Æquante, sic nimirum, ut recta C I O, quæ ab Æquantis centro per centrum Epicycli producta Æquantem intersecat, æqualibus temporibus æquales Æquantis arcus absolvat. At in hoc à tribus majoribus Planetis hic motus differt, quòd linea motus Medij A M, ut *num.* 29. §. 2, exposui, semper sit eadem cum lineâ Medij motus Solis, & locus Medius M centri Epicycli in Zodiaco semper idem sit cum loco Solis Medio. Ipsa autem ♀ motu æquali Epicyclum percurrit *n* Diebus ferè 583, in superiori quidem parte secundùm O. S. ex H per Q in E. in inferiore verò contra O. S. ex E per ♆ in H. Postremò Apogeum Eccentrici lentissimè in consequentia prorepit. Atque hunc in modum, per Eccentricum salvatur prima inæqualitas, per Epicyclum secunda, ut in ♄. ♃. ♂, exposui *num.* 6. Apparitionum verò ac phasium diversitas exponitur per eundem Epicyclum ita Soli circumdatum, ut Terram non includat, uti *num.* 29. §. 1. jam declaravimus.

n Ostendam infrà.

§. 2. Ad supputationem Geometricam Veri loci ♀ in Longitudinem, nota esse debent ad tempus datum motus Apogei ♀ *m* ♈ L, Anomalia *o* Orbis Vera N X, atque insuper Eccentricitas *p* A C, & radius Epicycli in partibus radij Eccentrici B D: quæ omnia locis in margine notatis docebimus reperire.

m num. 42.
o num. 50.
p num. 43.

His quatuor datis, supputatio tota peragetur ut in ♂, ♃, ♄, tradidi *num.* 7.

Supputatio igitur Veri loci ♀ hoc solùm differt à supputatione Veri loci ♂. ♃. ♄, quòd in hac peculiariter inquiri debeat Anomalia Orbis, non verò motus Medius centri Epicycli, cùm sit ipse Medius motus Solis: in illis peculiariter inquiri debeat motus Medius centri Epicycli, non verò Anomalia Orbis, cùm hæc Digressioni ipsorum à Sole semper sit æqualis, ac proinde habeatur si motum Verum centri Epicycli subducas à motu Solis Medio secundùm Veteres, à Vero secundùm Recentiores, uti suis locis exposuimus.

NUMERUS XXXII.

Hypothesis antiqua Ptolomaica Longitudinis ☿.

Fig. 16.

DIfferentia hujus ab Hypothesi aliorum Planetarum consistit in motu centri Deferentis ut salventur phœnomena *num.* 30. §. 2. recensita.

In rectâ infinitâ H D centrum Mundi & Zodiaci esto A; extra quod sumpto centro C describatur circulus G O H β: is erit Æquans Eccentricus, cujus Apogeum G, Perigeum H. Sumptâ C Y æquali C A, circellum describe V E T C, cujus Apogeum erit E, Perigeum C. Per hunc circellum fingitur moveri centrum Eccentrici Deferentis Epicyclum (qui Æquanti æqualis est) secundùm seriem litterarum V, E, T, C. in superiori videlicet circelli parte contra. O. S. in inferiore secundùm. O. S., respectu Oculi existentis in A. Interim verò centrum Epicycli secundùm. O. S. Deferentem percurrit motu inæquali respectu Deferentis, sed æquali respectu Æquantis, ut fit in ♁ & cæteris Planetis, sic nimirum ut recta C I O ex Æquantis centro per Epicycli centrum I educta æqualibus temporibus in Æquante G O H β æquales arcus absolvat. Porrò motus centri Deferentis per circellum, & motus centri Epicycli ita inter se commensurantur, ut elongatio centri Epicycli ab Apogeo Æquantis G in consequentia semper sit æqualis elongationi centri Deferentis ab Apogeo circelli E in præcedentia. Itaque centro Deferentis posito in E Apogeo circelli ac Deferente ipso in D ϰ ω φ, centrum Epicycli est in D, in ipsâ lineâ Apsidum Æquantis H G, in quâ tunc etiam est Deferentis Apogeum D. Cùm autem Deferentis centrum descenderit ex E ex. gr. in T, adeoque ipse Deferens fuerit Q I R ♁, centrum Epicycli erit in I, confecto in Æquante arcu G O, seu Anomaliâ Mediâ G O, quæ sit æqualis, hoc est similis arcui E T, quæ quidem æqualitas semper toto illo motu servatur. Delapso deinde Deferentis centro (confecto semicirculo E T C) ad circelli Perigeum, hoc est ad C centrum ipsum Æquantis, tunc Deferens unus est idemque circulus cum Æquante G O H β, & Epicycli centrum existit in communi Æquantis ac Deferentis

rentis Perigeo H, confecto Anomaliæ femicirculo G O H. Ubi centrum Deferentis rurfum afcenderit ex. gr. in V, adeoque Deferens fuerit in *n* ψ δ θ, Epicycli centrum erit in I, confectâ in Æquante Anomaliâ Mediâ G β H O iterum æquali arcui E T V. Poftremò Deferentis centro reverfo in E Apogeum circelli, adeoque Deferente iterum pofito in δ π ω φ, centrum Epicycli rurfum erit in D in lineâ Apfidum Æquantis H G, confecto Anomaliæ Mediæ circulo integro G β H I G.

n Vide Fig. 17.

Talis eft *Mercurij* Hypothefis Ptolemaica, quâ quomodo phænomenis ☿ proprijs fatisfiat, patebit *Num. feq.* Phænomena fiquidem quæ ipfi cum ♀ & reliquis Planetis funt communia, falvantur etiam modo omnibus communi, ad inæqualitatem nempè primam fpectantia per Eccentricum; ad fecundam, per Epicyclum.

Porrò motibus fupradictis adjunge, quòd motus Medius centri Epic. femper fit idem cum Medio motu Solis. His etiam adde motum ☿ in Epicyclo, fed æqualem ut in ♀; item motum lentiffimum Apogei Æquantis G, quo totum Æquantis planum cum circello fenfim in confequentia promovetur.

NUMERUS XXXIII.

Hujus Hypothefeos proprietates, per quas phænomenis ☿ peculiaribus fatisfit.

Fig. 16. 17.

Ex centro Mundi circellum tangant in T, & V rectæ R Q, θ ψ.

Propr. I. Apogeum & Perigeum Deferentis ultra citraque lineam Apfidum Æquantis H G, reciproco motu libratur. Sequitur ex motu centri Deferentis per circellum: & quando centrum Deferentis percurrit circelli partem fuperiorem V E T, Apogeum & Perigeum Deferentis feruntur in præcedentia, feu contra O. S. ex ψ versùs Q, & ex θ versus R: cùm verò Deferentis centrum percurrit circelli portionem inferiorem T C V. Deferentis Apogeum ac Perigeum moventur in confequentia ex Q in ψ, & ex R in θ.

Propr. II. Quantitas hujus librationis Augium Deferentis, quam in Zodiaco determinat angulus V A T à tangentibus circellum ad Zodiaci centrum A comprehenfus eft 2 Signorum, five Grad. 60.

Ducatur enim recta T C, & ex circelli centro Y T. Quoniam *ex Hypothefi o* C A, Y C æquales funt, & per 18. 3. angulus Y T A rectus, fi centro C per Y & A circulus defcribatur, tranfibit is *a* per T, ac proinde C T æqualis eft circelli radio Y T. Ergo *b* C T eft latus hexagoni, ac proinde arcus C T (adeoque & angulus C Y T, feu A Y T) eft fexta pars circuli, nempè Grad. 60. Jam quia ang. Y T A *c* rectus eft, conficient A Y T, Y A T fimul unum *d* rectum, feu Grad. 90. Quare fi A Y T Grad. 60 demas à 90, remanet Y A T Grad. 30. Quare totus V A T eft Grad. 60.

o num. præc.
a per 31. 3.
b per coroll. 15. prop. 15. 4.
c per 18. 3.
d per 32. 1.

Propr. III. Centrum Epicycli exiftens prope G Apogeum Æquantis celeriùs movetur in Deferente, quàm dum exiftit prope H Perigeum. Ratio eft, quia quando centrum Epicycli eft prope Apogeum Æquantis, etiam Deferentis centrum eft *e* prope E Apogeum circelli, moveturque contra O. S. ex V per E in T, ac proinde per *Propr. 1.* etiam Apogeum totumque planum Deferentis libratur contra O. S. ex ψ in Q: quæ libratio retardat motum centri Epic. factum *f* fecundùm. O. S. At centro Epicycli pofito circa Perigeum H, etiam Deferentis centrum eft prope C, ubi movetur ex T per C in V, ac proinde etiam Deferens cum fuo Apogeo libratur fecundùm. O. S. ex Q in ψ; quæ libratio accelerat motum centri Epicycli etiam factum fecundùm. O. S. Quare cùm nihilominus Epicycli centrum æqualibus temporibus æquales arcus in Æquante *r* abfolvat, neceffe eft ipfum exiftens prope G, Apogeum Æquantis velociùs in fuo Deferente moveri, quàm dum eft prope H Perigeum.

e per n. 32.
f per eund.
r per eund.

Propr. IV. Nihilominus (quod requirit prima inæqualitas) centrum Epicycli, exiftens prope G Apogeum, in Zodiaco movetur tardiùs quàm dum eft prope H Perigeum. Ratio eft, quia licet in Deferente Eccentrico moveatur inæqualiter, movetur tamen æqualiter refpectu Eccentrici Æquantis; qui motus in Æquante æqualis, nobis apparet in Zodiaco inæqualis; tardiffimus ad Apogeum; celerrimus ad Perigeum. *Vide dicta num. 6. §. 1.*

Propr. V. Semel in anno Eccentricitas Deferentis par eft Eccentricitati Æquantis, quando nempè utriufque centra junguntur in C: & femel in anno Eccentricitas Deferentis tripla eft Eccentricitatis Æquantis A C, quando nempè Deferentis centrum eft in E. Reliquo anni tempore Deferentis Eccentricitas femper major Eccentricitate Æquantis. Dixi *femel in anno*, quia una revolutio Media centri æquatur Anno Solari, ut patet ex §. 2. *num.* 29.

Dictum eft fupra num. 32. quando Deferentis centrum eft in E, & Deferens ipfe in D π ω φ, tunc centrum Epicycli effe in Deferentis Apogeo D, atque in ipfa lineâ Apfidum Æquantis H G: cum verò centrum Deferentis coincidit cum centro Æquantis in C, & unus idemq; circulus G O H β eft Deferens, & Æquans, adeoq; unum utriufque Perigeum H, tunc Epicycli centrum effe in communi illo Perigeo H: extra quos duos cafus centrum Epicycli nunquam eft in Apogeo vel Perigeo, five Æquantis, five Deferentis. Hoc pofito, Proprietas fexta & præcipua hujus Hypothefeos hæc eft.

Propr. VI. Centrum Epicycli longiffimè diftat à centro Mundi A, quando eft in Apogeo D: non tamen diftat minimè, quando eft in Perigeo H. Tunc enim centrum Epicycli I minimam habet diftantiam I A à Mundi & Terræ centro A, quando confecit in Æquante Anomaliam Mediam *t* G O Grad. 120, vel Anomaliam *m* G β H O Grad. 240: hoc eft quando ab Æquantis Perigeo H utrimque diftat Grad. 60, ac proinde cùm neque eft in Æquantis Perigeo H, neque in Deferentis Perigeo R, vel θ.

t Fig. 16.
m Fig. 17.

Quod diftantia I A minor fit Perigeâ diftantiâ H A, fic demonftrabitur. Quia centrum Epicycli ponitur abfolviffe in Æquante Anomaliam G O Grad. 120, etiam Deferentis centrum *i* confecit arcum E T Grad. 120, & linea Apfidum Deferentis R A T Q tangit circellum in T, ut patet ex demonftratis *Propr. 2.* Quare ductâ T C, erit angulus E C T Grad. 60, utpote dimidius *n* anguli E Y T Grad. 120. Cùm igitur E C T Grad. 60, & G C O Grad. 120 fimul efficiant Grad. 180, hoc eft duos rectos, liquet T C, I C *p* conficere unam rectam T C I. Jam, quia in *Propr. 2.* oftenfum eft T C æqualem effe radio circelli Y C, hic autem *q* æqualis fit A C Eccentricitati Æquantis, etiam T C æqualis erit A C. Quare, fi ab Æquantis & Deferentis æqualibus radijs C H, T I auferantur æquales C A, T C, relinquentur æquales A H, C I. Quia verò A C (adeoque & T C) à Ptolomæo (ut oftendam *r* infrà) inventa fuit partium 3, feu 5000, quarum radius C H, vel T I eft

Fig. 16.
i per n. 32.
n per 20. 3.
p per 14. 1.
q per n. 32.
r num. 44.

60, vel 100000, liquet tam A H, quàm C I, esse 57, quarum A C est 3, adeoque A C minorem esse quàm C I, ergo angulus *s* A I C minor angulo C A I. Atqui C A I, A I C conficiunt Grad. 120, (simul enim sunt pares *t* externo G C I, seu G C O qui per *Hyp.* est Grad. 120.) Ergo C A I major est semisse Grad. 120, hoc est Gradibus 60. Quare cùm jam ostenderim E C T, hoc est I C A esse Grad. 60, erit I C A minor quàm C A I; ideoque I A *u* minor quàm C I, hoc est (ut ostensum *supra*) quàm A H: quod erat demonstrandum.

s per 19.1. t per 32.1. u per 18.1.

Quod autem *o* I A distantia centri Epicycli ab A centro Mundi ad Æquantis Anomaliam G O Grad. 120 sit minor ejusdem centri distantiâ *x* Q A ad quemvis alium Anomaliæ Gradum, sic ostendes. In triangulo I C A *a* ex jam demonstratis notus est angulus I C A Grad. 60, & nota sunt latera A C, C I, cùm A C sit 3. & C I 57, quarum radius C H est 60: ex quibus *b* reperietur I A partium 55. 33'. 30". quarum 60 est radius C H. Quod si deinde solvas triangulum *c* A Q C modo quem *num. seq.* tradam, in ijsdem partibus reperies distantiam Q A majorem, quàm priorem I A; *d* ac proinde omnium minima est I A. Quod erat demonstrandum.

o Fig. 16. x Fig. 18. a Fig. 16. b per probl. 10. cap. 3. Geo. Pract. c Fig. 18. d Fig. 16.

Propr. VII. Atque hæc præcipua hujus Hypotheseos proprietas est per quam salvantur phœnomena ☿ relata *num.* 30. §. 2, quorum gratiâ Hypothesis ipsa potissimum excogitata fuit. Cùm enim Ptolemæus cum Antiquis omnibus Epicyclum statuat magnitudinis semper ejusdem, non aliàs possunt maximæ Digressiones secundùm illum contingere, quàm dum Epicycli centrum sit proximum centro Mundi, seu Terræ. Fit autem Terræ proximum non in Perigeo H, sed in trientibus, hoc est in duobus punctis *e* I utrimque dissitis à Perigeo Gradibus 60, quæ nempè terminant Anomaliam G O Grad. 20. vel Anomaliam G β H O Grad. 240, ut jam demonstratum est. Isthic igitur, & non in Perigeo, Digressiones maximæ contingent, quod Ptolomæi observationes requirebant.

e Fig. 16. 17.

Propr. VIII. Æquationes Orbis maximæ etiam contingunt, non in Perigeo H. sed ad Gradum Anomaliæ Æquantis 120 vel 240. Isthic enim Epicycli centrum fieri Terræ proximum, jam est ostensum. Quare in hac Hypothesi, tabula Æquationum Orbis ☿ sic ordinanda, ut Scrupula proportionalia, de quibus egi *num.* 28. §. 5, minima quidem sint in Apogeo, sed tota seu 60 ponantur non in Perigeo è regione Grad. 180, seu sex Signorum, sed è regione Grad. 120, & 240, sive 4, & 8 Signorum, ab ijs autem locis decrescant ordinatim usque ad semicirculum Anomaliæ, seu Perigeum.

NUMERUS XXXIV.

Forma calculi Geometrici Longitudinis Veræ ☿ ad tempus datum, in hac Hypothesi.

Fig. 18.

Cum hic solùm tradatur forma calculi, supponentur quatuor tanquam nota, quæ posteà locis in margine annotatis invenientur, nimirum *m* A C Eccentricitas Æquantis, & radius Epicycli, utraque in partibus radij Æquantis, seu Deferentis; & Anomalia *o* Orbis Vera, & motus *p* Apogei, utraque ad tempus datum.

m num. 44. o num. 50. p num. 42.

Esto igitur Zodiacus A ♈ L S, ejusque centrum A: Æquans C G O H, ejus Apogeum G, centrum C, Eccentricitas A C, circelli diameter E C, dupla A C, ut requirit Hypothesis. Jam ad tempus datum, sit Deferentis centrum in circelli puncto B, & ipse Deferens in D Q R, ejus Eccentricitas A B, Epicycli centrum in Q, ejus Apogeum Verum N, linea motus Anomaliæ Mediæ C Q O, huic parallela A M linea motus Medij centri Epicycli, Anomalia Media G O, motus Medius centri Epicycli ♈ L M, Verus ♈ L F motus Apogei Æquantis ♈ L; ☿ sit in X; Anomalia Orbis N X, Verus ☿ motus ♈ L S, quem supputare oporteat.

§. 1. Ad t. d. inquire *a* motum Solis Medium: ita notus erit motus Medius centri Epicycli ♈ L M, quia idem est cum *b* Medio motu Solis, Ab hoc aufer motum Apogei ♈ L qui (ut dixi) notus supponitur; sic nota erit Anomalia Media Eccentrici in Zodiaco L M, adeoque *c* & angulus L A M; cui cùm ob parallelas A M, C O æqualis sit G C O *d* subtendens Æquantis Anomaliam G O, etiam hic notus erit.

a per num. 55 lib. 1. b per §. 2. num. 29. c per 33. 6. d per 27. 1.

§. 2. Eccentricitatem Deferentis A B dato tempori convenientem sic invenies. Circelli ac Deferentis D Q R centra jungat recta Y B. Quoniam *e* A Y dupla est A C, & nota supponitur A C, etiam A Y nota erit, uti & Y B. Deinde quia inventa jam est §. 1. Anomalia Æquantis G O, & arcus E B æqualis *i* est ipsi G O; etiam E B notus erit. Ergo etiam *m* angulus E Y B, adeoque & A Y B *n* notus est. In triangulo igitur A B Y ex duobus lateribus notis A Y, Y B, & angulo noto A Y B, reperietur Deferentis Eccentricitas *p* temporanea A B, in ijsdem partibus, in quibus nota supponitur A C, hoc est in partibus radij Æquantis, seu Deferentis. Eâdem operâ notus fiet angulus Y A B, quem serva.

e hyp. i per n. 32. m per 33. 6. n per 13. 1. p per probl. 10. cap. 3. Geo. pract.

§. 3. Æquationem centri A Q C, sive M F (nam ob parallelas C Q O, A M, angulus A Q C æquatur angulo *r* F A M qui subtendit arcum M F) dato tempori convenientem, atque inde motum Verum centri Epicycli ♈ L F sic invenies. Epicycli & Deferentis centra jungat recta Q B, & Q C producatur in I. In triangulo A I C per §. 1. notus est angulus A C I, hoc est G C O (est enim ipsa Anomalia Media Æquantis) & per §. 2, notus est Y A B, seu C A I, latus autem A C notum supponitur. Ex his ergo *s* reperientur latus A I in ijsdem partibus in quibus nota supponitur A C, hoc est in partibus radij C H, seu B Q, & angulus A I C; quo dempto à Grad. 180 notus relinquitur B I Q. Jam quia in partibus radij B Q nota est A I, & in ijsdem per §. 1. nota est A B, etiam nota in ijsdem erit reliqua I B. In triangulo igitur B Q I ex notis lateribus I B, B Q, & angulo B I Q reperietur *t* I Q. Postremò quia in triangulo A Q I jam paulò ante reperta sunt latus A I, & angulus A I C, seu A I Q, & jam statim innotuit I Q, ex his reperientur *x* Æquatio centri A Q I, latusque A Q distantia centri Epicycli à Mundi centro ad t. d. quam serva.

r per 27. 1. s per probl. 9. cap. 3. Geo. pract. t per probl. 11. cap. 3. Geo. pract. x per probl. 10. ibid.

Ricciolus lib. 7. pag. 565. num. 8. *investigans Æquationem centri, inquirit angulum A Q B, tanquam is esset Æquatio centri, cùm Æquatio centri sit angulus A Q C, non autem angulus A Q B. Nam motus æqualis centri in hac hypothesi fit, non in Deferente D Q R, sed in Æquante G O H, ac proinde Anomalia Media centri Epic. non est D Q, sed G O, & linea motus Medij est A M parallela ad C Q O, ut patet ex* def. 9. num. 4, *adeoq; motus Medius centri Epic. est ♈ L M, ut patet ex* defin. 15. num. 4. *Verus autem est ♈ L F. Quare cùm Æquatio centri sit Medij, seu Æqualis ac Veri motus centri differentia, liquet arcum M F esse centri Æquationem.*

Quare

Quare cùm arcus M F subtendat angulum M A F, hoc est ob parallelas A M, C Q O, o angulum A Q C, patet Æquationem centri esse angulum A Q C, non verò A Q E. Præterea non rectè in ipsâ investigatione anguli A Q B, jubet inquiri illum ex notis lateribus A B, B Q, & angulo D B Q, supponens hunc esse notum ex Deferentis Anomaliâ Q D; cum tamen non hæc, sed Æquantis Anomalia G O nota sit; esto possit innotescere D Q ex discursu hic à nobis jam præmisso. Hæc dicta sint non viri perstringendi causâ, quem summi facio, & maximis quibusque Astronomis judico parem, sed amore veritatis. Sunt autem virorum talium errores ejusmodi, non ignorantiæ, sed inconsiderantiæ mentis ad alia festinantis, attribuendi.

o per 27.1.

Æquatio A Q I, seu M F jam inventa, dempta motui Medio ♈ L M, si (ut hic contingit) Epicycli centrum sit in primo Anomaliæ semicirculo G O H, addita verò si in secundo, dabit centri Epicycli motum Verum ♈ L F.

§. 4. Æquationem Orbis X A Q, seu S F, atque inde ☿ motum Verum ♈ L S sic reperies. Quoniam nota supponitur Orbis Anomalia N X, etiam angulus N Q X, adeoque & X Q A notus erit. In triangulo igitur Q A X ex noto angulo X Q A, & A Q distantiâ centri notâ per §. 3, & Epicycli radio Q X, quem supposui notum, reperietur n X A Q, seu S F, Orbis Æquatio; quæ addita motui Vero centri ♈ L F, si ☿ sit in Anomaliæ Orbis semicirculo primo N X Z (ut hic contingit), subtracta verò si in secundo, dabit ☿ Longitudinem Veram ♈ L S ad tempus datum. Eâdem operâ reperitur A X ☿ ad t. d. distantia à centro Mundi.

n per probl. 10. cap. 3. Geo. pract.

Corollarium.

Per discursum §. 3. eâdem operâ reperietur angulus B Q A; qui est Æquatio Optica, Physica autem est I Q B, ut patet ex *defin.* 18. & 19. *num.* 4.

Scholium.

Ex his, quæ tribus* Numeris præcedentibus *jam disseruimus, futurum spero, ut ☿ Hypothesis Ptolemaica, quæ præ aliorum Planetarum Hypothesibus est difficilis ac intricata, nullo negotio intelligatur. Eam certè alij sic explicarunt, ut vim ejus ac theoriam ex libris eorum, studiosos Astronomiæ assecuturos vix putem.

Introduxit autem in ☿ Hypothesim Ptolomæus motum centri Deferentis per circellum, unde totam illam hujus Hypotheseos diversitatem profluxisse *nu.* 32. & 33. §. 7. jam vidimus, ut in duobus extra Perigeum locis, nimirum in trientibus Anomaliæ, centrum Epicycli fieret proximum Terræ; aliàs enim cùm Epicycli diametrum semper eandem retineat, non potuisset ☿ Digressiones maximarum maximas, quòd ejus observationes *num.* 30. §. 2. relatæ requirebant, in illis Anomaliæ, extra Perigeum, locis exhibere. At si cum Copernico, Lansbergio & Ricciolo Epicycli diametrum variemus, poterunt extra Perigeum Digressiones maximæ maximarum contingere, licèt Epicycli centrum ibidem longiùs à Terræ centro, quàm in Perigeo abfuerit, ut visuri deinceps sumus.

NUMERUS XXXV.

Veneris nova Hypothesis.

PRoponit eam Ricciolus *Almag. lib. 7. cap. 6.* & consistit præcipuè in variatione Epicycli, in quo quidem Copernicum & Lansbergium, qui in ☿ loco Epicycli variant Orbem Annuum Terræ, imitatus est.

§. 1. Zodiacus esto A ♈ H R, ejusque centrum A; Eccentricus ♀, I ♂ E β X, ejusque centrum I; linea Apogei, sive Apsidum X A I E Zodiaco occurrens in H & ♆; Apogeum E, Perigeum X; Eccentricitas A I semper eadem. Sit autem Eccentricus par Eccentrico Solis, sive Orbi Annuo; perque eum in consequentia moveatur centrum Epicycli ♀ Solem ambientis motu æquali, seu regulari, sic ut ejus motus Medius in Zodiaco semper sit idem cum Medio motu Solis. Epicycli porrò centrum quamvis n raro sit in ipso centro Solis, nunquam tamen ab eo longè digreditur. Ita salvatur prima inæqualitas quinque Planetis communis, & *Veneri* ac *Mercurio* proprium phœnomenum *num.* 29. §. 2. recensitum.

Fig. 21.

n patebit ex sequentibus.

§. 2. Secunda inæqualitas communis 5 Planetis, & phœnomenum ♀ ac ☿ proprium quod retuli *num.* 29. §. 1. salvantur per motum in Epicyclo Solem ambiente. Magnitudo Epicycli manet invariata in Eccentrici Anomaliæ Quadrante primo E β, & quarto ♂ E. At in secundo & tertio variatur secundùm proportionem Sinuum Secundorum complementi, vel excessus Anomaliæ ad semicirculum, sic ut minimus sit in Perigeo X. Hujus autem variationis theoriam à Ricciolo omissam, quod etiam fecimus in ♄. ♃. ♂. *num.* 10. §. 5. hunc in modum supplebimus.

Epicycli centrum sit in Quadrantis primi termino β, Planeta in S, & maximi Epicycli radius, qualis est per totum semicirculum ♂ E β, sit β S; minimi, qualis est in Perigeo X, sit β N; differentia maximi & minimi S N. Radius maximus β S secum deferens Planetam, moveatur circa Epicycli centrum, & centrum ipsum Epicycli feratur per Eccentrici Quadrantem secundum ex β versùs X: interim verò Planeta ipse percurrat differentiam S N hac lege, ut cùm Epicycli centrum pervenerit ex. gr. ex β in Z, & ♀ ex S in P, tunc ita sit S N ad S P, ut radius Eccentrici I X, qui est Sinus totus, ad I θ Sinum Secundum arcus Z X qui est complementum Anomaliæ E Z ad semicirculum, ita habebitur Z P radius Epicycli convenientis Anomaliæ E Z, serveturque similis proportio decrementi Epicycli usque ad Perigeum X; quò ubi pervenerit Epicycli centrum, ♀ existat in N, percursâ totâ differentia S N, ut habeatur minimus radius Epicycli X N. Inde Epicycli centro pergente ad Quadrantem tertium X ♂, rursum ♀ incipiat percurrere differentiam S N, adeoque augere Epicyclum eâdem lege quâ suprà diminuerat, sic nimirum, ut cùm Epicycli centrum ex. gr. pervenerit in ω, & ♀ ex N in P, tunc denuò sit S N ad S P, ut radius Eccentrici, seu Sinus totus I X ad I θ Sinum arcus X ω, qui est excessus Anomaliæ E Z ω suprà semicirculum. Ita habebitur ω P radius Epicycli debitus Anomaliæ E Z ω. Simili proportione Epicycli radius perpetuò crescat usque in ♂ terminum Quadrantis tertij: quò ubi pervenerit centrum Epicycli, ♀ iterum sit in S, decursâ totâ differentiâ N S: sic enim maximus rursum erit Epicycli radius ♂ S.

Porrò æquitas theoriæ Epicyclicæ hoc §. expositæ,

tæ, à posteriori colligitur. Nam loca ♀ juxta eam supputata æquè vel magis cum locis observatis conveniunt, quàm si secundùm alias Hypotheses supputentur.

§. 3. His omnibus demùm si addes motum lentissimum Apogei Eccentrici in consequentia suprà centrum Mundi, novam ♀ theoriam habes completam.

NUMERUS XXXVI.

Forma calculi geometrici Longitudinis Veræ ♀ ad tempus datum, in hac Hypothesi.

Fig. 21. i num. 45. o ibid. m nu. 42. n num. 50.

SUpponentur quatuor tamquam nota, quæ postea reperientur; Eccentricitas, in partibus radij Eccentrici; in ijsdem radius Epicycli o maximus & minimus, ac proinde & differentia utriusque; motus m Apogei, & Vera Anomalia n Orbis utraque ad tempus datum.

Esto igitur ad tempus datum Epicycli centrum in Z, ejus motus Verus ♈ H Q, Medius ♈ H T, linea motus Anomaliæ I Z, linea motus Medij huic parallela A T, *Venus* in P, ejus motus Verus ♈ H R. Hunc oporteat supputare.

o per n. 54. lib. 1. a per §. 2. num. 29.

§. 1. Ad t. d. inveni o motum Solis Medium: sic enim notus erit Medius *Veneris* motus ♈ H T ad t. d. cùm is sit idem a cum Medio motu Solis. Ab hoc aufer motum Apogei ♈ H ex suppositione notum. Ita notam habes Anomaliam Mediam Eccentrici H T, adeoque & angulum H A T, cui cùm ob parallelas sit æqualis E I Z, etiam hic adeoque & Z I A notus erit. In triangulo igitur Z A I ex noto angulo Z I A, & notis ex suppositione lateribus I A Eccentricitate, I Z radio Eccentrici, reperientur b Z A distantia centri Epicycli à Terrâ (quam serva) & centri Æquatio I Z A, sive c T Q; quæ subtracta Medio motui ♈ H T, si Epicycli centrum (ut hic contingit) sit in primo Anomaliæ semicirculo E Z X; addita verò si in secundo, dabit ♈ H Q motum Verum centri Epicycli.

b per prob. 10. cap. 3. Geo. pract. c vide def. 17. num. 4.

§. 2. Radium Epicycli dato tempori convenientem sic invenies. Si Epicycli centrum est in Anomaliæ Eccentrici Quadrante primo E β, vel quarto ♁ E, radius Epicycli est maximus & semper idem, qui jam ut notus supponitur: si est in Quadrante secundo, putà in Z, β X Anomaliam E Z §. 1. inventam aufer à semicirculo: ita notus fit arcus Z X; si est in tertio, putà in ω, ab Anomaliâ E Z ω §. 1. inventâ aufer semicirculum; ita notus rursum fiet arcus ω X. Arcus igitur Z X, sive ω X, Sinum Secundum, quem refert I θ, quære in Tabulis Sinuum; & fiat ut Sinus totus 100000 (ipse nimirum Eccentrici radius I X) est ad Sinum Secundum I θ, ita maximi & minimi radij Epicycli differentia S N ad Quartum: dabit hoc S P (est enim ut I X d ad I θ, sic S N ad S P) quo subtracto à radio maximo Z S, relinquetur radius Epicycli Z P ad t. d.

d per §. 2. num. 35.

§. 3. Invento radio Epicycli facilè erit Æquationem Orbis P A Z, atque inde Verum motum ♀ repetire hunc in modum. Quoniam Anomalia Orbis, quam ut notam supposuimus, hìc est M K F S, seu O G D P major semicirculo, si ipsam demas à Grad. 360, notus relinquetur arcus O P, & angulus O Z P, quo subtracto à Grad. 180, notus relinquetur angulus P Z D, seu P Z A. In triangulo igitur P A Z, quia notus est ang. P Z A, & duo latera nota P Z per §. 2. Z A per §. 1, ex his e reperiemus Æquationem Orbis P A Z, sive Q R, quæ addita motui Vero centri ♈ H Q si ♀ sit in primo Anomaliæ Epicycli semicirculo O G D, subtracta verò si in secundo (ut hic contingit) dabit Longitudinem ♀ Veram ♈ H R ad tempus datum. *Eâdem operâ innotescet P A distantia Planetæ à centro Mundi ad t. d.*

e per probl. 10. cap. 3. Geo. pract.

NUMERUS XXXVII.

Hypothesis nova Mercurij.

PRoponitur à Ricciolo *Almag. lib. 7. cap. 6.* & consistit potissimùm in variatione tam Eccentricitatis quam Epicycli; in quo Copernicum & Lansbergium, quoad Epicyclum, imitatur.

Fig. 22.

§. 1. Zodiacus esto A T M ♈, ejusque centrum A; Eccentricus ☿, Solari Eccentrico par E β X ♁ cujus centrum mobile; Apsidum linea X E, occurrens Zodiaco in H & ♆; Eccentricitas minima A B, maxima A D, differentia B D. Epicycli centrum movetur in consequentia per Eccentricum motu Æquali, sic ut ejus motus Medius semper sit idem cum Medio motu Solis, unde fit, ut centrum Epicycli semper comitetur centrum Solis, sic ut quamvis raro cum ipso coincidat, semper tamen sit ipsi proximum.

§. 2. Cùm Epicycli centrum est in Apogeo E, centrum Eccentrici est in D, maximam efficiens Eccentricitatem A D. Cùm Epic. centrum est in Perigeo X, Eccentrici ceutrum est in B minimam efficiens Eccentricitatem A B. Centro Epic. per primum Anomaliæ semicirculum descendente ab Apogeo E ad Perigeum X, etiam centrum Eccentrici descendit per differentiam D B; ascendente verò Epicycli centro per secundum Anomaliæ semicirculum X ♁ E, etiam Eccentrici centrum ascendet ex B in D, Eccentricitatem illic minuens, hìc augens ijsdem utrobique legibus, quas in ♄, ♃, ♂ exposui *num.* 10.

§. 3. In *schemate* unus exhibetur situs Eccentrici centrum habentis in I.

§. 3. Epicyclus ita variatur, ut minimus sit in Apogeo E, & Perigeo X, maximus in Quadrantibus, hoc est ad Gradum Anomaliæ 90, β, & 270, ♁. Proportio incrementi ac decrementi se habet ut in ♀ cujus theoriam à Ricciolo omissam supplebimus hunc in modum.

Epicycli centrum sit in Apogeo E, ubi minimus est Epicyclus, ☿ autem sit in N, ad quem ducatur radius E N nempè minimus; maximus verò, qualis est in β, & ♁, sit E S, & differentia utriusque N S Radius S E secum deferens ☿ moveatur circa Epicycli centrum, quod ipsum decurrat Anomaliæ Quadrantem primum E β: interim verò ☿ percurrendo differentiam ab N versùs S, assiduè augeat Epicycli radium hac lege, ut cùm Epic. centrum pervenerit ex. gr. ex E in V, & ☿ ex N in C, tunc ita sit S N ad S C ut Eccentrici radius I E ad I Y Sinum Secundum Anomaliæ, E V. Sic habetur Epicycli radius V C conveniens Anomaliæ E V. Simili proportione crescat Epicycli radius usque ad finem primi Quadrantis, β; quò ubi centrum devenerit, ☿ existat in S, decursâ totâ differentiâ N S, ut maximus habeatur Epicyclus β N S. Inde centro Epic. percurrente Quadrantem secundum β X, etiam ☿ percurrendo iterum differentiam S N, sed ab S versùs N, assiduè diminuat Epicycli radium eâdem proportione, quâ priùs auxerat, sic ut semper S N sit ad S P, sicut Eccentrici radius I X est ad I θ Sinum Secundum arcus Z X, qui est complementum Anomaliæ E Z ad semicirculum.

Atque

Atque ita centro Epic. attingente Perigeum X, etiam ☿ existet in N minimum habens Epicyclum X 2 N. Simili planè modo augetur rursum Epicycli radius in Quadrante tertio X ♂, donec maximus fiat in ♂; at in Quadrante quarto ♂ E eâdem lege iterùm decrescit, donec rursum fiat minimus in Apogeo E.

§. 4. His motibus postremò adde lentissimum Apogei Eccentrici progressum in consequentia suprà centrum Mundi: atque ita completam habes theoriam novam ☿.

Convenientia Epicyclicæ theoriæ jam expositæ à posteriori probatur, quod Vera loca ☿ juxta hanc formam supputata, cum ijsdem locis observatis consentiant æquè vel meliùs, quàm si secundùm alias Hypotheses supputentur. Neque verò ab Astronomis hactenus reperta via est ulla, quâ Planetarum Hypotheses totaliter à priori possint constitui. Atque utinam vel à posteriori obtineri ulla possit ejusmodi, quæ omnibus observationibus satisfaciat. Atqui ne hoc quidem hactenus licuit; tanta est motuum Planetariorum obscuritas, atque perplexitas.

NUMERUS XXXVIII.

Forma calculi geometrici Longitudinis Veræ ☿, in hac Hypothesi.

SUpponentur quatuor tamquam nota, quæ postea reperientur, nimirum Eccentricitas a maxima ac minima & harum differentia; radius Epicycli b maximus ac minimus & horum differentia; utraque in partibus radij Eccentrici: motus c Apogei, & Vera Anomalia d Orbis; utraque ad tempus datum.

a *num.* 45. b *ibid.* c *num.* 42. d *num.* 50.

Esto igitur, ad tempus datum Eccentrici centrum in I, Eccentricus ipse ♂ E β X, Epicycli centrum in V, ☿ in C, ejus Longitudo Vera ♈ H R: quam oporteat supputare.

Fig. 22.

§. 1. Eccentricitatem A I dato tempori debitam reperies, ut *num.* 11. §. 1. textus & litteræ utrobique conveniunt huic loco. Æquationem centri A V I & motum ejus Verum ♈ H Q, ejusque distantiam à centro Mundi reperies, ut *num.* 11. §. 2. iterum enim textus & litteræ utrobique conveniunt.

§. 2. Epicycli radius V C dato tempori debitus ita invenietur. Si Epicycli centrum sit in Apogeo vel Perigeo, minimus e erit Epicycli radius; si in Quadrantibus β, ♂, maximus. In reliquis casibus sic procede. Si Epicycli centrum sit in Quadrante primo, putà in V, quære I Y Sinum Secundum Anomaliæ E V: si in secundo putà in Z, quære Sinum Secundum I θ arcus Z X, qui est complementum Anomaliæ E Z ad semicirculum: si in tertio putà in ω, quære I θ Sinum Secundum arcus ω X, qui est excessus Anomaliæ E Z ω suprà semicirculum: si in quarto putà in φ, quære I Y Sinum Secundum arcus φ E, qui est complementum Anomaliæ E Z φ ad circulum. Deinde ut Sinus Totus 100000 ipse nimirum Eccentrici radius I E, seu I X est ad Sinum Secundum I Y, seu I θ, ita maximi & minimi radij differentia S N fiat ad Quartum: dabit hoc S C vel S P (est enim m ut radius ad Sinum Secundum, ita S N ad S C vel S P) quo subtracto à radio maximo, relinquetur V C, vel Z P, vel ω P, vel φ C, radius Epicycli quæsitus.

e *per* §. 3. *num.* 37.

m *ibid.*

§. 3. Æquationem Orbis C A V, seu R Q, atque inde Veram ☿ Longitudinem ♈ H R ejusque distantiam à centro Terræ A C reperies ut §. 4. *num.* 11, textus enim & litteræ utrobique conveniunt: sed Anomaliam ς C Orbis dabit *num.* 50.

NUMERUS XXXIX.

Satisfit ☿ phænomenis per hanc Hypothesim.

QUod attinet ad inæqualitatem primam & secundam quinque Planetis communem, salvatur utraque in ☿, ut in alijs Planetis, prima quidem per Eccentricum, secunda per Epicyclum: Phænomena ♀ & ☿ propria, quæ recensui *num.* 29. §. 1. salvantur per motum in Epicyclo Solem ambiente & semper comitante, ut loco citato exposui.

At Phœnomena soli ☿ propria, quæ referuntur *num.* 30. §. 2. nimirum quod Digressiones maximæ à Medio Solis loco, & maximæ Æquationes Orbis non contingant cùm centrum Epicycli est in Perigeo X, sed cùm in trientibus ab Apogeo, hoc est in Anomaliæ Gradu 120, Z, vel 240, ω; ea, inquam, per hoc salvantur, quòd licet in locis dictis, Z, ω, centrum Epicycli juxta hanc Hypothesim longiùs distet a centro Mundi A, quàm in Perigeo X, Epicyclus tamen isthic major sit, quàm in Perigeo. Id adeò reperies, si calculum tentaveris.

Fig. 21.

In lineâ Apsidum Eccentrici ☿, sit A Mundi centrum, Eccentricitas maxima A D, minima A B: Eccentricus autem sit in I E O F, Eccentricitatem habens A I, quando Epicycli centrum est in O ab Apogeo E Gradibus 120. His positis assumendo mensuras, quas postea, o approbabimus, nimirum

Fig. 19.

o *num.* 45.

A D. *Ecc. max.*	10000	*qualium Radius Eccentrici est* 100000
A B. *Ecc. max.*	6000	
Radius Epic. max.	45500	
Radius Epic min.	38500	
Differen.	7000	

has, inquam, mensuras assumendo, si procedas ut præscribitur *num. præc.* §. 1. proveniet Eccentricitas A I 7600, quarum radius Ecc. I E, seu I O est 100000, & cum hac in triangulo I O A reperietur O A distantia centri Epicycli à Mundi centro 96365 earumdem partium. At cùm Epicycli centrum fuerit in Perigeo, ac proinde Eccentricus in B G H Q, minimam habens Eccentricitatem B A, tunc Q A distantia centri Epic. à centro Mundi habetur auferendo A B, 6000, à radio B Q 100000, ac proinde ea tunc est earumdem partium solummodo 94000. Quare distantia O A à centro Mundi ad Anomaliam Grad. 120 major est quàm distantia Q A, in Perigeo.

Nihilominus quia in O major est Epicyclus, quàm in Q, Æquatio Orbis maxima O A N major est quàm Q A P. Operando enim ut præscribitur *num. præced.* §. 2. proveniet Epicycli radius O M 42000, quarum radius Ecc. est 100000; & cum hoc unà cum A O, 96365 jam inventâ, in triangulo rectangulo O N A reperietur Æquatio a Orbis O A N major Grad. 25. 46. Sed in Q Perigeo, ubi radius Epicycli Q P est minimus, nempè partium earumdem 38500, cum hoc & distantiâ Q A, 94000, in triangulo rectangulo Q P A reperietur Æquatio Orbis Q A P, minor Grad. 24. 11. Quare Æquatio O A N ad Gradum Anomaliæ 120 extra Perigeum major est Æquatione Q A P in Perigeo, & utramque duplicando N A M, major est quàm P A S, quod observationes requirebant. Hinc porrò & ex *num.* 30. §. 1. *not.* 4. facilè apparet etiam Digressiones ☿ maximas ibidem in O etiam majores posse contingere, quàm in Perigeo Q, quod ex observationibus Ptolomæi *num.* 30. §. 2. recitatis sequebatur.

a *per probl.* 5. *cap.* 3. *Geo. pract.*

CAPUT VI.

Mercurij, & Veneris utraque inæqualitas investigatur.

Ad primam inæqualitatem spectant motus Medius centri Epicycli (sed hic datur ex Medio motu Solis, à quo non differt) locus & motus Apogei, Eccentricitas: ad secundam pertinent quantitas Orbis, seu Epicycli, & motus Anomaliæ Orbis. His enim repertis inæqualitas utraque ad æqualitatem revocatur, & locus Verus utriusque Planetæ ad tempus datum invenitur, ut docui *num.* 31.34.36.38. Quod si ardua fuit harum inæqualitatum investigatio in ♄, ♃, & ♂, ut ex toto *quarto cap.* perspicuum est; in ☿ & ♀ adhuc illa difficilior erit, contra quam Ptolomæus & cum illo veteres existimaverant. Quamvis enim duo illi Planetæ non digrediantur à Sole ultra certos terminos, qui sub observationem cadunt: tamen quia in suis illis Digressionibus maximis, imò in alijs quibusvis, utraque inæqualitate involvuntur, in Conjunctionibus autem cum Sole tam Apogeâ quàm Perigeâ, quo tempore Solâ *i* inæqualitate secundâ exuuntur, sint inobservabiles, vix via ulla relinquitur, quâ inæqualitas altera possit ab altera discerni. Quâ certè difficultate tres Planetæ superiores carent, qui, cùm Sole opponuntur Acronicè, totâ nocte observari possunt.

i vide n. 6. *§.* 7. *&* 1.

NUMERUS XL.

De maximis ♀ ac ☿ Digressionibus à Sole investigandis.

Attigi jam de his quædam *suprà num.* 30. *§.* 1. quæ huc tamquam fundamenta dicendorum revocanda.

§. 1. Modus observandi ♀ & ☿ Digressiones maximas à Solis loco Medio vel Vero, hic est. Primò scire oportet præter propter tempus, quo Digressio maxima continget: cujus indicium erit, si Planeta ex cornuto incipiat apparere dichotomus, seu bisectus, instar Lunæ. Tum verò per dies complures observabis locum Planetæ in Zodiaco, atque ad tempus idem inquires locum *a* Solis Verum, vel Medium: sic enim pro tempore illo nota erit Digressio Planetæ à Solis loco Vero vel Medio. Quod opus eò usque continuabis, quamdiu advertes crescere Digressiones; desistes autem cùm inceperint decrescere: media siquidem inter ultimam crescentium & primam decrescentium, erit omnium maxima. Hoc modo compertum est ♀ digredi à Sole vix umquam Gradibus 48, ☿ vix umquam Grad. 30.

a per lib. 1. *n.* 55. *&* 54.

§. 2. Cùm verò medium unicum investigandi inæqualitates ♀ & ☿ sint Digressiones maximæ, facilè apparet quâ industriâ & studio observandæ illæ sint. Et quia præter observationes recentes, etiam antiquæ sunt necessariæ; hæ autem, quòd apud veteres nec Solis motus, neque Fixarum loca ritè fuerint constituta, erroris suspicione non vacent, oportebit Digressiones ab Antiquis traditas ex Solis & Fixarum motibus meliùs jam perspectis & ordinatis emendare. Exemplum esto ejusmodi. Ptolomæus *lib.* 10. *cap.* 2. *Almag.* refert Hadr. Anno 16. Pharmuti 21 vesperi; hoc est Anno Christi 132. Mart. 8. visam sibi ♀, cùm maximè esset à Sole digressa, præcedere *mediam Pleiadum* tanto spatio, quantum occupatur à toto Astro *Pleiadum*. Secundùm ipsum verò *media Pleiadum* erat in ♉ Grad. 3, & spatium, seu Longitudo totius Astri est (ut ipse putat) Grad. 1. 30' proximè. Unde infert ♀ locum tunc fuisse ♉ Grad. 1. 30. Deinde locus Solis Medius illi tunc erat ♓ partes 14. 15'. Ex quibus concludit Digressionem ♀ maximam tunc fuisse Grad. 47. 15'. Hanc Digressionem cum Ricciolo ita *a* corrige. Ex Abaco Tychonis *Pleiades* occupant Grad. 1. 34'. *Media* autem *Pleiadum*, ut patet ex *nu.* 14. *&* 16. *lib.* 5. *nostri* (ubi principia Riccioli sequimur) tunc reperitur tenuisse ♉ partes 4. 3'. à quibus si demas Grad. 1. 34' quibus ♀ præcessit, restat locus ♀ correctus ♉ partes 2. 29'. At Medius Solis locus ex principijs *lib.* 1. traditus correctus erat ♓ partes 15. 4'. Igitur maxima ♀ à loco Medio Solis Digressio correcta fuit partium 47. 25', Ptolemaicam Minutis 10 excedens. Hunc in modum Digressiones ab Antiquis alijsque observatas examinabis & corriges. Quo in genere præclarè de his Planetis meritus est Ricciolus, qui modo jam exposito *o* Digressiones ♀. 34. & ☿. 38 à Theone, Ptolomæo, Waltero, Hassiacis, alijsque observatas, ex suis accuratissimis principijs emendavit.

a Almag. l. 7. *p.* 594.

o Almag. l. 7. *p.* 594. 595.

§. 3. Astronomi passim tamquam prorsus indubitatum assumunt, Digressiones maximas contingere in contactu Epicycli, videlicet in F ubi recta ex Mundi centro A Epicyclum tangit: quod quidem difficultate non caret. Minimè dubium est quin Planeta positus in contactu, longissimè distet ab Epicycli centro E ejusque loco Vero M: at dubitari potest an ibidem longissimè semper distet à loco Solis Medio vel Vero N, cùm is respectu centri E & contactus F non sit immobilis. Sit enim Epicycli centrum in E in primo Anomaliæ semicirculo B O β, & locus ejus Verus M, linea Medij motus Solis esto A N, & sit tempus quo Solis Æquatio crescit: Planeta autem tum sit in contactu F. Manifestum est centro Epicycli procedente versùs O, Planetam è contactu F abire versùs Apogeum *α*, adeoque lineam A L Veri loci ejus accedere ad A E M lineam Veri loci centri Epicycli; lineam verò A N Medij motus Solis, eò quòd Solis Æquatio (quæ per *Propr.* 9. *nu.* 25. *lib.* 3. tunc ablativa est) ponatur crescere, liquet recedere à lineâ A E M. Quare si A N celeriùs abeat à lineâ A E M, quàm ad eamdem A L accedat, liquet Planetæ Verum locum L longiùs absuturum à Medio Solis loco N, cùm Planeta jam excessit contactu F, quàm cùm esset in illo; hoc est Digressionem maximam extra contactum contingere. Similis objectio formari potest Epicycli centro posito in P inter O & β, si tunc Æquatio Solis decrescat.

Fig. 20.

Verùm respondeo lineam A L Veri motus Planetæ celeriùs accedere ad rectam A E M, quàm ab eâdem recedat A N linea Medij loci Solis: nam tota quantitas recessus ejus est ipsa Solis Æquatio quæ tantùm est Grad. *a* 1. 59', absolviturque quarta circiter Anni Solaris parte. Quantitas verò accessus ipsius A L est arcus L M, qui in *Venere* excedit Gradus 40, absolviturque Diebus circiter 140, quæ omnia ex observationibus colliguntur. In ☿ res multò etiam est clarior. Similis ad casum alterum responsio erit. In secundo Anomaliæ semicirculo hæc objectio locum non habet, quod Lectoris considerationi relinquo. Manet igitur Digressiones maximas ♀ & ☿ in contactu contingere.

a per n. 40. *lib.* 1.

NU-

NUMERUS XLI.

Modus investigandi Apogeum Eccentrici ♀ ac ☿.

§. 1. MOdus est unicus, quem tradit Ptolomæus *Almag. lib. 9. cap. 7. & lib. 10. cap. 1.* sed omissis conditionibus necessarijs, ut certi aliquid concludi ex eo possit.

Fig. 20. *a per §. 1. n. 40.* Zodiacus esto K N S, ejusque centrum A, Eccentricus ♀ aut ☿ B O P. Eligantur duæ Digressiones maximæ N L, K H, per te *a* vel alios observatæ, quæ conditiones habeant sequentes. 1. Digressiones sint æquales. 2. una sit matutina (in F), altera vespertina (in G). 3. distantia N M Veri vel Medij loci Solis N à Vero loco centri Epicycli M in unâ, sit æqualis distantiæ K I Veri vel Medij loci Solis K à Vero loco centri Epicycli I in alterâ. 4. Eccentricitas in utrâque Digressione sit eadem, seu æqualis. 5. Radius Epicycli E F in unâ, sit æqualis Epicycli radio, C G in alterâ. 6. Intervallum temporis à Digressione unâ ad alteram non excedat annos 20, aut 30. Hæ conditiones, è quibus tertiam, quartam & quintam Ptolomæus, Regiomontanus, alijque vel neglexerunt, vel sine probatione supposuerunt, si habeantur, locus Apogei reperietur hunc in modum.

Quoniam nota sunt loca Solis Media N, K, in utrâque Digressione, notus quoque erit arcus Zodiaci N K. Quare si is bifariam secetur in D, notum erit in Zodiaco punctum D, idque erit locus Apogei vel Perigei: quod sic demonstro. Ex Epicycli centro ad contactus ducantur E F, C G, & ex A Mundi centro ad punctum D recta A B D. Quia per *Condit.* 1. æquales sunt Digressiones maximæ N L, K H, & per *Condit.* 3, æquales sunt N M, K I; etiam M L, I H, adeoque & anguli E A F, C A G æquales erunt. *b per 18. 3.* Æquales sunt insuper *b* anguli ad contactus E F A, C G A, utpote recti: radij autem E F, C G æquales sunt per *Condit.* 5. Quare cùm in triangulis A E F, A C G unum latus uni, & duo anguli duobus æquentur, etiam latera *c* A E, A C æqualia erunt. Ergo recta A D ducta ex Mundi centro A transit etiam *d* per Eccentrici centrum φ, ac proinde ipsa est linea Apsidum, punctumque B Apogeum vel Perigeum: quod eo temporis spatio, quo una Digressio præcessit alteram, supponitur esse immobile in B; quamvis enim, ut mox patebit, revera moveatur; tamen quia motus ille tardissimus est, & per *Condit. 6.* tempus non valdè magnum absque errore notabili assumi potest motum nullum intercessisse.

c per 26. 1. *d colligitur ex 7. 3.*

§. 2. Ex hac demonstratione patet, etiamsi Digressiones binæ una H K vespertina, altera matutina L N, sint æquales, nihil penitus concludi, nisi adsint conditiones reliquæ superiùs recensitæ, & inprimis æquales sint distantiæ N M, K I. Quare Geber *lib. 7. Astron.* Ptolomæum (quamvis ille fortassis per ea quæ §. 3. dicturus sum, excusari potest) redarguit, quòd duas æquales Digressiones maximas unam matutinam, alteram vespertinam sufficere existimaverit ad discernendum locum Zodiaci, per quem Apsidum linea transit. Nam si conditiones prædictæ desint, possunt Digressiones esse una matutina, altera vespertina, licet Epicycli centrum in utrâque non æqualiter ab Apogeo vel Perigeo distaret.

§. 3. Verùm an Digressiones assumptæ habeant conditiones prædictas, nullâ viâ sciri potest, quamdiu incognitus fuerit Apogei locus. Utrùm enim sint æquales arcus N M, K I, sciri nequit, nisi priùs fiat nota quantitas singulorum: ad hoc verò opus est ut nota sint in Zodiaco puncta M, I, loca Vera centri Epicycli; quæ innotescere non possunt nisi *n* priùs locus & motus Apogei innotuerit. Pari modo an Eccentricitates in utrâque Digressione fuerint æquales, nequit intelligi, nisi seorsim singulæ fiant notæ; quod rursum nequit, nisi cognitus sit Apogei locus atque motus, obtineri. Quod ad Epicycli radium attinet, supponit illum Ptolomæus semper eundem permanere; alij autem (ut jam *o* vidimus,) & cælo fortasse congruentiùs, supponunt variari. Oportebit igitur secundùm illos ad Digressionum tempora seorsim inquirere Epicycli radios, ut sciri possit an sint æquales; quo in opere iterum notus supponitur *p* Apogei locus & motus.

n patet ex n. 36. & 38. *o ibidem.* *p ibid.*

§. 4. Quando igitur nihil horum sciri potest nisi cognito prius Apogeo ipso, cogimur duabus primis conditionibus & ultimâ contenti esse, nimirum ut Digressiones assumptæ sint æquales, & una matutina, altera vespertina non magno temporis intervallo distantes; cæteris fortunæ permissis. Quare ut modus §. 1. jam expositus ad praxim utcumque redigatur, ita procedendum erit ac si tam Eccentricitas quàm Epicycli radius non mutarentur, & loca Solis Vera vel Media N, K non differrent à locis Veris centri Epicycli M, I, adeoque ac si maximæ Digressiones N L, K H non differrent ab æquationibus maximis M L, I H. Atque ita hunc modum adhibendo Ptolomæus suo tempore Apogeum ♀ statuit in ♉ Grad. 25, ☿ verò in Grad. 10. ♎.

Theon *a* siquidem Anno Christi 132. Martij 8, cùm Bononiæ esset post mer. H. 6. observavit *Veneris* (G) locum H, ♉. Gradum 1. 30'. Locus autem Solis Medius I, ipsi tunc erat ♓ Grad. 14. 15'. Quare maxima Digressio ♀ (vespertina) I H à Medio loco Solis ipsi fuit Gr. 47. 15'. Deinde Ptolomæus ipse *b* Anno Christi 140. Jul. 29. cùm Bononiæ esset post mer. H. 15. 30', observavit *Veneris* (F) locum L ♊ Grad. 18. 30', cùm Solis locus Medius M ipsi esset in ♌ Grad. 5. 45'. Quare maxima Digressio (sed matutina) M L fuit Grad. 47. 15' priori æqualis. Arcus autem minor I M inter loca Solis Media Grad. 141. 30' (tot enim sunt à Medio Solis loco I in ♓ Gradu 14. 15' usque ad Medium Solis locum M in ♌ Grad. 5. 45') cujus semissis D I est Grad. 70. 45', hæc addita loco I, nempè ♓ Gradibus 14. 15', exhibet punctum D in ♉ Grad. 25 per quod transit Apsidum linea A φ B D. Essetne porrò D Apogeum an Perigeum, collegit ex duabus alijs Digressionibus maximis, in quarum unâ Medius Solis locus erat in D, ♉ Gradu 25, altera in puncto Zodiaci opposito, nempè in ♏ Gradu 25: eam verò, quæ fiebat in D, reperit majorem alterâ: unde conclusit Apogeum esse in D.

a Ptol. lib. 10. cap. 1. *b Ptol. lib. 10. cap. 1.*

Pari modo ex binis ☿ Digressionibus maximis æqualibus, unâ matutinâ, alterâ vespertinâ, conclusit lineam Apsidum ☿ transire per ♎ Gradum 10. & ♈ Gradum 10: & ex duabus alijs Digressionibus maximis, sed inæqualibus, in quarum minore Medius Solis locus esset in ♎ Grad. 10, in majore autem locus Solis Medius esset in ♈ Grad. 10. collegit in ♎ Grad. 10 esse ☿ Apogeum.

§. 5. Talis est processus Ptolomæi in statuendis ☿ & ♀ Apogeis; qui non debet reprehendi quod fuerit eo usus, cùm præter hunc alius à priori sit nullus, & qui procedunt à posteriori non sint eo meliores; sed quod forsan putasse videatur hunc sufficere ad debi-

tam in hoc negotio præcisionem obtinendam; à quâ quantùm absit, patebit ex *num. seq.* Difficillimum porrò est, etiamsi alias conditiones negligas, intra Annos non multos reperire binas Digressiones maximas, unam matutinam, alteram vespertinam, omninò vel proximè æquales: cùm inter *Veneris* Digressiones 34, & *Mercurij* 38, à Ricciolo *o* correctas tales reperiantur perpaucæ.

o pag. 504. & 505.

Postremò nota errorem in Apogei loco ex defectu conditionum §. 1. enumeratarum eò minorem futurum, quò arcus minor I M inter Solis loca Media, I, M, in utrâque Digressione, interjectus fuerit minor. Atque hinc ait Geber factum esse, ut in loco Apogei ☿ non multùm Ptolomæus aberraverit.

NUMERUS XLII.

Locus & motus Apogei Eccentrici ♀ ac ☿ utcumque statuitur.

§. 1. PTolomæus per modum §. 4. *Num. preced.* expositum, suâ ætate ♀ Apogeum statuerat in ♉ Grad. 25: Apogeum ☿ in ♎ Grad. 10. Atqui per eundem modum, si aliæ Digressiones maximæ à Longomontano *a* correctæ adhibeantur, reperiemus ♀ Apogeum integro Signo à Ptolemaico differens.

a lib. 2. theoric. cap. 19.

Ptolomæus *b* Anno Christi 140 Iul. 29. post mer. Alexandriæ H. 16.12'. observavit Digressionem matutinam ♀ maximam à Medio Solis loco. Idem aliam observavit, sed vespertinam, Anno Christ. 136. Dec. 25. post mer. H. 6. Alexandriæ.

b lib. 10. cap. 1.

	Medius Solis locus correc.			*Locus ♀ obser. & correc.*			*Digress. à loco Med.*	
	Sig.	*Gr.*	*l.*	*Sig.*	*Gr.*	*l.*	*Gr.*	*l.*
In Matut.	♌	6	12	♊	19	1	47	11
In vespert.	♑	2	36	♒	19	36	47	0

Cum his datis si procedas ut §. 4. *num. præc.* reperies Ptolomæi ætate ♀ Apogeum in ♈ Grad. 19.24', plus quàm Signo integro præcedens locum, in quo illud statuerat Ptolomæus. Siquis dicat Digressiones Ptolomæi fuisse æquales, has autem differre Min. 11, is sciat neque illas Ptolomæi æquales fuisse; correctæ siquidem à Ricciolo vespertina fuit Grad. 47. 20', matutina Grad. 47. 44'. Per eundem modum Ricciolus ex binis alijs *m* Digressionibus collegit Ptolomæi tempore Apogeum ♀ in ♈ Grad. 21.53'. Manet igitur de Signo integro controversia.

m Almag. lib. 7. pag. 596.

§. 2. Quod si per eundem modum ♀ Apogeum inquiratur ad nostra tempora, non absimilis discrepantia reperietur. Tycho Christi Anno 1594. Dec. 25. post mer. H. 5. 10' Uraniburgi observavit maximam ♀ Digressionem Vespertinam à loco Medio Solis: Ricciolus autem Bononiæ Anno 1644. Nov. 28 post mer. H. 18 observavit maximam Digressionem matutinam à loco Solis item Medio. Utraque sese habuit, ut sequitur; sed Tychonica est à Ricciolo correcta.

	Locus Solis Medius.			*Locus ♀ Observatus.*			*Digressio à loco Solis Med.*	
	Sig.	*Gr.*	*l.*	*Sig.*	*Gr.*	*l.*	*Grad.*	*l.*
In Vespert.	♑	3	47	♒	21	1	47	48
In Matut.	♐	8	37	♎	20	50	47	47

Ex his datis operando ut præscribitur §. 4. *num. præc.* reperitur Apogeum ♀ in ♊ Grad. 21. 12' ad nostra tempora. Verùm alijs assumptis Digressionibus maximis ad nostra itidem tempora *o* longè diversa reperiuntur Apogei loca, videlicet in ♉ Grad. 18. 48' & in ♊ Grad. 14. 22'.

o Ricciol. Alm. lib. 7. pag. 596.

§. 3. Eâdem methodo per tres diversos Digressionum *n* maximarum biniones Apogeum ☿ Ptolomæi tempore reperitur in ♎ Grad. 10, in ♎ Grad. 9. 31', in ♎ Grad. 25. 52'. Ad tempora verò nostra per tria item diversa Digressionum paria Apogeum ☿ reperitur in ♐ Grad. 18. 17'. in ♐ Grad. 10. 38' in ♑ Grad. 2.

n vide Ricciol. pag. 596.

§. 4. Porrò inter Digressiones maximas hactenus observatas & à Ricciolo correctas, ♀ quidem 34, ☿ autem 38, præter eas quas hic adduximus vel ad marginem apud Ricciolum inveniendas indicavimus, nullæ satis æquales inveniuntur ut inservire præsenti negotio possint. Tota verò diversitas locorum Apogei tam ♀ quàm ☿ in sequenti Tabellâ conspicitur.

Apo-

	Apogeum ♀			Apogeum ☿		
	Sig.	Gr.	l.	Sig.	Gr.	l.
Tempore	♉	25	0	♎	10	0
Ptolo-	♈	19	24	♎	9	31
mai	♈	21	53	♎	25	52
Ad no-	♊	21	12	♐	18	17
stra tem-	♉	18	48	♐	10	38
pora.	♊	14	22	♑	2	0

§. 5. Ex omnibus hue usque dictis satis apparet de Apogeo horum Planetarum ex observationibus hactenus acquisitis, nihil certi posse determinari. Itaque Longomontanus, Lansbergius, Bullialdus hanc sibi viam ineundam putaverunt, ut ab Apogei loco & motu per Ptolomæum constituto, non valdè recederent, sed eum à posteriori cum observationibus recentioribus conferendo, perpolirent. Quod illi cùm fecissent, nullus tamen *t* per suas Tabulas aut omnes observationes, aut tantùm earum numerum salvare potuit, ut absque formidine debeant alijs anteponi: quamvis earum singulæ satis magno observationum numero, putà 10 aut 12, tueri se possint: unde fiat ut aliquando Tabulæ Danicæ Longomontani, aliquando Lansbergianæ, subinde Kepleri Rudolphinæ, interdum Bullialdicæ ad veritatem propiùs attingant.

t Ricciol. Almag. l. 7. pag. 597.

§. 6. In tantâ incertitudine doctissimi Riccioli consilium placet, ut inter horum authorum placita medium eligatur dum certiora prodierint.

		Electio Apogei ♀ & ☿		
Anno Christi		Sig.	Gr.	l.
1	♀	1	22	40
ineunte	☿	6	10	0
1600	♀	3	0	0
completo	☿	7	29	0

Hinc per Regulam proportionum deducitur

Apogei motus annuus			
	l.	ll.	lll.
♀	1	24	0
☿	1	50	15

§. 7. Ex his motum seu Longitudinem Apogei ad datum tempus reperies hunc in modum: ad Epochas Christi Anni, 1, & 1600 jam constitutæ sunt §. 7. Radices hujus motus, & ex his quantitas Annui ejusdem motus collecta. Quare si motus Annuus Apogei per datum Annorum numerum multiplicetur, & productum addatur Radici, cùm Epocha præcedit tempus datum; subtrahatur verò quando Epocha sequitur, proveniet motus Apogei ♀ aut ☿ ad tempus datum. *vide dicta num. 53. lib. 1.*

Nunc ab Apogeo ad Eccentricitatis investigationem transeamus.

NUMERUS XLIII.

Veneris Eccentricitatem & Epicycli Radium juxta Ptolomæi Hypothesim invenire.

Linea Apsidum ♀ sit C F, in quâ *i* centrum Mundi A, Æquantis O, Deferentis B; Apogeum C, Perigeum F.

Fig. 23. i vide n. 38.

Eligantur duæ maximæ Digressiones ♀ à Medio loco Solis, in quarum unâ Medius locus Solis sit in vel proximus Apogeo C, in alterâ in vel proximus Perigeo F. Tales sunt illæ, quas refert Ptolomæus *lib. 10. cap.* 2. Anno 13 Hadriani 19 Maij. Theon manè *Venerem* à Medio Solis loco maximè Digredientem observavit in ♈ Grad. 10. 36', Locus autem Solis Medius ipsi tunc erat in ♉ Grad. 25. 24', hoc est proximè in ♀ Apogeo, quod Ptolomæus statuebat *a* in Grad. 25. ♉. Quare maxima Digressio fuit Graduum 44. 48'. Deinde Anno Hadriani 21, vesperi Ptolomæus ipse *Venerem* à Medio Solis loco maximè elongatam observavit in ♑ Grad. 12, 50'. Locus autem Solis Medius ipsi tunc erat in ♏ Grad. 25, 30', hoc est proximus Perigeo ♀, quod ipse statuit in ♏ Grad. 25. Quare Digressio maxima fuit Graduum 47. 20'.

a vide num. 41. §. 4.

Quoniam igitur in utrâque Digressione linea Medij motus Solis fuit proxima Apsidum lineæ C F, licebit assumere eam cum ipsâ coincidisse. Quare cùm à lineâ Medij motus Solis linea Medij motus centri Epicycli *b* non differat, etiam hæc tunc coincidit cum Apsidum lineâ F C, ac proinde *c* in primâ Digressione centrum Epicycli fuit in Apogeo C, in secundâ in Perigeo F. Ductis igitur ex Mundi centro Epicyclum tangentibus A D, A E, Æquationes maximæ C A D, F A E eædem *d* fuerunt cum maximis Digressionibus, adeoque C A D fuit Grad. 44. 48', F A E Grad. 47. 20'. Quare cùm ex Epicycli centro ductis ad contactus radijs C D, F E, recti sint *e* anguli C D A, F E A, noti erunt *i* reliqui ACD, AFE, nempè A C D Grad. 45. 12', A F E Grad. 42. 40'. Jam Assumpto Epic. radio C D pro Sinu Toto 100000, erit *n* A C Secans anguli A C D, quæ in Tab. Sin. reperitur 141918: Similiter si pro Sinu Toto 100000, rursum assumatur C D, sive F E (est enim in Hypothesi Ptolomaicâ Epicycli Radius unus semper idemque), erit A F Secans anguli A F E, quæ in Tab. Sin. reperitur 135997. Quare tota C F est 277915, ejusque semissis B C, nempè radius Eccentrici $138957\frac{1}{2}$: quo dempto ab AC 141918, remanet Deferentis Eccentricitas A B $2960\frac{1}{2}$, cujus dupla *o* cùm sit A O Eccentricitas Æquantis, ea erit 5921.

b per §. 2. num. 29.
c propr. 7. n. 25. l. 1.
d per § 1. num. 30.
e per 18. 3.
i per 32. 1.
n per def. 9 c. 3 Geo. Pract.
o vide num. 31. §. 1.

Qualium igitur Radius Eccentrici BC	*est*	138957$\frac{1}{2}$
talium Deferentis Eccentricitas AB	*est*	2960$\frac{1}{3}$
Æquantis Eccentrici in AO	*est*	5921
Epicycli Radius CD	*est*	100000

Quibus ita cognitis, facilè erit per Reg. proport. AB, AO, CD reducere ad partes quarum Eccentrici Radius BC sit 100000; quod est ad usum commodius.

Atque hæc quidem ex datis præsentibus. Ptolomæus siquidem ex pluribus, ut opinor, considerationibus,

Qualium Radium Eccentrici BC	*est*	100000
talium eligit Deferentis Eccentricitatem, AB		2083$\frac{1}{3}$
Æquantis Eccentricitatem AO		4166$\frac{2}{3}$
Epicycli Radium CD		71944$\frac{1}{2}$

NUMERUS XLIV.

Eccentricitatem Mercurij maximam ac minimam, & radium Epicycli ejus juxta Ptolomai Hypothesim, invenire.

Linea Apsidum ☿ sit FIKC, in quâ Mundi centrum A, Æquantis *i* KPF centrum O, ejus Eccentricitas AO; circelli, per quem Deferentis centrum *a* movetur, diameter OB *b* dupla AO, & centrum circelli G, ac proinde tres æquales AB, BG, GO. [*Fig. 24. i vide n. 32. a num. 32. b ibid.*]

Eligantur binæ ☿ Digressiones maximæ à Medio loco Solis; in quarum unâ Medius locus Solis sit in, vel proximus Apogeo Æquantis, in alterâ in, vel proximus Perigeo. Tales sunt eæ, quas observatas à se Ptolomæus scribit *lib. 9. cap.* 8. Anno siquidem 19 Hadriani, 9 Dec. manè *Mercurium* à Medio Solis loco maximè digressum observavit in ♍ Grad. 20. 12′. Sol autem Medius ipsi tunc erat in ♎ Grad. 9. 15′, hoc est ferè in Apogeo ☿ quod *e* ipse statuit in ♎ Grad. 10. Unde maxima Digressio fuit Grad. 19. 3. Idem eodem Anno, 21 Maij vesperi *Mercurium* à Sole Medio maximè digressum observavit in ♉ Grad. 4. 20′. Sol autem Medius ipsi tum erat in ♈ Grad. 11. 5′, hoc est ferè in Perigeo ☿, quod ipse statuit in ♈ Grad. 10. Quare maxima Digressio fuit Grad. 23. 15′. [*e vide nu. 41. §. 4.*]

Quoniam igitur in utrâque Digressione linea Medij motus Solis fuit proxima Apsidum lineæ FIKC, licebit citra errorem hoc in negotio notabilem, assumere eam cum ipsâ coincidisse. Quare *d* cùm linea Medij motus centri Epicycli à lineâ Medij motus Solis non differat, etiam hæc tunc cum Apsidum lineâ coincidebat. Quare in primâ Digressione Epicycli centrum fuit in C sub loco quem Apogeum Æquantis K tunc habebat in Zodiaco; ideoque *i* centrum Deferentis tunc erat in B, & Deferens ipse in CSI maximam obtinens Eccentricitatem AB; in Digressione verò alterâ centrum Epicycli fuit sub loco, quem in Zodiaco tunc habebat Æquantis Perigeum F; ideoque *p* Deferentis centrum tunc cum O centro Æquantis, & Perigeum cum Perigeo in F, & Deferens ipse cum Æquante KPF coincidebat, minimam sortitus Eccentricitatem AO. Circelli porrò centrum G bifariam secat rectam FC: nam Deferentis & Æquantis Radij BC, OF æquales sunt; quibus si æquales addas BG, OG, etiam GC, GF æquales erunt. [*d per §. 2. num. 29. i per n. 32. p ibid.*]

His ita constitutis Epicyclum tangant ex Mundi centro rectæ AD, AE, & ad contactus ducantur ex Epicycli centro radij CD, FE. Quia jam ostendi Epicycli centrum in utrâque Digressione fuisse quasi in lineâ Apsidum FC, Digressiones maximæ *n* non differebant à maximis Orbis Æquationibus CAD, FAE, ac proinde angulus CAD fuit Grad. 19. 3′, angulus verò FAE Grad. 23. 15′, tantæ siquidem repertæ sunt suprà Digressiones maximæ. Et quia recti sunt *o* CDA, FEA, tam CAD, DCA simul conficient *p* unum rectum, quàm FAE, EFA. Demptis igitur singulis CAD, FAE, à Grad. 90, relinquentur DCA Grad. 70. 57′, & EFA Grad. 66. 45′. Assumpto autem Epicycli Radio CD, seu FE (est enim in Hypothesi Ptolemaicâ semper æqualis & idem radius Epicycli) pro Sinu Toto 100000, *s* erit AC 306379 Secans anguli DCA Grad. 70. 57′; AF verò erit 253329 Secans anguli EFA Grad. 66. 45′. Tota igitur CF est 559708, cujus semissis est 279854; & tanta est GC, quam ostendi *supra* esse semissem totius CF: Aufer GC 279854 ab AC 306379; remanet AG, sive OB 26535. Quoniam igitur tres æquales sunt AO, OG, OB, erit AO Eccentricitas Æquantis, seu minima Deferentis, 13267$\frac{1}{3}$, AB verò Eccentricitas maxima Deferentis 39802$\frac{1}{2}$: quâ subtractâ ab AC 306379 relinquitur Eccentrici Deferentis Radius BC 266576$\frac{1}{2}$. [*n per §. 1. num. 30. o per 18. 3. p per 32. 1. s per defin. 9 cap. 3. Geo. pract.*]

Qualium igitur Radius Eccentrici ☿ BC *est*	266576$\frac{1}{2}$
talium Epicycli Radius CD	100000
Deferentis Eccentricitas maxima AB	39802$\frac{1}{2}$
Eccentricitas minima, seu Æquantis AO	13267$\frac{1}{3}$

Has quantitates ita repertas, ad partes quarum Eccentrici Radius BC sit 100000 (id enim ad usum commodius est) reduces per Reg. proportionum.

Atque hæc quidem ex datis præsentibus. Ptolomæus namque ex pluribus, ut par est credere, considerationibus

Qualium Eccentrici radius BC *est*	100000
talium elegit Eccentricitatem maximam AB	15000
minimam, seu Æquantis, AO	5000
Epicycli Radium CD	37500

Scholium.

Ricciolus noster in hujus Problematis, tum praxi, tum theoriâ non rectè assumit GC semissem totius CF pro Radio Deferentis, qui est non GC, sed BC deficiens à GC toto circelli Radio BC. Occasio errandi fuit quod investigans Eccentricitatem & radium Epicycli eodem schemate ac discursu usus sit in ☿, quo in ♀. Ipsum consule Almag. lib. 7. pag. 598. Probl. 1. & exemplo 1. *In tantâ porrò considerationum varietate ac multitudine subinde taliter impingere humanum est, quod apud æquos ingeniorum judices viris doctis fraudi esse non debet.*

NUMERUS XLV.

Quid in alijs Hypothesibus de ♀ ac ☿ Eccentricitate & Radio Epicycli statuendum videatur.

VArios hujus investigationis modos Astronomi secundùm suas quique Hypotheses tradunt; quos & longum, nec multum utile est recensere. Vide Copernicum *lib. 5. cap. 27.* Keplerum in *Mysterio Cosmogr.* in *Rudolphinis*, in *Epitome Astron.* Bullialdum *lib. 2. Astron. Philol.* Vel omnes simul collectos horum authorum conceptus apud Ricciolum *Almag. lib. 7. pag. 600. 601. 602. 603.*

Verùm cùm nullus huc usque per suas Hypotheses & Hypothesium mensuras præstare observationes omnes aut plerasque potuerit, optimum judico Riccioli, & Longomontani consilium, ut à posteriori tentando exploremus quæ mensuræ pluribus observationibus satisfaciant. Hoc secuti eas eligemus, quibus assumptis unà cum motu Apogei jam determinato *num.* 42. & Anomaliæ determinando mox *num. seq.* (si loca Vera utriusque Planetæ juxta formam *num.* 36. & 38 expositam, supputemus) loca supputata consentiant cum locis observatis, si non cum omnibus omnia, saltem pleraque cum plerisque. Tales verò esse, quas hic subjungam, post analyses triangulorum in ♀ trecentas, in ☿ ferè quingentas se comperisse Ricciolus affirmat *pag.* 603.

In ♀

Fig. 21.

Qualium Eccentrici Radius est	100000
talium Eccentricitas I A semper eadem	3460
Radius maximus Epicycli in toto superiore Eccentrici semicirculo β E δ	73140
Radius minimus Epicycli in Perigeo X	70640
Radiorum differentia	2500

Decrementum radij Epicycli ex β in X, & incrementum ab X in δ fit juxta leges *num.* 35. §. 2. explicatas. Eccentricitas autem hic assumpta, Solari æqualis est *vide num.* 38. *lib.* 1.

In ☿.

Fig. 22.

Qualium Radius Eccentrici est	100000
talium Eccentricitas Maxima A D	10000
Media A G	8000
Minima A B	6000
Differentia maxima & minima B D	4000
Radius Epicycli maximus in Longitudinibus Medijs β, δ,	45500
Minimus in Apogeo E & Perigeo X	38500
Differentia maximi & minimi S N	7000

Decrementum & incrementum Radij Epicycli fit juxta leges *num.* 37. §. 3.

Reliquum est ut ad investigandam Orbis Anomaliam transeamus.

NUMERUS XLVI.

Praambula ad motum Anomalia Orbis ♀ ac ☿.

§. 1. IN tribus Planetis superioribus ♄. ♃. ♂, quia motus eorum in Epicyclo motui Solis alligatur *a* facilis est Veri Argumenti, seu Veræ Anomaliæ Orbis inventio, quæ habetur, si motus Verus centri Epicycli subducatur à motu Solis Medio juxta Veteres, à Vero juxta Recentiores. At in ♀, & ☿, quia motus *i* eorum in Epicyclo solutus est à motu Solis, opus est indagine peculiari ut Anomaliam Orbis Veram ad tempus datum consequantur. Inquirenda est igitur periodus, sive tempus, quo ♀ & ☿ motu Æquali, seu Medio Epicyclum percurrunt, atque inde motus Medij Anomaliæ, qui dato temporis spatio ex. gr. Horæ, Diei, Anno debentur, eliciendi. Tum ad aliquam Epocham stabilienda est Radix hujus motus, cujus ope ad datum momentum motus Medius Anomaliæ Orbis possit acquiri; atque ita demùm licebit, ut *infra* exponetur, ad Veram Orbis Anomaliam pertingere.

a vide dicta num. 16. §. 4. & 5.

i num. 29. §. 3.

§. 2. Verùm quia motus Medius quicumque à puncto certo & stabili numerari debet, ante omnia erit punctum illud in Epicyclo determinandum. Id clariùs ut peragatur, cogitari debet non Epicyclus circa suum centrum circumagi, sed potiùs centrum Planetæ moveri per circumferentiam Epicycli circa proprium centrum immobilis. Hoc posito manifestum est punctum illud quod in Epicyclo designat recta linea à centro Deferentis Epicyclum per Epicycli centrum educta, esse fixum & immobile in Hypothesi tam veteri quàm novà. In *schemate* 2. quod *Veneri* inserviet, centrum Mundi esto A, Æquantis centrum C, Deferentis D I R centrum B; à quo per Epic. centrum I ducatur recta B I O Epicyclo occurrens in O. Clarum est Epicycli centro per D I R Deferentis peripheriam circumlato rectam B I O in eodem semper puncto Epicyclum secare, ac proinde punctum O stabile esse ac certum. Ducantur deinde ex centris mundi A, & Æquantis C per I centrum Epic. rectæ A I N, C I P, determinantes in Epicyclo Apogea, Verum N, & Medium P. Ostensum est *n.* 5. §. 2 & 3 ad motum centri Epicycli per Deferentem, Apogea N, P, ad punctum stabile O jam accedere, jam ab eodem recedere. Quare liquet Apogea N, P in Epicyclo esse vaga & incerta.

Fig. 21.

Idipsum liquet in *schemate* 18, quod *Mercurio* inservit. Esto enim hic Mundi centrum A, Æquantis G O H centrum C, Deferentis D Q R centrum B, à quibus per Epicycli centrum Q ducantur rectæ A Q N, C Q P, B Q T secantes Epicyclum in punctis N, P, T. Rursum patet punctum T in Epicyclo semper unum idemque permanere; reliqua verò duo N, P, Apogea, nempè Verum ac Medium, ad motum centri Q per Deferentem, à stabili puncto P jam recedere, jam accedere: unde iterum necesse est illa sint vaga in Epicyclo & incerta, adeoque inepta, ut ab ijs motus Medius Anomaliæ Orbis ♀ & ☿ numeretur.

Fig. 18.

Postremò in Hypothesi *e* novâ, (quæ rejecto Æquante solùm habet Eccentricum Deferentem E C X) centra sint, A Mundi, I Deferentis, à quibus per Epicycli centrum educantur rectæ A C N, I C O. Rursum liquet, (ut *suprà*) punctum O, ad motum centri Epicycli non mutari, N verò Apogeum Verum Epicycli ad immobile O nunc accedere, nunc elongari.

e vide num. 35. & 37.

Fig. 25.

§. 3. Ex his concludo non solùm in novâ ♀ & ☿ Hypothesi, sed etiam in veteri Ptolemaicâ, motum Medium Anomaliæ Orbis numerandum esse à puncto illo Epicycli, quod designat recta ex centro Eccentrici Deferentis per centrum Epicycli educta. Scio Hypotheseos antiquæ explanatores numerare ab Apogeo Epicycli Medio, quod designatur à rectâ ab

Æquantis

Æquantis centro ductâ per centrum Epicycli. Cur ita faciant, ipsi viderint, ut se ex hic objectis expediant.

Secundùm hactenus dicta sint definitiones sequentes.

Definitiones.

1. *Apogeum Stabile*, seu *Fixum Epicycli* ♀ & ☿ voco punctum, quod in Epicycli ambitu designat recta ex centro Deferentis per Epicycli centrum emissa.

Nolui vocare *Apogeum Medium*, ne confunderetur cum *Apogeo Medio* veteris Hypotheseos, à quo in veteri Hypothesi diversum est, quamvis in novâ non differat, ut patet *ex hac defin.* 1. *& ex defin.* 7. *num.* 4.

2. *Anomalia Media Orbis* ♀ *aut* ☿ *ad tempus datum*, sive *Argumentum Medium*, est arcus Epicycli à Stabili Apogeo usque ad centrum Planetæ in consequentia numeratus.

Apogeum Verum Epicycli, *& Anomalia Orbis Vera* eodem modo definiuntur in ♀ & ☿, quo in alijs Planetis, *vide defin.*6. *&* 21.*num.* 4.

NUMERUS XLVII.

Anomaliam Orbis Mediam ♀ *aut* ☿ *ad notum aliquod temporis momentum invenire.*

Fig. 25. §. 1. Assumatur observatio aliqua loci Planetæ in Zodiaco, qui sit ex. gr. in G, Planetâ ipso posito in M, in primo Epicycli semicirculo, quod contingit cùm Planeta Vespertinus est. Rectæ autem ABN, IBO, ex centris Mundi A, & Eccentrici Deferentis I designent in novâ Hypothesi (de veteri agam *infra*) Apogea Verum N, Fixum O. Ad momentum observationis inquire in ♀ *per num.* 36, in ☿ *per num.* 38, Æquationem centri Epicycli ABI, distantiam BA centri Epicycli à centro Mundi, K locum Verum ejusdem centri, Radium Epicycli BM; hæc enim omnia absolutè *a* reperiri jam possunt, quando omnia ad hoc necessaria, quæ *num.* 36. *&* 38 supponebantur, inventa jam sint locis isthic in margine designatis. Insuper, quia præter inventum jam locum K centri Epicycli, etiam notus est per observationem locus Planetæ G, non latebit arcus GK, adeoque neque angulus MAB, ipsa nempè Orbis Æquatio. Itaque in triangulo ABM ex notis lateribus AB, BM, & angulo MAB reperietur *b* angulus MBA; quo subducto à Grad. 180, habetur NBM. Ab hoc, si centrum Epicycli (ut hic contingit) est in primo Anomaliæ Eccentricæ semicirculo ECX, aufer inventam *suprà* Æquationem centri ABI, seu NBO, adde autem si in secundo: ita innotescet angulus OBM, & arcus OM, qui est Anomalia *c* Orbis Media ad momentum observationis assumptæ.

a per n. 36. *&* 38.

b per prob. 10 *cap.* 3. *Geo. pract.*

c defin. 2.

Quod si Planeta sit in secundo Anomaliæ Orbis semicirculo (ex. gr. in F) quod contingit cùm Planeta Matutinus est, tum invento, ut *supra* arcu LK, seu angulo FAB, & omnibus eodem modo exantlatis, solvendo triangulum AFB reperies arcum FN: cui, si centrum Epic. est in primo Anomaliæ Ecc. semicirculo ECF, adde Æquationem centri ABI, seu NBO; deme autem si in secundo. Ita notus fiet arcus OF: quo dempto à Grad. 360, nota reliquetur Anomalia Orbis Media OMF ad momentum observationis assumptæ.

Fig. 18. §. 2. Juxta antiquam Hypothesim quæsitum in ☿ sic obtinebitur. Centrum Mundi esto A, Æquantis C, Deferentis B, Epicycli centrum Q, per quod lineæ AQN, BQT, ex centris Mundi ac Deferentis emissæ designent in Epicyclo Apogea Verum N, Fixum T. Assumatur observatio quæpiam accurata loci Veri ☿ ex. gr. in S, ☿ ipso posito in X. Igitur per *defin.* 2. Anomalia Orbis Media ad assumptæ observationis tempus est TX. Deinde ad momentum observationis inquire *d* QA distantiam centri Epicycli à centro Mundi, locum Verum F ejusdem centri, XQ Radium Epicycli, AQB, seu NQT Æquationem Opticam centri Epicycli. His per *num.* 34. aliosque ibidem citatos inventis, procede quoad cætera ut §. 1. ita reperies Anomaliam Orbis Mediam TX ad tempus assumptæ observationis.

d per n. 34.

Fig. 1. Pro ♀ autem in Hypothesi antiquâ sic age. Centrum Mundi esto A, Æquantis C, Deferentis B, Epicycli centrum in I, per quod ex centris Mundi A, & Deferentis B emissæ rectæ AIN, BIλ determinent Apogea Verum N, Stabile seu Fixum λ: ♀ sit ex. gr. in X, locus ejus observatus in S. Igitur ad tempus assumptæ observationis Anomalia Orbis Media per *defin.* 2. est λX. Ad tempus observationis inquire per §. 2. *num.* 31. Æquationem Opticam AIB, seu NIλ, AI distantiam centri Epicycli à centro Mundi, F locum Verum ejusdem centri, IX Radium Epicycli. Cum his inventis si procedas ut §. 1. prodibit Anomalia Orbis Media λX ad tempus observationis assumptæ.

NUMERUS XLVIII.

Medios motus Anomaliæ Orbis ♀ *&* ☿ *invenire.*

Fig. 25. §. 1. Observa vel ab alijs observatas assume Planetæ Digressiones maximas à Sole immediatè sibi mutuò succedentes, & ejusdem speciei, hoc est omnes Matutinas vel omnes Vespertinas. Ex. gr. sit una Digressio maxima Planetæ in F, centro Epicycli posito in B, altera in D immediatè subsequens, centro Epicycli posito in C. Patet eo temporis intervallo, quod effluxit à momento maximæ Digressionis F, ad momentum alterius maximæ D, Planetam percurrisse Epicyclum præter propter semel. Dixi præter propter, quia ut percurrisset semel exactè, deberent contactus F, C, esse facti in eodem puncto Epicycli; nunc autem non sunt facti in eodem, quòd Epicyclus in C fuerit Terræ centro A vicinior quàm in B. Hunc igitur in modum si multæ expendantur Digressiones maximæ sibi invicem immediatè succedentes, tempora inter illas interjecta ob causam jam dictam erunt illa quidem inæqualia: si tamen inter ea eligatur medium, erit hoc satis exactum, ut per ipsum cognoscas, quot Planetæ revolutiones per Epicyclum dato aliquo Annorum numero citra errorem unius integræ, peragantur. Ita cognitum jam pridem est annis 8 revolutiones ♀ Epicyclicas non absolvi plures quàm 5; annis verò 46, non plures, quàm 145.

§. 2. Eligantur deinde binæ observationes quàm accuratissimæ Veri loci Planetæ, sive maximè à Sole digressi sive non, ex. gr. in G, & in Q, distantes ab invicem annorum intervallo utcumque magno, sed non tanto, quin citra errorem unius integræ revolutionis, ex notitiâ per §. 1. partâ sciri possit quot interea revolutiones Planetæ per Epicyclum sint absolutæ. Præsidio deinde locorum observatorum G, Q, ad

ad ipsa observationum momenta inveni artificio *precedenti Num.* jam explicato Anomalias Medias Orbis O M, O P. Sitque prima O M ex. gr. Grad. 70, altera O P Grad. 150: à primâ autem observatione ad secundam peractæ sint revolutiones integræ ex. gr. 50. Quoniam igitur ad momentum primæ observationis Planeta fuit in Epicycli puncto M distans ab Apogeo Fixo O Grad. 70, & in momento secundæ fuit in P distans ab Apogeo Fixo O Grad. 150; igitur ab observatione primâ ad secundam Planeta absolvit 50 circulos integros, atque insuper arcum MP Grad. 80; hoc est Gradus 15080. Quare si Gradus 15080 absolvit tempore noto quod ab unâ fluxit observatione ad aliam; Gradus 360, hoc est revolutionem unam Epicycli quanto tempore absolvet? Per *Reg. proport.* prodibit unius Epicyclicæ revolutionis tempus, sive quantitas: quæ saltem erit tam exacta, ut si per eam dividatur tempus etiam maximum, certò possit cognosci quot eo durante integræ fuerint Epicycli revolutiones peractæ.

§. 3. Eligantur demùm observationes binæ Veri loci Planetæ, intervallo temporis quàm maximo distantes: una videlicet Ptolomæi, aut Theonis, aut Hipparchi, altera Tychonis vel alterius recentioris. Ex §. 2. certò sciri jam potest quot revolutiones Epicycli toto intermedio tempore sint absolutæ. Quare procedendo ut §. *præcedenti*, rursum prodibit quantitas unius revolutionis Epicyclicæ, sed multò quàm prior illa, accuratior: ex quâ per *Reg. proport.* elicies motus Anomaliæ Medios, qui debentur Horæ, Diei, Anno &c. ut docui *lib.* 1. *num.* 36. *& alibi.*

§. 4. Ut motus Medij sic inventi ulteriùs explorentur, assume loca Planetæ per te vel alios observata, quàm plurima, eademque supputando † inquire, adhibito motu Medio Anomaliæ Orbis jam invento. Si loca per calculum acquisita cum locis observatis concordent, si non omnia, saltem quàm plurima, licebit præsumere motus Medios Anomaliæ rectè se habere: si non concordent, illis deme aliquid, vel adde donec calculo repertio conveniant. At fortè, inquies, latet error in Eccentricitate, vel in Radio Epicycli, vel motu Apogei. Fateor: Sed tamen illa jam, quantùm licuit, simili methodo in præcedentibus exposita supponuntur. Aliàs verissimum est non unam solam mensuram, ex. gr. motum Medium Anomaliæ Orbis Diurnum, sed etiam reliquas, nempè motum Apogei, Eccentricitatem, Radium Epicycli modo jam dicto, addendo subtrahendoque rectificandos, atque omnia sic inter sese proportionanda, donec calculus loca observata præstet vel omnia, quod sperari vix potest, vel certè (ut dixi) quàm plurima.

† *ut docebitur n.* 51.

§. 5. Postremò si obtineri possint duæ Digressiones maximæ, ambæ Matutinæ vel ambæ Vespertinæ, longissimo temporis intervallo distantes, una ex. gr. observata à Ptolomæo, altera à Tychone vel teipso, in quarum utrâque Epicycli centrum fuerit in eodem Anomaliæ Eccentricæ puncto (C); accuratissima revolutionis Epicyclicæ periodus obtinebitur. Certum quippe tunc erit, cùm in utrâque Digressione Epicycli centrum eandem habuerit à Mundi centro distantiam C A, & contactum, adeoque & Planetam fuisse in uno eodemque Epicycli puncto D; ac proinde à Digressione antiquâ ad novam peractas esse revolutiones integras absque ullâ fractione. Quare si intervallum temporis per numerum revolutionum (qui ex §. 2. 3 & 4 exactissimè sciri potest) dividatur, prodibit quantitas, sive tempus revolutionis unius (ut patet ex *Reg. proportionum*): ex quâ motus Medios Anomaliæ hujus Diurnum, Annuum &c. elicies, ut docui *lib.* 1. *num.* 36.

Sciri porrò jam potest utrùm in utrâque Digressione centrum Epicycli fuerit in eodem puncto Anomaliæ Eccentricæ, quando omnia ad hoc requisita, nempè Eccentricitas, & motus Apogei reperta jam sunt.

	Epicyclum motu Medio absolvit.					
	♀			☿		
	D.	H.	/.	D.	H.	/.
Alfragano	584	fere		116	fere	
Reinholdo	583	22	15	115	21	5
Maurolyco	583	22	12	115	21	5
Ricciolo	583	22	10	115	21	3½

		Motus medius Anomaliæ Orbis													
		Diurnus							Annuus						
		Gr.	/.	//.	///.	IV.	V.	VI.	Gr.	/.	//.	///.	IV.	V.	VI.
Longomontano	♀	0	36	59	29	29	11	6	225	1	54	22	33	29	30
	☿	3	6	24	12	1	8	6	53	57	13	6	54	16	30
Lansbergio	♀	0	36	59	28	46	17	44	225	1	50	1	37	52	40
	☿	3	6	24	15	23	4	58	53	57	33	35	25	12	50
Keplero	♀	0	36	59	29	45	47	49	225	1	56	3	35	41	55
	☿	3.	6	24	15	35	29	37	53	57	34	40	55	22	5
Ricciolo	♀	0	36	59	30	0	0	0	225	1	53	35	0	0	0
	☿	3	6	24	30	0	0	0	53	57	33	32	0	0	0

Si per motum Annuum dividantur Gradus 360, prodibit tempus unius revolutionis Epicyclicæ secundùm Authores singulos:

NUMERUS XLIX.

Radicem Anomaliæ Orbis Mediæ ♀ & ☿ constituere ad Epocham datam.

Epocha data sit ex. gr. initium Annorum Christi Dei. Per *num.* 47 ad notum aliquod temporis momentum reperta est Anomalia Orbis Media: & ex *num.* 48 notus est Medius motus Anomaliæ Orbis, qui debetur temporis intervallo inter momentum illud & Epocham Christi. Hunc igitur Medium motum adde Anomaliæ Mediæ ad illud momentum repertæ, si Epocha sequitur momentum supradictum; deme si præcessit: prodibit Anomalia Orbis Media ad Epocham Christi. *Demonstratio* patet ex dictis *num.* 54. & 53. *lib.* 1.

		Radix Anomaliæ Orbis Mediæ ad Annum 1. Christi			
			Grad.	′	″
In meridie	Lansbergio *Goesæ*	♀ ☿	123 47	52 24	56 11
1.	Longomontano *Hafniæ*	♀ ☿	126 48	21 13	20 48
Ianuar.	Keplero *Uraniburgi*	♀ ☿	123 37	16 40	49 54

NUMERUS L.

Anomaliam Orbis Mediam & Veram ad tempus quodcumque pro ♀ & ☿, invenire.

§. 1. Numera temporis intervallum ab Epochâ usque ad tempus datum: & ex *num.* 48. collige Medium motum Anomaliæ Orbis huic intervallo debitum: quem adde Radici Epochæ, si tempus datum sequitur Epocham; deme, si præcedit: prodibit Anomalia Orbis Media ad tempus datum. *Demonstratio* patet ex dictis *num.*54. *lib.* 1.

Fig. 25. §. 2. Anomalia Orbis Vera ad datum tempus sic reperietur; primò in Hypothesi novâ.

Anomalia Orbis Media §. 1. inventa sit primò O M minor Grad. 180. Per *num.* 36 & 38, reperiatur Æquatio centri Epicycli ad t.d. A B I, seu NBO, quæ reperiri absolutè jam potest, cùm *a* Eccentricitas, & motus *b* Apogei ad hoc requisita jam innotuerint. Angulum igitur N B O, sive arcum N O adde Anomaliæ Mediæ, si Epicycli centrum (ut hic contingit) est in primo Anomaliæ Eccentricæ semicirculo E B X, deme si in secundo: ita prodibit Anomalia Orbis Vera N M ad t.d.

a per n. 45. *b per n.*42.

Sit deinde Anomalia Orbis Media O M F Grad. 180 major. Hanc si subtrahas à toto circulo, notus erit arcus F O: cui deme arcum N O *suprà* inventum, si (ut hic contingit) B centrum Epicycli sit in primo semicirculo E B X; adde si in secundo. Ita notus fiet arcus F N: quo subtracto à Grad. 360, relinquetur Anomalia Orbis Vera N M F ad t.d.

Fig. 18. §. 3. In Hypothesi antiquâ ut acquiras Anomaliam Veram Orbis ☿, sic operare. Deferentis D Q R centrum sit B, Mundi A, Apogeum Verum N, Stabile T; Anomalia Orbis Media per §. 1. inventa sit T X. Per *Corol. num.*34. Æquationem Opticam reperi A Q B, seu N Q T ad t.d. quæ jam potest absolutè reperiri, cùm ad hoc requisita, nempè motus Apogei, & Eccentricitas maxima ac minima reperta jam sint *num.* 42. & 44. Tum deinde operari perge ut §. 2. jam præscriptum. Ita proveniet Anomalia Orbis Vera N X ad t. d.

Fig. 1. Pro ♀ autem in vetere Hypothesi sic age. Centrum Mundi esto A, Deferentis B; Apogeum Verum N, stabile λ; Anomalia Orbis Media per §. 1. inventa λ X. Per §. 2. *num.* 31. reperi ad t.d. Æquationem Opticam A I B, seu N I λ, quæ *m* jam potest absolutè reperiri, cùm ad hoc requisita nempè *n* Eccentricitas, & Apogei *o* motus inventa jam sint. Si fiant deinde cætera ut §. 2, prodibit Anomalia Orbis Vera N X ad tempus datum.

m per §. 2. *num.*31. *n per n.* 43. *o per n.*42.

NUMERUS LI.

Ad tempus datum Longitudinem Veram ♀ ac ☿, Geometricè supputare.

§. 1. In novâ Hypothesi ad t. d. Epicycli *Veneris* centrum sit ex. gr. in Z, & *Venus* ipsa in P. Ad t.d. inveniatur motus Apogei ♈ H per *num.*42, & O D P Anomalia Orbis Vera per *num.* 50. Assumatur item ex *num.*45, Epicycli Radius maximus & minimus, & Eccentricitas A I, quæ semper eadem est & æqualis Solari. Cum his datis operare ut *num.* 36. præscriptum, sic acquires Longitudinem ☿ Veram ♈ H R ad t. d. — Fig. 21.

Ad t.d. Epicycli Mercurialis centrum sit ex. gr. in V, & ☿ ipse in C. Ad t.d. reperiatur motus Apogei ♈ H per *num.*42, & Anomalia Orbis Vera M S, seu ♋ C per *num.*50. Accipiatur item Eccentricitas maxima & minima, & Radius Epicycli maximus & minimus ex *num.* 45. Cum his datis si procedas ut *num.* 38 præscriptum fuit, prodibit Longitudo ☿ Vera ♈ H R ad t.d. — Fig. 22.

§. 2. In vetere Hypothesi, ad t. d. centrum Epicycli *Veneris* sit ex. gr. in I, & ♀ ipsa in X. Ad t.d. inquire Apogei motum ♈ L per *num.*42, & Anomaliam Orbis Veram N X per *num.* 50. Accipiantur item Eccentricitas & Epicycli Radius ex *nu.*43. Cum his datis si opereris ut præscripsi *num.*31. §. 2, acquires Longitudinem ♀ Veram ♈ L S ad t. d. — Fig. 1.

Ad t. d. Epicycli Mercurialis centrum esto in Q, & ☿ ipse in X. Ad tempus datum inquire motum Apogei ♈ L per *num.*42, & Anomaliam Orbis Veram N X per *num.*50. Assumantur item Eccentricitas maxima ac minima, & Epicycli Radius ex *nu.* 44. Cum his datis si procedas ut præscripsi *num.* 34. acquires Longitudinem ☿ Veram ad t. d. — Fig. 18.

Scholium.

Calculi fides (quod sæpè jam indicavi) præsertim in ♀ & ☿ ad observationes quasi ad Lydium lapidem exploranda est. Illustre specimen datur

datur in ☿ sub Sole instar maculæ viso, hoc futurum prædixerat Keplerus ex Rudolphinis Anno 1631, Nov. 7. Gassendus igitur ad diem dictum manè observavit Mercurium Solis specie in papyro per telescopium exceptâ, in quâ ☿ instar maculæ nigerrimæ apparuit ☿ collegitq́ fuisse cum Sole conjunctum Parisijs Horâ 7,58', in ♏ Grad. 14. 36'. Proinde Anno 1631, Nov. 7, H. 7. 58 post med. noct. Verus ☿ locus fuit in ♏ Grad. 14. 36. Locus autem ☿ ad tempus dictum supputatus à jam observato dissidet, Ptolemaicè quidem Gradibus 4. 25', Copernicaè Gradibus 5, Danicè Gradibus 7. 13', Lansbergianè Gradu 1. 21'. Rudolphinè minutis 14. 24', Ricciolicè convenit præcisè. Ita Ricciolus ipse, qui hoc exemplum sui calculi exhibet Almag. lib. 7. pag. 582.

NUMERUS LII.

De Æquationibus maximis ☿ ac ♀, deq́ Tabulis Æquationum construendis.

Revocanda huc sunt quæ *num.* 28 accuratè sunt explicata, exceptis quippe paucis, mutatisque citationibus, quæ isthic de ♄, ♃, ♂ disseruimus, etiam ♀ & ☿ conveniunt.

Æquationes centri Epicycli ad singulos Anomaliæ Eccentricæ Gradus, Æquationes item Epicyclicæ, sive Orbis ad Gradus singulos Anomaliæ Orbis reperiuntur in vetere Hypothesi, ut docui *num.* 31. & 34; in novâ Hypothesi, ut docui *num.* 36. 38. Maxima centri *Veneris* incidit in gradum Anomaliæ Eccent. 91; maxima *Mercurij* in Gradum Anomaliæ 110.

Fig. 13. Æquationes Orbis centri maximæ ad singulos Gradus Anomaliæ Eccentricæ variantur in ♀ & ☿ uti in alijs Planetis; & *Veneris* quidem maximarum minima (C A E) contingit centro Epicycli posito in Apogeo; maximarum maxima (S A X) in Perigeo. At *Mercurij* maximarum minima fit quidem in Apogeo, non tamen maximarum maxima in Perigeo, sed secundùm Ptolomæum [a] ad Anomaliæ Eccentricæ Gradus 120, secundum Ricciolum verò (cujus Hypothesim & mensuras in præcedentibus jam exposui) ad Gradus 90: quod quidem tametsi Ptolomæo ipsi repugnet, non tamen ejus observationibus *nu.* 30. §. 2. recensitis; ex quibus colligitur Æquationes Orbis maximas ad Anomaliæ Ecc. Grad. 120 majores esse maximis ad Perigeum, non tamen colligitur esse majores maximis ad quemvis alium Anomaliæ Eccentricæ locum.

[a] *num.* 30. 2.

In vetere Hypothesi secundùm Ptolomæum Æquatio maxima centri Epic. in ♀ est Grad. 2. 41'; in ☿ Grad. 2. 52'. Æquatio maxima Orbis in ☿ ad Apogeum Ecc. est Grad. 45. 57': ad Perigeum Grad. 47. 49', quæ est maximarum maxima. In ♀ Æquatio Orbis maxima ad Apogeum Ecc. est Grad. 21. 56', ad Perigeum, [b] Grad. 23. 57'; quæ non est maxima maximarum, ea siquidem (ut jam dixi) fit ad Gradus Anom. Ecc. 120, estque Grad. 23. 52'. 30" ut patet ex *num.* 30. §. 2. & *nu.* 4. §. *primi.*

[b] *patet ex nu* 30. §. 2. & *nu.* 4. §. *primi.*

Ex novâ Hypothesi & mensuris ejus, Æquatio maxima centri Epicycli in ♀ est Grad. 1. 59', eadem quæ Solis; in ☿ Grad. 4. 34'. 34". Æquatio maxima Orbis ☿ ad Apogeum Eccen. est Grad. 44. 59'. 4", ad Perigeum Ecc. Grad. 47. 2'. 6", Æquatio maxima Orbis ♀ ad Apogeum Ecc. est Grad. 20. 29'. 16"; ad Perigeum Grad. 24. 11'. 41". Maximarum maxima quæ (ut dixi) fit ad Anomaliæ Ecc. Grad. 90, est Graduum 27. 3'. 24". Ita habent supputationes Ricciolanæ.

Ex his quomodo condendæ sint Tabulæ Æquationum satis est declaratum *num.* 28. sed memento in Tabulis Æquationum Orbis modo Veterum confectis, Scrupula Proportionalia tota, seu 60 ponenda esse è regione Grad. 120 juxta Ptolomæum, è regione Grad. 90 juxta Ricciolum. Consule dicta *nu.* 33. *propr.* 8.

FINIS LIBRI SEXTI.

ASTRONOMIÆ
LIBER SEPTIMUS
DE PLANETARUM MINORUM LATITUDINE,
CÆTERISQUE PASSIONIBUS.

CAPUT PRIMUM.

De Latitudine quinque Minorum Planetarum.

TUm demùm Astri locus in cælo cognoscitur cùm ejus non solùm Longitudo, sed etiam Latitudo innotuerit. Longitudinem Planetarum *Libro præcedente* scrutati sumus. Superest Latitudo; quam, cùm difficultatibus non paucis tum ex se, tum ex Authorum obscuritate involuta sit, à fundamentis sic pertractabimus, ut ejus tum praxim, tum theoriam clarè intelligere studiosi valeant.

NUMERUS PRIMUS.

Phænomena Latitudinum ♄. ♃. ♂, à Ptolomæo observata.

ANte omnia revocandæ huc sunt definitiones Latitudinis expositæ *lib.* 2. *num.* 48, seclusis aut immutatis ijs quæ Lunæ sunt propria.

§. 1. Omnes quinque Minores Planetas Latitudinem pati, hoc est, ab Eclipticâ evagari, Ptolomæus & alij ante ipsum compererunt observando frequenter ipsorum loca per comparationem ad Stellas Fixas Longitudinis ac Latitudinis notæ. Observandi modum tradidi *lib.* 6. *num.* 1. Porrò circa Latitudines trium Superiorum Ptolomæus observavit sequentia.

I. Latitudines ♄. ♃. ♂. modò Boreales esse, modò Australes, diutiùs tamen Boreales, quàm Australes, sic ut unius integræ revolutionis centri Epicycli medietas, seu portio major cedat Borealibus, reliqua minor Australibus.

II. Latitudines illas intra tempus unius revolutionis Epicycli bis maximas esse; bis nullas. Et *Saturni* quidem Borealem maximam suo ævo contigisse, cùm Epicycli centrum foret in ♎ Grad. 3; *Iovis*, cùm in ♎ Grad. 1; *Martis*, cùm in ♋ Grad. 29. 30′, omnes videlicet in eodem semicirculo in quo erant eo tempore Apogea Æquantium, ut patet ex Tabellâ *num.* 19. Australes verò maximas fieri in locis oppositis, in eodem semicirculo, in quo tum erant Æquationum Perigea.

III. Latitudines maximas Boreas comparando cum Boreis, & cum Austrinis Austrinas, inæqualis magnitudinis esse; & quidem maximas maximarum contingere, cùm Planeta tenet Perigeum Epicycli; minimas maximarum, cùm Epic. Apogeum; mediocres cùm Longitudines Medias.

IV. Latitudines Austrinas maximarum maximas, majores esse Boreis maximis maximarum; ac proinde absolutè omnium maximas esse, illas, quæ contingunt cùm Epicycli centrum est in Limite Australi, & Planeta in Perigeo Epicycli.

V. Loca Zodiaci quibus suâ ætate suberant centra Epic. ♄. ♃. ♂. tempore Latitudinum maximarum, Orientaliora esse, quàm olim fuerant. Ex quo conclusit nodos ac limites sensim promoveri, non in præcedentia, ut fit in Lunâ, sed in consequentia.

VI. Revolutio integra Latitudinis Planetæ, sive reditus à Nodo ad eumdem, absolvitur eodem tempore quo revolutio centri Epicycli, atque insuper eâ particulâ temporis, quâ percurritur arcus ille, quo interim Nodus in consequentia prorepsit.

NUMERUS II.

Quâ Hypothesi Ptolomæus salvet Latitudinum ♄, ♃, ♂, Phænomena.

DUplicem causam statuit memoratorum Phenomenôn; deviationem stabilem Eccentrici Deferentis à plano Eclipticæ, & inclinationem Epicycli mobilem circa diametrum Mediarum Epic. Longitudinum.

§. 1. Planum Eclipticæ sit F C G D, & Mundi centrum A, Eccentricus Deferens esto F O G N, secans planum Eclipticæ per Mundi centrum A secundùm rectam F A G, cujus major portio F O G continens centrum B, declinet versùs Polum Boreum, quem concipere debes positum inter te & planum schematis; portio autem minor G N F declinet ver- *Fig. 1.*

sùs

ùs Polum Australem, qui concipiendus est post planum schematis.

Igitur Epicycli centro percurrente portionem Eccentrici Borealem F O G, Latitudines ♄. ♃. ♂. sunt Boreales; cùm verò perambulat Australem G N F, Latitudines sunt Australes. Et quia Epicycli centrum diutius hæret in portione Boreâ F O G, utpotè majori, idcirco diutiùs horum Planetarum Latitudo Borealis est, quàm Australis. Atque ita primo phœnomeno satisfactum est.

Fig. 3.

§. 2. Deinceps inspice *schema* 3. in quo planum Deferentis Eccentrici F O G N productum concipe usque ad Zodiacum Primi Mobilis in S P V R: sic enim (quod oportet) Nodi S, V, & Limites O, N, erunt in Zodiaco designati, distantes ab invicem singuli Quadrante circuli. Hoc præmonito, ut salventur phœnomena reliqua ad deviationem plani Deferentis S P V R, adjungenda est Epicycli inclinatio hunc in modum. Sit Epicycli centrum in Nodo Boreo S, & M Q diameter Apsidum Epicycli sit in rectâ S A V communi sectione planorum Deferentis & Eclipticæ; totum verò Epicycli planum, adeoque etiam I K diameter Mediarum Longitudinum, jaceat in plano Eclipticæ S C V D, ac proinde Deferentis planum secet: idemque situs Epicycli esto, cùm Epicycli centrum fuerit in Nodo Austrino V. Quando igitur Epicycli centrum existet in Nodorum alterutro semper erit in Eclipticæ plano centrum Planetæ, in quocumque is fuerit Epicycli puncto, ac proinde bis intra tempus unius integræ revolutionis centri Epic. per Zodiacum, omni Latitudine carebit: quæ erat pars una Secundi phœnomeni.

Centro Epicycli recedente à Nodo Boreo S versùs P Limitem Boreum Apsidum diameter M S Q (quæ priùs tota erat in plano S P V R Deferentis, utpote existens in sectione communi V A S) adeoque & totum Epicycli planum circa I S K diametrum Mediarum Longitudinum sensim inclinetur hac lege triplici. 1. ut Apogeum Verum Epicycli M à plano Deferentis (in quo priùs erat) versùs Austrum & Eclipticam S C V recedat, Perigeum verò Q à plano Deferentis (in quo & ipsum priùs extiterat) recedat versùs Boream, adeoque etiam longiùs abeat ab Eclipticâ S C V. 2. ut diameter Mediarum Longitudinum I K (quæ priùs cum toto Epicyclo fuerat in plano Eclipticæ) toto eo tempore quo Epicycli centrum percurrit Quadrantem S P, à plano Eclipticæ recedendo, eidem tamen maneat parallela; sic enim centro Epicycli attingente Limitem P, ipsa jacebit in plano Deferentis A S P V, quod priùs semper intersecuerat. 3. ut inclinatio jam dicta in Limite P sit maxima.

Centro Epicycli abeunte ex Limite Boreo P versùs Nodum Austrinum V, inclinatio Epicycli jam dicta iisdem legibus minuatur, donec Epicycli centro delato in V, Apogeum *a* & Perigeum Epicycli rursum jaceant in plano Deferentis, in communi nempè sectione S A V, & Epicyclus totus rursum jaceat in plano Eclipticæ, quando inclinatio omnis evanescit.

a semper intellige, Verum.

Rursum Epicycli centro pergente à Nodo Austrino V ad Limitem Austrinum R, iisdem legibus & eâdem inclinationis quantitate Apogeum Epicycli à plano Deferentis A V R S inclinetur versùs Eclipticam A V D S, hoc est ad Boream, Perigeum verò ad Austrum, adeoque longiùs ab Eclipticâ recedat, inclinatione maximâ iterum existente ad Limitem R. Inde tandem minuatur denuò inclinatio, donec evanescat in Nodo S.

Per inclinationem Epicycli his legibus peractam obtinetur, ut Apogeum Epicycli semper existat inter plana Eclipticæ & Deferentis; atque ita satisfiat phœnomeno secundo & tertio. Quod ut clariùs intelligas, in *schemate* 2. circulus Maximus transiens per Polos Eclipticæ & Limites maximæ Latitudinis, secet Eclipticæ planum rectâ B C, & planum Deferentis Eccentrici rectâ D A E, quæ duæ lineæ sese intersecant in Mundi centro A. Limes Boreus sit P, Austrinus R, Centro Epicycli existente in P, diameter Apsidum Epicycli M P Q à plano Eccentrici D A inclinatur inclinatione maximâ, sic ut M Apogeum Epicycli à plano Deferentis P A recedat versùs Austrum & Eclipticam B A, Perigeum verò Q ab utroque plano B A, P A, abeat versùs Septemtrionem. Quo fit, ut Planetæ existentis in Epicycli Perigeo Q Latitudo Borealis maxima Q A B, major sit ejusdem Latitudine Boreali maximâ M A B existentis in Apogeo M: ut habebat tertium phœnomenum. Quando deinde centrum Epicycli constiterit in Limite Australi R, diameter M R Q Apsidum Epicycli inclinatur rursum inclinatione maximâ, sic ut Apogeum M à plano Eccentrici E A recedat versùs Eclipticæ planum C A in Boream, Perigeum verò Q ab utroque plano C A, E A, abeat versùs Austrum, & inclinationum anguli M R E, M P D, item Q R A, Q P A, sint æquales. Quo rursum fit, ut Planetæ positi in Epicycli Perigeo Q Latitudo Australis maximarum maxima Q A C major sit Latitudine maximâ Australi M A C ejusdem positi in Apogeo M, ut tertium phœnomenum requirebat.

Fig. 2.

§. 3. Postremò eâdem operâ causa dabitur quarti phœnomeni. Cùm enim ex secundo phœn. & tabellâ *num.* 19. constet tempore Ptolomæi Limites Boreos ♄. ♃. ♂. satis vicinos fuisse Apogeis Eccentricorum, Austrinos verò Limites satis vicinos Eccentricorum Perigeis, manifestum est centrum Epicycli longiùs distare à centro Mundi A, cùm est in Boreo Limite P, quàm dum in Austrino R. Quoniam igitur P A major est, quàm R A, fiat R O æqualis P A, ducaturque Q O. In triangulis R O Q, P A Q, æqualia sunt latera R Q, P Q (sunt enim radii Epicycli, qui secundùm Ptolomæum semper æquales sunt) æqualia sunt item *ex constr.* R O, P A, & anguli his lateribus per ipsam Hypothesim Q R A, Q P A, etiam æquales sunt. Ergo *a* angulus Q O R æquatur angulo Q A P. Sed Q A R externus major est *b* interno Q O R. Ergo etiam Q A R major est quàm Q A P. Atqui C A R angulus Boreæ deviationis Deferentis ab Eclipticâ par est angulo B A P deviationis Austrinæ. Ergo totus Q A C metiens Latitudinem, seu distantiam Australem Perigei Epicycli Q ab Eclipticâ C A, major est toto Q A B metiente Latitudinem Boream ejusdem Perigei. Quare centro Epicycli posito in R Limite Australi, & Planetâ in Q Epicycli Perigeo Latitudinem Planeta sortitur absolutè omnium maximam, quod phœnomenum quartum requirebat.

a per 4. 1. b per 32. 1.

Quæres: Quî rectæ ex Mundi vel Æquantis centro emissæ determinare possint *i* Apogea Epicycli, cùm hic propter inclinationem jam expositam sit extra Deferentis planum, rectæ autem illæ existant in plano Deferentis?

i def. 6. & 7. n. 4. l. 6.

Respondeo Apogea designari planis ad Epicyclum rectis per lineas jam dictas transeuntibus: in quibus enim punctis hæc intersecant Epicycli Peripheriam, ea sunt Apogea Epicycli.

NUMERUS III.

Phænomena & Hypotheses Latitudinum ♀ & ☿ juxta Ptolemæum.

Eorum quæ circa ♀ & ☿ Latitudines Ptolomæus observavit, triplicem causam assignat, deviationem Eccentrici Deferentis, inclinationem Epicycli, & Reflexionem. *Deviatio* & *Inclinatio* satis ex *præc. num.* intelliguntur. *Reflexionem* paucis accipe. Epicyclus esto MIQK, diameter Apsidum MSQ, Mediarum Longitudinum ISK, Apogeum M, Perigeum Q, Polus Boreus inter *Figuram* & te, Australis post *Figuram*. *Reflexio Epicycli* est libratio quædam Epicycli circa diametrum Apsidum MQ, quâ diameter Mediarum Longitudinum ISK à plano Deferentis modò in Boream, modò in Austrum recedit: ut si diameter Med. Long. quæ priùs fuerat in ISK in ipso Deferentis plano, postmodò fit in GSR, radio Orientali SG translato ad Boream, Occidentali SK in Austrum, angulus GSI est quantitas Reflexionis Epicycli, quæ cùm est maxima, duos Gradus cum dimidio ex mente Ptolomæi non excedit. Hoc præmisso, venio ad observationes & Hypotheses Ptolomæi, qui circa ♀ & ☿ Latitudines observavit sequentia.

Fig. 4.

I. Cùm Epicycli centrum esset in Apogeo Æquantis, eamdem semper Latitudinem habuit Planeta positus in Epicycli Apogeo, *a* quam positus in Epicycli Perigeo, & utrobique fuit hæc Latitudo, in ♀ quidem Borealis Minutorum 10; in ☿ Australis Minutorum 45.

a semper Verum intellige.

Salvatur Phœnomenum, si tunc pars superior Deferentis Eccentrici ponatur ab Eclipticæ plano deviare Min. 10 in ♀ ad Boream, in ☿ ad Austrum Min. 45, & planum Epicycli absque inclinatione ullâ existat in plano ejusdem.

II. Cùm Epicycli centrum esset in Perigeo Æquantis, rursus eamdem habuit Latitudinem Planeta in Apogeo Epicycli, quam in Perigeo, quæ utrobique fuit in ♀ Borealis, in ☿ Australis.

Statuatur igitur jam pars inferior Deferentis Eccentrici ab Eclipticæ plano deviari, in ♀ rursus ad Boream, in ☿ ad Austrum, & planum Epicycli existat in plano Defer. Eccentrici inclinatione omni carens: sic causa habetur phœnomeni.

III. Epicycli centro obtinente Apogeum Æquantis; cùm *Venus* esset circa I Mediam Longitudinem Orientalem, hoc est circa maximam à Sole Digressionem vespertinam, ejus Latitudo fuit Borealis; cùm verò esset circa K Mediam Longitudinem Occidentalem, propè scilicet maximam à Sole Digressionem matutinam, Latitudo ejus erat Australis. In ☿ contrarium cernebatur utrobique.

Datur causa phœnomeni, si circa MQ diametrum Apsidum Epicycli *Veneris* pars sinistra, seu Orientalis MIQ flectatur ab Ecliptica & Deferente ad Septemtrionem in MGQ, dextra verò, seu Occidua MKQ versùs Eclipticam & ultra eam ad Austrum in MRQ. Quod si *Mercurii* Epicyclus in partes contrarias flectatur, nempè in O & P, contrarium ipsius phœnomenum eâdem evidentiâ explicabitur.

IV. Centro Epicycli constituto in Æquantis Perigeo; cùm ♀ esset in I Mediâ Longitudine Orientali & Digressione vespertinâ, Latitudinem habuit Australem, cùm esset in K Mediâ Longitudine Occidentali & Digressione matutinâ, Latitudinem habuit Borealem. In ☿ accidebat contrarium utrobique.

Salvatur phœnomenum in ♀, si Orientalis Epicycli semicirculus MIQ flectatur ab I in O ad Austrum, versùs Eclipticam & ultra eam; Orientalis verò MKQ ex K in P ab Ecliptica & Deferente in Boream. Salvatur in ☿, si Epicyclus reflectatur in partes istis oppositas.

V. Cùm Epicycli centrum distaret, sive ad dextram, sive ad sinistram ab Apogeo & Perigeo Æquantis Gradibus 90, tunc Planeta Medias obtinens Epicycli Longitudines, omni Latitudine caruit.

Causa datur Phœnomeni, si tunc deviatione omni sublatâ planum Deferentis congruat plano Eclipticæ, diameter verò Mediarum Longitudinum Reflexione similiter evanescente in utroque plano, jam uno . jaceat. Quia porrò deviatio & Reflexio hic sunt nullæ, liquet utramque in Apogeo & Perigeo Æquantis fuisse maximam.

VI. Cùm Epicycli centrum distaret ab Æquantis Apogeo Grad. 90 in primo, seu sinistro Anomaliæ semicirculo; tunc ♀ posita in Apogeo Epicycli Latitudinem habuit Borealem, at in Epicycli Perigeo Australem. In ☿ contrarium eveniebat.

Salvatur Phœnomenum per inclinationem Epicycli, in ♀ quidem Apogeo ad Boream, Perigeo ad Austrum inclinato; in ☿ Apogeo inclinato Australiter, Perigeo Borealiter.

VII. Cùm Epicycli centrum in secundo Anomaliæ Ecc. semicirculo ab Apogeo distaret Grad. 90; tunc ♀ posita in Apogeo Epicycli Latitudinem habuit Australem, at posita in Perigeo Borealem. In ☿ contrarium spectabatur.

Habetur rursum Phœnomeni causa, per inclinationem Epicycli, in ♀ quidem Apogeum inclinando Australiter, Perigeum Borealiter: in ☿ Apogeum Borealiter, Perigeum Australiter.

Varietas igitur Latitudinum ♀ & ☿ triplici causâ continetur, deviatione Deferentis ab Eclipticâ, Inclinatione Epicycli à plano Deferentis circa diametrum Mediarum Longitudinum, & ejusdem circa diametrum Apsidum Reflexione. Ex tribus hisce librationibus nulla stabilis & fixa est, sed omnes mutabiles, nam inclinatio evanescit centro Epicycli obtinente Apogeum vel Perigeum Eccentrici, & deviatio ac Reflexio fiunt nullæ Epicycli centro 90 utrimque Gradibus ab Apogeo distante.

NUMERUS IV.

Quid de Latitudine Planetarum sentiant recentiores Astronomi.

Ptolomæi doctrinam & Hypotheses Latitudinum jam expositas recentiores Astronomi non probant. Lansbergius, Keplerus, Bullialdus Terræ Motæ Hypothesim amplexi, in quinque Planetis non aliam agnoscunt Latitudinis causam præter inclinationem constantem Orbis Planetæ ad Orbem Magnum, sive planum Eclipticæ, & accessum recessumque motuum Planetæ ac Terræ, atque hisce duobus existimant omnia Latitudinum phœnomena præstari. Longomontanus & Ricciolus Terræ Stantis Hypothesi inhærentes in ♄. ♃. & ♂, contenti sunt inclinatione constanti tum Eccentrici ad Eclipticam, tum Epi-

Epicycli ad Eccentricum, sic ut is semper maneat plano Eclipticæ parallelus: in ☿ & ♀ sublatâ inclinatione omni Eccentrici ad Eclipticam, sic ut unus idemque sint hi duo circuli, solam inclinationem constantem Epicycli ad Eclipticam agnoscunt. Cæterùm tam Longomontanus quàm Lansbergius in suis deinde Tabulis Reflexionem adhibendam agnoverunt: quàm consequenter, ipsi viderint. Ricciolus autem loco citato, varietates illas, quas Ptolomæus per deviationem instabilem Eccentrici ab Ecliptica, & Reflexionem Epicycli tueri voluit, aut incompertas adhuc, nec evidentibus observationibus innixas existimat; aut si quæ sunt ejusmodi, eas sufficienter explicari tum ex distantiâ variâ Planetarum à Terrâ, tum à variatione radij Epicycli; tum præcipuè à justiore illâ, de quâ paulò ante, inclinatione Epicycli ♀ ac ☿ ad Orbitam perpetuò jacentem in plano Eclipticæ. Atque ita quidem sentire se ait donec observationes tomo 3 nondùm edito afferendæ & discutiendæ aut sententiam mutare cogant, aut in eâ confirment.

NUMERUS V.

De loco & motu Nodorum quinque minorum Planetarum.

§. 1. Locus Nodi crebrâ Latitudinis observatione reperitur. Latitudo autem Planetæ observatur ut Fixæ cujuslibet: modum habes *lib. 6. num. 2.* Quando igitur Planetæ Latitudinem observaveris modicam & decrescentem, observare porrò perge per dies complures, donec Latitudinem deprehendas nullam: tunc enim Planeta erit in ipsâ intersectione Orbis sui, cùm Eclipticæ, hoc est in Nodo, ac proinde locus Planetæ per observationem cognitus Nodi locum exhibebit.

Ex dictis autem *num. 3.* patet duplicis generis esse Nodos & Limites in ♀ & ☿ Ptolemaicâ Hypothesi, videlicet Nodos Deviationis Eccentrici ac Reflexionis Epicycli, quæ semper invicem comitantur, & Nodos Inclinationis Epicycli. Anno Christi 140 Nodus Boreus Deviationis ac Reflexionis a Ptolomæo statuitur ♀ in ♒ Grad. 25 : ☿ in ♑ Grad. 10, Nodus autem Boreus Inclinationis Epicycli ♀ in ♉ 25 : ☿ in ♈ Grad. 10. Recentiores Astronomi, quia (ut mox dicetur) Deviationem ac Reflexionem rejiciunt, unum solummodò Nodum (Inclinationis videlicet) tam Boreum quàm Austrinum agnoscunt, qui tempore Ptolomæi fuerit eo Zodiaci loco, quo Ptolomæus (ut jam diximus) Nodum Inclinationis Epicycli statuebat.

Præterea notandum est, ut habeatur locus Nodorum ♀ ac ☿, non sufficere ut Planeta omni Latitudine careat, sed oportere insuper ipsum esse in Apogeo vel Perigeo Epicycli: nam solo hoc tempore locus Planetæ, adeoque & Nodi, in Zodiaco quasi stabilis est, ita ut quotiescumque Planeta fuerit in Apogeo aut Perigeo Epicycli Latitudinis expers, locus ejus in Zodiaco futurus sit idem quoad sensum, utpote non nisi lentissimè in consequentia (ut mox docebitur) proreptans. Quando autem Planeta Latitudine caret positus extra Apsides Epicycli, locus ejus, adeoque & Nodi, intra unam centri Epicycli revolutionem totum Zodiacum perambulat: quæ omnia patebunt ex *num. 11.*

Anno Christi 140, ex observatione Ptolomæi loca Nodorum Borealium Inclinationis hæc erant:

♄	♃	♂	♀	☿
♋ Grad. 3	♋ Grad. 1.	♈ Grad. 29. 30′.	♉ Grad. 25.	♈ Grad. 10,

Ad Annum verò Christi 1600 completum Nodorum Boreorum loca ex recentiorum Astronomorum observatione fuêre sequentia;

	Loca Nodi Borei 5. Planet. ad Ann. Christi 1600 compl.															
	Longomont.				Kepler.				Bulliald.				Rieciol.			
	Sig.	Grad.	/.	//.	Sig.	Grad.	/.	//.	Sig.	Grad.	/.	//.	Sig.	Grad.	/.	//.
♄	♋	20.	23.	0.	♋.	20.	59.	59.	♋.	20.	30.	49.	♋.	20.	40.	0.
♃	♋	6.	52.	0.	♋.	5.	25.	58.	♋.	8.	37.	23.	♋.	7.	0.	0.
♂	♉	16.	53.	10.	♉.	16.	44.	32.	♉.	26.	44.	32.	♉.	16.	44.	30.
♀	♊	13.	28.	41.	♊.	13.	0.	45.	♊.	14.	7.	38.	♊.	13.	30.	0.
☿	♊	0.	36.	31.	♉.	12.	25.	22.	♉.	12.	30.	39.	♉.	12.	30.	40.

§. 2. Ex comparatione duorum locorum, antiqui videlicet & recentis, colligetur & motus Nodorum in consequentia & quantitas motus. Nam si annis 1460 (tot enim effluxêre ab Anno 140 usque ad 1600 completum) Nodus processit in consequentia ex. grat. Grad. 18: Anno uno quanto spatin promovebitur. Per Regulam proportionum prodibunt Scrupula, quæ Anno uno Nodus percurrit.

	Motus Annuus Nodorum V. Planetarum										
	Longomont.			Kepler.			Bulliald.			Ruciol.	
	/.	//.	///.	/.	//.	///.	/.	//.	///.	/.	//.
♄	0	41	53	1	11	24	0	25	54	0	50
♃	0	13	36	0	3	29	0	24	37	0	15
♂	0	51	43	0	39	43	0	48	11	0	40
♀	0	36	0	0	46	58	0	30	8	0	40
☿	1	45	18	1	25	11	1	35	31	1	35

§. 3. Hinc

§. 3. Hinc nullo jam negotio locus Nodi Borei ad tempus datum reperietur, ex. gr. ad Annum 1620 completum. Intervallum temporis dati ab Epochâ (nempè Anno 1600, ad quam Radicem motus Nodorum firmavimus §. 1.) sunt Anni 20. His quantus debeatur motus, hoc est quot Scrupula istis 20 Annis Nodus processerit in consequentia, scitur ex §. *præced.* Hæc Scrupula adde Radici, hoc est loco Nodi ad Annum 1600, (auferri debuissent, si tempus datum præcederet Epocham): prodibit locus Nodi ad tempus datum, Annum nempè 1620. Invento autem loco Nodorum, habetur & Limitum, qui à Nodis distant Gradibus 90.

§. 4. Ex his apparet quantopere erraverint Ptolomæus & omnes cum eo Astronomi usque ad Tychonem, putantes eodem motu cieri Nodos quo Apogea, sic ut eamdem semper distantiam Nodi ab Apogeis retineant: Manifestus error evadet, si motus Annuus Nodorum cum motu Annuo Apogeorum *b* conferatur, hic enim illo multò est major. Ptolomæum excusat defectus observationum longo tempore distantium. Cæteri cum cælo inconsulto secuti sunt.

b *lib.6. n. 12. & 42.*

§. 5. Quemadmodum fuêre olim, ita sunt hoc etiam ævo Limites Borei ♄. ♃. ♂. in eodem Latitudinis semicirculo quo Apogea eorumdem. Patebit si loca Limitum (sunt hæc per §. 1. nota, cùm Limites à Nodis distent Gradibus 90) conferantur cum locis Apogeorum *num.19. & 42. lib.6.*

§. 6. Postremò distantiam Veram centri Epicycli à Nodo & Limite Boreo ad tempus datum sic invenies. Inquire ad t.d. *d* motum Verum centri Epicycli, hoc est distantiam ejus Veram ab ♈ initio, Inquire etiam ad t. d. distantiam *o* Nodi Borei ab ♈ initio. Quibus repertis, non latebit distantia Vera centri Epicycli à Nodo, adeoque nec à Limite.

d *per lib.6. n.11.36.38*
o *per §.3. hic.*

Eodem modo reperitur ad t. d. distantia Vera Planetæ à Nodis & Limitibus.

NUMERUS VI.

Hypothesis recentior & vera Latitudinum ♄. ♃. ♂.

Fig. 5.

Ecliptica sit ADBR; Eccentricus Planetæ YPQT, cujus planum productum sit usque ad Zodiacum in DCKR & immutabili angulo inclinatum ad Eclipticam, eamque intersecans rectâ DAR per Mundi centrum A. Epicyclus autem QFEGX ita inclinetur ad Eccentricum, ut semper plano Eclipticæ parallelus existat. Ita fiet, ut, cùm centrum Epicycli fuerit in Nodis, Epicycli planum jaceat in plano Eclipticæ, ac proinde tum Planeta nullam habeat Latitudinem, in quocumque is existat Epicycli puncto, quod phœnomena requirunt.

Ex hoc parallelismo Epicycli,

Sequitur I. in quocumque Eccentrici puncto fuerit centrum Epicycli, sectionem communem FQG, Eccentrici & Epicycli semper parallelam esse ad RD diametrum Nodorum. Patet ex 16. 11. Cùm enim plana Epicycli & Eclipticæ sint semper parallela, Eccentrici planum ADCR ea intersecando producit sectiones parallelas FG & DR.

Sequitur II. Inclinationis angulum Epicycli ad Eccentricum immutabilem esse & æqualem Inclinationis angulo Eccentrici ad Eclipticam. Sumatur enim in communi sectione DR punctum quodvis A, à quo in planis Eccentrici & Eclipticæ ducantur rectæ AQC, AB perpendiculares ad DR. Erit *a* angulus CAB Inclinatio Eccentrici ad Eclipticam. Intelligatur deinde per rectas AC & AB agi planum utrimque indefinitum: producet hoc sectiones communes in Eclipticæ plano rectam prædictam AB, in plano Eccentrici rectam itidem prædictam AC; at in plano Epicycli rectam EQX; quæ, quia Epicyclus supponitur parallelus Eclipticæ, erit per 16. 11. etiam ipsa ad AB parallela. Quare angulus CQE, sive AQX, qui est Inclinatio Epicycli ad Eccentricum, æqualis est angulo *b* CAB Inclinationi Eccentrici ad Eclipticam. Quod autem CQE sit Inclinatio Epicycli, sic ostendo. Quia jam ostensum est CQ, RA parallelas esse, easque secat CA, erunt *d* anguli CQG, CAR æquales. Sed *i* CAR rectus est. Ergo etiam CQG rectus. Deinde quia *suprà* ostendi tam EQ, BA, quàm GQ, RA esse parallelas, anguli EQG, BAR *m* æquales erunt. Sed BAR rectus *n* est. Ergo etiam rectus est EQG. Cùm igitur tam CQ in plano Eccentrici, quàm EQ in plano Epicycli sint ad communem sectionem GQF perpendiculares, erit *o* angulus CQE Inclinatio Epicycli ad Eccentricum.

a *per def. 6. 11.*
b *per 27 11.*
d *per eand.*
i *per constr.*
m *per 10. 11.*
n *per constr.*
o *per def. 6. 11.*

Hanc Hypothesim ut phænomenis consentaneam probant Longomontanus & Ricciolus, imò quoad æquipollentiam etiam Terræ Motæ assertores, Lansbergius, Keplerus, Bullialdus. Sed neque Hypothesim ipsam, neque modum Latitudinis supputandæ juxta eam cateráve eò pertinentia horum quisquam sufficienter exposuit. Et certe negotium est explicationis non obviæ. Quare istud tam quoad praxim, quam quoad demonstrationem viâ diversâ ac novâ exequemur sequentibus Numeris, 8. ac 9.

Quæ porrò dicta sunt num. 2. *de modo salvandi phænomena non erit difficile quibusdam immutatis ad hanc Hypothesim accommodare.*

NUMERUS VII.

Latitudines maximæ ♄. ♃. ♂.

Reperiuntur illæ observationibus frequentatis, cùm Latitudines vix ampliùs crescunt & eò usque continuatis, donec decrescere rursum incipiant: tunc enim facilè maxima discernitur.

Quia verò Latitudines maximarum maximæ contingunt, cùm Epicycli centrum incidit in Limites, & Planeta tenet Perigeum Epicycli, ut patet ex *num. 1. & 2*, ut observari possint Latitudines maximarum maximæ, oportebit scire utrùm ad t. d. centrum Epicycli sit in Limite alterutro, & Planeta in Perigeo Epicycli. Utrumque ex præcedentibus cognosci jam potest. Cùm enim ex §. 1. & 2. *num*, 11. *lib. 6.* ad d. t. sciatur distantia centri Epic. ab initio ♈, & per *num.5. §. 3.* distantia Nodi Borei ab initio ♈, non latebit distantia centri à Nodo Boreo, adeoque nec à Limite. Erit verò Planeta in Perigeo Epicycli si Anomalia Orbis sit Grad. 180; utrùm autem sit tanta, cognosces ex §.4. *num.11. lib.6.*

		Latitudines Maximæ							
		In Apogeo Epicycli				In Perigeo Epicycli			
		Borea		Austrina		Borea		Austrina	
		Grad.	l.	Grad.	l.	Grad.	l.	Grad.	l.
Longom.	♄	2	17	2	17	2	49	2	49
	♃	1	7	1	7	1	39	1	39
	♂	1	9	1	4	4	31	6	47
Ricciolus	♄	2	18	2	14	2	48	2	53
	♃	1	12	1	10	1	44	1	47
	♂	1	9	1	4	4	32	7	9

Latitudines maximæ reperiri etiam possunt supputatione Geometricâ, ut patebit ex *Casu 2.nu. 9.*

NUMERUS VIII.

Inclinationem Eccentrici ♄. ♃. ♂. ad Eclipticam invenire.

Fig. 9.

CEntrum Mundi esto A; Ecliptica ADBR; Eccentricus Planetæ YPQT, cujus planum productum usque ad Zodiacum sit ADCR, intersecans planum Eclipticæ rectæ DR per Mundi centrum A. Nodi sint D, R; Limes Boreus C, qui bisecat *a* semicirculum DCR. Centrum Epicycli sit in Q sub Limite C, in radio nimirum AC. Per AQC & Polum Eclipticæ ADBR agatur Latitudinis circulus, efficiens in plano Eccentrici sectionem AQC, in plano Eclipticæ sectionem AB, in plano Epicycli sectionem LQM; quæ, quod Epicyclus semper *b* æquidistet plano Eclipticæ ADBR, erit parallela ad AB per 16.11. Hic circulus *c* erit rectus plano Eclipticæ, & cum ejus peripheriâ rectos utrimque faciet angulos; ac proinde arcus ejus CB inter Eccentrici & Eclipticæ plana interceptus, est Distantia Limitis C ab Eclipticâ, sive Eccentrici ab Eclipticâ Declinatio maxima. Angulus autem CAB, quem arcus CB metitur, est Inclinatio Eccentrici ad Eclipticam: quod sic ostenditur. Quoniam circulus Maximus, (qui produxit suprà sectiones AQC, AB, LQM) bisecabat semicirculum RCD, & transibat per polos Eclipticæ, etiam hujus *c* bisecuit semicirculum RBD, in B. Quare tam BA, quàm CQA perpendiculares sunt communi sectioni DAR, ac proinde CAB angulus *d* est Inclinationis Eccentrici & Eclipticæ. Pari modo CQL, sive AQM est *o* Inclinationis angulus Epicycli ad planum Eccentrici ARQCPD; qui, quod LQM, BA *suprà* ostensæ sint parallelæ, æqualis est ipsi CAB. His positis,

a defin. 3. & 4. num. 48. lib. 2.
b per nu. 6.
c per num. 68. lib. 2.
e colligitur ex num. 71. lib. 2.
d per def. 6. 11.
o ostendi num. 6.

Oporteat invenire arcum BC, sive angulum Inclinationis CAB. Inquiratur tempus quo Planeta fuit vel futurus est in Epicycli Apogeo L, vel Perigeo M, & centrum Q Epicycli sub Limite alterutro C: quod quidem ex præcedentibus sciri jam potest: nam locus Planetæ in Epicyclo ad quodvis tempus reperitur per §.4. *num.* 11. *lib.* 6, & *ex* §. 6. *num.* 5. *hujus Libri* cognoscitur distantia centri Epicycli à Limite alterutro: ex quibus per methodum *lib.* 4. *num.* 12. traditam, quæsitum obtinebitur. Ad tempus igitur quo cognoveris Planetam esse in Perigeo Epicycli M, & Epicycli centrum Q sub Limite C, reperi Epicycli *l* radium QM, & distantias à centro Mundi, Planetæ *m* quidem MA, centri *n* Epicycli QA. In triangulo igitur QAM ex tribus lateribus notis innotescet *r* angulus MQA; cui cùm ob parallelas LQM, BA, æqualis sit CAB, etiam hic notus erit: quod petebatur. Eodem modo quæsitum obtinebitur, si Planeta sit in L Apogeo Epicycli.

l per §. 3. n. 11. lib. 6.
m per §. 4. ibid.
n per §. 2. ibid.
r per probl. 8. cap. 3. Geo. pract.

	Inclinatio Eccentrici ad Eclipticam					
	Longomont.			Ricciol.		
	Gr.	l.	ll.	Gr.	l.	ll.
♄	2	31	0	2	31	0
♃	1	19	15	1	25	0
♂	1	50	0	1	50	30

Corollarium.

Ex Declinatione Eccentrici maximâ CB jam inventâ (ea enim non differt ab inclinatione planorum Eccentrici & Eclipticæ) reperietur cujusvis puncti K Declinatio KV ab Eclipticâ, sive angulus KAV, eo modo quem tradidi *lib.2.num.63. & 64.* sed nota esse debet KC distantia puncti à limite C.

NUMERUS IX.

Latitudinem Apparentem ♄. ♃. ♂, ad datum tempus Geometricè supputare.

Fig. 9.

CEntrum Terræ esto A; Ecliptica ADBR; Eccentrici centrum Y; Eccentricus ipse YPFT, cujus Planum productum ad Zodiacum usque sit APDCRT; Nodi D, R; Limes alteruter C.

Ad tempus datum inquire distantiam *a* Veram Planetæ à Nodis ac Limitibus, & Anomaliam *b* Orbis, sive Planetæ distantiam ab Apogeo Epicycli.

Casus I. Si Epicycli centrum reperiatur in alterutro Nodo, nullam habebit Latitudinem *o* Planeta, in quocumque fuerit Epicycli puncto.

Casus II. Si Epicycli centrum Q reperiatur sub Limite alterutro C, & Planeta sit in Epicycli Apogeo L, vel Perigeo M, agatur per A centrum Terræ, Limitem C, & Polum Eclipticæ planum, sive circulus Latitudinis, qui transibit etiam per Q centrum Epicycli, adeoque & per Apsides L, M; producet autem in plano Eccentrici ADCR sectionem

a per § 6. num. 5.
b per num. 11. lib. 6.
o per nu. 6.

n Hyp. n. 6. *e per 16. 11.* *x ostensum num. praec.*

AQC, in plano Eclipticæ ADBR sectionem AB, in plano Epicycli sectionem LQM, quæ ob *n* parallelismum perpetuum Epicycli cum Eclipticâ erit ad AB *e* parallela. Arcus itaque CB circuli Latitudinis inter Eccentrici & Eclipticæ plana interceptus, angulusque, quem metitur CAB, est Inclinatio *x* Eccentrici ad Eclipticam, sive Eccentrici ab Eclipticâ Declinatio maxima, adeoque per *n. praec.* nota: & si ducantur rectæ ALX, AM, centroque A arcus LH, MN, erunt tam hæ quàm illi in circulo sive plano Latitudinis, ac proinde arcus LH, MN, sive anguli LAH, MAN, metiuntur distantiam à plano Eclipticæ, hoc est Latitudinem Apparentem Planetæ positi in L, vel M. Hanc igitur invenire oportet.

t per §. 4. n. 11. lib. 6. *u per §. 2. ibid.* *d ostensum suprà.* *i per 27. 1.* *m per nu. praec.* *n per 13. 1.* *f per prob. 11. cap. 3. Geo. pract.*

Inquire ad tempus datum à Terræ centro distantiam LA *t* Planetæ, & QA centri *u* Epicycli. Quia LM parallela *d* est BA, anguli CQL, *i* CAB æquales sunt. Atqui CAB *m* notus est. Ergo etiam notus CQL, adeoque *n* & LQA. In triangulo igitur QAL, ex notis lateribus LA, QA, & angulo LQA, *f* reperietur QAL, sive CAX: quo dempto ab angulo jam noto CAB, notus relinquitur XAB, seu LAH Latitudo Planetæ existentis in Epic. Apogeo L.

Pari modo si Planeta sit in Perigeo M; ad t. d. inventis MA distantiâ Planetæ, & QA distantiâ centri Epic. in triangulo MAQ ex notis lateribus QA, MA, & angulo noto MQA (est enim ob parallelas LQM, AB, par angulo QAB, seu CAB noto per *num. praec.*) reperietur MAQ: quo addito ad ad notum CAB, totus MAB, sive MAN notus erit, Latitudo videlicet Planetæ existentis in M.

Hoc casu exhibentur Latitudines maximæ independenter ab observatione, quæ si conveniant cum Latitudinibus maximis per observationem acquisitis *num.* 7. veritas Hypotheseos confirmabitur.

Fig. 6.

Casus III. Si Epicycli centrum Q reperiatur sub Limite alterutro C, Planeta verò extra Apsides L, Z, in alio quocumque puncto I; agatur per A centrum Terræ, per I centrum Planetæ, & per Polum Eclipticæ circulus, sive planum Latitudinis, efficiens in plano Eccentrici sectionem AK, in plano Eclipticæ sectionem AV, in plano Epicycli sectionem IM, quæ ob *t* parallelismum Epicycli ad Eclipticam erit ad AV *o* parallela. Itaque si ducatur recta AIX, & ex centro A arcus IH, liquet arcum IH, sive angulum IAH esse Latitudinem Planetæ existentis in I. Hunc igitur invenire oporteat.

t vide hyp. num. 6. *o per 16. 11.*

Communis sectio planorum Epicycli & Eccentrici sit recta infinita FQG. Quia rectæ IM, KA sunt ambæ in plano circuli Latitudinis, & una IM parallela ad VA, necesse est IM secare AK. Rursum quia IM, GF ambæ sunt in plano Epicycli, necesse est IM secare GF. Quare cùm IM secet tam AK, quàm GF, quarum utraque est in plano Eccentrici, ipsa verò IM occurrat plano Eccentrici in uno tantùm puncto rectæ GF, manifestum est IM secare ipsas AK, GF, in uno eodemque puncto O: quod quidem requiri ad quæsitum obtinendum ex sequentibus apparebit. Deinde, quia AK est in plano Latitudinis ducto per Planetam I, liquet arcum KC, sive angulum KAC, vel OAQ esse Æquationem Orbis ad t. d. quæ innotescet per §. 4. *num.* 11. *lib.* 6. In triangulo igitur OQA rectangulo ad Q, quia notus est acutus OAQ, nota fiet ratio *a* laterum OA, QA. Sed latus QA distantia centri Epicycli à centro Terræ ad t. d. nota fit in partibus radij Eccentrici YQ per §. 2. *num.* 11. *lib.* 6. Ergo in ijsdem partibus etiam nota erit OA. Sed in ijsdem nota quoque fit IA distantia Planetæ à centro Terræ per §. 4. *num.* 11. *lib.* 6. In trigono igitur OAI nota sunt latera OA, IA. Ulterius cùm notus jam sit arcus KC, utpote Anomalia Orbis, reperietur per *Coroll. praec. num.* arcus KV circuli Latitudinis ducti per Planetam I, inter plana Eccentrici & Eclipticæ interceptus, qui est Declinatio puncti K ab Eclipticâ; ac proinde etiam angulus KAV notus erit. Quia verò IM est parallela ad VA, erit angulus KOI *p* æqualis noto angulo KAV, adeoque etiam KOI notus est. Ergo *q* notus quoque IOA. In triangulo igitur OAI ex notis lateribus OA, IA, & angulo IOA reperietur *x* angulus OAI, seu KAX: quo dempto ab angulo noto KAV, notus relinquitur XAV, seu IAH Latitudinis angulus Planetæ existentis in I.

a per prob. 1. cap. 3. Geo. pract. *p per 27. 1.* *q per 13. 1.* *x per probl. 11. cap. 3. Geo pract.*

Quod si Planeta sit in inferiori parte Epicycli, putà in M, ductâ rectâ AM, & ex centro A arcu MN, Planetæ Latitudo Apparens erit arcus MN, seu angulus MAN, qui eodem modo reperietur. In triangulo quippe ANM ob parallelas IOM, VA, angulus MOA par *r* est noto jam angulo VAO, seu VAK, adeoque etiam ipse notus; & latus OA, notum fit ut suprà, latus autem MA distantia Planetæ nota fit per §. 4. *num.* 11. §. 6. Ex his igitur *s* reperitur angulus MAO, quo addito ad notum OAV, seu KAV, totus MAV, seu MAN notus erit.

r per 27. 1. *s per probl. 11. cap. 3. Geo. Pract.*

Fig. 7.

Casus IV. Si Epicycli centrum Q reperiatur extra Nodos & Limites, Planeta autem in Epicycli Apogeo vel Perigeo; agatur per A & Q, & Polum Eclipticæ circulus Latitudinis: transibit hic per Epicycli Apsides L, M, facietque in plano Eccentrici sectionem AK, in plano Eclipticæ sectionem AV, in plano Epicycli sectionem IQM, quæ ob parallelismum perpetuum Epicycli ad Eclipticam rursum erit *u* parallela ad AV. Ductis igitur rectis ALX, AM, erunt LAH, MAN anguli Latitudinis Planetæ positi in Epicycli Apogeo L, vel Perigeo M; quos invenire oportet.

u per 16. 11.

Quoniam K est locus Verus centri Epicycli Q, distantia Vera ejusdem centri à Limite C erit arcus KC, qui notus fit per §. 6. *nu.* 5. Quâ cognitâ, etiam arcus KV Declinatio puncti K ab Eclipticâ, angulusque KAV, per *Corol. Num. praeced.* innotescet. Deinde quia LM, AV sunt parallelæ, erit angulus KQL par noto jam angulo KAV, adeoque etiam ipse KQL notus est. Ergo notus est quoque LQA. Quare si ad t. d. reperiantur distantiæ à centro Terræ, LA *a* Planetæ, & QA *b* centri Epicycli, in triangulo QLA ex lateribus LA, QA, & angulo LQA innotescet *c* angulus QAL, seu KAX: quo dempto ab angulo noto KAV, notus relinquitur XAV, seu LAH Latitudo Planetæ existentis in Apogeo L. Similis erit processus in Perigeo.

a per §. 4. n. 11. lib. 6. *b per §. 2. ibid.* *c per probl. 11. cap. 3. Geo. pract.*

Fig. 8.

Casus V. Si Epicycli centrum Q reperiatur extrà Nodos & Limites, & Planeta extra L, M absides Epicycli, ex. gr. in I; agatur per A, & I, & Eclipticæ Polum circulus Latitudinis producens in plano Eccentrici sectionem AK, in plano Eclipticæ sectionem AV, in plano Epicycli sectionem IM, quæ ob parallelismum Epicycli ad Eclipticam est ad AV parallela, & ambas AK, FG intersecat in uno eodemque puncto O, quod ostenditur ut *suprà in Casu* 3. Itaque si ducatur recta AIX, erit XAV, sive

IAH

IAH angulus Latitudinis Planetæ existentis in I, quem reperiemus hunc in modum.

Ex A Terræ centro per centrum Epicycli Q ducatur ad Zodiacum recta AQφ designans locum Verum φ centri Epicycli. Liquet igitur φC esse distantiam Veram centri Epic. à Limite C, & KC esse distantiam Veram Planetæ ab eodem: quæ ambæ fiunt notæ per *num.* 11. *lib.* 6. Cùm igitur noti sint arcus φC, KC, etiam anguli φAC, KAC, sive QAω, OAω erunt noti. Producatur jam GF communis sectio Epicycli cum Eccentrico in ω. Quia GFω parallela *d* est ad RA, anguli CωG, CAR æquales sunt. Sed CAR rectus est. Ergo rectus est CωG. In triangulo igitur rectangulo QωA nota est ratio *l* QA, ad ωA, & in triangulo rectangulo OωA nota est ratio OA ad eandem ωA. Quare etiam ratio QA ad OA nota erit. Atqui QA distantia centri Epicycli à centro Terræ nota fit in partibus radij Eccentrici Yβ per §.2. *num.* 11. *lib.* 6. Ergo etiam OA in iisdem partibus nota fiet. In iisdem quoque partibus per §.4. *num.* 11. *lib.* 6. nota fiet IA distantia Planetæ à Terrà. In triangulo igitur OIA nota habentur latera duo OA, IA. Jam quia notus est arcus KC distantia puncti K à Limite C, reperietur per *Coroll. num. præced.* arcus KV Declinatio puncti K ab Eclipticâ, adeoque notus est angulus KAV. Et quia IOM parallela est AV, angulus KOI par est noto angulo KAV, ideoque & ipse notus est. Ergo etiam notus IOA. Cùm igitur in trigono OIA nota sint latera OA, IA cum angulo IOA, non latebit *m* angulus OAI, seu KAX: quo dempto ab angulo noto KAV, notus relinquitur. XAV, sive IAH Latitudo Planetæ existentis in I.

d ostendi num. 6.
l per probl. cap. 3. Geo. Pract.
m per prob. 11 cap. 3. Geo. pract.

Reliqui casus ex his quinque præcipuis non difficulter construentur.

NUMERUS X.

Hypothesis recentior & vera Latitudinum ☿ ac ♀.

Captetur tempus quo Planeta careat Latitudine existens in Epicycli Apogeo vel Perigeo: tunc enim erit Planeta in Nodo. Quare si tunc observetur locus Planetæ Verus in Zodiaco, etiam locus Nodi innotescet. Nodus porrò erit Borealis, si tempore mox subsequenti Latitudinem Planeta acquirat Borealem; Australis, si Australem. Utrùm autem Planeta sit in Apsidibus Epicycli, cognoscitur ex *num.* 50. *lib.* 6. utrùm careat Latitudine, ex *num.* 1. *ejusdem Libri.*

Esto igitur Ecliptica ANωφ, cujusque ac Terræ centrum A; loca Nodorum jam inventa sint N, φ, per quæ ducatur diameter Nφ, sitque Boreus N, Austrinus φ. Hos lentissimè in consequentia moveri, ut *num.* 5. vidimus, compertum est, quos propterea *Nodos Stabiles* nominabo ad distinctionem aliorum, de quibus *num. seq.* qui mutantur moventùrque celerrimè. Describatur deinde Eccentricus Planetæ AHGRP occurrens Nodorum diametro in H & R, qui totus jaceat in plano Eclipticæ. Tum varijs locis Eccentrici H, R, item, F, G, P describantur Epicycli QCOB, SDEK, IOZQ, QBOC, ωQβO, ad planum Eccentrici ac Eclipticæ (est enim unum atque idem utriusque) immutabili angulo inclinati, sic ut semicirculi LCQ, EOS, IOZ, QBO, ωQβ declinent ad Septemtrionem, nempè versùs Lectorem, reliqui verò semicirculi versùs Austrum; & communes eorum sectiones cum plano Eclipticæ, seu Eccentrici SE, ZI, βω sint semper Nodorum diametro NHRφ parallelæ. Ut verò hæc Epicycli Inclinatio faciliùs concipiatur, descripti sunt ex iisdem centris in plano Eccentrici & Eclipticæ circuli OVQY, EMSθ, IXZT, QYOV, ωTβX.

Fig. 11.

Tres igitur hujus Hypotheseos sunt leges præcipuæ: ut Eccentricus sit in plano Eclipticæ: ut Epicyclus ad Eclipticæ planum constanti angulo inclinetur: ut Epicycli & Eclipticæ communis sectio semper lineæ Nodorum Stabilium æquidistet. Quæ verò ex his proprietates consequantur, deinceps videamus.

NUMERUS XI.

Proprietates hujus Hypotheseos & cum phænomenis consensio.

PROPR. I. Quotiescumque Planeta fuerit in punctis O, vel Q; E vel S; I vel Z &c. quibus Epicycli peripheria occurrit Eclipticæ, sive id contingat in lineâ Nodorum Stabilium NAφ, sive extra eam, omni Latitudine Planeta carebit. Quare intersectiones illas meritò etiam Nodos appellabimus, sed Mobiles, ut mox apparebit. Et quidem Nodus Mobilis Boreus ille erit, à quo digrediens Planeta Latitudinem acquirit Borealem; Austrinus verò, à quo recedens Australem consequitur. *Fig.* 9.

PROPR. II. Ex constanti & numquam mutabili Inclinatione Epicycli fit, ut quamvis Epicycli centrum fuerit in diametro Nodorum Stabilium φN, si extra Epicycli Absides O, Q versetur Planeta, is nihilominus Latitudini sit obnoxius: id quod in ♄.♃.♂ non contingit, quia horum Epicycli centro constituto in Nodorum diametro, planum Epicycli jacet in plano Eclipticæ ut ex *num.* 6. patet.

PROPR. III. Nodi Mobiles anni spatio totum Zodiacum perambulant: sequuntur enim motum Epicycli, cujus centrum absolvit Zodiacum *o* cum Sole.

o per §.2. n. 29. l. 6.

Hinc fit ut *Venus* & *Mercurius* Latitudine careant non solùm cùm existunt sub Nodis Stabilibus N, φ, sed sub alijs etiam diversissimis Zodiaci punctis, quibus pro tempore subsunt Nodi Mobiles. Atque hæc est insignis differentia Planetarum horum à tribus reliquis, qui reperiuntur Latitudinis expertes non nisi in duobus Zodiaci punctis oppositis, & quoad sensum semper iisdem, utpote lentissimè solùm in consequentia proreptantibus.

PROPR. IV. Cùm Epicycli centrum subest Nodo Stabili Boreo N, Nodus Mobilis Boreus O est ipsum Epicycli Apogeum L. At centro Epicycli à Nodo Stabili recedente in consequentia Zodiaci, tantumdem quoque Nodus Mobilis Boreus ab Apogeo Epicycli recedit in præcedentia Epicycli, ac proinde eodem tempore absolvit Epicyclum in præcedentia, quo centrum absolvit Zodiacum in consequentia, hoc *n* est spatio Anni Solaris.

n per §.2. n. 29. lib 6.

Ponatur Epicycli centrum processisse ex H in F. Per A centrum Eclipticæ, & F centrum Epicycli agatur planum rectum Eclipticæ plano, efficiens in plano Eclipticæ sectionem ATFXθ, in plano Epicycli inclinati rectam OFQ. Apogeum Epicycli est O, sed reductum ad planum Eclipticæ est X, seu θ: similiter Perigeum est Q, sed reductum ad Eclipticæ planum est T. Liquet igitur cùm centrum Epicycli à Nodo Stabili Boreo N recessit in consequen-

tia Zodiaci quantitatè arcus N δ, Nodum Boreum Mobilem E recessisse ab Epicycli Apogeo reducto X in præcedentia Epicycli quantitate X E, qui similis est ipsi N δ: cùm enim S F E communis sectio Epicycli cum Eclipticæ plano ex lege Hypotheseos semper æquidistet diametro Nodorum Stabilium φ N, æquales erunt *a* anguli X F E, δ A N, adeoque *b* etiam arcus similes X E, δ N.

a per 27. 1.
b per corol. p. 33. 6.

Atque hoc semper eveniet. Quare ubi centrum Epicycli confecto semicirculo fuerit in R, etiam Nodus Boreus Mobilis Q ab Epicycli Apogeo O distabit semicirculo O B Q, seu O Y Q. Cumque Epicycli centrum à Nodo Boreo Stabili N recesserit in consequentia Zodiaci arcu N ω φ ϱ, etiam Nodus Boreus Mobilis ω ab Epicycli Apogeo reducto X recessit in præcedentia Epicycli arcu X β T ω, qui rursum similis est ipsi ϱ φ ω N: cùm enim communis sectio ω P β sit parallela ad N A φ, anguli X P β, ϱ A φ æquales erunt, adeoque & arcus similes X β, ϱ φ, quibus cùm addideris semicirculos φ ω N, β T ω, toti X β T ω, ϱ φ ω N similes erunt. Postremò Epicycli centro reverso in H ad Nodum Boreum Stabilem N, etiam Nodus Boreus Mobilis L rediȷt ad Epicycli Apogeum O.

Propr. V. Itaque Nodi Mobiles duplici cientur motu, uno per Zodiacum in consequentia, altero per Epicyclum in præcedentia, & periodus utriusque Annuo spatio terminatur. Patet ex 3, & 4.

Propr. VI. Ex mobilitate illâ Nodorum in Epicyclo per demonstrationem colligitur periodus Latitudinis, sive tempus quo ☿ & ♀ redeunt à Nodo ad eundem, prorsus æquale illi, quod ex observatione deprehenditur, in ♀ nimirùm Dier. 224. H. 17. 46'; in ☿ D. 87. H. 23. 14': quæ quidem longè pulcherrima est hujus Hypotheseos comprobatio. Utrumque Planetam unâ demonstratione complectar.

Fig. 10.

Epicyclus ♀ aut ☿ esto A D B N; recta A B sectio communis planorum Epicycli & Eclipticæ; Nodi Mobiles A, & B. Statuatur Planeta in Nodo A. Ex *num.* 48: *lib.* 6. habemus ♀ absolvere Epicyclum in consequentia Dieb. 583. H. 22. 10': ☿ verò Dieb. 115. H. 21. 3'. 30". At ex *Proprietate* 4. hujus Hypotheseos Nodus Mobilis tam ♀ quàm ☿ absolvit Epicyclum in præcedentia eodem tempore quo Epicycli centrum absolvit Zodiacum, hoc est *c* Anni spatio, Diebus videlicet 365. H. 5. 48'. 41". Sit igitur C E tempus quo Planeta absolvit Epicyclum, & E F tempus quo eundem absolvit Nodus. Cùm igitur nota sint tempora, quibus hinc Planeta, indè Nodus eumdem Epicyclum absolvunt, etiam celeritas utriusque nota erit, nimirùm erit celeritas Nodi ad celeritatem Planetæ ut reciprocè tempus C E, quo Planeta absolvit Epicyclum, ad tempus E F, quo eumdem absolvit Nodus. Jam quia Planeta & Nodus simul digressi ex A, hic (nempè Nodus) fertur in præcedentia Epicycli versùs N, ille in consequentia versùs D, necesse est sibi invicem in puncto quopiam occurrant, putà in D. Planeta igitur, absoluto arcu A D, absolvit unam Latitudinis periodum, hoc est à Nodo rediȷt ad eumdem. Et quoniam eodem tempore Nodus percurrit arcum A N D, quo Planeta arcum A D, erit A N D ad A D ut celeritas Nodi C E ad celeritatem Planetæ E F: & componendo erit circulus totus ad arcum A D, ut C F ad E F. Quare cùm hujus analogismi tres termini, nempè circulus, sive Grad. 360, C F, E F, sint noti, etiam quartus, nempè arcus A D, quot Graduum sit *o* innotescet. Cùm igitur totum Epicyclum, nempè Grad. 360 absolvat Planeta tempore C E: Gradus notos arcus A D, hoc est (ut ostendi *supra*) unam Latitudinis periodum, quanto tempore absolvet? Per Regulam prop. prodibunt pro ♀ Dies 224. H. 17. 46'; pro ☿ Dies 87. H. 23. 14', tanta videlicet utraque, quanta observando deprehensa est.

c per §. 2. n. 29. l. 6.
o reg. pro port.

Nihil horum vel Longomontanus qui Hypothesim illam proposuit, vel Ricciolus qui eamdem amplexus est, attigère, hoc dixisse unum contenti, Epicyclum constanti angulo ad commune Eccentrici & Ecliptica planum inclinari secundùm sectionem n S E Nodorum linea N φ perpetuo parallelam, vim omnem ac theoriam Hypotheseos inexplicatam relinquentes. Quod attinet ad supputationis Latitudinum, seu praxim, seu theoriam, neque illam ex Authoribus istu studiosi intelligent. Quare etiam hanc Numeris 12. 13. 14. 15. pari diligentiâ demonstrabimus, si priùs adhuc pauca quadam circa naturam Hypotheseos notaverimus.

n Fig 9.

Propr. VII. In primis igitur notanda occurrit insignis rursum inter ♀ ac ☿ & tres superiores differentia, quæ ex jam demonstratis deducitur: nimirum quod revolutio Latitudinis in ♀ & ☿ sit multò brevior revolutione centri Epicycli, in ♄ autem ♃ & ♂ lir æqualis quoad sensum, ut patet ex *Phæ. 6. num. 1. & ex §. 2. num. 2.*

Propr. VIII. Periodus Latitudinis in ♀ & ☿ non solùm quantitate differt à Periodo centri Epicycli, sed etiam à Periodo, seu revolutione Planetæ in Epicyclo. Patet ex *Propr. 6.* & ratio est motus Nodorum Epicycli jam expositus.

Propr. IX. Tempus Latitudinis Borealis æquale est tempori Latitudinis Australis, quia linea Nodorum Mobilium (S E) transit per centrum Epicycli, qui est Orbita Latitudinis. In ♄. ♃. ♂. rursùs contrarium accidit, ut patet *ex phæn. 1. num. 1. & ex §. 1. num. 2.*

Fig. 11.

NUMERUS XII.

Inclinationem Epicycli ♀ ac ☿ ad commune Eccentrici & Ecliptica planum, invenire.

Fig. 11.

Eclipticæ planum esto A N ω φ π, ejusque ac Terræ centrum A; planum Eccentrici λ HGRP jacens in Eclipticæ plano; Nodorum Stabilium loca N, φ, eorumque diameter N A φ. Ad hanc sit diameter alia perpendicularis ω A π occurrens peripheriæ Eccentrici in G & ψ. Centro G describatur Epicyclus I O Z Q communi Eclipticæ & Eccentrici plano inclinatus, sectionem in eo producens I G Z, Nodorum diametro N φ parallelam. Agatur deinde planum per rectam A G ω perpendiculare Eclipticæ plano, producens in plano Epicycli inclinato rectam O G Q. Liquet O esse Epicycli Apogeum, Q verò Perigeum, & si ducatur recta A O, eam esse in dicto plano ad Eclipticam perpendiculari. Jam quia I Z æquidistat rectæ N φ, & angulus ω A N *per constr.* rectus est, etiam ω G I rectus erit, ideoque recta I G existens in plano Eclipticæ perpendicularis est ad A G ω communem sectionem planorum A O ω & Eclipticæ ad se invicem *a* rectorum. Igitur quoque I G est recta *b* ad planum A O ω. Ergò I G etiam recta *c* est ad G O, quæ *per constr.* posita est in plano A O X. Cùm igitur I G Z communis sectio planorum Epicycli & Eclipticæ recta sit ad

a per const.
b per def. 4. 11.
c per def. 3. 11.

lineas

lineas G O, G ω in planis utrisque ductas, erit angulus O G ω *d* Inclinatio Epicycli ad planum Eclipticæ. [*d per def. 6.11.*]

His positis, quoniam per *num.* 5, notus est in Zodiaco Nodi Borei locus N, etiam notum erit Zodiaci punctum ω quadrante distans à Nodo N. Capietur ergo tempus quo simul & Epicycli centrum G sit sub puncto φ, & Planeta in Epicycli Apogeo O. Utrumque præstabitur præsidio *numerorum 36. 38. lib. 6, & numeri 50 ejusd. Libri.* Hoc obtento, ad tempus illud reperi O G radium *i* Epicycli, & distantias *m* à Terræ centro, O A Planetæ & G A centri Epicycli. Sic in triangulo A O G ex tribus lateribus notis innotescet *n* angulus O G A, quo dempto à Grad. 180, notus fiet reliquus O G ω Inclinatio Epicycli ad Eclipticam. Idem obtinebitur si Planeta tunc esset in Epicycli Perigeo Q; rursum enim in triangulo A G Q ex tribus lateribus notis reperietur Inclinatio A G Q, sive O G ω. Quod si capietur tempus quo simul & Planeta sit in Epicycli Apogeo vel Perigeo, & centrum Epicycli in puncto ↓ distante à Nodo N tribus Quadrantibus, denuò quæsitum obtinebitur eadem prorsùs operis formâ, quâ in ω. [*i per n. 45. lib. 6.* *m per n. 36 & 38. l. 6.* *n per probl. 8. cap. 3. Geo. pract.*]

Quantitatem Inclinationis subjungo ex Longomontano & Ricciolo; quam, quâ scrutati sint viâ, non prodidêre.

Inclinatio Epicycli						
	Longomont.			Ricciol.		
	Grad.	I.	II.	Grad.	I.	II.
♀	3	30	0	3	24	0
☿	5	40	0	6	54	0

NUMERUS XIII.

Declinationes punctorum Epicycli ♀ & ☿ à plano Ecliptica, datâ eorum à Nodis Mobilibus distantiâ, invenire.

[*Fig. 14.*] Epicycli planum esto A B O C inclinatum ad Eclipticæ planum repræsentatum semicirculo A B D C, æquali & concentrico ipsi A B O C. Ex A centro Epicycli ad B C sectionem communem Epicycli & Eclipticæ ducantur in utroque plano perpendiculares A O, D A. Angulus O A D est *a* Inclinatio planorum Eccentrici & Eclipticæ. Quod si in plano A O D describatur centro A per O arcus circuli, transibit is per D, eò quòd A O, A D sint æquales, metieturque arcus O D Inclinationis angulum O A D: qui cùm notus sit per *num. praced.* etiam arcus ipse O D notus erit. Jam quia *per constr. suprà*, C A B perpendicularis est ad utramque O A, D A, erit C A B *n* perpendicularis plano A O D, ac proindè C, est Polus *o* arcus O D: qui idcircò metietur *s* sphæricum angulum O C D. Cùm ergo arcus O D notus sit, etiam angulus O C D notus erit. [*a per def. 6. 11.* *n per 4. 11.* *o per n. 67. lib 2.* *s per def. 4. n. 66. l. 2.*]

His positis, detur quodvis in Epicyclo punctum, cujus distantiæ B Q, C Q à Nodis Mobilibus B, & C, sint notæ. Per A centrum Epic. & Q agatur planum A Q E rectum Eclipticæ plano A B D C, describaturque in eo, intervallo A Q, arcus Q E occurrens plano Eclipticæ in puncto E, quod erit in peripheriâ B D C. Erit arcus Q E Declinatio puncti Q à plano Eclipticæ: quem sic reperies. Quoniam planum A Q E rectum est plano A B D C, angulus sphæricus Q E C, rectus erit. In triangulo igitur sphærico rectangulo ad E, ex superiùs noto jam angulo E C Q, sive O C D, & latere dato C Q reperietur *t* latus Q E Declinatio quæsita. [*t Trigon. Sphær. prob 9.*]

NUMERUS XIV.

Distantiam ♀ & ☿ à Nodo Boreo Mobili ad tempus datum, invenire.

Iisdem positis & descriptis, quæ *Num. 10, & Num. 11 Propr. 4.* [*Fig. 11.*]

Reperi ad tempus datum distantiam Veram *a* centri Epicycli à loco Nodi Stabilis N, quæ sit ex. gr. N ♁, centro Epicycli constituto in F. Sit autem Epicycli Apogeum Verum O, sed reductum ad Eclipticam sit X. Per *Propr. 4. Num. 11.* arcus X E (pro quo hîc licebit assumere O E modicissimè differentem) similis est arcui N ♁. Sed hic jam est notus. Ergo etiam notus est O E: quo subtracto à toto circulo, nota erit O S K E distantia Nodi Borei E ab Apogeo O, numerata ab O in consequentia Epicycli. Reperiatur *b* deinde ad tempus datum Anomalia Orbis Vera, hoc est distantia Planetæ ab eodem Apogeo O, quæ etiam ipsa ab O in consequentia Epicycli numeratur. Cùm igitur notæ sint distantiæ ab Apogeo O, tam Nodi E, quàm Planetæ, etiam Planetæ à Nodo E distantia innotescet, quæ petebatur. [*a per §. 6. num. 5.* *b per n. 50. lib. 6.*]

NUMERUS XV.

Latitudinem ♀ & ☿ ad datum tempus Geometricè supputare.

[*Fig. 12.*] Eccentricus esto Y H P R jacens in plano Eclipticæ; centrum Terræ A; Nodus Boreus Stabilis H, Austrinus R. Centrum Epicycli ad datum tempus existat ex. gr. in P; quo centro describe Epicyclum P B D C N, qui sit ad commune Eccentrici & Eclipticæ planum inclinatus, illudque secans rectâ B P C parallelâ ad H R, & sint Nodi Mobiles, Boreus B, Austrinus C. Eodem deinde centro P describatur in plano Eclipticæ circulus Epicyclo æqualis P B E C M.

Quibus ita constitutis, reperi ad tempus datum distantiam *b* Planetæ à Nodo Boreo Mobili B: si nullam reperias, Planeta erit in Nodo Boreo B, & Latitudine carebit; si Graduum 180, Planeta erit in Nodo Austrino C, & rursum carebit Latitudine. Quod si minorem repereris Gradibus 180 vel majorem, ea sit ex. gr. B D, 130 Graduum. Per P centrum Epicycli & D centrum Planetæ agatur planum P D E rectum plano Eclipticæ, producens in eo sectionem P E, & in Epicyclo sectionem P D. Tum centro P intervallo P D, P E (sunt enim æqualia, utpotè radij æqualium *c* circulorum) describe arcum D E in plano P D E, qui erit Declinatio puncti D à plano Eclipticæ. In plano eodem P D E ex D demitte D O perpendicularem ad P E sectionem communem cum plano Eclipticæ. Erit hæc Sinus arcus D E, & simul erit perpendicularis ad *d* Eclipticæ planum. Jam quia inventus est arcus B D, adeoque & D C notus est, per *num. 13.* innotescet arcus Declinationis D E. Quare dabitur & Sinus ejus D O. Ducantur igitur ex Terræ centro rectæ A D, [*b per n. 14.* *c per constr.* *d per def. 4. 11.*]

AO: eritque AO in plano Eclipticæ: & quia planum ADO transit per DO perpendicularem plano Eclipticæ, etiam planum ADO ad Eclipticæ planum *l* perpendiculare erit, ac proinde ipsum est planum Latitudinis Planetæ, angulusque DAO Latitudinem Apparentem, seu Veram Planetæ metitur. Inquire igitur ad tempus datum *m* Planetæ à centro Terræ distantiam DA. In triangulo ADO quia rectus est angulus DOA, & latera jam sunt inventa AD, DO, ex his reperietur *n* Latitudinis angulus DAO, qui petebatur.

l per 18.11. *m per nu. 36 & 38. lib 6.* *n per probl. 4 cap. 3. Geo pract.*

	♀ & ☿ *Latitudines maximæ.*			
	Longomont.		Ricciol.	
	Grad.	*l.*	*Grad.*	*l.*
♀	9	2	9	9
☿	3	32	4	44

Latitudo *Veneris* maxima enormis est. Hinc factum ut eam Tycho propè conjunctionem Perigeam viderit in Horizonte Danico, cùm haberet Latitudinem Graduum ferè novem.

CAPUT II.

De Directione, Stationibus & Retrogressione minorum quinque Planetarum.

PLanetas quinque Minores ita Zodiacum percurrere ut modò progredi secundùm ordinem Signorum videantur, modò contra ordinem Signorum retrogredi, & quasi iter relegere, modò stare ac hærere in eodem Zodiaci loco, perpetuâ observatione compertum est. Subtilis pariter ac jucunda hujus phænomeni contemplatio est; cujus proinde hoc capite theoriam & causas cæteraque eò pertinentia pari, quo præcedentia, studio exponemus.

NUMERUS XVI.

Definitiones.

Fig. 13.

ZOdiacus esto A ♈ ♉ M, cujus ac Terræ centrum A: Eccentricus BQX; Epicyclus DKNIX, quem ex Terræ centro tangant in I, K, rectæ AI, AK.

DEFIN. I. *Planeta Directus, sive Progrediens* dicitur, cùm linea (APG) Veri motus Planetæ in Zodiaco procedit secundùm ordinem Signorum versùs M.

II. *Planeta Retrogradus* dicitur, quando linea Veri motus Planetæ retrocedit in Zodiaco contra ordinem Signorum.

III. *Planeta Stationarius* dicitur, quando linea Veri motus Planetæ stare videtur per aliquod tempus in eodem Zodiaci loco. Id verò in unâ revolutione Epicycli bis contingit, in utroque videlicet confinio Progressionis ac Regressionis. Observa tamen Planetam respectu centri Terræ in Zodiaco semper vel progredi vel regredi, sed in confiniis adeò tardè, ut stare videatur, & dicatur.

IV. *Statio Prima*, est quæ fit in Epicycli semicirculo sinistro, seu Orientali NIX; *Secunda* quæ in dextro, seu Occidentali XKN.

V. *Arcus Directionis, seu Progressionis*, est SNO, quem percurrens Planeta Directus est. Continet Apogeum Epicycli N & contactum *a* utrumque K, I.

VI. *Arcus Regressionis*, est OXS quem percurrens Planeta Retrogradus est. Continet Epicycli Perigeum X, incipitque ac finitur infra *b* contactus.

a Patebit ex nu 20. ejusque Coroll. *b ibid.*

VII. *Puncta Stationum* sunt, O, S, terorum communes arcus Directionis SNO, & arcus Regressionis OXS.

VIII. *Arcus Primæ Stationis*, est NO, ab Epicycli Apogeo N, usque ad Primæ Stationis punctum O in consequentia Epicycli numeratus.

IX. *Arcus Secundæ Stationis*, est NOS ab Apogeo N usque ad Secundæ Stationis punctum S, in consequentia Epicycli numeratus.

NUMERUS XVII.

Ad datum tempus, sive ad datum Gradum Mediæ Anomaliæ Centricæ, quam proportionem habeat velocitas Veri motus centri Epicycli ad velocitatem motus Planetæ in Epicyclo, invenire.

CUm celeritas Veri motus centri Epicycli ab Apogeo Eccentrici ad Perigeum assiduè crescat, clarum est velocitatem centri Epic. in Zodiaco ad velocitatem Planetæ in Epicyclo majorem uno tempore proportionem habere, quàm alio.

Proportionem igitur velocitatis centri in Zodiaco ad velocitatem Planetæ in Epicyclo, sic invenies. Inquire primò datæ Anomaliæ centri Epicycli convenientem motum Verum Horarium centri Epicycli, hoc est quot Minuta Horæ spatio absolvat centrum in Zodiaco, Id reperies iis modis, quos pro Sole & Lunâ tradidi *lib. 4. num. 2.* & quæ isthic ad hunc finem necessaria pro Sole ac Lunâ petuntur ex *lib. 1. & 2.* hic pro 5 Planetis minoribus petenda sunt ex *lib. 6.* Inquiratur deinde motus Horarius Planetæ ab Apogeo Vero Epicycli: quod in ♀ & ☿ fiet eodem artificio *lib. 4. num. 2.* cum adminiculo *num. 50. l. 6.* At in ♄. ♃. ♂, quod motum in Epicyclo habeant motui Solari alligatum, nonnulla diversitas occurrit. Pro his igitur sic procedes. Inquire modo jam dicto motum Verum Horarium centri Epic. ♄. ♃. ♂, dati temporis Anomaliæ Centricæ convenientem, eumque aufer à motu Vero Horario Solis ad tempus datum: notus relinquetur motus Verus Horarius Solis à centro Epicycli ad tempus datum. Atqui huic æqualis, sive similis est motus Horarius ♄. ♃. ♂ in Epicyclo, quantùm *a* enim Sol in Zodiaco recedit à centro Epicycli, tantundem eodem tempore ♄. ♃. ♂. recedunt à sui Epicycli Apogeo. Ergò etiam motus Horarius ♄. ♃. ♂. in Epicyclo notus erit.

a vide § 4. & 5. n. 10. lib. 6.

Inventis hunc in modum Vero motu Horario centri Epicycli, & motu Horario Planetæ in Epicyclo, nota erit proportio velocitatis centri in Zodiaco, & Planetæ in Epicyclo. Exemplum statuamus in uno horum Planetarum, putà in ♀, cujus motus Horarius Verus centri in Zodiaco ad t. d. sit ex. gr. Min. 2'. 24"; motus autem Horarius in Epicyclo Min. 1'. 32". 2'". Dico velocitatem centri Epicycli ♀ in Zodiaco, ad velocitatem ♀ in Epicycli eandem habere proportionem quam Min. 2. 24. ad Min. 1'. 32". 2'".

2'. 24"

2°. 24". A 1°. 32". 2" B

Cùm enim eodem Horæ unius tempore centrum ♀ in Zodiaco absolvat spatium A, & ♀ ipsa in Epicyclo absolvat spatium B, liquet velocitatem centri ♀ in Zodiaco esse ad velocitatem ipsius ♀ in Epicyclo, ut spatium A est ad spatium B.

NUMERUS XVIII.

Porismata ad sequentia.

PORISMA I.

Fig. 17. 18. Ex trianguli A C B latere quovis A B abscissa sit pars B D æqualis, vel major latere contermino B C. Dico majorem esse rationem B D ad D A, quàm anguli B A C ad angulum C B A.

Ducantur rectæ D C, eique parallela B F occurrens A C productæ in F, item C E parallela ad B A; factumque erit parallelogrammum D B E C, ac *a* proinde B D æqualis E C.

Fig. 17. Sit primò segmentum B D æquale contermino sibi lateri B C. Quia ergo B D etiam æquatur E C, æquales erunt C B, C E. Quare si centro C per B describatur arcus B G, transibit hic etiam per E, adeoque sector B C E necessariò major est triangulo B C E, sector verò G C E minor triangulo F C E. Igitur triangulum F C E ad triangulum E C B *b* majorem rationem habet, quàm sector G C E ad idem triangulum E C B, hoc est multò majorem quàm sector G C E ad sectorem E C B, hoc est *c* quàm angulus G C E ad angulum E C B, hoc est (ob parallelas E C, B A & D C, B F) quàm angulus *d* G A B, seu C A B ad angulum A B C. Atqui triangulum F C E est ad triangulum E C B, ut *i* F E ad E B, hoc est (ob parallelas E C, B A) ut *m* F C ad C A, hoc est (ob parallelas B F, D C) ut *n* B D ad D A. Ergo etiam B D ad D A majorem rationem habet, quàm angulus C A B ad angulum A B C: quod erat demonstr.

a per 34. 1. *b per 8. 5.* *c per 33. 6.* *d per 27. 1.* *i per 1. 6.* *m per 2. 6.* *n per eand.*

Fig. 8. Sit deinde, reliquis iisdem manentibus segmentum B D majus sibi contermino latere B C. Ergo etiam C E (utpote par ipsi B D) major erit quàm B C. Quare arcus B G ex C centro per B descriptus secabit rectam C E in O. Per O ducatur P I parallela ad B F, ut P O ad O I, *p* sic F E ad E B. Ergo etiam ut triangulum P C O *r* ad triang. O C I, sic triang. F C E ad triang. E C B. Atqui triang. P C O ad triang. O C I majorem rationem habet, quàm *s* sector G C O ad sectorem O C B. Ergo etiam triang. F C E, ad triang. E C B, hoc est *t* F E ad E B, majorem rationem habet quàm sector G C O ad sectorem O C B, hoc est quàm &c. ut supra.

p per corol. 2. prop. 4. lib. 6. *r per 1. 6.* *s patet ex 8. 5.* *t per 1. 6.*

Hoc Porisma & duo sequentia theoremata sunt Apollony, ut testatur Ptolemaus lib. 12. cap. 1. Quare Regressuum Stationumq; theoriam illi potissimùm debemus. Verùm præter dictum jam Porisma alio insuper Problemate opus est, cujus solutionem cùm apud alios non reperiam, eam dabo infrà Porismate tertio.

PORISMA 2.

Fig. 15. Datus sit circulus G K E, & extra eum punctum A, ex quo per circuli centrum B ducta sit recta A E G. Detur quoque proportio X ad Z, & sit ratio semidiametri B E ad E A æqualis vel minor ratione X ad Z.

Dico impossibile esse ex puncto A aliam ducere Secantem A R K, sic ut Chordæ K R semissis I R sit ad R A, quemadmodum X est ad Z.

Ducatur enim Secans quæcumque A R K. Quia K R *a* minor est diametro G E, etiam semissis ejus I R, minor est semidiametro B E. Igitur ratio *b* I R ad E A minor est ratione B E ad E A, sed R A *c* major est quàm E A. Ergo ratio I R ad R A *d* multò minor est ratione B E ad E A. Sed ratio X ad Z æqualis vel major supponitur ratione B E ad E A. Ergo ratio I R ad R A etiam minor est ratione X ad Z. Quare cùm A R K sit Secans quæcumque, liquet nullam duci posse talem cujus dimidium Chordæ I R sit ad segmentum externum R A in ratione datâ X ad Z.

a per 15. 3. *b per 8. 5.* *c per 8. 3.* *d per 8. 5.*

PORISMA 3.

Fig. 15. Datus sit circulus G K E, & extra eum punctum A, ex quo per B centrum ducta sit recta A E G. Detur quoque ratio X ad Z, sed ratio semidiametri B E ad E A sit major ratione X ad Z.

Petitur ex dato puncto A duci Secans A R K, sic ut Chordæ K R semissis I R, ad R A rationem habeat datam X ad Z.

Constr. Quoniam B A ita secta ponitur in E, ut B E sit ad E A in ratione majori quàm X ad Z, secetur B A in T, sic ut B T sit ad T A quemadmodum X est ad Z. Erit B T *a* necessariò minor quàm B E, A T major quam A E. Quare si A T diametro describatur circulus, is secabit circulum datum, putà in R. Ex A per R ducta Secans A R K, est ea quæ petitur.

a colligitur ex 8. 5.

Demonst. Diametro A B describatur semicirculus A I B occurrens Secanti A R K in I, ducanturque rectæ I B, R T. Quoniam anguli A I B, A R T sunt ambo in semicirculo, recti *l* erunt & æquales. Ergo parallelæ sunt *m* I B, R T. Ergo *n* I R est ad R A, ut B T ad T A. Sed B T est ad T A, ut X ad Z. Ergo I R est ad R T, ut X ad Z. Deinde qui B I, ut jam ostendi, ex centro B perpendicularis est ad Chordam K R, erit hæc *s* bisecta in I. Igitur I R semissis Chordæ, est ad R A ut X ad Z, quod petebatur.

l per 31. 3. *m per 27. 1.* *n per 2. 6.* *o per consl.* *s per 3. 3.*

Corollarium.

Quò ratio B E ad E A magis excesserit rationem datam X ad Z, eò punctum, in quo Secans quæsita occurrit circulo dato G K E, vicinius erit puncto E: & quò rationem datam X ad Z, minùs excesserit ratio B E ad E A, eò punctum, in quo Secans quæsita occurrit dato circulo, remotius erit à puncto E; nunquam tamen ad contactum D pertinget.

Utrumque problematis constructione expensâ manifestum est.

PORISMA 4.

Sint motus duo A & B velocitatis diversæ, quibus uno eodemque tempore X, percursa sint spatia M, & N.

A B

X

Ut velocitas motus A est ad velocitatem motus B, ita spatium M est ad spatium N.

M — N —

NU

NUMERUS XIX.

Fig. 16.

Si B E radius Epicycli alicujus Planetæ ad E A distantiam Perigei Epicycli à centro Terræ rationem habeat æqualem vel minorem, quàm velocitas centri Epicycli in Zodiaco ad velocitatem Planetæ in Epicyclo, non poterit is Planeta nobis unquam Retrogradus apparere.

SI enim posset, id fieret utique circa Perigeum Epicycli E, ubi motus Planetæ in Epicyclo motui Longitudinis maximè *a* adversatur. Sed quantumcumque Planeta iste sit Perigeo vicinus, apparet semper progredi directè. Ergo nunquam potest apparere Retrogradus. Subsumptum demonstrabitur hunc in modum. Sit Planeta in O quantumlibet Perigeo E propinquus, ducanturque B O, & A O, velocitas autem centri Epicycli in Zodiaco sit X, & velocitas Planetæ in Epicyclo sit Z. Quoniam B A ita secta est in E ut B E sit æqualis sibi contermino lateri B O, habebit B E *b* ad E A majorem rationem quàm angulus O A B ad angulum O B E. Sed B E ad E A rationem *c* habet æqualem vel minorem, quàm X velocitas centri Epicycli in Zodiaco ad Z velocitatem Planetæ in Epicyclo. Ergo etiam X ad Z majorem habet rationem quàm angulus O A B ad angulum O B E. Quare ut X est ad Z, sic angulus quispiam B A P major ipso O A B erit ad angulum O B E. Quoniam igitur est ut X velocitas Epicycli in Zodiaco ad Z velocitatem Planetæ in Epicyelo, ita angulus B A P ad angulum O B E, manifestum est *a* quo tempore Planeta in Epicyelo percurrit arcum O E subtensum angulo O B E, Epicyclum in Zodiaco percurrisse arcum subtensum angulo BAP. Atqui Planeta percurrendo arcum Epicycli O E subtensum angulo O B E, percurrit contra ordinem Signorum in Zodiaco arcum subtensum angulo O A B. Ergo quo tempore Planeta vi sui motus in Epicyclo percurrit in Zodiaco arcum subtensum angulo O A B contra Signorum ordinem, eodem tempore Epicyclus & Planeta cum ipso percurrit in Zodiaco arcum subtensum angulo B A P secundùm ordinem Signorum. Quare cùm ostenderim suprà angulum B A P majorem esse angulo O A B, Planeta existens in O, quantumlibet Perigeo vicinus, absolutè processit S. O. Sign. in Zodiaco quantitate arcus subtensi ab angulo O A P, quâ B A P excedit O A B; ac proinde nequit apparere Retrogradus.

a vide § 5. nu. 5. lib. 6.
b per porism. 1. num. 18.
c per hypot.
a per porism. 4. num. 18.

NUMERUS XX.

Fig. 16.

Si B E radius Epicycli alicujus Planetæ, ad E A distantiam Perigei Epicycli à Terra centro A, majorem rationem habeat, quàm X velocitas centri Epicycli in Zodiaco ad Z velocitatem Planetæ in Epicyclo, nobis Planeta ille circa Perigeum Epicycli Retrogradus apparebit.

QUoniam *ex hypot.* B E ad E A majorem habet rationem quàm X velocitas centri Epicycli in Zodiaco ad Z velocitatem Planetæ in Epicyclo, patet ex *Porism.* 3. *num.* 18. ita ex A posse duci Secantem aliquam A R K, ut Chordæ semissis I R ad R A eandem habeat rationem, quam X ad Z; quod fieri sanè non posset, si ratio B E ad E A esset æqualis, vel minor ratione X ad Z, quemadmodum *Porism.* 2. demonstravimus. Ducatur igitur ex A per *Porisma* 3. talis Secans A R K, ut Chordæ semissis I R ad R A eandem rationem habeat, quam X velocitas Epicycli in Zodiaco ad Z velocitatem Planetæ in Epicyclo; similisque ponatur ad partem alteram Secans A M H.

Dico Planetam Directum esse per totum arcum M G R, Retrogradum verò per arcum totum RM.

Sumatur enim in arcu M G R punctum Q quantumvis propinquum puncto R, ducanturque rectæ K Q, B Q, B R. Quoniam trianguli AKQ latus AK ita sectum est in R, ut K R major *a* sit latere contermino K Q habebit K R ad R A majorem rationem *b* quàm angulus Q A K ad angulum Q K A, seu Q K R. Sit autem angulus S A K duplus anguli Q A K. Ergo etiam R K ad R A majorem rationem habet, quàm duo anguli Q A K ad duos angulos Q K R. Sed angulus Q B R duplus *d* est anguli QKR. Ergo K R ad R A majorem rationem habet quàm duo Q A K ad Q B R. Ergo etiam I R semissis ipsius K R ad R A majorem habet rationem, quàm Q A K semissis duorum Q A K ad Q B R. Atqui I R ad R A *i* eandem habet rationem quam X ad Z. Ergo etiam X ad Z majorem rationem habet, quàm Q A K ad Q B R. Ergo angulus ille, qui eandem rationem habebit ad Q B R, quam X ad Z, necessariò major est angulo Q A K. Sit ille K A N, sive R A N. Quoniam igitur jam est ut X velocitas Epicycli in Zodiaco ad Z velocitatem Planetæ in Epicyelo, ita angulus K A N, sive R A N ad angulum Q B R, manifestum est *t* quo tempore Planeta peragravit in Epicyclo arcum Q R subtensum angulo Q B R, Epicyelum in Zodiaco motu Longitudinis percurrisse arcum subtensum angulo R A N. Atqui Planeta percurrendo Epicycli arcum Q R subtensum angulo Q B R, percurrit in Zodiaco arcum subtensum angulo Q A R, contra ordinem Signorum. Ergo quo tempore Planeta ex vi sui motus in Epicyclo percurrit in Zodiaco arcum subtensum angulo Q A R contra ord. Signorum, eodem tempore Epicyclus, adeoque & Planeta cum Epicyclo, percurrit in Zodiaco arcum subtensum angulo R A N sec. ord. Sign. Quare cùm ostenderim *suprà* angulum R A N majorem esse angulo Q A K, seu Q A R, Planeta existens in Q absolutè processit in Zodiaco sec. ord. Signorum quantitate arcus subtensi angulo Q A N, quo R A N superat ipsum Q A R. Pari modo ostendam Planetam directè progredi, in quocumque extiterit puncto arcus M G R.

Accipiatur deinde in arcu R M punctum O quantumlibet vicinum ipsi R, ducanturque rectæ K O, B O, E R. Cùm in triangulo A K O latus A K ita sectum sit in R, ut A R major *m* sit contermino latere A O, habebit *n* A R ad R K majorem rationem, quàm angulus A K O ad angulum K A O. Quare invertendo habebit K R ad R A *o* minorem rationem, quàm angulus K A O, sive R A O ad angulum A K O, sive R K O. Ergo etiam K R ad R O minorem rationem habet quàm duo anguli R A O ad duos angulos R K O, hoc est, ad angulum R B O. Ergo etiam I R semissis ipsius K R ad R A minorem rationem habet, quàm unus angulus R A O semissis duorum R A O, ad

a per 15. 3.
b per porism. 1. num. 18.
d per 20. 3.
i per constr.
t per porism. 4. num. 18.
m per 8. 3.
n per porism. 3. num. 18.
o per 26. 5.
p per 20. 3.

R A O, ad angulum R B O. Atqui I R est ad q R A, ut X ad Z. Ergo etiam X ad Z minorem rationem habet, quàm angulus R A O ad angulum RBO. Angulus igitur ille qui eandem rationem habeat ad angulum R B O, quam habet X ad Z, necessariò s minor est angulo R A O. Sit ille P A R. Quoniam igitur jam est ut X velocitas Epicycli in Zodiaco ad Z velocitatem Planetæ in Epicyclo, ita angulus P A R ad angulum R B O, manifestum est k quo tempore Planeta in Epicyclo conficit arcum R O subtensum angulo R B O, Epicyclum in Zodiaco conficere arcum subtensum angulo P A R. Atqui Planeta percurrendo Epicycli arcum R O, percurrit in Zodiaco arcum subtensum angulo R A O contra ord. Sig. Ergò quo tempore Planeta vi motus sui in Epicyclo percurrit in Zodiaco arcum subtensum angulo R A O contra ord. Sign. eodem tempore Epicyclus, adeoque & Planeta cum Epicyclo, percurrit in Zodiaco arcum subtensum angulo P A R secundùm ord. Sign. Quare cùm *supra* ostenderim angulum P A R minorem esse angulo R A O, Planeta existens in O absolutè retrocessit in Zodiaco contra ord. Sig. quantitate arcus subtensi ab angulo P A O, quo R A O superat P A R. Pari modo ostendemus Planetam regredi quantumcumque fuerit in arcu M R, vicinus puncto R.

q *per const.* s *Patet ex* 8. 5. k *per perif.* 4. *num.* 18.

Cùm igitur demonstraverimus Planetam in Zodiaco absolutè progredi, in quocumque fuerit puncto suprà R, absolutè verò regredi in quocumque fuerit puncto infrà R, liquet R esse punctum Stationis Primæ. Eodem modo demonstrabitur M esse punctum Stationis Secundæ. Quare Retrogradus est Planeta per totum arcum R M, Directus per totum arcum M G R; Quæ erant demonstranda.

Corollaria.

1. Quò ratio semidiametri Epicycli B E ad E A distantiam Perigei à centro Terræ, excesserit minùs rationem velocitatis X Epicycli in Zodiaco, ad Z velocitatem Planetæ in Epicyclo; eò puncta Stationum R, M, viciniora erunt Perigeo Epicycli E, & arcus Regressionis minor; eò remotiora & arcus Regressionis major, quò excesserit magis. Patet applicando *Corollarium Perismatis* 3. *num.* 18.

2. Puncta Stationum semper existunt inter contactus D, L, & Perigeum Epicycli E. Ea siquidem determinantur à Secantibus A K, A H.

NUMERUS XXI.

Cur minores quinque Planetæ appareant Stationarij & Retrogradi, Sol autem & Luna minimè.

Fig. 16.

CAusa hujus phœnomeni, quod inter proprietates Planetarias longè præcipuum est ac præ cæteris admirabile, ex ijs, quæ *num.* 20. & 19 sunt demonstrata, deducitur hunc in modum. Inquiratur a ad quemvis Gradum Mediæ Anomaliæ Centricæ B E radius Epicycli, & B A distantia centri Epicycli à centro Terræ; à quâ si demas radium Epicycli B E, nota fiet E A distantia Perigei E à Terræ centro: ac proinde ad datum Gradum Anomaliæ Centricæ nota erit ratio B E radij Epicycli ad E A distantiam Perigei Epicycli à centro Terræ. Inquiratur deinde o ratio velocitatis centri Epicycli in Zodiaco ad velocitatem Planetæ in Epicyclo. Semper comperies rationem radij Epicycli B E ad E A distantiam Perigei à Terra in quinque Planetis minoribus majorem esse ratione velocitatis Epicycli in Zodiaco ad velocitatem Planetæ in Epicyclo. Atqui Planetæ, quibus hoc contingit, apparent hac de causâ Stationarij & Retrogradi, ut *num.* 20 est demonstratum. Ergo &c.

a *In* ♄. ♃. ♂. *per nu.* 11. *l.* 6. *in* ♀ *per num.* 36. *lib.* 6. *in* ☿ *per num.* 38. *lib.* 6. o *per n.* 17.

Quod attinet ad Solem ac Lunam, quamvis utrique daretur Epicyclus (nam sine Epicyclo nequeunt in Terræ Stantis Hypothesi Regressiones Stationesque explicari) quamvis inquam daretur Epicyclus, incapaces nihilominus essent Stationis ac r Retrogressus, quia radius Epicycli ad distantiam Perigei Epicycli à centro Terræ semper minorem rationem haberet quàm velocitas centri Epicycli in Zodiaco, ad velocitatem ipsorum in Epicyclo.

r *per nu.* 19

Id primùm in Sole ostendam. Duplex b est Solis Hypothesis, una Eccentrico utitur, altera Epicyclo, sed cujus radius par sit Eccentricitati alterius Hypotheseos: quæ c cùm sit 3460 quarum radius Deferentis est 100000, tantus quoque Epicycli radius erit. Quare si hunc subducas à Deferentis radio 100000, restant 96540 pro distantiâ Perigei Epicycli à centro Terræ. Unde ratio Solaris Epicycli ad distantiam Perigei Epicycli à centro Terræ ea est quæ 3460 ad 96540. Deinde in Hypothesi Epicyclicâ, motus Solis in Epicyclo idem est cum motu Solis in Eccentrico, hoc est cum motu Anomaliæ, in Hypothesi Eccentricâ; & motus centri Epicycli in Hypothesi Epic. idem est cum motu Solis Medio in Hypothesi Eccen. Atqui motus Medius Solis in hac n velocior est motu Anomaliæ. Ergo & in illâ motus centri Epicycli velocior est motu Solis in Epicyclo. Ergo radius Epicycli 3460 ad distantiam Perigei Epicycli à Terrâ 96540 minorem rationem habet, quàm velocitas centri Epicycli ad velocitatem Solis in Epicyclo, cùm hæc sit ratio majoris ad minus, illa minoris ad majus. Ergo non potest Sol Stationarius vel Retrogradus apparere, ut *num.* 19. ostensum est.

b *Vide* §. 2. *nu.* 23. *l.* 1. c *Per n.* 38 *lib.* 1. n *per prop.* 3 *num.* 25. *lib.* 1.

Non absimilis erit in Lunâ ratiocinatio. Nam si Lunæ tribuamus Epicyclum, facilè erit ex doctrinâ *libri secundi* colligere radium Epicycli semper quoque minorem futurum distantiâ Perigei Epicycli à Terrâ. Is siquidem æqualis est Eccentricitati minimæ, quæ per *num.* 38. *lib.* 2. est 8745, quarum Eccentrici radius est 100000. Quare 8745 subtractis ex B A 100000; ratio B E ad E A est 8745 ad 91255. Deinde motus Medius centri Epicycli in Hyp. Epicyclicâ idem est cum motu Medio Lunæ in Zodiaco in Hyp. Eccen. Et in Hypoth. Epic. motus Lunæ in Epicyclo idem est cum motu Lunæ in Eccentrico, hoc est cum motu Anomaliæ in Hyp. Eccen. Quare cùm Medius motus Lunæ in Zodiaco velocior i sit motu Anomaliæ, etiam motus centri Epicycli velocior erit motu Lunæ in Epicyclo. Ergo radius Epicycli Lunaris ad distantiam Perigei Epicycli à Terrâ minorem semper habet rationem quàm velocitas centri Epicycli ad velocitatem Lunæ in Epicyclo. Ergo numquam Luna poterit Stationaria vel Retrograda apparere, ut *num.* 19. ostensum est.

i *Patet ex propr.* 3. *n.* 25. *lib.* 1. *item ex nu.* 34. *lib.* 2.

Si tamen Sol & Luna essent Regressionis capaces, regrederentur in superiori parte Epicycli propè Apogeum, ibi quippe moventur contra Signorum ordinem, ut dictum *lib.* 1. *num.* 23. §. 2. & *lib.* 2. *in Schol. num.* 30.

NUMERUS XXII.

Puncta Stationum, ac proinde etiam quantitas arcuum Directionis & Regressus, assiduè variantur.

Fig. 16.

NAm punctum Stationis determinatur à Secante tali ex. gr. A R K, cujus Chordæ K R semissis I R ad segmentum extrinsecum R A eandem rationem habeat, quam velocitas centri Epicycli in Zodiaco ad velocitatem Planetæ in Epicyclo, ut *num.* 20. demonstratum est. Quare cùm ratio velocitatis Epicycli in Zodiaco ad velocitatem Planetæ in Epicyclo ad singulos Anomaliæ Centricæ Gradus varietur, necessariò variabitur etiam Secans, adeoque & puncta Stationum R, M, utrimque modò accedent ad Perigeum E, modò longiùs recedent. Unde etiam Regressionis arcus R E M, & Directionis M G R variari necesse est.

Corollarium.

Hinc etiam patet puncta Stationis primæ R, & secundæ M inæqualiter plerumque distare à Perigeo Epicycli.

NUMERUS XXIII.

Ad singulos Gradus Anomaliæ centri Mediæ arcum Stationis primæ & secundæ invenire.

Fig. 16. a Per n. 17

INquire *a* ad datum Gradum Anomaliæ Centricæ quam habeat rationem velocitas Epicycli in Zodiaco ad velocitatem Planetæ in Epicyclo, quæ sit ut X ad Z. Deinde ex Terræ centro A ducatur recta A K, ita Secans semicirculum primum Epicycli in R, *b* ut Chordæ K R semissis I R ad R A eamdem rationem habeat, quam X ad Z. Dico arcum Stationis primæ esse G K R. Patet ex demonstratis *num.* 20. Si petatur arcus Stationis secundæ, ducenda est Secans secundum Epicycli semicirculum E L G. Atque hæc quidem inventio geometrica est.

b per porif. 3. n. 18.

Arithmeticè eumdem arcum reperies hunc in modum. Ex I puncto medio Chordæ K R ducatur ad B centrum recta I B. Erit angulus B I R *c* rectus. Quoniam nota est ratio X ad Z estque I R ad R A ut X ad Z, etiam ratio I R ad R A nota erit. Ergò etiam ratio K R ad R A, & componendo ratio K A ad R A nota erit. Deinde ad Anomaliæ Centricæ Gradum ab initio datum *d* B E radius Epicycli, & B A distantia centri Epicycli à centro Terræ A, nota fiant in partibus radij Eccentrici. Ergo notæ etiam sunt G E, E A, atque inde & G A. Quoniam ergo in partibus radij Eccentrici notæ sunt G A, E A, ex earum multiplicatione factum rectangulum G A E, adeoque & æquale *i* ipsi rectangulum K A R notum erit in quadratis partium radij Eccentrici. Jam quia est ut *m* K A ad R A, ita rectangulum K A R ad quadratum R A, si fiat ut K A ad R A (quarum proportio *suprà* jam innotuit) ita rectangulum K A R notum in quadratis partium radij Ecc. ad Quartum: dabit hoc quadratum R A in quadratis partium radij Ecc. Quare per extractionem radicis recta R A in partibus radij Ecc. nota fiet. Et quia nota fuit *suprà* ratio I R ad R A, etiam I R, adeoque & I A, in partibus radij Ecc. erunt notæ, in quibus etiam notus *suprà* fuit Epicycli radius B E, seu B R. Quoniam igitur in triangulo rectangulo R I B nota sunt in iisdem partibus radij Eccentrici latera I R, B R, ex his *n* reperietur in iisdem partibus latus B I cum angulo I B R. Rursum quoniam in rectangulo triangulo A I B nota sunt in partibus iisdem (nempè radij Ecc.) latera I A, B I, ex his *o* reperietur angulus I B A: à quo si demas jam inventum I B R, notus relinquetur R B A, sive R B E, adeoque etiam notus erit arcus *p* R E distantia Stationis primæ à Perigeo Epicycli; eoque subtracto à Grad. 180, notus fiet arcus R K G distantia Stationis primæ ab Epicycli Apogeo G, quæ petebatur.

c Per 3. 3.
d in ♄. ♃. ♂ per nu. 11. lib. 6. in ♀ per n. 36. lib. 6. in ☿ per. n. 38. lib. 6.
i Per 36. 3.
m Per 1. 6.
n Per prob. 4. c. 3. Geo. pract.
o Per probl. 5 c 3. Geo. pract.
p Per 33. 6.

Eodem modo ad datum Gradum Anomaliæ centri Mediæ reperietur arcus M E, quo R E. Addatur ergo semicirculus arcui M E, notusque erit Stationis secundæ arcus G R M.

ARCUS STATIONIS PRIMÆ EX PRUTENICIS

In Eccentrici		Grad.	/
Apogeo		112	38
Media Long.	♄	113	58
Perigeo		115	21
Apogeo		124	8
Media Long.	♃	125	40
Perigeo		127	19
Apogeo		157	33
Media Long.	♂	162	51
Perigeo		168	56
Apogeo		166	1
Media Long.	♀	167	7
Perigeo		168	15
Apogeo		146	50
Media Long.	☿	143	55
Perigeo		146	0

Difficultas determinandi arcus & tempora Stationum ac Regressuum in hoc maximè consistit, quod ad tempus Stationis quæsita sciri debeat quam proportionem habeat celeritas Epicycli in Zodiaco ad celeritatem Planetæ in Epicyclo: tempus autem illud ignotum sit, utpote ipsum illud quod quæritur. Non satis video quomodo alij hic satisfaciant. Vide igitur tres numeros sequentes.

NUMERUS XXIV.

Dato arcu Stationis primæ, arcum Stationis secundæ proximè insequentis, atque inde arcum tam Regressionis quàm Directionis invenire.

§. 1. DEtur Stationis primæ arcus G R. Primo intuitu videtur quæsitum obtineri, si arcui R E *per hyp.* noto sumatur æqualis E M, qui additus semicirculo, componat arcum Stationis secundæ G R M. Sed hanc constructionem non esse accuratam, sic ostendo. Quo momento Planeta est in Stationis primæ puncto R, ponatur ex. gr. Epicycli centrum B esse in Eccentrici Apogeo; ducaturque per datum Stationis punctum R à Terræ centro Secans

Fig. 16.

ARK,

A R K, & per prætentum ſecundæ Stationis punctum M Secans A M H, ſintque Chordarum K R, H M ſemiſſes I R, T M. Quoniam arcus R E, M E ponuntur æquales, erit K R ad R A, ut H M ad M A, ac proinde etiam ut I R ad R A, ſic T M ad M A. Sed, quia R, M ponuntur eſſe puncta Stationum, I R *a* eſt ad R A ut velocitas quam Epicyclus in momento Stationis primæ habet ad velocitatem Planetæ in Epicyclo; & *b* T M eſt ad M A, ut velocitas quam Epicyclus in momento Stationis ſecundæ habet ad velocitatem Planetæ in Epicyclo. Ergo velocitas Epicycli in momento Stationis primæ eſt ad velocitatem Planetæ in Epicyclo, ut in momento Stationis ſecundæ velocitas Epicycli, eſt ad velocitatem Planetæ in Epicyclo: quod quidem eſt manifeſtè falſum. Cùm enim tempore Stationis primæ Epicycli centrum fuerit in Apogeo Eccentrici, ubi tardiſſimus eſt motus centri Epicycli, clarum eſt toto eo tempore elapſo, quo Planeta, peragrato Regreſſionis arcu R E M, pervênit ad Stationis ſecundæ punctum M, centrum Epicycli receſſiſſe interim ab Apogeo Eccentrici, ac proinde alium tenere in Eccentrico locum, moverique aliâ celeritate, quàm ad momentum Stationis primæ. Quare alia & hìc eſt, & plerumque erit proportio velocitatis centri Epicycli ad velocitatem Planetæ in Epicyclo in Statione ſecundâ, quam in primâ; ac proinde M E diſtantia Stationis ſecundæ à Perigeo plerumque inæqualis eſt diſtantiæ R E Stationis primæ.

a *demonſtratum eſt num 20.*
b *Ibidem.*

§. 2. Nihilo minus cùm diverſitas arcuum Stationis primæ in Apogeo & Perigeo Eccentrici, quæ cauſatur à variatione dictæ proportionis velocitatum, quando maxima eſt, ferè non excedat Gradus tres in ♄. ♃. ♀. ☿, ut ex Tabellâ *num. præced.* patet: etiam diverſitas arcuum ſecundæ Stationis ab eâdem illâ proportionis velocitatum variatione profecta, in ♄. ♃. ♀. ☿. cùm erit maxima, tres Gradus non excedet, ac proinde cùm extrema in hoc negotio ſubtilitas non requiratur, contemni poteſt.

Itaque in ♄. ♃. ♀. ☿. ſi detur primæ Stationis arcus G R, notus quoque erit arcus R E reſiduus ad Grad. 180. Huic parem numera à Perigeo Epicycli E in M; notumque erit punctum Stationis ſecundæ M, ejuſque arcus G R M. Vel breviùs: arcus Stationis primæ G R demptus à Grad. 360 dabit arcum G M R, hoc eſt arcum G R M Stationis ſecundæ.

§. 3. In *Marte* autem cùm diverſitas arcuum primæ Stationis, ab illâ proportionis velocitatum varietate inducta, ubi maxima fuerit, ad 12 ferè Gradus excreſcat, ut patet ex Tabulâ prædictâ, etiam diverſitas arcuum Stationis ſecundæ, cùm erit maxima, ad totidem Gradus aſcendet: ac proinde nequaquam poterit diſſimulari. Quare arcum Stationis ſecundæ *Martis* alio artificio oportebit inquirere, quod *num. ſequenti* tradetur.

§. 4. Ex notis arcubus utriuſque Stationis nullo negotio arcus Directionis ac Regreſſus eliciuntur. Arcu enim Stationis primæ G R ablato ab arcu G R M Stationis ſecundæ, relinquitur arcus Regreſſionis R M: hoc autem ſubducto ex Gradibus 360, relinquitur arcus Directionis M G R.

NUMERUS XXV.

Arcum Stationis primæ reſpectu dati temporis proximæ futuræ vel præteritæ, & debitos illi arcus tam ſecundæ Stationis quàm Regreſſionis ac Directionis, invenire.

IN ♄. ♃. ♀. ☿. ſic procede. Inquire *i* ad tempus datum centri Epic. Anomaliam Mediam, eique competentem reperi *m* arcum Stationis primæ ex. gr. G R: ex quo reperto elicies arcum Stationis ſecundæ, arcuſque Regreſſionis ac Directionis, ut *num. præced.* §. 2. & 4.

Fig. 16.
i *in* ♄. ♃. *per nu.* 11. *lib.* 6. *in* ♀ *per n.* 36. *lib.* 6. *in* ☿ *per n.* 38. *lib.* 6.
m *Per nu.* 23.

In ♂ ob cauſas ſuperiori *Num.* §. 3. indicatas aliter procedendum. Ad tempus datum inquire ad Anomaliam centri *n* Mediam, & competentem illi arcum *o* Stationis primæ ex. gr. G R, & Anomaliam Orbis Veram, hoc eſt diſtantiam *Martis* ab Apogeo Vero Epicycli. Si Anomalia Orbis ſit æqualis arcui G R, erit punctum R Statio prima accuratè conveniens tempori dato. Si Anomalia Orbis eſt G N vel G N O notabiliter minor majórve arcu G R, arcum G N vel O R, qui eſt notorum arcuum differentia, converte in tempus hoc modo. Revolutio *Martis* ad Solem *r* peragitur diebus circiter 780; cui cùm tempore æqualis ſit *s* revolutio *Martis* in Epicyclo, etiam illa diebus ferè 780 abſolvitur. Cùm ergo Gradus 360 abſolvantur Diebus 780, Gradus noti arcus N R vel O R quot diebus percurruntur? Per Reg. proport. prodibit tempus quæſitum præter propter: quod additum tempori dato, ſi Anomalia fuit minor arcu G R, ſubtractum verò, ſi major, dabit tempus præter propter quo ♂ futurus in puncto Stationis primæ, adhuc licet incognito. Ad tempus igitur illud inquire Anomaliam centri Mediam, & competentem illi arcum Stationis primæ reperi per *num.* 23. Hic erit arcus primæ Stationis proximè reſpectu dati temporis futuræ vel præteritæ.

n *Per nu.* 11. *lib.* 6.
o *Per nu.* 23.
r *vide* §. 5. *nu.* 3. *l.* 6.
s *Per* §. 4. *n.* 10. *l.* 6. & §. 5. *n.* 5. *lib.* 6.

Eodem modo reperietur arcus Stationis ſecundæ. Anomaliæ Centricæ ſuperiùs inventæ reperi *a* competentem ſecundæ Stationis arcum ex. gr. G R M. Reperi item ad t. d. *b* Anomaliam Orbis Veram: quæ ſi eſt æqualis arcui G R M, ♂ erit ad tempus datum in Statione ſecundâ, adeoque G R M erit arcus quæſitus. Si Anomalia Orbis ſit arcu G R M minor vel major, ut G O, vel G O L, differentiam O M vel L M converte in tempus ut *ſuprà*: quod additum vel ſubtractum tempori dato, dabit præter propter tempus quo ♂ futurus eſt in puncto Stationis ſecundæ adhuc incognito. Ad tempus ergo iſtud inquire Anomaliam *c* centri Mediam, & competentem illi *d* arcum Stationis ſecundæ. Hic erit arcus ſecundæ Stationis reſpectu temporis dati proximè futuræ vel præteritæ.

a *Per nu.* 23.
b *Per nu.* 11. *l.* 6.
c *Ibid.*
d *per n.* 23.

Ex notis arcubus Stationum elicientur arcus Regreſſionis ac Directionis per §. 4. *nu.* 24. Arcus porrò Regreſſionis ac Directionis artificio jam tradito inquiſiti, modò majores reperientur, modò minores: cujus inæqualitatis ſpecimen ex ſequenti Tabellâ accipe.

		Ex Prutenicis			
		Arcus Regressionis		*Arcus Directionis.*	
		Grad.	*l.*	*Grad.*	*l.*
♄	*Maxim.*	134	44	225	16
	Medius	132	4	227	56
	Minim.	128	18	230	42
♃	*Maxim.*	111	44	248	16
	Medius	108	40	251	20
	Minim.	105	22	254	36
♂	*Maxim.*	44	54	315	6
	Medius	34	18	325	42
	Minim.	22	8	337	52
♀	*Maxim.*	27	58	332	2
	Medius	25	46	334	14
	Minim.	23	30	336	30
☿	*Maxim.*	72	10	293	40
	Medius	68	0	292	50
	Minim.	66	20	287	0

NUMERUS XXVI.

Ad datum tempus utrùm Planeta sit Directus, Stationarius, vel Retrogradus, & quando horum quodlibet proximè fuerit vel futurus sit, inquirere. Item quamdiu sint duratura Regressio ac Directio, invenire.

Fig. 16.

a in ♄. ♃. ♂ per nu. 11. lib. 6. in ♀ per n. 36. l. 6. in ☿ per n. 38. lib. 6.

b per n. 23.

AD tempus datum inquire *a* Anomaliam centri Mediam, & competentem illi *b* arcum Stationis tam primæ G R quàm secundæ G R M. Deinde ad tempus datum inveni Anomaliam Orbis Veram: quæ si æqualis fuerit arcui G R, vel G R M, Planeta erit in puncto R Stationis primæ, vel in puncto M Stationis secundæ: si fuerit inæqualis, tunc erit vel minor primæ Stationis arcu G R, ut G K; vel major ut G O. Tum verò inquire per *num. præced.* arcum primæ Stationis quæ datum tempus proximè sequetur vel præcessit. Et sit ille ex. gr. G Q. Et quia ad d.t. Anomalia Orbis reperta est G K, vel G O, ac perinde Planeta ad t. d. est in K vel in O, si reperiatur (ut *num. præced.*) tempus quo Planeta percurrit notum jam arcum K Q, vel O Q, idque addatur tempori dato vel subtrahatur, prodibit tempus quo Planeta in Q primæ Stationis puncto fuit vel futurus est. Hoc tempus an exactum sit, ita examinabis. Inquire ad tempus illud Anomaliam Orbis Veram: si hæc æqualis est arcui G Q, scito tempus exactum fuisse; si Anomalia *e* sit major minórve arcu G Q, tempori aliquid adde vel deme, donec ad illud sic auctum minutúmve inquisita denuò Orbis Anomalia Vera par evadat arcui G Q.

e vide citationem a.

Arcui Deinde Stationis primæ G Q jam noto competentem *d* reperi secundæ Stationis arcum G Q ω: à quo si demas G Q, notus relinquetur arcus Regressionis Q ω. Inveni igitur (ut *num. præced.*) tempus quo percurrit Planeta arcum Q ω. Hoc additum tempori jam invento, quo Planeta est in Statione primâ Q, dabit tempus quo futurus sit in Statione secundâ ω. Utrùm verò hoc tempus sit accuratum, sic examina. Inquire ad tempus illud Anomaliam Orbis Veram, hoc est distantiam Planetæ ab Apogeo Vero Epicycli: si ea par est arcui A Q ω, confide præcisum tempus fuisse; si major vel minor est, tempori deme aliquid vel adde, donec ad ipsum sic mulctatum auctúmve quæsita denuo Anomalia Orbis Vera arcui G Q ω æqualis reperiatur.

d per num. præc.

Ex notis Stationum momentis scitur quando Planeta sit Directus, Stationarius, Retrogradus.

Ex ijsdem etiam duratio innotescet tam Regressionis quàm Directionis: quod quidem esse varium necesse est, cùm ipsi Regressionis ac Directionis arcus variæ quantitatis existant, ut ex *num. præced.* patet.

	Medium tempus Regressuum ex Ptolemæo			
	In Apogeo Eccentrici		*In Perigeo Eccentrici*	
	Gr.	*Hor.*	*Gr.*	*Hor.*
♄	140	16	136	0
♃	122	12	118	0
♂	80	0	64	12
♀	43	0	40	16
☿	22	12	21	0

Stationarius apparet		
	Diebus	
♄	8	*præter propter*
♃	4	
♂	2	
♀	1½	
☿	½	

CA-

CAPUT III.

De distantijs Planetarum à Terra.

PLanetarum distantias à Terrâ in partibus radij Eccentrici singulorum notas jam fecimus in *Libro sexto.* Hic easdem ad Terræ Semidiametros revocare cura erit præcipua. De distantijs Luminarium actum *lib. 3. cap. 2. & 3.*

NUMERUS XXVII.

Certum est Planetarum à Terrâ distantiam variari.

PRobatum hoc de Lunâ & Sole *num. 11: lib. 3.* hîc idem de reliquis quinque demonstrabitur.

§. 1. ♄. ♃. ♂ propè Conjunctionem cum Sole apparent minimi; majores circa aspectum Sextilem, hoc est cùm distant à Sole Gradibus 120 vel 240; adhuc majores in Quadraturis, hoc est cùm à Sole distant Grad. 90 vel 270: maximi cùm Soli opponuntur. Atque ista magnitudinis Apparentis diversitas non solùm nudo oculo, sed etiam telescopio observata, in ♄ quidem & ♃ planè notabilis est, sed in ♂ tam enormis, ut in Oppositione Solis quoad diametrum septies vel octies, quoad aream quinquagies, visus sit major, *a* quàm propè Conjunctionem. Unde non semel creditus *b* est Planeta, vel Sydus novum.

a Galil. dial. 3. de System. b Idem in Trutinatore.

Duo sunt effugia, unum ad refractiones, alterum ad fulgorem Solis, qui Planetæ propè Conjunctionem positi lumen, adeoque & molem Apparentem, diminuat. Sed prorsus inane utrumque est. Nam refractio quidem argumentum non infringit, sed roborat. Planeta siquidem propè Conjunctionem cum Sole spectari nequit, nisi propè Horizontem manè vel vesperi; ubi quòd refractioni haud dubiè sit obnoxius, apparet justo major. Quare cùm nihilominus Soli oppositus etiam in medio cæli, ubi est omnis refractionis expers, appareat major subinde quinquagesies, manifestum est augmentum istud Apparentis magnitudinis nequaquam posse in refractionem conferri, illoque ipso effugio adversarios jugulari. Neque magis illos vicini Solis fulgor juvat. Nam licet ille propè Conjunctionem efficeret quod volunt, id tamen minimè posset in Quadraturis efficere, in quibus nihilominus majores apparent hi Planetæ, quàm in Conjunctionibus. Sed neque circa Conjunctiones ipsas quidquam efficit. Si enim Solis vicinia Apparentem Planetæ molem diminueret, diminueret & Fixarum. Atqui Fixarum molem App. non minuit, hæ siquidem non apparent minores, cùm Soli sunt vicinæ, quàm dum à Sole longissimè distant. Ergo neque Planetæ ob viciniam Solis apparent minores. Ergo magnitudinis Apparentis decrementum in Planetis propè Conjunctionem positis non à radijs vicini Solis, sed à majori ipsorum distantiâ efficitur.

§. 2. Pari modo ♀ propè Conjunctionem cum Sole Perigeam, tum paulò ante quàm evasura sit matutina, tum postquam recenter facta est matutina, angusto quidem in latum, sed longissimo in altum cornu apparet, penes cujus Longitudinem adhibitis telescopijs, æstimatione factâ diametri Apparentis, colligitur ipsius area Apparens quadragies major quàm propè Conjunctionem Apogeam. Cujus tantæ diversitatis rursum nulla potest alia causa assignari, quàm major minorque à nobis distantia.

Neque effugia superiùs allata magis valent in ♀ quàm in ♄. ♃, & ♂. Atque illud quidem quod petitur à viciniâ Solis, hîc peculiari insuper ratione excluditur. Nam ♀ 15 circiter Gradibus à Conjunctione cum Sole Perigeâ longè (ut jam dixi) apparet major, quàm totidem Gradibus distans à Conjunctione Apogeâ. Quare cùm par existat in utroque casu Solis vicinia, non potest in hanc diversæ magnitudinis Apparentis causa refundi.

§. 3. Postremò certissimis experimentis constat *o* ♀ & ☿, modò falcatos instar Lunæ, modò gibbosos, modò rotundos ac plenos apparere. Quas phasium diversitates subire non possunt, nisi aut aliquando Soli, ut Luna, opponantur, aut modò suprà Solem, modò infrà eum existant. Atqui numquam ad Oppositionem *b* cum Sole pertingunt. Necessariò igitur modò suprà, modò infrà Solem existunt, ac proinde jam longiùs absunt à Terrâ, jam propiùs.

o num. 29. lib. 6.

b Ibid.

Maneat igitur omninò indubitatum minorum quinque Planetarum à Terrâ distantiam variari. Quàm verò enormis sit illa distantiarum variatio, patebit ex *num. 30.*

NUMERUS XXVIII.

Saturni distantia mediocris à centro Terræ continet saltem 70000 Semidiametrorum Terræ.

PRoinde (assumptâ Semidiametro Terræ *i* minimâ milliariorum Bononiensium 3265) saltem continet 228550000 milliariorum Bonon. hoc est 228 milliones, 550 millia. Assumptâ verò semidiametro Terræ maximè probabili milliar. Bonon. 4139, continebit saltem 289730000.

i vide Geo. Pract. c. 6. ante probl. 5.

Probatio erit hujusmodi. Cùm in Hypothesi Terræ Motæ æquè salventur Planetarum Superiorum phœnomena per Orbem Magnum, sive Eccentricum Solis, ac in Hypothesi Terræ Stantis per Epicyclos, necesse est æquipollere sibi mutuò Epicyclum Planetæ & Eccentricum Solis. Ergo minima Solis à Terrâ distantia æquipoller radio Epicycli minimi ♄. Atqui *n* Solis minima à Terrâ distantia continet saltem Semidiametrorum Terræ 7074. Ergo etiam radius Epicycli minimi Saturni etiam continet saltem Semid. Terr. 7074. Per *num. 26. lib. 6.* minimus radius Epicycli ♄ est 10100, quarum radius Eccentrici ♄ est 100000. Si ergo ut radius Epicycli minimi ♄ prout est 10100 fiat ad radium Eccentrici prout est 100000, ita ipse fiat prout est 7074 Semid. terrest. ad Quartum, prodibunt 70039 Semid. Terr. pro radio Eccentrici ♄. Quoniam igitur distantia mediocris ♄ à centro Terræ est ipse radius Eccentrici ♄, æquabit ea saltem 70039 Semidiametros terræ, quod erat probandum.

n per num. 19. lib. 3.

Visum est porrò ♄ distantiam seorsim demonstrare quod eâ *lib. 5. num. 21* fuerim usus pro distantiâ Fixarum. Neque ullus hic circulus committitur, cùm hæc probatio à Fixarum distantiâ nullatenus dependeat.

Corollarium.

Distantia ♄ à Terrâ, quod omnes Astronomi affirmant, est circiter decupla distantiæ Solaris à Terrâ, Solis enim distantia minima à Terrâ erat 7074,

media 7327 Semid. terr. hæ decuplatæ sunt 70740 & 73270, à quibus distantia ♄ hic reperta non multùm differt.

NUMERUS XXIX.

Radium Epicycli, radium Eccentrici, Eccentricitatem quinque minorum Planetarum in partibus radij Eccentrici data, in Terræ Semidiametris exhibere.

Methodus insinuata jam fuit *Num. præced.* Ob æquipollentiam Orbis Magni, sive Eccentrici Solis in Hypothesi Terræ Motæ cum ♄. ♃. ♂. Epicyclis in Hypothesi Terræ Stantis, manifestum est Epicycli mediocris ♄. ♃. ♂ radium æquivalere radio Solaris Eccentrici, sive mediocri distantiæ Solis à Terrâ, quæ cùm Terræ Semidiametros contineat saltem [a] 7327, tantos etiam licebit statuere radios mediocres, sive medios Epicyclorum ♄, ♃, ♂. Jam verò per *nu.* 24 & 26. *l.* 6. in partibus, quarum radius Eccentrici horum Planetarum est 100000, nota sunt radius Epicycli medius, maximus, minimus, & Eccentricitas media, maxima, minima eorumdem. Quare cùm harum quantitatum una (nempè radius Epicycli medius) nota sit in Semidiametris Terræ, etiam reliquæ omnes atque ipse Eccentrici radius in Semidiametris Terræ innotescent per reg. proport. ut *num. præced.*

[a] *vide nu.* 18 & 19. *lib.* 6.

In ♀ autem & ☿ radius Eccentrici æqualis [b] est radio Solaris Eccentrici; qui cùm Semidiametros Terræ contineat saltem [c] 7327, totidem quoque continebit ad minimùm radius Eccentrici ♀ ac ☿. Cùm ergo in partibus, quarum radius Eccentrici ♀ ac ☿ est 100000, nota sint radius Epicycli maximus, medius, minimus ♀ ac ☿, item ☿ Eccentricitas maxima, media, minima, & ♀ Eccentricitas semper eadem & æqualis Solari, in ijsdem quoque partibus sit nota; etiam per Reg. proport. eædem illæ quantitates in Terræ Semidiametris innotescent.

[b] *vide nu.* 35. & 37. *lib.* 6.

[c] *vide nu.* 18 & 19. *lib.* 6.

Calculum juxta hanc methodum instituendum Lectori relinquo. Tabellam interim subjungo ex Ricciolo, (sed à nobis ad milliaria reductam) cujus mensuræ in ♄ excedunt nostras, in ♃, & ♂ à nostris exceduntur: quod quidem ad scopum, qui hic intenditur, parùm interest.

	In Semidiametris terræ.				
	Radius Epicyc.		*Eccentricitas.*		*Radius Eccent.*
	Max.	*Min.*	*Max.*	*Min.*	
♄	8249	7373	8906	7884	73000
♃	7417	6738	3635	3321	36500
♂	7895	6727	2200	1900	11000
♀	5339	5157	253	253	7327
☿	3322	2811	730	584	7327
☼	0000	0000	253	253	7327

	In milliarijs Bonon. assumptâ minimâ Terræ Semidiametro milliariorum Bonon. 3265.				
	Radius Epicycli		*Eccentricitas*		*Radius Eccentrici*
	Max.	*Min.*	*Max.*	*Min.*	
♄	26(932.985	24(072.845	29(078.090	25(741.260	238(345.000
♃	24(216.505	21(999.570	11(868.275	10(843.065	119(172.500
♂	25(483.325	21(963.655	7(183.000	6(203.500	35(915.000
♀	17(431.835	16(837.605	826.045	826.045	23(922.655
☿	10(846.330	9(177.915	2(383.450	1(906.760	23(922.655
☼			826.045	826.045	23(922.655

NUMERUS XXX.

Distantias à Terrâ quinque minorum Planetarum, maximam inprimis ac minimam, in Terræ Semidiametris invenire.

Maxima est Planetæ distantia à centro Terræ, quando Epicycli centrum est in Apogeo Eccentrici, & simul Planeta in Apogeo Epicycli; minima verò cùm Epicycli centrum est in Perigeo Eccentrici, & Planeta in Perigeo Epicycli. Distantia Planetæ media semper æqualis est radio Eccentrici cujusque proprij.

Fig. 13. *lib.* 6.

§. 1. In ♄. ♃. ♂ sic age. Quando centrum Epicycli est in E Eccentrici Apogeo, maxima [a] sunt tam Epicycli radius, quàm Eccentricitas. Igitur radio Eccentrici D E adde Eccentricitatem maximam A D, & maximum Epicycli radium E M. Ita conflabis distantiam Planetæ à Terrâ maximam A M; quæ nota erit in Terræ Semidiametris, cùm partes ejus A D, D E, E M, in ijsdem fuerint notificatæ per *num. præced.*

[a] *per num.* 21. *lib.* 6.

Cùm autem Epicycli centrum fuerit in Eccentrici Perigeo X, minima [b] sunt tam Epicycli radius, quàm Eccentricitas. Quare minimum Epicycli radium X 2, & minimam Eccentricitatem A B, quæ nota jam sunt in Semid. Terr. aufer ab Eccentrici radio B X etiam in Terræ Semid. noto: relinquetur A 2 minima Planetæ distantia in Semid. Terræ nota.

[b] *per eund.*

In ♀ procedes eodem modo, cùm unum istud habeat diversum, [c] quòd Eccentricitas ejus sit immutabilis.

[c] *vide nu.* 35. *lib.* 6.

In ☿ hoc diversum est, quod centro Epicyclo posito tam in Eccentrici Apogeo quàm Perigeo, mini-

mus

d vide nu. 37. lib. 6.

mus existat d radius Epicycli. Quare ot obtineas distantiam maximam, Eccentrici radio adde maximam Eccentricitatem & minimum Epicycli radium; ut minimam, ab Eccentrici radio Eccentricitatem minimam, & minimum radium Epicycli aufer.

§. 2. Distantia Planetæ cujuscumque à Terrâ ad quodvis tempus, hoc est in quovis situ centri Epicycli in Eccentrico, & Planetæ in Epicyclo, nullo item negotio in Semidiametris Terræ exhibebitur. Nam ea distantia in ♄. ♃. ♂ per *num.* 11. *lib.* 6, in ♀ per *nu.* 36, in ☿ per *num.* 38. *ejusdem libri* nota fit in partibus, quarum Eccentrici radius est 100000. Quare cùm is per *num. praced.* notus quoque sit in Semid. Terræ, etiam distantia quæsita in Semid. Terræ per Reg. proport. innotescet.

Vide Tabellam sequentem, in quâ rursum usi sumus Semidiametro Terræ minimâ pro reductione ad milliaria.

	Distantiæ Planetarum a centro Terræ.					
	In Semidiamet. Terræ.			In Milliarijs Bononiens.		
	Maxima	Minima	Differ.	Maxima	Minima	Differ.
♄	90.155	57.743	32.412	294(356.075	188 (530. 895	105(825.180
♃	47.552	26.441	21. 111	155 (257.280	85 (329. 865	68(927.415
♂	21.005	2373	13.632	68(581.325	7(747. 845	44(508.480
♀	12.919	1917	11.002	42(180.535	6 (259. 005	35(921.530
☿	10.868	3932	6.936	35(484.020	12 (837. 980	22(646.040
☼	7580	7074	506	24(748.700	23 (095.610	1(652. 090

NUMERUS XXXI.

Distantia Planetarum inter se comparata.

§. 1. ♄. ♃. ♂. IN Oppositione cum Sole multis millionibus milliariorum sunt Terræ viciniores, quam in Conjunctione, ♄ quidem plus quàm 48 millionibus, ♃ & ♂ plus quàm millionibus 42. Cùm enim Soli opponuntur sunt in Apogeo Epicycli; dum conjunguntur, in Perigeo sunt, ac proinde distantiarum in ♂ & ♀ differentia nunquam minor est quàm Epicycli diameter minima; cujus semissis, ut patet ex Tabulâ *num.* 29, in ♄ est 24(072. 845, in ♃ 21(999.570, in ♂ 21(963.655.

Similiter in Conjunctione Apogeâ cum Sole ♀ saltem millionibus 32; ☿ saltem millionibus 18 plus à Terrâ distat, quàm in Conjunctione Perigeâ. Patet ex Tabellâ supradictâ.

Quanta porrò sit differentia distantiæ omnium maximæ ac minimæ, patet ex Tabellâ *numeri praced.* Atque hæc causa est, quod Planetæ tanto majores appareant circa Conjunctionem cùm Sole, quàm in Oppositione.

§. 2. Distantia maxima excedit minimam, in ♂ quidem plus quàm octies, in ♀ plusquam sexies, in ☿ plusquam bis. Patebit ex Tabellâ *num. praced.* si distantiæ maximæ per minimas dividantur. Nihil ergo mirum quod ♂ quandoque septies vel octies, ♀ quandoque sexies major uno tempore appareat quàm alio.

§. 3. Distantia maxima Solis à Terra exceditur à distantiâ maximâ ♄ ferè decies, à maximâ ♃ plus quàm sexies, à maximâ ♂ plus quàm bis. Patet ex Tabellâ *num.* 30, si distantiæ ♄. ♃. ♂ per maximam Solis distantiam dividantur.

§. 4. Quandoque ♂ est plus duplo vicinior Terræ, quàm Sol. Minima quippe distantia ♂ est Semidiametrorum Terræ 2373, Solis autem distantia maxima 7580, quæ est plus duplo major quàm illa ♂.

§. 5. ♀ Posita in Apogeo Epicycli plus quàm 16 millionibus milliariorum est suprà Solem; posita verò in Epicycli Perigeo est plus quàm 16 millionibus milliar. infrà Solem. ☿ similiter positus in Apogeo sui Epicycli est suprà Solem plus quàm 9 millionibus milliariorum; existens verò in Epicycli Perigeo plus quàm 9 millionibus milliar. est infrà Solem. Cùm enim Sol nunquam longè absit à centro Epicyclorum ♀ ac ☿, liquet hos Planetas in Apogeis suorum Epicyclorum constitutos, elevari suprà Solem toto radio sui Epicycli, eodemque radio toto deprimi infrà Solem, quando existunt in Perigeo. Atqui radius etiam minimus Epicycli ♀ a major est 16 millionibus milliariorum, & radius etiam minimus Epicycli ☿ major est 9 millionibus. Ergo &c.

a vide tab. num. 29.

NUMERUS XXXII.

Parallaxes Planetarum invenire.

DUplex est modus (ut *lib.* 3. docui.) investigandæ Parallaxeos: alter ex motibus & observatione deducitur, Altitudinem scilicet astri Veram ex supputatione cognitâ cum Visâ conferendo; alter ex distantiâ præcognitâ Parallaxim rimatur. Priorem qui motibus & observatione nititur, Soli non convenire ob ingentem distantiam, & natam inde exilitatem Parallaxeos ostendi *lib.* 3. *ante num.* 16. Quod si Soli ille non convenit, multò minùs alijs Planetis conveniet, quorum distantia longè major Solari est. Et *Saturni* quidem ac *Iovis* Parallaxes Tycho fatetur vix ullo instrumento observabiles esse. Sed neque Parallaxes, *Martis*, *Veneris* ac *Mercury* cùm Terræ sunt proximi, duo minuta adæquant unquam; quæ proinde ne tum quidem sine magno erroris periculo ex motibus & observatione cognosci possunt, præsertim cùm motus horum non eâdem evidentiâ ac certitudine, quâ Solis, ab ullo hactenùs Astronomo potuerint determinari. Reliquum est igitur, ot ex distantijs *num.* 30. jam constitutis Planetarum Parallaxes eliciantur eo modo quem tradidi *lib.* 3. *num.* 14.

	Parallaxes Horizontales in distantiâ à Terra					
	maximâ			minimâ.		
	I.	II.	III.	I.	II.	III.
♄	0	2	20	0	3	30
♃	0	4	20	0	7	45
♂	0	10	0	1	26	0
♀	0	16	0	1	48	0
☿	0	19	0	0	50	0

CAPUT IV.

Planetarum figura, illuminatio, Comites.

NUMERUS XXXIII.

Figura Veneris & Mercurij.

VEnerem & *Mercurium* apparere modò falcatos, & gibbosos instar Lunæ, modò rotundos ac plenos jam exposui *lib. 6. num. 29.* ubi ordinem modumque harum phasium declaravimus. Quibus adde observationes Francisci Fontanæ eximias planè ac singulares. Is telescopio usus quod *Venerem* exhibebat diametro propè semipedali, eandem conspexit a cornutam, atque interiori parte semiasperam, & quasi radios evibrantem, & cum uno alteróve globulo nigricante, modò intra corpus ♀ modò extra. Fides observationi quamvis admirandæ detrahenda non est, quod horum nihil Ricciolus, Grimaldus, Gassendus alijve conspexerint: id enim potuit contingere quod telescopijs minùs præstantibus usi fuerint, quàm Fontana, cujus in conficiendis telescopijs excellens artificium satis notum est. Quod si vera est Fontanæ observatio, dicendum est Venerem instar Lunæ asperam ac montosam esse. Quid verò sint nigricantes illi globuli, an maculæ Solarium instar, è *Veneris* corpore ebullientes; an cavernæ, seu valles, ut in Lunâ, quarum situs fortè ob vertiginem *Veneris* super axe suo varietur; an comites, seu laterones, ut in ♃ & ♄, difficile est definire donec per plures observationes novis hisce Astronomicis portentis lux amplior afferatur.

a *vide ejus tract. 5. cap. 2.*

NUMERUS XXXIV.

Martis Figura.

NOn solùm *Venus* & *Mercurius*, sed etiam *Mars* gibbosus ac ferè bisectus, seu semiplenus instar a Lunæ, apparuit. Talem bis conspexisse a se affirmat Nicolaus Zucchius Soc. Jesu, propè quadratum cum Sole aspectum. Talem conspexit etiam Franciscus Fontana Neapoli Anno 1638. Aug. 24. tubo excellenti, qui *Martem* exhiberet, quanta nudis oculis Luna plena spectatur. Erat tum 19 ferè Gradibus primam quadraturam prætervectus. Vidit autem non tantùm, ut dixi, gibbosum, sed etiam maculâ nigrâ infectum, quæ indies contractior apparuit. Eumdem Anno 1636 viderat rotundum in medio simili maculâ insignitum, & circa limbum obscuriùs lucentem. Porrò ex hujus maculæ contracturâ tam ipse quàm Ioan. Baptista Zupus Soc. Jesu, *Martis* vertiginem circa centrum se colligere arbitrantur. Daniel Bartolus Soc. Jesû observavit *Martem* cum duabus maculis in parte inferiore disci. Fortè comites habere instar *Iovis* Antonius Maria de Rheita subdubitans opinatur. Postremò Christianus Hugenius, ut ipse refert in *Systemate Saturnio*, tubo 23 pedum observavit Anno 1656 in *Marte* zonam admodum latam, quæ mediam disci partem offuscaret.

Fig. 20. a *Phil. optica parte 2. pag. 193.* Fig. 19.

NUMERUS XXXV.

Figura Iovis.

IOvem fascijs præcinctum primi conspexisse videntur Ioan. Baptista Zupus, Daniel Bartolus ambo è Soc. Jesu, & Franciscus Fontana, Neapoli omnes. Vidêre etiam sæpissimè Franciscus Maria Grimaldus, Ioan. Baptista Ricciolus & Christianus Hugenius, qui in *Systemate Saturnio* affirmat à se alijsque, qui cum ipso observarunt, sæpè visas fuisse reliquo Iovis corpore lucidiores, cùm alij tamen obscuriores asserant. Visæ sunt autem hæ fasciæ subinde tres, subinde duæ; jam curvæ, jam rectæ; jam magno intervallo distantes, jam propè conjunctæ, ut expressum vides in *Figuris 21. 22. 23. 24.* quas desumpsi ex Ricciolo, qui omnium observationes collegit *lib. 7. pag. 486. 487.* Grimaldus insuper deprehendit fascias ferè esse ad Eclipticam parallelas. Refert etiam Ricciolus schema transmissum ex Belgio in Italiam, quo exhibetur Iupiter, prout visus est tubo egregio Leandri Bandtij Abbatis Disbergensis Anno 1643. Nov. 2. asper videlicet circa margines, montibus ac tumoribus evidenter extantibus. Quâ observatione inducor, ut putem fascias illas esse lacunas, seu cavernas à partibus eminentioribus impeditas ne lumen à Sole recipiant. Varietas autem illa fasciarum tam in numero quàm in situ ac latitudine satis manifestè indicat hunc Planetam circa suum centrum aut circumagi omninò, aut certè ultro citroque librari.

Fig. 21. 22. 23. 24.

NUMERUS XXXVI.

Iovis Comites.

HOs primus detexit Galilæus, qui Anno 1610. Ian. 7. telescopio suo conspexit primùm tres; deinde quatuor, in lineâ Eclipticæ parallelâ, modò sibi ac *Iovi* propinquiores, modò remotiores; numquam tamen ultra 14 aut 17 minuta ab eo digredientes, & aliquando penitùs disparentes. Ex quo patuit non Fixas, sed Planetulas esse. Lege de his, si lubet, Galilæum ipsum in *Nuncio sydereo* accuratè tractantem. Nos præcipua de his, paucis complectemur.

Fig. 25.

§. 1. Moventur in circulis vel ellipsibus circa *Iovem*, in quorum superiori parte feruntur in consequentia. Hoc inde colligitur, quia non simpliciter ad *Iovem* accedunt receduntque; sed modò in Austrum, modò in Aquilonem. Sunt videlicet *Iove* Australiores in Pericyclorum parte superiori, in inferiore Boreaiores.

§. 2. Volvuntur in quatuor diversis Pericyclis; quia in maximis à *Iove* digressionibus valdè disjuncti apparent, ut in H. P. Q. R. Radij circulorum ex digressionibus maximis colliguntur, quas juxta Galilæi observationes Tabellâ sequenti exhibeo.

Di-

Digressio maxima Comitis	*Diametri Iovis*
1	3
2	5
3	8
4	14

§. 3. Circa conjunctionem tam Apogeam in G, quàm Perigeam in O ob *Iovis* fulgorem occultantur. Insuper Eclipses subeunt à *Iovis* umbrâ; nam extra tempora & loca occultationis ordinariæ subinde disparent, cùm existunt eo loco in quem tunc vergeret V umbra *Iovis*, si à Sole poneretur illuminari. Ex quo colligitur & *Iovem* à Sole, & à *Iove* Comites lumen mutuari. Necesse est igitur ut etiam ♃ circa quadraturam cum Sole Aspectum gibbosus appareat, ut ♂, quamvis id non legam hactenus observatum fuisse.

§. 4. Revolutiones suas circa *Iovem* brevi tempore absolvunt, ut vides in Tabellâ sequenti.

Comites	*Periodi Comitum circa* ♃.			
	Dies	H.	/.	//.
1	1	18	28	30
2	3	13	18	0
3	7	3	56	34
4	16	19	9	15

Inveniuntur sic. Observa momentum primum occultationis ex. gr. Apogeæ & ultimum; tum utrumque fac *i* notum. Ita notum erit totum occultationis tempus; quo diviso bifariam, notum erit momentum Conjunctionis Apogeæ Comitis cum ♃ in G. Simili modo observa momentum Apogeæ Conjunctionis proximè insequentis. Tempus à primâ Conjunctione ad secundam est periodus unius revolutionis.

i Per num. 45. lib. 5.

§. 5. Atque hæc hactenus de quatuor *Iovis* Comitibus à Galilæo primùm observatis. At præter hos, alios quinque Galileanis majores, & majori ambitu Iovem circumeuntes à se novo suo telescopio Antonius Reita affirmat conspectos An. 1642. Dec. 29, & postea sæpius. Vocavit in controversiam Gassendus, conatus ostendere novos illos laterones fuisse stellas Fixas. Cui Reita respondit se continuis sex dierum observationibus apertè deprehendisse illos & respectu Galileanorum, & inter se locum ac distantiam mutasse, adeoque Fixas esse non posse. Enimverò annis 12 ante Reitam novem circa *Iovem* stellulas conspexerat Franciscus Fontana, quarum nulla ultra 10 joviales diametros à *Iove* abesset. Annis deinde sequentibus advertit hunc numerum decrevisse usque ad sex: & non fuisse stellas Fixas inde probat, quod ad eas distinctè videndas oportuerit tubum extendere, ad Fixas verò contrahere. His accedit Ioannes Bapt. Zupus è Soc. Jesu primus *Fasciarum Iovis* detector, qui & ipse in suis ad *a* Ricciolum litteris plures à ♃ *Iovis* Comites quàm quatuor non semel conspectos affirmat. Mihi quidem non apparet cur fidem tot observationes non mereantur. Parùm certè refert quod neque Vincentius Renerius (ut refert *b* Ricciolus) toto suarum observationum decennio, neque Gassendus plures umquam quàm 4 observarint: id enim fieri potuit quod tubis illis præstantibus ac novis, quibus instructi sunt Fontana & Reita, caruerent. Quod si valeret argumentum ejusmodi, essent pariter *Iovis Fasciæ* in dubium revocandæ, quòd & has neget *c* Gassendus à se umquam conspici potuisse. Vide etiam quæ de his dicam *num. seq. §. 6.*

a Almag. l. 7. pag. 494.

b ibid.

c lib. 3. inst. astron.

§. 6. Denique Jovialium Comitum usus insignis ille est à Galilæo & Gassendo indicatus, quod per Eclipses eorum diversis locis observatas innotescere possit differentia Meridianorum longè facilius, quàm per Lunares; cùm hæ sint raræ, illæ frequentissimæ, videlicet 480 intra annum.

NUMERUS XXXVII.

Saturni Figura & Comites.

§. 1. INter novitates Astronomicas inprimis admiranda est Saturni species. Primus illum Galilæus tubo optico conspexit 1610, qualis *schemate* 26 cernitur, tricipitem videlicet, sive tricorporem, Talis etiam visus est Fontanæ Anno 1630 Iun. 20, & Ricciolo Anno 1643 sub Octobris initium per aliquor dies. Ab hac non multùm differt forma schematis 27, quâ Saturnum vidêre Nicolaus Suechius Anno 1640 Maij 23, & Ricciolus Anno 1643 Octob. 29. Formam Schematis 28 vidêre Fontana An. 1633. 1634, 1636, & ferè Bartolus An. 1644 mense Dec. ac Ricciolus An. 1646 Octob. 10. Idem Ricciolus An. 1648, Octob. 15, & 1649 sub Martij finem ♄ conspexit eâ ferè specie, quæ *schemate* 29 exhibetur. Plures alias formas his non admodum absimiles observarunt Gassendus, Hevelius alijque quas hic non expressi. Non putavi tamen prætereundam esse illam schematis 30 præ cæteris admirabilem, quâ Romæ & Neapoli An. 1644, & 1645 visus est hic Planeta à Fontanâ, Matthæo Tavernâ, alijsque.

§. 2. Verùm cæteris accuratior & felicior in hujus phænomeni investigatione videtur fuisse Christianus Hugenius, qui à Die 25 Martij Anni 1655 usque ad 26 Martij Anni 1659, *Saturnum* insigni prorsus conatu observavit. Observationum suarum historiam in *Systemate Saturnio* hoc Anno 1659 in lucem edito recenset, ex quo nonnulla hic delibabimus. Is igitur Anno 1655, Martij 25, tubo pedum 12 vidit ♄ brachijs utrimque in rectam lineam extensis, quæ circa extremas cuspides essent paulò latiora, quàm quâ parte ♄ disco cohærent: connectebat autem utrumque brachium linea quædam subobscura per ♄ discum extensa & brachia ipsa infrà se relinquens. Sub finem Nov. ab alijs (ipse enim peregrè aberat) videri cœpit rotundus absque brachijs ullis. Rotundum deinde vidit etiam ipse 1656 Ian. 16. primò quidem tubo pedum 12, deinde verò majore alio pedum 23 convexis vitris instructo, quem deinceps in sequentibus observationibus adhibuit. Secabat autem discum Planetæ medium linea illa reliquis disci partibus aliquantò obscurior. Eodem Anno 13 Octob. tubo pedum 23 *Brachia* renasci visa eâ specie quam vides in *Fig.* 15. *lib.* 8. lineâ obscurâ jam infrà *Brachia* incedente, *Brachys* verò ipsis angustioribus & elarioribus circa cuspides, quàm quâ parte ♄ disco committebantur. Quam eamdem phasim tubo illo minore pedum 12 speculanti rursum *Brachia* apparuêre latiora circa cuspides, planè ut ante rotundam phasim apparuerant Anno 1655. unde non immeritò conclusit posteriorem hanc formam (*schemate* 15 expressam) veriorem fuisse. Inde *Brachia* sensim ampliora evaserunt, donec An. 1657, in ansas verterentur, quæ sensim latiùs adapertæ, demùm An. 1659 conspectæ sunt eâ formâ quæ *Figurâ* 16. *lib.* 8. repræsentatur.

§. 3. Hæc observationum summa; quibus ut satisfiat, statuit *Saturnum* cingi *Annulo tenui, plano & nusquam cohærente*, cujus planum sit Æquatori Terrestri (Hypothesim quippè Terræ Motæ amplectitur) parallelum quàm proximè, axis verò ad planum Eclipticæ inclinatus angulo constanti semper Grad. 23. 30', ac proinde axi Terræ semper æquidistans, Quâ Hypothesi *Rotundæ phaseos*, *Brachiorum* & *Ansarum* causas eleganter ac eruditè in suo *Systemate Saturnio* assignat, quò Lectores remitto. Ex quidem istud facilè intelligitur, *Annulum* illum à nobis semper obliquè conspici, sed obliquitate aliâ atque aliâ. Quando igitur ad visum nostrum valdè obliquus est, spatium *Saturno* & *Annulo* interjectum non apparet; adeoque *Annulus* conspicitur, ut in *schemate* 15. *lib.* 8. Ubi minùs jam obliquus evaserit, ellipsim exhibebit, ut in *schem.* 16. *lib.* 8, spatio quod inter ipsum & ♄ interjicitur jam conspicuo. Illud etiam manifestum est intra quamlibet unam ♄ revolutionem integram, obliquitatem *Annuli* ad visum nostrum bis fore minimam, adeoque ellipsim latissimam, qualis ferè in 17 *schemate lib.* 8. expressa est, *Saturno* videlicet (ut ipse colligit) Gradum 20. 30' ♊ & ♐ obtinente, bis item fore maximam *Annuli* plano per visum nostrum transeunte; tum verò necesse esse ut *Annulo* disparente ♄ Rotundus appareat: quod ipse statuit contingere ubi Gradum 20, 30' ♍ & ♓ Planeta attigerit. Verùm, quia *Rotunda Phasis* integro ferè anno perdurat, ejus quoque ex suâ Hypothesi causas exhibuit, quas apud ipsum egregiè deductas lege.

§. 4. Quod si præter *Phasim Rotundam*, *Brachia*, & *Ansas*, formas alias præterea nullas ♄ exhiberet, non videretur Hypotheseos Hugenianæ veritas posse in dubium revocari. Quare cùm alias suis multùm dissimiles sciret varijs in locis ab Astronomis observatas, è quibus nonnullas *Fig.* 26, 27, 28, 29, 30, *lib.* 7. adumbravimus, eas esse fallaces ac spurias contendit, erroris causâ in tuborum brevitatem rejectâ. Equidem facilè illi assentior id in quibusdam accidisse: ut verò contigisse credam in omnibus, præsertim ijs, quæ *Fig.* 28 & 38 *lib.* 7. exhibentur, non perinde inducor; & satis constat Fontanam in specillis tuborum efformandis poliendisque artificem peritissimum extitisse, quem proinde tubis præstantibus & prælongis, si non semper, crebrò certè & in majoris momenti phœnomenis usum fuisse minimè dubium videri possit. Quare ut Clarissimi Hugenij Hypothesim absque omni scrupulo amplectamur, annorum plurium observationes præstolandæ videntur.

§. 5. Idem Hugenius triennali suâ illâ observatione *Saturni* novum ejus *Comitem*, sed unicum, quem *Lunam Saturniam* appellat, mortalium primus detexit, comperitque circa ♄ revolvi spatio Dierum 16 minùs Scrupulis 47. Observationum historiam & tabulas ad motum *Comitis* pertinentes, apud ipsum vide in *Systemate Saturnio.*

§. 6. Quid igitur faciamus sex illis stellulis, quas circa *Saturnum* vidit Reita Anno 1643 Ian. 17, 18, 22, 23, 24. Febr. 5 & 9. perspexitque evidenter situm inter se ac distantiam variare? ipsum de bis *Saturni Iovisque novis Satellitibus* tractantem consule in libello Lovanij typis Andreæ Bouvetij edito. Ego quidem Reitenses observationes cur suspectæ esse debeant non video, quando constat hunc virum multum operæ in tubis concinnandis posuisse. Sed & Hugenio fidem habeo, triennio *Comitem* non nisi unicum deprehendenti. Utriusque observationes conciliare in promptu est, si dicamus illos *Comites* à Reitâ visos postmodò disparuisse; quod quidem in novis stellis jam toties evenisse exploratum est. Idem de *Iovis Comitibus novis*, de quibus egi *num. præc.* §. 5. judicium esto. Atque vel inde etiam Clariss. Hugenius statuere poterit, quæ alij in *Saturno* conspexêre, si ipse tubo suo quamvis excellenti non conspexerit, non sequi tamen, ut vitrorum ludibrio adscribi debeant, quando ea, quod in cæli phœnomenis jam toties vidimus, aut evanuisse potuerunt, aut in altiores cæli partes subvecta subduci oculis, aliquando fortè eodem habitu vel alio reditura.

NUMERUS XXXVIII.

Planetæ lumen à Sole recipiunt.

VEnerem & *Mercurium* à Sole illuminari ex phasibus eorum, quæ per omnia Lunares imitantur, extra controversiam esse debet. *Iovem* quoque lumen à Sole mutuari ex *Comitum* Eclipsibus *num.* 26. §. 3, non minùs certum. Idem videtur de *Marte* & *Saturno* sentiendum. Et *Mars* quidem hoc satis indicat, qui circa Quadraturas gibbosus cernitur, ut *num.* 34 retuli. Talem verò propè □ apparere etiam *Iovem* ac *Saturnum*, si lumen à Sole recipiunt, necesse est: quod tamen nondum reperio observatum fuisse. Cùm autem aliundè constet *Iovem* à se non fulgere, facilè arbitror futurum, ut, si in illum tubos Astronomi dirigant, etiam gibbosum quandoque deprehendant. Unde licet de *Saturno* idem conjicere. Ne tamen inde tyrones sibi persuadeant fore, ut (quod fieri non potest) etiam falcatos, instar Lunæ, *Veneris* ac *Mercurij* duos hosce supremos Planetas aliquando conspiciant. Id enim fieri si posset, contingeret utique ante vel post Conjunctionem cum Sole. Sed tum hi Planetæ, (ut aliàs semper) sunt suprà Solem, ac proinde hemisphærium à Sole illustratum nobis obvertunt. Ergo &c.

CAPUT V.

De magnitudine Planetarum.

SI notum fuerit quoties Planetæ diameter contineat Diametrum Terræ, innotescet etiam ex 18. 12. elem. quoties Terram Planeta contineat. Verùm primi cognitio à duobus *a* pendet, nimirum à Planetæ Diametro Apparente (hoc est à quantitate anguli sub quo videtur, sive à quantitate arcus in cælo visualem angulum subtendentis) & à distantiâ Planetæ à Terrâ. Hæc autem cùm ad tempus quodcumque reperta jam sit *lib.* 6. *num.* 11. 36. 38, restat ut modum Apparentes Diametros determinandi exponamus.

a patet ex n. 34. *l.* 3.

NUMERUS XXXIX.

Apparentes Planetarum Diametros determinare.

ACcuratè & fusè ad hoc negotium spectantia collegit exposuitque Ricciolus *lib.* 7. *sect.* 6. *cap.* 9. & 10. Quidquid hic scitur, Tubo optico debetur: quo destituti priores Astronomi usque ad Tychonem longissimè hoc in scrutinio aberraverunt.

Modus

Modus I. Notam fac capacitatem tubi quo uteris, quod ita facies. Tubo in Lunam directo æstimando collige quantam Lunaris diametri partem exhibeat ex. gr. duas tertias. Inquire *b* ad tempus illud diameter Lunæ Apparens quot minuta contineat. Horum duæ tertiæ ex. gr. exhibent tubi capacitatem. Vel inquire duas Fixas, quas tubus præcisè capiat. Harum distantia si nota fiat, sive per instrumentum, sive trigonometricè per Latitudines ipsarum ac Longitudines *lib.* 5. jam inventas, etiam nota erit tubi capacitas. Cognitâ hunc in modum capacitate tubi, tempus captâ quo Planeta à Lunâ vel ab aliquâ Stellâ distet intervallo aliquoties minori, quàm sit tubi capacitas. Et tubo in cælum directo æstimando collige quot Planetæ diametros intervallum illud contineat: quæ æstimatio esse potest accurata si intervallum sit parvum, ex. gr. tantùm septies vel octies majus Planetæ diametro, affirmatque Ricciolus se proportionem talis intervalli ad Planetæ diametrum ex oculari æstimatione ejusmodi tantâ evidentiâ colligere, quantâ si illam circino in chartâ definiret. Hoc ipsum deinde intervallum simili æstimatione expende quoties in tubi capacitate contineatur. Ita quoque scies quoties Planetæ diametrum contineat tubi capacitas: quæ quot Minuta contineat cùm notum jam sit, etiam quot Minuta contineat Planetæ diameter notum erit. Hoc modo usi sunt Keplerus, Galilæus, Gassendus, Hortensius, Scheinerus, Ricciolus.

b per n. 35. lib. 3.

Fig. 32.

Alium modum huic ferè similem adducit Ricciolus *pag.* 710 & 711, quem Grimaldo adjutori suo ac socio Astronomico adscribit. Observavit *Iovem* in B proximum Stellæ A (quæ fuit *præcedens quatuor in Ala* ♍ *sinistrâ*) paulò ante Conjunctionem cum eâ. Sequenti nocte observavit eundem in C, cùm Stellæ junctus interim jam fuisset in D, factâque æstimatione triplici collegit quoties intervalla A B, A C, A D continerent *Iovis* diametrum: atque inde resolvendo triangula rectangula A D B, A D C viam Planetæ B C in Planetæ semidiametris fecit notam. Deinde per motum *Iovis* Diurnum, & tempus à primâ observatione ad secundam notam fecit in Minutis viam B C; quæ cùm nota jam esset in semidiametris *Iovis*, inde etiam quot Minuta contineret *Iovis* diameter per Reg. proport. elicuit. Hæc à me strictim indicata, accuratè apud illum deducta reperies. Porrò quamvis ipse in hoc modo potissimùm acquiescat, ego tamen non satis video cur multò præcedenti sit melior, requirit enim & observationes duarum noctium, & præterea calculum; penderque ab æstimatione triplici spatiorum A B, A C, A D, prior autem à duplici tantùm; & spatij quidem A D æstimatio videtur minùs tuta ac certa, cum sit imaginaria potiùs quam ocularis, utpotè facta quando Planeta erat non in Conjunctionis puncto D, sed quando ipsum fuerat jam prætervectus in C.

Modus 2. quem *lib.* 5. *num.* 23 satis exposui, requirit, ut magnitudines tubo inspectæ tum Planetæ, cujus Apparens diameter quæritur, tum *Iovis* aut *Saturni*, cujus Apparens diameter per modum 1. jam innotuerit, statim in chartâ delineentur, atque inter se conferantur. Vide locum *suprà* citatum. Sed hic observa quantitatem apparentem diametri ex. gr. ♃ aut ♄ per modum primum aut quemvis alium repetiti solùm eam, quæ fuit eo tempore, cùm fiebat observatio: debet autem ejus nota esse quantitas ad tempus illud quo cum diametro alterius Planetæ comparatur. Id verò sic consequeris. Ex notâ Apparente diametro Planetæ dati ad tempus aliquod reperitur ejusdem diameter Vera per *num.* 34. *lib.* 3. Ex Verâ diametro jam notâ & distantiâ Planetæ à Terrâ ad datum tempus, quæ jam innotuit *lib.* 6. *a* reperitur diameter Apparens ad tempus datum per *num.* 35. *lib.* 3. Atque ita universim datâ cujusvis Planetæ diametro Apparente ad aliquod tempus & in aliquo situ, reperietur Apparens diameter ad tempus quodcumque, sive ad quemvis situm tam Epicycli quàm Eccentrici.

a à num. 11. 36 38.

Sequenti Tabellâ exhibentur Diametri Apparentes Planetarum, maximæ, mediæ, minimæ.

		DIAMETER APPARENS PLANETARUM.														
		♄			♃			♂			♀			☿		
		I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.
Hortensius & cum eo	Max.	0	40	40	1	1	40	1	4	0	1	40	0	0	28	0
Gassendus	Med.	0	37	0	0	50	0	0	36	0	0	53	0	0	19	0
Herigonius	Min.	0	31	0	0	38	30	0	9	0	0	15	20	0	10	0
Grimaldus	Max.	0	34	30	1	8	46	1	30	0	4	8	0	0	25	12
&	Med.	0	26	40	0	49	46	0	22	0	1	4	12	0	13	48
Ricciolus	Min.	0	22	46	0	38	18	0	10	6	0	33	30	0	9	20

Saturni diameter est simplex absque Lateronibus.

NUMERUS XL.

Magnitudines Planetarum invenire.

OPorteat ex. gr. inquirere magnitudinem *Saturni*. Hujus Apparens Diameter maxima, in minimâ videlicet distantiâ à Terrâ, est Secundorum 34, Terr. 30. Minima autem *Saturni* distantia est *b* 57743 Semidiametrorum Terræ. Ex his datis elicitur *c* Vera ♄ Diameter $9\frac{3}{7}$ Diametrorum Terræ. Quare si Terræ Diameter statuatur 1, & Diameter *Saturni* $9\frac{3}{7}$, eaque proportio per quatuor terminos continuetur, erit Terra ad ♄, *d* ut 1. ad Quartum, nempe 884.7'.3''.6'''. Quare ♄ major est Terrâ saltem vicibus 884. Pari modo etiam moles cæterorum Planetarum ex Apparente ipsorum Diametro per *num. præc.* notâ, & ex distantiâ à Terrâ quæ scitur ex *num.* 30. reperientur. *Vide Tabellam sequentem.*

b per n. 30.

c per n. 34. lib. 3.

d per 18. 12.

♄	♃	♂	♀	☿
		Continet Terras.		
884	681	[illegible]	[illegible]	[illegible]

CAPUT VI.

De ortu & occasu Planetarum.

NUMERUS XLI.

Saturno, Iovi, Marti qui ortus occasusque, quando & quo ordine conveniant.

TRes hi Planetæ eosdem ortus occasusque, quos stellæ Fixæ, eodemque ordine sortiuntur.

Primò igitur, quando sunt in Apogeo Epicycli, ac proinde conjuncti cum Sole, occidunt vesperi, hoc est descendunt infrà Horizontem Occidentalem cum Sole, & oriuntur manè, hoc est cum Sole suprà Horizontem Orientalem ascendunt. Sed utrobique sub radijs Solaribus delitescunt.

Succedit deinde Emersio matutina, quando manè incipiunt in Horizonte Orientali apparere, quia Sol, utpotè celerior, in consequentia jam eos prætervectus, non ampliùs suis radijs occultat: & tunc lucent sub extremum noctis. Fit hoc paulò postquam ab Apogeo Epicycli descendentes, sinistrum Epicycli semicirculum ingressi sunt. Ab eo autem die quo primùm è Solis radijs emersêre, hoc est toto eo tempore quo percurrunt sinistrum Epicycli semicirculum, ab Apogeo nempè ad Perigeum, quotidiè citiùs ac citiùs, hoc est longiori tempore ante Solem in Horizonte Orientali apparent, ac proinde majori quotidie ac majori noctis parte lucent.

Post hæc ubi attigerint Perigeum Epicycli, Solique fuerint oppositi, manè occidunt, hoc est Sole oriente infrà Horizontem occiduum descendunt, eodemque die oriuntur vesperi, hoc est Sole occidente suprà Horiz. Orient. ascendunt. Tunc autem fulgent totâ nocte. Peractâ verò Oppositione cum Sole, toto eo tempore quo perambulant Epicycli semicirculum dexterum, à Perigeo nempè ad Apogeum, post occasum Solis quotidie altiores & altiores suprà Horizontem Ortivum apparent, deinde in Meridiano, ac tandem in Occidente, ac proinde rursum minori quotidie ac minori noctis parte lucescunt.

Postremò sub vespertini Solis radijs occultantur, ubi denuò Sol eos tam propè fuerit assecutus, ut post occasum Solis impedientibus ejusdem radijs videri desinant. Exinde verò ad tempus latent donec rursum è radijs Solaribus emergant Emersione matutinâ.

NUMERUS XLII.

Veneri & Mercurio qui ortus occasusque, quando, & quo ordine conveniant.

IUncti cum Sole in Apogeo Epicycli oriuntur manè & occidunt vesperi, hoc est cum Sole & oriuntur & occidunt: sed utrobique Solis fulgore occultantur.

Paulò post digressi à Sole & Apogeo in sinistrum Epicycli semicirculum, è Solis vespertini radijs emergunt; hoc est videri incipiunt vesperi in Occidente. Exinde toto eo tempore quo sinistrum Epicycli semicirculum ab Apogeo ad Perigeum percurrunt, perseverant vespertini & occidentales, apparentque post occasum Solis quotidie altiores suprà Horizontem, usque ad digressionem à Sole maximam; post quam incipiunt indies rursum humiliores apparere, donec iterùm ad Solem accedentes, propè Perigeum sub radijs Solis occidentis occultentur.

Post occultationem vespertinam, quando Soli junguntur in Perigeo Epicycli, iterum manè oriuntur & vesperi occidunt, hoc est utrobique cum Sole, & inconspicui.

Non multò post à Sole & Perigeo Epicycli in semicirculum dextrum digredientes, emergunt ex radijs Solis matutini, hoc est incipiunt manè videri in Oriente, apparentque altiores quotidie suprà Horizontem usque ad digressionem à Sole maximam: post quam ad Solem redeuntes, rursum incipiunt quotidie humiliores apparere, ac tandem propè Conjunctionem cum Sole Apogeam sub radijs ejusdem iterum occultantur & manè videri desinunt.

Venus igitur & *Mercurius*, quia Sole modò velociores, modò tardiores sunt, præter Emersionem matutinam & Occultationem vespertinam ipsis cum ♂. ♃. ♄, & stellis Fixis communes, habent insuper Occultationem matutinam, & Emersionem vespertinam, quâ ♂. ♃. ♄, & Fixæ carent, utpote semper Sole tardiores. Vicissim verò ♀ & ☿ carent ortu vespertino, & occasu matutino, quia ad Oppositionem cum Sole nunquam pertingunt.

Corollaria.

1. Possunt ♀ & ☿ in aliquo Horizonte oriri Acronicè, & occidere Cosmicè: in eo videlicet qui sit idem cum Eclipticâ vel illi propinquus. Ibi namque potest Sol tam citò post meridiem occidere, & dies esse tam parva, ut Sole occidente, ♀ aut ☿ circa maximas Digressiones positi in Oriente oriantur, & contra Sole oriente occidant in Occidente. Sed quia in totâ zonâ torridâ & in maximâ parte utriusque temperatæ hoc fieri non potest, idcircò Astronomi negant his Planetis ortum Acronicum & occasum Cosmicum convenire.

2. Non semel ♀ quæ pridie fuit vespertina, sequenti manè apparuit matutina. Hoc illi accidit cùm propè Perigeum Epicycli existens magnam habet Latitudinem Borealem: quod Reinholdus affirmat contingere circa initium ♈.

3. Sæpè ♀ toto die conspicua est, cùm scilicet maximè digreditur à Sole,

NUMERUS XLIII.

De ortu & occasu Signorum, seu arcuum Zodiaci.

CUm Emersio & Occultatio Planetarum (ut *num. seq.* videbitur) connexa sit cum ortu & occasu arcuum Zodiaci, is erit hoc loco breviter explicandus.

In omni Sphærâ Æquator Horizontem æqualiter ascendit, hoc est æqualibus temporibus ascendunt æquales Æquatoris arcus. Idem intellige de descensu. Ratio est, quia motus Primi Mobilis fit suprà Polos Æquatoris.

Zo-

Zodiacus autem ascendit inæqualiter, hoc est æqualibus temporibus ascendunt arcus inæquales. Idem de descensu intellige. Ratio est, quia motus Primi Mobilis non fit super Polis Zodiaci, sed (ut jam dixi) Æquatoris.

Signum vel arcus Zodiaci rectè seu tardè oritur, vel occidit, cum quo major ipso arcus Æquatoris oritur; obliquè verò seu velociter, cum quo minor; medio modo, cum quo æqualis.

In Sphærâ Rectâ.

Tardè oriuntur & occidunt ♊, ♋, ♐, ♑, octo reliqua velociter.

Quadrantes Eclipticæ quatuor cardinalibus punctis terminati, medio modo oriuntur & occidunt, quia cum illis oriuntur & occidunt quadrantes Æquatoris.

Arcus Eclipticæ æqualiter distantes ab aliquo punctorum cardinalium æquales habent Ascensiones, hoc est, æquales Æquatoris arcus sibi coorientes.

Hinc sequitur, arcus æquales oppositos æquales Ascensiones habere.

In Sphærâ obliquâ.

Apud Boreales rectè, seu tardè ascendunt, & obliquè, seu velociter descendunt ♋.♌.♍.♎.♏.♐: At obliquè seu velociter ascendunt, & rectè seu tardè descendunt ♑.♒.♓.♈.♉.♊ Apud Australes omnia his contraria accidunt. Sed utrumque intellige à Latitudine Grad. 10, usque ad Latitudinem Grad. $66\frac{1}{2}$.

Arcus Zodiaci quò sunt punctis Æquinoctialibus propriores, eò velociùs tardiùsve ascendunt descenduntve.

Medietates Eclipticæ Borealis & Australis medio modo oriuntur & occidunt, sive ascendunt & descendunt; cum ipsis enim ascendunt & descendunt medietates Æquatoris.

Arcus Eclipticæ æqualiter distantes à propiori puncto Æquinoctiorum, habent Ascensiones æquales, ac proinde æquè tardè vel æquè velociter ascendunt.

In omni Sphærâ.

Cujusvis arcus Eclipticæ Ascensio æquatur Descensioni arcus oppositi.

Quàvis die vel nocte artificiali, sive longâ, sive brevi, sex Signa oriuntur.

Cætera vide in Sphærâ Clavij. Veritas porrò harum regularum, præterquam quod geometricè demonstrata passim reperiatur inter problemata Primi Mobilis, evidenter etiam colligitur per Astrolabium & ex revolutione Sphæræ materialis.

Scholium.

Alia ratio est Ascensus Descensusque punctorum, quàm arcuum. Puncta enim quò longiùs ab Æquatore declinant, eò tardius & occidunt & oriuntur; & quidem tardiùs, cùm versùs Polum conspicuum declinant, quàm dum versùs inconspicuum. Hinc fit ut Sol existens in principio ♋ tardissimè & orietur & occidat, velocissimè autem circa principia ♈ & ♎. Hæc etiam alijs Planetis ac Stellis applica.

NUMERUS XLIV.

De intervallo Ecliptico Emersionis & Occultationis Planetarum & Stellarum.

UT stellæ (per has etiam Planetas & Lunam intelligo) è Solis radijs primò emergant, vel sub ijsdem primò occultentur, opus est aliquo intervallo à Sole distent. Quare intervallum Emersionis est arcus Eclipticæ inter Stellam in Horizonte positam & centrum Solis positi infrà Horizontem interjectus, quando Stella Horizontem attingens primò incipit apparere. Intervallum verò Occultationis est arcus Eclipticæ inter Stellam in Horizonte positam & centrum Solis positi infrà Horizontem interjectus, quando Stella Horizontem attingens incipit occultari.

Hoc intervallum, non modò si aliæ cum alijs Stellæ, sed etiam si eædem cum seipsis comparentur, incredibilem varietatem patitur. Causæ hujus varietatis præcipuæ sunt tres.

Prima est Diversa inclinatio Eclipticæ ad Horizontem, quâ fit ut Signorum alia rectè, alia obliquè ascendant vel descendant. Quò autem Planeta & Sol fuerint in Signo rectiùs ascendente, vel descendente, eò minus requiritur Emersionis vel Occultationis intervallum cæteris paribus. Si enim in Eclipticâ numeretur ab Horizonte deorsum arcus ex. gr. Graduum 12, in cujus termino Sol existat, quò arcus ille fuerit Horizonti rectior, eò Sol profundiùs infrà Horizontem demergetur, ac proinde minus luce suâ officiet Planetæ in Horizonte existenti: quò verò arcus illi fuerit obliquior, eò minùs profundè Sol infrà Horizontem descendet, adeoque plus suis radijs Planetæ Horizontali officiet. Quò igitur Sol & Planeta fuerint in Signo rectiùs ascendente vel descendente, eò minori opus erit ad Emersionem vel Occultationem intervallo; eò autem majori, quo fuerint in Signo ascendente vel descendente obliquiùs. Ipsa porrò diversitas illa, quæ ex difformi Eclipticæ ad eumdem Horizontem inclinatione oritur, in singulis Horizontibus iterum diversa est.

Secunda est Diversa Latitudo tum diversarum Stellarum inter se, tum ejusdem (si Planeta est) cum seipsâ. Hæc enim auget vel minuit causam primam. Nam illa ultimò refunditur in Declinationem Horizontis & Eclipticæ ab Æquatore, quam Latitudo auget minuitve.

Tertia est Diversitas apparentis magnitudinis.

Quod ad tempus Emersionis & Occultationis attinet, variatur hoc ab ijsdem causis, quæ variant intervallum; atque aliam insuper habet sibi propriam diversitatem, nempè motus tum Stellæ tum Solis: quò enim is est celerior vel tardior, eò citiùs tardiúsve requisitum Emersionis vel Occultationis intervallum obtinetur.

Ex his satis apparet arcus & tempora Emersionum & Occultationum haud facilè determinari posse. Ptolomæus tamen cùm arcum Visionis, quamvis & ipse inconstans sit, minùs tamen variari quàm intervalla illa Ecliptica animadverteret, ex illo intervalla prædicta ad Signorum initia derivavit pro

Altitudine Poli Grad. ferè 34. Modum quo id fecit, ipsumque Visionis arcum, exhibuit ipse *Almag. lib.* 13. *Consule Tabellam num.* 43. *lib.* 5. Est porrò Visionis arcus profunditas Solis infrà Horizontem eo tempore, quo Stella Horizontem tangens primò emergit vel occultatur.

CAPUT VI.

De Aspectibus Planetarum.

NEmo hujus capitis viso titulo à me expectet, ut qui Astronomiam hactenus elucidare conatus sum, idem officium Astrologiæ judiciariæ impendam. Absit à me ut Lectores alliciam ad studium ineptissimum ac mendacissimum; cujus, nisi ad alia properarem, non præcepta traderem, sed vanitatem ac nugas proderem confutaremque. Quare de Aspectibus non attingam nisi pauca & strictim, & quantùm ad alios fines conducere visum fuit.

Aspectus præcipui sunt sex, quorum notas, nomina, distantias subjicio.

		Grad.
☌	*Conjunctio*	0
⚹	*Sextilis*	60
□	*Quadratus*	90
△	*Trinus*	120
☍	*Oppositio*	180

Igitur cùm duæ Stellæ nihil distant in Zodiaco, dicuntur *Conjunctæ*; cùm distant Gradibus 60, hoc est sextâ parte circuli, *Aspectum* habent *Sextilem*; cùm Gradibus 90, *Quadratum*; cùm Gradibus 120, hoc est tertiâ parte circuli, *Trinum*, seu *Trigonum*; cum Gradibus 180, *Opposita* sunt. Ordinem Aspectuum exhibet schema 31.

Inter Aspectus præcipui sunt Conjunctio & Oppositio. Intervalla ☌ Planetarum cum Sole suis quæque locis tradidi.

Ab unâ ☌		*Dies*	*Hor.*
♄	*ad aliam sunt*	378	
♃		399	
♂		783	
♀		584.	22
☿		115.	21

Intervalla ☌ Planetarum cum Sole in eodem loco Zodiaci, hoc est, revolutiones Planetarum revolutionibus Solaribus commensuratæ, subjectâ Tabellâ exhibentur.

Revolutiones			*Revolutionibus Solis*
♄	2	*æquantur*	59
♃	7		83
♂	42		79
♀	5		8
☿	54		13

ut Luna cum Sole ad eundem Zodiaci locum restituatur, pluribus annis opus est. Menses quippe Synodici 42053 æquantur revolutionibus Solis 3400. Quare post annos 3400. Luna cum Sole restituitur in eodem loco Zodiaci eâdem horâ, imò ferè Minuto eodem. Atque hic est cyclus Vietæ, inter omnes cyclos Lunisolares accuratissimus.

Tres Planetæ Superiores conjunguntur inter se intervallis infrà scriptis.

	Ann. Iul.	*Dies*	*Hor.*
♄ & ♃	19	314	12
♄ & ♂	2	3	20
♃ & ♂	2	86	10

De Conjunctionibus Maximis, Majoribus, Magnis (sic enim vocant) de Triplicitatibus Igneâ, Aëreâ, Aqueâ, Terreâ, aliisque consimilibus, ad vanitatem Astrologicam pertinentibus, verbum nullum facio.

FINIS LIBRI SEPTIMI.

ASTRONOMIÆ
LIBER OCTAVUS.
VARII TRACTATUS
ASTRONOMICI.
TRACTATUS PRIMUS
DE HYPOTHESI TERRÆ MOTÆ.

TErram circa ſuum centrum converti ex veteribus opinati ſunt Nicetas Syracuſanus, & Heraclides ac Ecphantus Pythagorici, ex recentioribus Cuſanus, Longomontanus, Argolus & alij nonnulli. Sed his auſi majora Philolaus, & poſt illum Ariſtarchus, Sole in Mundi centrum detruſo, Terram in ejus locum evectam motu annuo per Eclipticam circumferri docuêre: quorum ſententiam oblivione jam ſepultam ſuperiori ſæculo Nicolaus Copernicus ingenio conatuque ſummo reduxit in lucem, excitavitque tanto ſucceſſu plauſuque, quantum deinde ſectatorum multitudo teſtata eſt. Copernicum ſecuti Reticus, Mæſtlinus, Keplerus, Reinholdus, Lansbergius, Bullialdus, Hevelius & alij complures; mirum quippè dictu eſt quantus ubique ad antiquam hanc novitatem ingeniorum pruritus extiterit. Veterem Hypotheſim è recentioribus tutati ſunt Maurolycus, Clavius, Tycho, Longomontanus, Claramontius, Fromondus, Taſſonus, Inchofer, Polaccus, Scheinerus, Kircherus, & omnium fuſiſſimè doctiſſimeque Ricciolus. Ego quidem minimè dubito, quin *Terra*[a] *in æternùm ſtet*; etenim *firmavit*[b] *orbem Terræ, qui non commovebitur.* Unde & libris ſeptem prioribus Aſtronomiam univerſam juxta Hypotheſim Terræ Stantis expoſui. Quia tamen hæc controverſia inter omnes Aſtronomicas celeberrima eſt, eam penitùs prætcrire non eſt viſum. Exponam igitur primò naturam & conditiones hujus Hypotheſeos, & quî per eam phœnomenis ſatisfiat, deinde quid de ejus veritate ſentiendum: utrumque quàm potero clariſſimè & breviſſimè.

Cicero lib. 2. quæſt. Acad.

a *Eccl. 1.*
b *Pſal. 95.*

CAPUT PRIMUM.

Duplex Terræ motus exponitur.

NUMERUS PRIMUS.

§. 1. PRimus motus, qui Terræ affingitur, ille eſt quo circa ſuum centrum & axem Mundi 24 horis ab Occidente in Orientem circumagitur. Quo poſito, videbuntur Sol, Luna, Planetæ, & Stellæ omnes nobis oriri & occidere eodem prorſus modo, ac ſi illa omnia ab Ortu in Occaſum moverentur: juxta Virgilianum illud

Provehimur portu; terraq́, urbeſque recedunt.

Atque hunc Diurnum Terræ motum, ſeu *Vertiginis* appellant.

§. 2. Alter, qui plus difficultatis habet, eſt motus Terræ Annuus, quo illam volunt per Eclipticam circa Solem in Mundi centro quieſcentem circumferri eâ lege, ut axis Æquatoris Terreni ſemper maneat ſibi ipſi parallelus, & ad Eclipticæ planum inclinatus eodem angulo, quo in Hypotheſi Terræ Stan-

tis

tis ad idem planum inclinatur axis Æquatoris cælestis.

Fig. 2.

Pro hujus motus expositione figuram describo ejusmodi. Eclipticæ cælestis planum esto A B C D E, in cujus centro A Sol immobilis consistat. Centrum Terræ sit in Eclipticæ circumferentiâ putà in B, unde recta erigatur B X ad Eclipticæ planum perpendicularis; Æquatoris autem Terrestris M N axis F G sit in plano ad planum Eclipticæ recto, inclineturque à perpendiculo B X ad planum Eclipticæ ABCDE angulo F B X Grad. 23. 30′, eodem videlicet, quo in Hypothesi Terræ Stantis ad idem planum ABCDE inclinatur axis Mundi. Movetur igitur Terræ centrum per Eclipticam B C D E hac lege perpetuâ, ut axis F G semper maneat sibi ipsi parallelus, eodemque semper angulo inclinatus, ac proinde in eandem semper cæli plagam directus. Quo motu fit, ut, quamvis Sol reverà quiescat in Mundi centro A, nobis tamen in Terrâ positis Eclipticam percurrere videatur. Telluri enim positæ in E principio ♎, Sol apparebit in C initio ♈; & Terræ delatæ in B initium ♑, Sol videbitur esse in D initio ♋; rursum Terræ obtinenti principium ♈ C, Sol apparebit in E principio ♎; denique ubi Terrâ attigerit initium ♋ D, Sol ei videbitur existere in B initio ♑.

Jam verò ob parallelismum perpetuum Terreni axis, manifestum est si is tam sursum quàm deorsum usque ad supremum cælum utrimque productus, intelligatur ab eo describi superficiem cylindri scaleni, & in ipso supremo cælo duos circulos ipsi Eclipticæ A B C D E æquales, quæ cylindri prædicti sint bases, quamvis in schemate hujus cylindri pars solùm Borealis, unusque circulus R S T V exhibeatur. Porrò, quia F G axis Terræ mobilis substituitur in locum axis immobilis Hypotheseos communis, qui proinde easdem omnes apparentias præstare debeat, apparet continuò tantam esse oportere magnitudinem firmamenti, ut totus ille circulus R S T V, & alter ei oppositus è Terrâ spectati, instar puncti appareant, ac proinde, quamvis reverà toti Eclipticæ, seu Orbi Annuo sint æquales, accipi tamen quoad sensum possint pro punctis illis indivisibilibus, quæ in communi Hypothesi polos Mundi appellamus. Unde sequitur totam crassitiem cylindri prædicti se habere instar lineæ, seu axis invisibilis, adeóque axem Diurni motus, quamvis totum Zodiacum perambulet, sic tamen unum semper idemque quoad sensum immobile punctum in cælo designare ac si verè immobilis persisteret. Atque hunc in modum clarè intelligitur quomodo salvetur in hac Hypothesi immobilitas Polorum, eademque sit in quolibet Horizonte Altitudo Poli Terrâ motâ, quæ terrâ quiescente esset.

Fig. 6.

§. 3. Consequenter ad geminum hunc Terræ motum dispositio Copernicæa mundani Systematis est hujusmodi. In A centro Universi Sol consistit immobilis: hunc proximè ambiunt orbes primò *Mercurij*, tum *Veneris*, deinde *Terræ*; quem *Orbem Annuum*, seu *Magnum* appellant. Terram verò Epicycli instar circuit orbis Lunæ inter *Veneris* & *Martis* orbes conclusus. Subsequuntur deinde *Martis*, *Iovis*, & *Saturni* orbes; quos tandem omnes immani intervallo Fixarum sphæra complectitur. Motus autem singulorum corporum mundanorum sic disposuit Copernicus. Detraxit omnibus motum Diurnum, illumque soli Terræ concessit pro omnibus. Planetis in suâ cuique orbitâ reliquit motum proprium ab Occasu in Ortum, easdemque motuum periodos, exceptis ♀ & ☿. Nam ♀ in hac Hypothesi absolvit orbem, seu Epicyclum suum circa Solem 9 mensibus, ☿ autem 80 diebus. Sic enim fit ut (quod requirunt phænomena) ad Terram, sive apparenter ad Solem redeant ♀ mensibus 19, seu diebus 584, ☿ diebus 116; & causa dari possit Stationum ac Regressionum utriusque, quod aliàs non posset, ut ex §. 5. *num.* 3. patebit. Hoc verò habet Luna præ alijs, quod, dum ipsa motu menstruo Terram circuit, unà cum orbe suo EBDC à Terrâ per Eclipticam circumferatur. Motus ille tardissimus, quo Fixæ in Ortum prorepere videntur, in Terram quoque transfudit Copernicus. Sed congruentiùs videtur ut quemadmodum Planetis, sic & Fixis suus ille motus relinquatur.

Scholium.

Præter duos Terræ motus §. 1, & 2, jam expositos, tertium & quartum adjunxit Copernicus. Tertius est reflexio quædam axis Terreni in antecedentia aliquantò tardior progressu Terræ per Eclipticam in consequentia: ita enim contingit, ut Æquinoctialia puncta quotannis insensibiliter fiant occidentaliora, unde post multos annos sensim in præcedentia prorepant, ac proinde quia sic Fixarum distantia à sectione vernâ videntur augeri, putantur ipsæ sensim promoveri in consequentia. Quartus alia quædam est Terreni axis libratio, quâ salvare conatur Anomaliam obliquitatis Eclipticæ. Verùm, quia motus Fixarum, ut dixi, convenientiùs retinetur, & mutabilem Eclipticæ obliquitatem rejeci lib. 1. num. 32. *neutrum operosiùs explicare operæ pretium esse duxi.*

CAPUT II.

Quomodo per duplicem Terræ motum phœnomenis satisfiat.

NUllum est cæleste phœnomenum quod non præstetur ab hac Hypothesi, imò pleraque motibus ac circulis paucoribus explicantur quàm in communi; quod deinceps breviter ostendam.

N U M E R U S II.

Præstantur phænomena Primi Mobilis, & varietas tempestatum Anni.

CLaritatis gratiâ geminum Porisma præmitto.

P O R I S M A 1.

Sit Terræ centrum in quovis Eclipticæ puncto B, ad quod ex centro Solis A ducta sit recta A B occurrens superficiei Terrestri in puncto I. Circumagatur deinde Terra Horis 24 circa suum axem F G, occurrens perpetuò rectæ A B puncto I. Dico in ejus superficie describi circulum æquatori M N parallelum, eundem videlicet, qui describitur si Terrâ quiescente Sol cum rectâ A B circa axem F G circumagatur.

P O R I S M A 2.

Iisdem positis, Terrâ Diurno motu circa suum axem F G ab Occasu in Ortum circumactâ, Sol in

Mundi

Mundi centro quiescens, videbitur ab Ortu in Occasum percurrere eum parallelum qui in cælo respondet parallelo ex. gr. K I, per *Por.* 1. in Terrâ descripto. Eadem enim apparentia erit sive Sole immoto in A, Terram circumagas circa axem F G ab M versùs N, sive Terrâ quiescente in B, Solem circa eundem axem G F T motu contrario circumducas ab A versùs X. Atqui tum Sol videretur percurrere parallelum in cælo respondentem parallelo K I in Terrâ. Ergo &c.

His præmissis ad explicanda phœnomena accingamur.

§. 1. AC primò quidem positâ conversione Diurnâ solius Terræ circa axem suum, dari causam vicissitudinis quotidianæ dierum ac noctium, Ortus item quotidiani & Occasus Lunæ, Planetarum & omnium Syderum, clariùs est quàm ut multis ostendi debeat. Manifestum quippe est eandem prorsus apparentiam fore sive Terram solam illis omnibus quiescentibus ab Occasu in Ortum circa proprium axem F G circumagas, sive illa omnia ab Ortu in Occasum circa Terram immobilem circumducas. Quod primum est, & insigne compendium hujus Hypotheseos, quando totum præstat unius Terræ conversio, quod per tot vastissimorum corporum revolutiones obtinetur.

Fig. 2. §. 2. Deinde per motum Terræ Annuum Diurno conjunctum, inæqualitas dierum ac noctium, omnisque varietas tempestatum Anni explicatur æquè, quam per Annuum motum Solis. Sit enim Eclipticæ planum A B C D E, in cujus centro A Sol conquiescat. Centrum Terræ statuatur primò in B initio ♑, & suprà B A D diametrum ♑ & ♋ erectum intelligatur planum infinitum ad planum Eclipticæ rectum, seu perpendiculare F B D F, in quo existant diameter Æquatoris Terrestris M N, & diametri Tropicorum Æstivi K I, Brumalis P Q, & axis Terræ F G à perpendiculo X B ad planum Eclipticæ inclinatus angulo X B F Grad. 23. 30', & circulus Terræ maximus F N G M: cui recta A B occurrat in I. Jam, qui recti sunt anguli X B A, F B N, si ab ijs auferatur communis F B I, æquales remanent X B F, N B A. Quare cùm X B F sit Grad. 23. 30', etiam N B A, seu N B I erit Grad. 23. 30'. Quare, cùm Polus Terræ Boreus sit F, parallelus I K, qui in Terrâ positâ in B circa axem F G circumactâ describitur, est Tropicus Æstivus. Ergo per *Porif.* 2. Terræ positæ in B Sol, licèt in Mundi centro verè quiescat, videbitur percurrere Tropicum Æstivum in cælo, Terrestri I K respondentem. Sed quando Terra est in B initio ♑, ei Sol apparet esse in D initio ♋. Igitur quando Sol apparet in initio ♋, licèt ipse in Mundi centro immobilis hæreat, nobis tamen ob Diurnam Terræ conversionem videbitur eo die percurrere in cælo Tropicum Æstivum, seu *Cancri*: ac proinde dies longissima per totum orbem eodem modo se habebit in Hypothesi Terræ Motæ, quo in Hypothesi Terræ Stantis.

Statuatur deinde centrum Terræ in D initio ♋, occurratque illi linea A D in P, reliquis omnibus positis ijsdem. Quia rursum angulus L F D inclinationis Terreni axis est Grad. 23. 30', etiam æqualis illi angulus M D A, seu M D P, erit Grad. 23. 30'. Ergo cùm Polus Terræ Australis sit G, parallelus P K qui in Terrâ circa axem F G conversâ per *Por.* 1. tum describitur, est Tropicus Hyemalis. Ergo quando Terra est in D initio ♋, hoc est quando Sol nobis apparet in B initio ♑, videbitur per *Por.* 2. nobis Sol eo die percurrere in cælo Tropicum Hyemalem, seu *Capricorni*. Quare dies brevissima ubivis Terrarum eodem modo se habebit in hac Hypothesi, quo in communi.

Transferatur demùm Terræ centrum in E vel C principium ♎ vel ♈, ijsdem legibus quibus suprà. Per axem Terræ F G agatur planum Eclipticæ plano rectum, producens maximum in Terrâ circulum C F M G N. Quoniam igitur tam planum C F M G N, quàm planum F D B F, in quo priùs fuerat axis, recta sunt eidem plano Eclipticæ A B C D E, suntque ducta per axem sibi ipsi in C, D, B parallelum, liquet plana C F M G N, F D B F esse parallela. Quare cùm recta C A E diameter ♈ & ♎ perpendicularis sit plano F D B F, etiam plano C F M G N, recta erit. Cùm ergo Terræ axis F C G sit in plano C F M G N, etiam C A E ad Terræ axem F C G recta erit. Ergo A C est in plano Æquatoris Terrestris ejusque peripheriæ occurrit ex. gr. in O. Ergo circulus, qui per *Porif.* 1. in Terrâ positâ in C per revolutionem ejus circa axem F G describitur, est ipse Æquator M O N. Ergo quando Terra est in C initio ♈ vel ♎, Sol, licèt immobilis sit in A, nobis tamen videbitur [b] percurrere Æquinoctialem circulum in cælo respondentem Terreno M O N. Quare dies Æquinoctialis eodem modo se habebit ubivis gentium in Hypothesi Terræ Motæ, quo in Stantis Hypothesi.

[b] *Porif.* 2.

His intellectis, facilè erit in hac Hypothesi cætera huc pertinentia exponere, quæ ad Hypothesim Terræ Stantis *lib.* 1. *num.* 15. 16. 17. explicui. Immobilitas Poli ejusque suprà Horizontem quemvis elevatio eadem in utrâque Hypothesi exposita fuit *suprà num.* 1. *§.* 2.

NUMERUS III.

Salvantur Planetarum phænomena.

§. 1. PRimò quòd ad Lunam attinet, cùm ejus Systema totum C E B D unà cum Terrâ per Eclipticam deferatur, clarum est ejus phases omnes æquè præstari a Terrâ motâ, quàm ab immotâ. Quocumque enim Zodiaci loco Terra fuerit cùm Luna erit in C inter Solem A ac Terram I, Novilunium erit, seu Conjunctio cum Sole; cùm in B, Plenilunium seu Oppositio; Quadraturæ, cùm in E vel D. *Fig.* 6.

Quod attinet ad Planetas quinque reliquos, eorum omnia phœnomena à Copernico salvantur per unicum Terræ Orbem Magnum, seu Annuum, D N G M, quæ salvantur ab alijs per tres Epicyclos ♄. ♃. & ♂, & per duos Eccentricos ♀ & ☿. Recensebo præcipua, ex quibus facilè erit cætera intelligere.

§. 2. Inprimis per motum unicum Terræ Annuum Apparens revolutio Solis ad Planetas, Conjunctio & Oppositio eorumdem cùm Sole, & tota illa, quâ referuntur ad Solem, harmonia obtinetur. Cùm enim motus Annuus, quo Terra per Eclipticam I N G M circa Solem in Mundi centro quiescentem, volvitur, sit diversæ celeritatis, quàm motus proprii Planetarum, quibus singuli in suis orbibus circa Solem gyrantur, necesse est existentibus in Terrâ aliam atque aliam Planetarum à Sole in Zodiaco distantiam apparere, & modò Terram inter Planetas, & Solem existere, & modò Solem inter Planetas ac Terram,

Terram. Quando igitur Terra est ex. gr. in G, ♄ autem ♃ & ♂ in F, Sole inter utrosque medio, videntur illi nobis in Terrâ positis conjuncti cum Sole; cùm verò Terra est in I media inter ipsos & Solem, illi nobis apparent Soli oppositi. Atque ex his satis apparet quomodo salvari debeant *Aspectus* reliqui, seu habitudines singulorum cum Sole, *Sextilis, Quadratus* & *Trinus.* At ♀ ac ☿, quia orbes eorum intra Orbem Terræ Annuum concluduntur, non possunt unquam Soli apparere oppositi. Sed bis à Sole maximè digrediuntur cùm Terra ex. gr. est in I, ipsi verò in O & Q; & bis Soli conjunguntur, semel cùm ipsi sunt in X medij inter Solem A & Terram I, & rursum cùm Terra est ex. gr. in G, ipsi verò in X, Sole inter ipsos ac Terram medio in A.

§. 3. Eodem Annuo motu Terræ datur causa, cur motus Medii *Veneris*, & *Mercurij* sint æquales Medio motui Solis. Cùm enim Terræ Orbis Magnus, sive Annuus I M G N substituatur pro tribus Eccentricis *Solis, Veneris* & *Mercurij*, ac proinde motus Terræ Annuus circa Solem æquipolleat tribus motibus, quibus in Hypothesi communi centrum Solis & centra Epicyclorum ♀ ac ☿ singula ponuntur Terram circuire, manifestum est tres illos motus Medios apparere æquales, cùm in hac Hypothesi reverà non sint tres motus, sed tantùm unicus, nempè motus Terræ Annuus.

§. 4. Per eundem Annuum Terræ motum absque Epicyclis ullis datur causa, cur Planetæ dum Soli junguntur, remotissimi sint à Terrâ, at cùm Soli [a] opponuntur, vicinissimi; ac proinde cur (♂ inprimis ac ♀) tantò majores tunc appareant. Cùm enim Planetæ Soli cernuntur oppositi, Terra inter ipsos ac Solem media est, veluti in I: cùm verò Soli apparent conjuncti, ab ijs Terra ex I in G totâ diametro Orbis Magni recedens, Solem inter se atque ipsos medium constituit.

a *In ♀ & ☿ pro Oppositione Conjunctionem Perigeam intellige.*

b *vide nu. 27. lib. 7.*

§. 5. Postremò, neque enim omnia persequi consilium est, eodem illo Annuo Terræ motu sine ullis Epicyclis datur causa merè optica cur Planetæ minores quinque non semper videantur directè progredi, sed modò Stationarij, modò Retrogradi appareant. Sit enim Orbis Terræ Annuus A D E C, Orbis ♄ vel ♃ vel ♂ B F G H, Zodiacus R S T V; & sit Planeta propè Oppositionem cum Sole, ipse nimirùm circa B ex. gr. Terra verò circa A. Percurrat autem Terra arcum, putà C A D, cùm Planeta arcum absolvit O B P. Quoniam igitur uterque motus fit in consequentia ex C versùs D, & ab O versùs P, & Terra fertur celeriùs quàm Planeta, manifestum est Terram post se Planetam relinquere, ac proinde nobis in Terrâ positis videri Planetam retrocedere in Zodiaco versùs R V; quæ retrogressio maxima apparet in ipso Oppositionis articulo cùm Terra est A, & Planeta in B; prorsus ut phœnomena requirunt. Ponamus deinde cùm Planeta est circa B, Terram versari circa E, & quo tempore hic percurrit arcum M N, illam percurrere arcum D E C. Quia motus uterque fit in consequentia, hic ex D per E versùs C, ille ab M versùs N, sed in partibus Cæli oppositis, perspicuum est nobis in Terrâ positis Planetam videri in Zodiaco directè progredi versùs R S. Si enim Terra quiesceret eodem loco, Planeta motus ex M in N, nobis videretur in Zodiaco procedere versùs R S. Ergo multò magis progredi videbitur, si eodem tempore oculus noster cum Terrâ moveatur ex D per E versùs H, V in partem oppositam, planè quemadmodum navis aliqua versùs Orientem tendens, tibi existenti in aliâ navi apparebit celeriùs progredi, si tua navis feratur in Occidentem, quàm si quiesceret. Atque hæc progressio apparebit velocissima in ipso articulo Conjunctionis cum Sole, quando Planeta ex. gr. est in B & Terra in E; prorsus iterùm ut phœnomena postulabant. Ex dictis porrò satis apparebit cur in confinijs Directionis ac Regressionis circa C & D, Planeta Stationarius appareat.

Fig. 3.

In ♀ & ☿ eadem, sed inversa, demonstratio est. Sit jam Orbis Terræ Annuus B F G H; Orbis seu Epicyclus ♀ aut ☿ A D E C; Zodiacus R S T V. Quo tempore Terra est propè B, sit ♀ propè A, sic ut Terræ positæ in B ♀ existens in A cum Sole conjuncta appareat. Quia Orbis Magnus Terræ includit Orbem ♀, videbitur ea nobis existentibus in Terrâ propè B tanquam in Epicyclo moveri, in superiori quidem parte D E C secundùm ordinem Signorum Zodiaci ab S per T versùs V, in inferiori autem C A D contra ordinem Signorum Zodiaci ab V per T in S. Neque impeditur hæc apparens retrogradatio, quòd etiam Terra moveatur eodem tempore ab M per B versùs N; quia, ut dictum est § 3. *nu.* 1, motus ♀ & ☿ in hac Hypothesi celerior est motu Terræ. Apparet autem Regressio maxima in articulo Conjunctionis Perigeæ, cum ♀ aut ☿ est in A, Terra in B; & directa Progressio velocissima cernitur in articulo Conjunctionis Apogeæ, cùm ♀ aut ☿ est in E, Terra in B, eo modo, quem in ♄. ♃. ♂ *suprà* exposui.

Fig. 3.

Atque hæc mihi satis clara videntur, ut opus minimè putem tot lineis inter se implexis, quot hic ab alijs nonnullis adhibentur. Ipsa porrò Stationum puncta & quantitas arcuum Directionis ac Regressionis eodem ferè modo determinantur, quem *lib.* 7. *cap.* 2. exposui; sed in *Fig.* 16. *lib.* 7. quæ isthic adhibetur, pro ♂. ♃. ♄. Planeta concipiendus est in A, & Orbis Magnus Terræ B L G D E: pro ♀ & ☿ concipi debet Terra in A. Orbis verò, seu Epicyclus Planetæ Solem ambiens B L G D E.

Luna nunquam videtur stare vel regredi, quia Terram circumit, & cum eâ motu Annuo circumfertur. Plura non addo: ex his enim cætera intelligere non erit arduum. Particulares singulorum Planetarum Hypotheses Telluri Motæ accommodatas, hic exponere supervacaneum esse arbitror, cùm Astronomiam universam juxta antiquam & Veram Terræ Stantis Hypothesim totis septem præcedentibus libris satis, ut existimo, exposuerim. Qui tamen eas voluerit, legat Copernicum, Keplerum, Lansbergium, Bullialdum, Ricciolum: è quibus Keplerus & Bullialdus hoc etiam invexêre novi, ut pro circulari Planetarum viâ Ellipticam substituerent. Sed per circulos, quàm Ellipses expeditiùs explicantur cælestes motus & ad numeros revocantur. Unde Ellipses in Cælo, quas tantoperè illi depereunt, nec amavi unquam, nec adhuc amo.

CAPUT III.

Quid de veritate absoluta motus Terræ sentiendum.

Hanc controversiam Ioannes Baptista Ricciolus *Almagesti libro 9 totâ sectione quarta*, quæ justum volumen explet, eâ tum eruditione tum copiâ prosecutus est, ut facilè omnes hoc in negotio superaverit. Primò Copernicanorum pro motu Terræ argumenta 49 deducit ac destruit. Pari deinde curâ quæ contra Terræ motum afferri solent & possunt argumenta videlicet 77 recenset. Mihi verò, cùm nihil hactenùs in utramvis partem adductum videam, quod probabilitatis metam excedat, his immorari non est animus. Unum est tamen ex omnibus contra Terræ motum ipsius Riccioli argumentum à gravium descensu petitum, cui vim ipse demonstrationis inesse putat, quod examinare hoc loco accuratiùs, operæ pretium judicavi.

NUMERUS IV.

Porismata ad sequentia.

PORISMA I. Spatia à gravi ex quiete per aërem descendente confecta, eam inter se proportionem habent, quàm quadrata temporum.

Fig. 1.

Expono. Repræsentet S T aliquod temporis intervallum, quod vocabo momentum, & talia momenta 2 referat S V, 3 S X, 4 S Y, 5 S Z, & sic deinceps. Horum temporum S T 1, S V 2, S X 3, S Y 4, S Z 5, quadrata sunt 1, 4, 9, 16, 25 &c. Esto deinde spatium quodvis A B pedum ex. gr. 10 vel 15, & sit A C spatia ejusmodi 4, A D 9, A E 16, A F 25. Dico si grave aliquod per aërem liberè descendens à quiete absolvat momento 1, spatium A B; momentis 2 à quiete absolvet A C, hoc est 4 spatia A B; momentis 3, conficiet A D, hoc est spatia A B 9; momentis 4, conficiet A E, hoc est spatia 16 A B; momentis 5, absolvet A F, hoc est spatia A B 25, & sic deinceps. Primus observavit Galilæus, & post ipsum alij, sed omnium accuratissimè Ricciolus, cujus observationes vide *Almag. lib. 9. pag.* 384 385. 386. 387.

PORIS. II. Spatia à gravi per aërem descendente æqualibus temporibus confecta, eam inter se rationem habent quàm numeri impares 1, 3, 5, 7, 9, 11 &c.

Expono. Descendat grave aliquod per spatium A F tempore æqualium momentorum 5 S Z. Dico si grave momento primo percurrit spatium unum A B, momento secundo T V percurret B C, primi A B triplum, momento tertio C D quintuplum primi, momento quarto D E, primi septuplum, & sic deinceps juxta seriem imparium numerorum procedendo. Sequitur ex *Porismate primo*.

Accelerattur igitur descensus gravium secundùm numeros impares 1, 3, 5, 7 &c.

PORIS. III. Dato tempore quo grave notum spatium descendendo confecit, reperire tempus, quo idem grave aliud quodcumque spatium descendendo percurret.

Ex. gr. globulus argillaceus unciarum 8 observatus est à Ricciolo Secundis 4, & Tertijs 20 temporis Primi Mobilis, hoc est tertijs 260, descendendo pertransivisse pedes Romanos antiquos 280. Ponamus Terræ semidiametrum esse milliariorum Bononiensium 4139, quæ conficiunt Romana antiqua 5174, sive pedes Romanos antiquos 25870000. Quoniam igitur per *Porism.* 1, spatia ex quiete percursa sunt ut temporum quadrata, si ut pedes 280 sunt ad pedes 25870000, ita 67600 Tertia (hoc est quadratum 260 Tertiorum, quibus percursi sunt pedes 280) fiant ad Quartum, prodibit 4499601 5873 qudratum temporis, quo grave percurret pedes 25870000. Quare si ex 4499601 5873 extrahatur radix quadrata, prodibunt 70685 Tertia, hoc est Min. 19'. 38''. 5''', quibus globulus argillaceus unciarum 8 descendendo percurret pedes 25870000, ac proinde hinc ad Terræ centrum perveniet.

PORIS. IV. Gravium diversi ponderis, sive mole æqualia sint, sive non, illud celeriùs descendit, quod ponderosiùs est.

Constat experimentis Riccioli ex altitudine pedum 280 coram multis testibus tantâ curâ & industriâ tantoque numero peractis, ut nihil hoc in genere accuratiùs haberi possit. Ipsum consule *Almag. lib. 9. pag. 387, & sequentibus.* Contrarium nonnulli talibus scilicet experimentis destituti asseruerunt.

PORIS. V. Idem grave ex majori altitudine descendens, fortiùs pavimentum subjectum ferit, quàm descendens ex minori. Patet experimentis innumeris & quotidianis. Hæc porrò major percussio oritur ab impetu majore, hic ab incremento velocitatis jam explicato.

PORIS. VI. Si minor circulus A I C transiens per centrum majoris A, tangat majorem in C, ducaturque ex A recta A I D, æquales ea arcus abscindet C D, C I, eritque C I duplo plurium Graduum, quàm C D.

Fig. 7.

Demonstrat Ricciolus *lib. 9. Almag. pag.* 400, & nos idem alibi demonstravimus.

PORIS. VII. Iisdem positis, dato arcu C D rectam D I invenire.

Quia notus est arcus C D, etiam C I Graduum duplo i plurium notus erit. Ergo & I A reliquus ad semicirculum notus est. Ergo etiam nota est chorda ejus A I in partibus Sinus totius sive radij E C; adeoque & in partibus A C. seu A D. Quare si A I subducas ex A D, nota relinquetur in iisdem partibus D I.

i *Por præc.*

NUMERUS V.

Demonstratio contra motum Terræ proponitur

Terræ centrum sit A; & planum Æquatoris Terrestris A M B, in quo sita sit altitudo C B perpendiculariter insistens superficiei terrenæ in B, quæ proindè producta transeat per Terræ centrum A. Deinde centro A per turris verticem C describatur circulus C D K in plano Æquatoris terreni A M B, & A C bisectâ in E, centro E per C & A circulus C I A. Manifestum est, si Terrâ circa suum centrum A motu Diurno Vertiginis circumagatur, transferri quoque in plano Æquatoris turrim B C in OF, PG, QH &c. Interim verò ex C turris vertice demittatur grave quodpiam, ex. gr. globulus argillaceus unciarum 8, quem Ricciolus spatio unius Secundi deprehendit descendendo à quiete pertransire pedes 15. Jam quia unà cum Terrâ non solùm turris B C, sed etiam aër ambiens, adeoque & globulus cadens circumagitur, liquet globulum descendere non per lineam

Fig. 7.

lineam rectam, sed per curvam, quam Ricciolus affirmat esse peripheriam circuli C I A, conaturque ostendere hunc in modum.

Quoniam motu Vertiginis Horarum 24 punctum Æquatoris B vel C uno Secundo temporis Primi Mobilis percurrit Minuta 15, sumatur arcus C F 15 Minutorum, cui sint æquales F G, G H, H L, ducanturque rectæ AOSF, APTG, AQVH, ARXL. Turris igitur post unum Secundum erit in O F, post 2 Secunda in P G, post 3 in Q B, post 4 in R L. Inquirit deinde intereeptas F S, G T, H V, L X eâ methodo, quam exposui *Por. 7. num. præc.* & quarum partium sinus totus E C est 10000000000, earumdem comperit F S esse 53, G T 212, H V 476, L X 846. Atqui hi numeri sunt inter se ut 1, 4, 9, 16, quadrata nempè temporum, quæ erant Secunda, 1, 2, 3, 4. Ergò interceptæ F S, G T, H V, L X sunt inter se ut temporum quadrata. Ergo per *Por. 1. num. præced.* quando turris B C exacto Secundo uno delata est in O F, globulus descendit ex F in S; & quando turris transposita est in P G exactis Secundis 2, globulus descendit ex G in T; & cùm exactis Secundis 3 fuerit turris in Q H, globulus descendit per rectam H V; postremò ubi turris venerit in R L exactis 4 Secundis, globulus descendit ex L in X. Globulus igitur descendendo descripsit lineam circularem C S T V X; & primo Secundo percurrit arcum C S, Secundo altero arcum S T, tertio arcum T V, quarto arcum V X.

Atqui ob æqualitatem arcuum CF, FG, GH, HL, etiam arcus C S, S T, T V, V X æquales sunt per *Por. 6.* Ergo globulus descendens verè & realiter, æqualibus temporibus æqualia spatia confecit, ac proinde ejus velocitas vera & realis nullum labendo incrementum accepit, sed eadem semper permansit. Quod est absurdum; si enim non augetur velocitas, neque impetus augebitur, ac proinde grave ex altitudine majori decidens, non percutiet fortiùs pavimentum, quàm decidens ex minori; quod omnibus experimentis repugnat. Tellus igitur motu Diurno Vertiginis non circumagitur, sed nec Diurno simul & Annuo. Nam si motus Terræ Annuus ad Diurnum Vertiginis adjungatur, adhuc arcus C S, S T, T V, V X singulis Secundis à globulo descendente percursi, quoad sensum æquales erunt: quod fusè & operosè probat *pag.* 413, 414, 415, 416. Unde argumentum contra solum motum Vertiginis jam allatum, etiam contra motum Vertiginis simul & Annuum pariter valebit.

NUMERUS VI.

Paralogismus ostenditur.

Fig. 4.

HÆc summa demonstrationis prætentæ contrà motum Terræ, quâ propositum minimè concludi sic ostendo.

Inprimis falsum est, si Terra moveatur, globulum prædictum vel grave quodcumque aliud, etiamsi in Æquatoris plano existat, descendere per lineam circularem C I A. Neque satis mirari possum, qui doctissimo Ricciolo in mentem venerit hoc asserere, cùm ipse, illud ipsum à Galilæo assertum omnibus viribus, iisdemque ferè quæ mox in ipsum retorquebo argumentis, paulò ante subvertere conatus sit *Almag. lib. 9. pag.* 400, 401, 402.

Primò itaque si grave ob motum Terræ descenderet per peripheriam C I A, deberet globulus argillaceus unciarum 8, demissus ex C pertingere ad centrum Terræ horis præcisè 6, tunc enim turris per Diurnam Vertiginem Terræ confecto quadrante ex B C pervenerit in K M, ac proinde globulus erit in Terræ centro A. Atqui ex *Por. 3. num. præc.* imò ex Ricciolo ipso cujus calculum in *citato porismate* usurpavi, evidenter constat globulum prædictum ex C demissum, pervenire ad centrum Terræ temporis Primi Mobilis Minutis 19′. 38″. 5‴. Ergo globulus non descendit per peripheriam C I A.

Secundò. Si gravia ob motum Terræ descenderent per peripheriam circuli C I A, omnia, ut jam ostendi, post horas præcisè 6 pervenirent ad Terræ centrum A. Et si pariter demitterentur ex C, quando turris ex B C mota esset ex. gr. in H Q, omnia simul descendissent ex H in V, percurso ab omnibus arcu C V. Ergo gravia omnia, quantumvis diversi ponderis, eâdem velocitate descenderent, quod certissimis *b* experimentis ab ipso Ricciolo factis repugnat.

b Poris. 4.

Tertiò. Lineæ F S, G T, H V, L X inter duas peripherias interceptæ, quamvis eam inter se rationem habeant, quam quadrata temporum; non tamen exhibent quantitates ipsas descensuum, quæ in diversis gravibus sunt diversæ, sed tantùm proportiones descensuum, quod sic ostendo. Invenerat Ricciolus *c supra* methodo indicatâ *Por. 7. num. 4.* F S esse partium 53, quarũ Sinus totus E C est 10000000000, hoc est quarum tota Terræ semidiameter A C, sive A F, est 20000000000. Observavit idem globulum argillaceum unciarum 8 uno Secundo labendo conficere 15 pedes Romanos veteres. Quando igitur turris B C uno Secundo translata fuerit in O F, globulus ex C demissus descendit ad pedes 15. Videamus modò utrùm tanta sit F S. Terræ radius A F Ricciolo est pedum Bonon. 20695000, sive Romanorum veterum 25870000. Quare si ut A F prout est 20000000000 se habet ad F S prout est 53, ita fiat A F prout est pedes 25870000 ad Quartum, prodibunt pro recta FS [illegible] unius pedis. Cùm igitur uno Secundo, quo turris mota est ex B C in O F, globulus descenderit ad pedes 15, liquet eum longè descendisse infrà S, adeoque non percurrisse arcum C S, sed aliam curvam lineam cadentem intra circulum CSIA. Pari modo reperta est à Ricciolo GT esse 212, quarum Terræ radius A G est 20000000000. Unde si G T revocetur ad pedes ut *suprà*, reperietur ne uni quidem adhuc pedi æqualis, nempè [illegible] unius pedis; ubi interim globulus per *Por. 1. num. 4.* & ex ipsius Riccioli observatione pedes 60 duobus Secundis descendendo absolvit; cùm enim uno Secundo percurrat pedes 15, duobus Secundis absolvet pedes quater 15, hoc est 60. Quando igitur post duo Secunda turris mota fuerit in B G, globulus interim descenderit longè infrà T. Rursum quia globulus prædictus *o* post 3 Secunda descendit pedibus 135, post 4 Secunda pedibus 240, quando turris post 3 Secunda venerit in Q H, & post 4 Secunda in R L, globulus descenderit infrà V, & X, quia rectæ H V, L X, si ad pedes reducantur ut *suprà*, reperientur longè minores pedibus 135, 240; nam H V conficiet [illegible] unius pedis, & L X pedem 1. [illegible]: globulus igitur descendendo percurrit non arcum circuli C S T V X, sed aliam spiralem lineam intra circulum C I A, quæ pro diversâ labentium gravitate alia necessariò atque alia est.

c n. præc.

o per poris. 1. num. 4.

Constat igitur triplici demonstratione gravia non de-

descendere per circuli peripheriam C I A, sed per lineam spiralem intra C I A, ac proinde tota Riccioli demonstratio corruit. Non enim quemadmodùm arcus circulares C S, S T, T V, V X, ita & arcus illius spiræ æquales sunt inter se, sed secundus major est primo, & tertius secundo, & quartus tertio, ideoque æqualibus temporibus grave percurrit arcus, seu spiras inæquales, secundo videlicet momento majorem quàm momento primo, & tertio majorem quàm secundo, & sic deinceps: atque ita haberi potest incrementum continuum velocitatis, adeoque & impetus & percussio pavimenti major à gravi decidente ex altitudine majori quàm ex minori.

Alterum caput paralogismi est, quod curva spatia, sive spiræ, (cogitemus enim lineam C S T V X jam non circularem esse, sed spiralem) quas ostendi à globulo descendente percurri, diversimodè ad Horizontem inclinentur. Secunda quippe spira S T ad perpendiculum accedit propiùs, sive rectior est Horizonti, quàm prima C S, & tertia V T rectior, quàm secunda T S, & quarta X V rectior quàm tertia V T. Unde fit ut grave descendens per spiram S T fortiùs percutiat subjectum planum, quàm descendens per spiram C S, & sic deinceps. Insistant enim [a] plano B C æquales lineæ D A, E A, F A, per quas idem grave æquali tempore descendat, certum est grave descendens per lineam E A plano B C rectiorem, fortiùs percutere planum B C, quàm si descendat per obliquiorem D A. Cùm igitur grave descendens per spiram [n] S T, fortiùs percutiat subjectum planum, quàm descendens per spiram C S, etiam fortiùs percutiet descendens per spiram C S T, quàm per solam C S. Pari modo liquet grave descendens per spiram C S T V fortiùs percutere, quàm per C S T, & fortiùs per C S T V X, quàm per C S T V. Quod si hæc causa incrementi percussionis conjungatur cum priori, ipso videlicet spirarum C S, S T, T V, V X incremento, duplici ex capite constabit grave ex majori altitudine decidens fortiùs subjectum planum percutere, quàm si decidat è minori; videlicet quod spiræ inferiores vincant superiores & quantitate & rectitudine. Prorsus igitur fallacia demonstrationis prætentæ est manifesta, quod hic ostendere fuit propositum.

[a] *Fig.* 4.

[n] *Fig.* 7.

NUMERUS VII.

De aliis contra motum Terræ argumentis.

Argumenta quibus hinc Telluris Motæ, inde Quiescentis assertores mutuò se infestant, ut initio dixeram, & plurima sunt & ferè inefficacia. Nihil certè Copernicani hactenùs protulère, quò Terræ motum evincant. Sed neque inter partis adversæ argumenta facilè ullum reperias, quo demonstretur oppositum. Illud certum Hypothesim utramque phœnomenis cælestibus satisfacere: unde Astronomicis argumentis neutram partem falsitatis convinces. Inter Astronomica porrò celebratissima illa sunt quæ Copernicani ab incredibili motuum cælestium velocitate, horum adversarij ab immensæ propemodùm firmamenti ac syderum magnitudine deducunt. Qui Terram immobilem astruunt tantâ illâ motus velocitate nihil terrentur prorsus: velocitas quippè magnitudinem corporis moti consequitur, nec magis mirum est circumagi sphæram ingentem, quàm parvam. Contrà Copernicani plerique objectam sibi Fixarum ac Firmamenti molem propè infinitam conantur eludere, sed frustra, ut *lib.* 5. *num.* 26. 27. 28. demonstravimus. Isthic namque evidenter ostendi in Hypothesi Terræ Motæ tantam requiri magnitudinem Firmamenti, ut totus Orbis Annuus, cujus semidiameter continet [a] ut minimùm 7000 semidiametrorum Terræ, cum Firmamento collatus, invisibilis evadat; Stellas autem affixas sic augeri necesse esse, ut pleræque totum Orbem Annum excedant. Fatendum est nihilominus ne huic quidem argumento multùm inesse roboris, quando nihil afferri potest, quo moles illa cælestium corporum vel incredibilis esse vel absurda demonstretur. Quærere porrò cui usui aut quo fine tantæ moles sint creatæ, frivolum est, cum fines innumeri esse possint nobis incogniti, quos mens æterna Conditoris spectaverit.

[a] *per num.* 19. *lib.* 3.

Quod ad cætera argumenta attinet, quibus Terræ motus impugnari solet, notissimum illud est, jam olim Ptolomæo usurpatum, quod à motu corporum per aërem meantium petitur, & est ejusmodi. Si Terra motu Diurno ab Occasu in Ortum circumagitur, nubes, aves, globus tormenti bellici vel aliud quodcumque corpus, quantumvis in Orientem moveantur, semper nobis videbuntur ferri in Occidentem: cùm enim revolutio Terræ sit quolibet illorum motuum velocior, noster oculus unà cum Terrà semper velociùs in Orientem tendet, quàm vel nubes vel aves vel globus tormenti, ac proinde nos illa à tergo versùs Occasum relinquentes, semper ea putabimus in Occasum moveri: quò fieret, ut nullius omninò corporis motum versùs Orientem possemus advertere, quod experientiæ oculari & perpetuæ repugnat. Argumentum primâ fronte validum, nullo negotio infringitur, si dicatur aër Terram ambiens unà cum Terrà circumagi: sic enim fiet, ut, quæ per aërem sese movent, duplici motu ferantur, quorum alter ipsis sit cum aëre, & Terrâ, & oculo nostro communis, quem proinde non possimus advertere; alter ipsis proprius, qui observari à nobis potest, planè uti motus aviculæ per cameram navis conclusam volitantis, tibi in eadem camerâ existenti, eodem modo apparebit, sive navis moveatur, sive quiescat.

Conatus est Ricciolus hoc argumentum reformare, vel potiùs in ejus locum aliud validius substituere. *Si tellus*, inquit, *moveretur motu Diurno aut etiam Annuo, idem globus eadem vi ad eamdem distantiam emissus in scopum Orientalem primò, deinde in Occidentalem, fortius Orientalem percuteret, quam Occidentalem. Consequens falsum est. Ergò & antecedens. Major* (inquit) *probatur, quia impetus globi versùs Orientem projecti non retardaretur a motu Diurno vel Annuo Terræ, quin potius ab eo juvaretur, illiq; vicissim obsecundaret, utpote utroque in eamdem plagam nitente: contra verò impetus globi in Occidentem emissi, retardaret, seu retunderet impetum motuum versus Orientem ac vicissim ab eo retunderetur.* Deinde subjungit, se huic argumento responsionem solidam & salvis rerum naturis persuasibilem non invenire. Respondeo tamen, & salvâ eruditissimi viri gratiâ, paralogismum ostendo, qui in eo positus est, quod motu Terræ transferatur non solùm globus sed etiam scopus. Quare cùm unus è duobus motibus, quibus globus afficitur, ipsi communis sit cum scopo, liquet percussionem scopi solùm effici ab eo motu qui globo est proprius, ac proinde scopum à globo percuti vi eâdem, sive Terra moveatur, sive quiescat. Simile quod adducit contra ipsum facit, & paralogismum

jam expositum confirmat. Quod enim globulus bombardâ deorsum explosus in scopum intervallo ex. gr. pedum 30 distantem majori impetu illum destruat, quàm eodem intervallo emissus sursum, inde fit, quòd duorum motuum, quibus deorsum explosus globus agitur, gravitatis nempè & bombardæ, neuter sit globo & scopo communis, sed globo uterque proprius, quandoquidem scopus immobilis perseveret. Unde fit ut motus uterque se in scopum exerat, atque is proinde deorsum validiùs quàm sursum feriatur.

NUMERUS VIII.

Statuitur nihilominùs immobilitas Terræ.

TAmetsi nullum argumentum, sive Astronomicum, sive physicum hactenùs allatum sciam, quo Terræ quies & Solis motus demonstretur: cogit tamen utrumque asserere Divinorum voluminum authoritas, quæ tot locis, & evidentiâ tantâ utrumque affirmant, ut nullus dubitationi relictus sit locus. E multis pauca huc transcribo.

Generatio præterit, & generatio advenit, Terra autem in æternum stat. Oritur sol & occidit, & ad locum suum revertitur; ibiq́, renascens, gyrat per Meridiem, & flectitur ad Aquilonem, lustrans universa in circuitu pergit spiritus & in circulos suos revertitur. Ecclesiastes cap. 1.

Commoveatur à facie ejus omnis terra, ipse enim fundavit orbem immobilem Paral. 1.c. 16.

Etenim firmavit orbem Terræ, qui non commovebitur Psal. 92.

Etenim correxit orbem terræ, qui non commovebitur Psal. 95.

Qui fundasti terram super stabilitatem suam, non inclinabitur in sæculum sæculi Psal. 103.

Exultavit (Sol) *ut gigas ad currendam viam; à summo cælo egressio ejus, & occursus ejus usque ad summum ejus, nec est qui se abscondat a calore ejus* Psal. 18. describitur initium ac finis diei, quæ more Astronomico à summo cæli, hoc est à meridiano, ubi maxima est Solis altitudo, computatur.

Sol contra Gabaon ne movearis, & Luna contra Vallem Aialon: steteruntq́, Sol & Luna, donec ulcisceretur se gens de inimicis suis. Jos. 10.

Nonne scriptum est hoc in libro justorum? stetit itaq́, Sol in medio cæli, & non festinavit occumbere spatio unius diei. Non fuit antea & postea tam longa dies, obedeinte Deo voci hominis, & pugnante pro Israel. Ibid.

Sol in aspectu annuncians in exitu, vas admirabile, opus excelsi &c. Magnus Dominus qui fecit illum, & in sermonibus ejus festinavit iter Eccles. c. 43.

Supervacaneum sit plura adscribere; neque enim verbis clarioribus quies Terræ & motus Solis affirmari potuerunt. Præcipuum effugium Copernicanorum est, Scripturam in sensu populari & quoad apparentiam loqui, quemadmodùm Poëta dicebat: *Provehimur portu terraq́, urbesque recedunt.* Sed Regula certa est à Sanctis Patribus & Theologis omnibus usurpata, sententias Scripturæ sacræ intelligi debere in proprio verborum sensu, quotiescumque id non repugnat evidenter alicui veritati, quæ nobis per alium clariorem Scripturæ locum, vel per definitionem Ecclesiæ, vel per lumen ipsum naturæ innotuerit. Hoc sensu loca jam adducta omnes SS. Patres, hoc sensu omnes Doctores Catholici intellexêre: quibus omnibus postremò accessit Sacræ Congregationis Cardinalium authoritas, quæ in judicio de Galilæo instituto, Solis immobilitatem in centro Mundi & revolutionem Terræ Annuam, ut hæreticam & expressè contrariam sacræ Scripturæ, motum verò Terræ Diurnum, saltem ut erroneum in fide condemnavit.

TRACTATUS SECUNDUS

DE COMETIS ET NOVIS STELLIS.

CAPUT PRIMUM.

Quæ circa Cometas & novas Stellas sint observata.

NUMERUS PRIMUS.

Phænomena Cometarum.

RIcciolus *Almag. lib.8. sect. 1. cap. 3.* ab Anno ante Christum 480 usque ad Annum 1618 post Christum ex historiarum monumentis Cometas recenset 154: quibus si illum addas qui Anno 1652 visus est, fiunt universim 155. Sed credibile est plures apparuisse, quorum notitia partim incuriâ Scriptorum, partim injuriâ temporum ad posteros non pervenerit.

Species, seu figura Cometarum non una fuit. Alij caudati, (qui cæteris frequentiores) alij barbati, sive caudæ brevioris instar barbæ. Alij comati, seu criniti, quorum discus absque caudâ vel barbâ ullâ quodam quasi radiorum capillitio cinctus apparuit. Alijs rhompææ & acinacis species fuit, alijs gladij, seu pugionis. Nonnulli similitudinem veru prætulêre.

Color etiam non unus omnium: visi sunt enim aliàs ignei, aliàs flavi; argentei quidam, nonnulli plumbei, nec defuêre subnigri, seu fusci. Unus omninò fuit Anno 396, cujus odor sulphureus sentiretur.

Nonnumquam eodem tempore visi sunt plures. Ut enim alios omittam, Anno 1618 duos simul viderunt Franciscus Garsias in Perside, & Iacobus Rhò Societatis Jesu Goæ.

Magnitudo apparens inprimis varia. Maximus videtur ille fuisse, de quo Seneca *lib. 7. natur. quæst. cap. 15.* ita scribit: *Paulo ante Achaicum bellum* (Anno scilicet ante Christum 146) *Cometes effulsit non minor Sole.* Magnum etiam fuisse necesse est illum, qui referente

ferente Justino tempore Mithridatis per 70 dies ita luxit, ut cælum omne conflagrare videretur, & fulgore Solis nitorem vinceret. Qui anno Christi 1200 visus est, Lunam dichotomam, seu bisectam æquabat Haly testante. Tycho Cometam Anni 1577 æstimavit duplo majorem *Venere*, Cometas verò An. 1585, & 1590 æquales fermè *Iovi*, ut ex ipsius placitis de apparente *Veneris* & *Iovis* diametro Ricciolus colligit. Plerique ab initio magni, sensim decrescunt: nonnulli tamen primò parvi, deinde sensim majores effecti sunt. Blancanus universim asserit nullum Cometam in sui initio visum fuisse aut majorem Sole aut minorem Stellis primæ magnitudinis.

Longitudo caudæ varia fuit non modò in Cometis diversis, sed etiam in eodem. Fuêre complures, qui caudam ad Gradus 60 & 50 extenderent. Illius qui Anno 1618 effulsit cauda cùm fuit maxima, 90 Gradus æquavit.

Situs caudæ plerumque est aversus à Sole: hinc matutini Cometæ cauda priùs oritur quàm caput, & vespertini caput priùs occidit quàm cauda. Hinc etiam fit ut Sole infrà Horizontem altiùs depresso, cauda sursum erecta appareat. Conspecti sunt, quorum cauda ad Terram usque pertineret.

Figura caudæ multiplex etiam in eodem Cometâ; jam tenuior est, jam latiùs expanditur; jam recta, jam curva. Vibratur etiam nonnunquam, ut accidit in Cometâ 1618, cujus cauda subitò fiebat ex longâ brevis, & contra.

Motus Cometarum esse duplex Diurnus, seu Primi Mobilis, qui Astris omnibus communis; & proprius singulorum, qui inæqualis plerumque fuit, & in plagas cœli diversas; quidam enim in Ortum, in Occasum alij, alij in alias mundi plagas visi procedere.

Duratio maxima fuit sex mensium. Nam ille, qui per Annum integrum Iosepho teste Jerosolymis imminere ante ejus excidium conspectus fuit, ad terrendos Judæos præter naturæ ordinem accensus videtur. Hæc summatim perstricta. Qui plura desiderat, Ricciolum adeat *Almag. lib.* 8. *sect.* 1. *à capite* 2 *usque* 6 fusissimè ista ex omnibus historiarum & observationum monumentis colligentem.

De Cometâ Anni 1652 omnium recentissimo, hæc seorsim ex varijs observationum scedis tunc impressis collecta accipe. Visus primùm est 19 Decembris, & Ianuar. 4. Anni 1653 disparuit. Quamquam de initio & fine non satis liquet. Præter motum Primi Mobilis habuit motum proprium velocissimum. Nam spatio dierum 17 confecit Gradus circiter 80, & à 19 Decemb. ad 20 confecit Gradus saltem 12 secundùm observationem Bononiensem, vel quasi Gradus 15. 30′ juxta observationes Mantuanam & Tomacensem. Via Cometæ fuit linea transiens per stellas *Leporis*, quæ trapezium constituunt, & relictis ad Ortum *Pede Orionis*, sive *Regel*, ejusque *situ* inter *Hyades* & *Pleiades* incedens, indeque per *caput Medusæ* ad *lucidam humero sinistro Persei* insidentem pertingens. Magnitudo Apparens ferè Lunam æquabat. Coma primùm tenuis circumsparsa, mox barba, denique cauda à Sole semper aversa: sed tenuis & brevis. Lumine fuit subobscuro, colore pallido. Circa medium nucleus quidam lucidior emicuit; & Vendelinus affirmat se tubo optico conspexisse in eo stellulas pluculas minutissimas, & in harum medio unam cæteris majorem & oblongam, diceres (inquit) focum aliquem consumptis lignis favillas suas reliquas, permixtasque in his prunas ac scintillas ostentantem.

NUMERUS II.

Novarum Stellarum phænomena.

Ex historiarum monumentis Stellæ novæ recensentur quatuordecim; è quibus decem minus certæ, quatuor reliquæ omninò exploratæ.

Harum *prima* apparuit tempore Hipparchi circa Annum antè Christum 125; & Hipparcho occasionem dedit; ut, quò posteri scirent Stellas novas ab antiquis discernere, cœperit observare Fixarum loca, indeque motum in ipsis proprium primus deprehenderit.

Secunda apparuit Anno post Christum 1572 in *Cassiopea*. Visa est à Tychone 11 Novembris, duravitque usque ad Martium Anni 1574, per annum videlicet & trientem. Fuit rotunda, non crinita, & alijs Fixis scintillantior. Principio *Sirium* & *Lyram* Fixarum maximas, imò & *Iovem*, quamvis tum Acronychium, & in Eccentrici Perigeo constitutum superabat, sic ut *Veneri* Perigeæ non multùm cederet. Cœpit deinde sensim diminui: nam mense Decembri æquabat *Iovem*; Ianuario Anni 1573, apparuit minor *Iove*, sed major adhuc *Sirio* & *Lyrâ*, quibus æqualis fuit sub finem Februarij ac initium Martij; atque ita deinceps magis magisque diminuta est donec mense Febr. Anni 1574 vix æquaret Stellas sextæ magnitudinis, ac tandem mense Martio prorsus evanuit. Non alium motum habuit quàm Primi Mobilis, quippe quæ eandem semper ab ijsdem Fixis distantiam retinuerit. Stellæ ad Altitudinem Poli Grad. 55. 58′, meridiana Altitudo maxima fuit Grad. 84. 11′. minima Grad. 27. 45′, Declinatio Borea Grad. 61. 47′. Longitudo ♉ Grad. 6. 54′, Latitudo Grad. 45. Color fuit primò albus & splendens, deinde rutilus instar *Martis & Aldebara*, postea flavus, demùm sublividus, qualis *Saturni*. Hæc ex observationibus Tychonis; qui eâ occasione, ut olim Hipparchus, incredibili diligentiâ & exquisitissimis organis loca Fixarum ampliùs mille restituit. Eandem Stellam observarunt Lantgravius Hassiæ, Hagecius, Fabritius, Reisacherus, Hainzelius, Mæstlinus, Gemma, Munosius, Maurolycus, Clavius, Pridianus, Peucerus, Prætorius, Appianus, Diggeseus, Camerarius, Leonitius. Sed omnes studio & industriâ Tycho superavit.

Tertia primùm visa à Gulielmo Iansonio Anno 1600 in *Cygno* ad confinia colli & pectoris. Historiam ejus conscripsit Keplerus. Fuit tertiæ magnitudinis. Eodem semper loco mansit. Longitudo fuit ♒ Grad. 16. 18′, Latitudo Borea Grad. 55. 30′; Declinatio Borea Grad. 36. 52′. Duratione omnes Stellas novas superavit: visa quippe adhuc fuit Anno 1616. & 1621, Parmæ à Blancano, Ricciolo, alijsque; & Argolus in Pandosio *cap.* 62. affirmat durasse usque ad Annum 1629. Dubitatum à nonnullis fuit novàne ea Stella esset, an ex perpetuis una, sed in catalogo Fixarum omissa. At non potuit tantæ magnitudinis Stella accuratissimos Syderum observatores tempore tanto latere; & jam dubium omne evanuit, quando jam pridem evanuit ipsa Stella, neque amplius ab ullo conspecta fuit.

Quarta & ultima nova Stella apparuit in *calcaneo dextri pedis Serpentarij*, seu *Ophiuchi*, Anno 1604, mense Octobri, vel etiam ut nonnulli volunt 27 Septembris, duravitque anno integro eandem semper ab ijsdem Fixis distantiam servans, ut constat ex ob-

observationibus Io. Georgij Brenggeri & Kepleri, qui sub nomine cujusdam Crabbi irridet, ut opinor, Guilielmum Iansonium huic stellæ motum aliquem proprium, sed exiguum, in suo globo stellato tribuentem. Longitudinem habuit ♐ Grad. 17. 40'; Latitudinem Boream Grad. 1. 56' aut 57'; Declinationem Austrinam Grad. 21. 1'. 30". Magnitudo Apparens, si Laurentino & Amerio credimus, principio parva fuit: sed ipso adhuc Octobri mense à Keplero alijsque visa est ingens, major nempè *Saturno, Ioue, Marte*, cùm quibus ob viciniam tum maximam potuit exactè comparari. Omninò fuit persimilis illi, quæ Anno 1572 in *Cassiopæa* apparuit. Figura fuit prorsus rotunda nullo crine vel barbâ. Scintillatio major quàm ullius Fixæ; lumen vivacissimum, ut affirmet Santutius *Sirio* splendidiorem fuisse. Color in momenta penè singula diversus, jam flavus, jam croceus, jam purpureus, sed ut plurimùm candidus, adamantis instar ad Solem obversi. Hæc ferè Keplerus, qui & coruscatione, seu vibratione affirmat tam rapidâ fuisse, ut oeget sibi, dum vixit, quidquam in cælo visum æquè pernici motu; scintillationem credo, seu micationem radiorum intelligit. Decrevit autem sensim, ut priores ceteræ, ac tandem Anno 1605 inter 8 Octobris & Martium, evanuit.

CAPUT II.

Modus inquirendi distantiam Cometæ vel novæ Stellæ à centro Terræ.

Ex modis quamplurimis nonnullos hic proponere visum est ex Diggeseo, Tychone, Longomontano, Ricciolo, alijsque depromptos.

NUMERUS III.

Datis Parallaxi Altitudinis O B A, & distantia Visa D O B à Vertice, datur B phænomeni à Terra centro distantia A B, adeóq; scitur suprà Lunam an infrà existat.

Fig. 10. a per 13. 1. b per probl. 9 cap. 3. Geom. Pract.

Quia datur angulus D O B, si is ex duobus rectis auferatur, notus fiet a A O B. In triangulo igitur A B O noti sunt anguli A O B, & O B A. Igitur nota fit b proportio distantiæ B A ad Terræ semidiametrum A O.

Potest etiam phœnomeni Parallaxis data immediatè ad Lunam referri, si per *num.* 14. *lib.* 3. inquiratur Parallaxis Lunæ ad distantiam Visam à Vertice æqualem ipsius phœnomeni à Vertice distantiæ Visæ Q O B.

In sequentibus Problematibus supponitur phænomeni, & Fixarum, ad quas phænomenum refertur, Altitudines Visas esse extra aleam Refractionis; neque alia inquiritur Parallaxis, quàm Altitudinis.

NUMERUS IV.

Fig. 8.

Phænomenum e existens in eodem Verticali be cum duabus Fixis b, g, notas habeat ab utrâque distantias eb, eg. Translato deinde per motum Primi Mobilis arcu be cum duabus Fixis in B H G E, phænomeno autem ipso in K, nota rursum sint ejus ab utrâque Fixâ distantia K G, K H, item b K distantia Visa phænomeni à Vertice, & b G alterutrius Fixarum. His datis, oporteat an & quantam Parallaxim phænomenum habeat, investigare.

In primâ observatione phœnomeni locus Visus est *e*, Verus *f*, qui in secundâ observatione repræsentantur in E & F. Locus autem Visus phœnomeni tempore observationis secundæ est K. Igitur *ef*, sive E F est Parallaxis observationis primæ, K F secundæ. Ducantur Verticalium quadrantes B G L, B F K M: distantiarum arcus K G, K H, K E jam suprà ducti intelliguntur.

§. 1. Quia notæ sunt *per hypothesim* distantiæ *eh*, *eg*, sive E H, E G, etiam G H nota erit. In triangulo igitur K G H quia notum jam est latus G H, & reliqua duo K G, K H per hypothesim nota sunt; ex his innotescent a anguli G H K, G K H.

a Trig sph. probl. 17.

§. 2. In triangulo K H E ex notis per hyp. lateribus E H, K H, & angulo G H K, seu E H K per §. 1. noto, innotescunt b latus E K, & anguli H E K, H K E.

b ibid. prob. 19.

§. 3. In triangulo K *b* G ex notis per hypothesim tribus lateribus *b* K, *b* G, K G, reperitur angulus *b* K G: quo addito ad notum o angulum G K H, notus fit F K H. Hunc si aufers ab angulo H K E noto per §. 2, notus relinquetur I K E.

o per §. 1.

§. 4. In triangulo demùm E F K quia nota sunt latus E K, & angulus H E K, seu F E K per §. 2, angulus F K E per §. 3; ex his elicientur m Parallaxes F E observationis primæ, & F K secundæ.

m ibid. prob. 20.

Quod si in 3. §. angulus F K H æqualis reperiatur, vel insensibiliter minor angulo H K E, carebit phœnomenum Parallaxi sensibili & locus Verus *f*, F, non differet à Viso *e*, K.

NUMERUS V.

Fig. 8.

Arcus Meridiani sit A G, in eoq; Mundi Polus A, & duo Terra loca B, C. Locus Verus phænomeni per Meridianum transeuntis esto D, locus Visus respectu B sit G; locus autem Visus respectu C, sit E. Stella quapiam Fixa in F. Dentur autem distantia Visa E F, G F quando phænomenum transit Meridianum, & momentum talis transitus, & Altitudines Poli locorum B, C. His datis oporteat an ullam, & quantam Parallaxim phænomenum habeat, investigare.

§. 1. Quia dantur Altitudines Poli locorum B, C, his à 90 Grad. sigillatim detractis, nota erunt Altitudinum complementa A B, A C, adeoque & B C. Inquirantur deinde d Ascensiones rectæ Meridiani A G, & e Fixæ F: harum differentia metitur angulum A qui proinde notus erit. Inquiratur etiam

d per n. 40. lib. 3. e per nu. 4. & §. 1. 5.

De-

i Per nu. 2. 10. 17. l. 5. t trig. Sph. prob. 19.

Declinatio i Fixæ F: ita notum quoque erit Declinationis complementum A F. In triangulo igitur B A F ex notis angulo A, & lateribus A B, A F r reperientur latus B F, & angulus A B F, adeoque & C B F.

§. 2. In triangulo F B C, quia nota sunt ex §. 1. latera B C, B F, cum angulo C B F; ex his s reperies C F, & B C F, adeoque etiam E C F.

s Ibid.

§. 3. In triangulo G B F nota sunt B F, G F *ex hypothesi*, & ex §. 1. angulus C B F, sive G B F, non latebit igitur t G B.

t trig. Sph. probl. 22. u Ibid.

§. 4. In triangulo E F C nota sunt E C F, & C F per 2. §, E F autem *ex hyp.* Quare non u latebit C E; cui si addas arcum B C notum ex §. 1, etiam B E notus erit. Hunc si aufers ex B G noto per §. 3. notus relinquetur E G differentia Parallaxium D G, D E: ex quâ per *sequens Lemma* prodibunt Parallaxes D G, pro loco B, & D E pro loco C.

Quod si B E æqualis reperiatur B G, nulla erit Parallaxium differentia, adeoque nec Parallaxes ullæ.

Lemma.

Datâ Parallaxium differentiâ (EG), & duabus à Vertice distantijs Visis (BG, CE) ad quas observata est, Parallaxes ipsas, (DG, DE) exhibere.

Sinus Visarum à Vertice distantiarum B G, C E, confer in unam summam, & à semisummâ aufer sinum alterutrum. Fiat ut residuum ad semisummam, ita tangens semidifferentia Parallaxium ad aliud: hoc erit tangens semisummæ Parallaxium. Demonstrat Snellius in *libro de Cometâ Anni* 1618.

NUMERUS VI.

Datâ phænomeni distantia à Vertice Visa eodem momento ex duabus Terræ locis natam habentibus distantiam, & sub uno Verticali cum phænomeno constitutis, Parallaxim phænomeni, si quam habeat, inquirere.

Fig. 9.

TErræ centrum sit A; loca duo in Terrâ sub uno Verticali cum phœnomeno constituta sint E, O: horum Vertices sint H, X; lineæ Verticales A E H, A O X. His positis casus triplex est: vel enim phœnomenum est in C sub Vertice locorum alterutrius; vel est in B inter Vertices utriusque; vel in D extra arcum inter Vertices interceptum.

Casus 1. Sit primò phœnomenum in C sub X Vertice loci O. Ducantur rectæ E O, E C M. Erit M locus phœnomeni Visus ex loco E; X verò locus phœnomeni, & Verus, & Visus respectu O. Quoniam datur arcus E O locorum distantia, adeoque, & angulus O A E, etiam summa angulorum A E O, A O E nota a erit. Quia verò A O, A E, æquales sunt, anguli A E O, A O E æquales b erunt. Quare bisectâ eorum summâ, noti erunt singuli. Aufer igitur A O E à duobus rectis, eritque C O E notus. Rursus quia datur H E M phœnomeni distantia à Vertice Visa ex E, & notus jam est A E O, etiam summa ipsorum H E M, A E O nota. Quare si hanc demas à duobus rectis, notus c relinquetur C E O. Quoniam igitur in triangulo E C O noti sunt C O E, C E O, etiam tertius d O C E, ipsa nempè phœnomeni Parallaxis nota erit. Quod si summa angulorum C O E, C E O reperiatur vel æqualis vel insensibiliter minor duobus rectis, Parallaxis quoque erit insensibilis: quod in reliquis etiam casibus observa.

a Per 32. 1. b Per 5. 1. c Per corol. 13. 1. d Per 32. 1.

Casus 2. Sit deinde phœnomenum B: ductâ A B V, locus ejus Verus erit V inter Vertices H, X; ducanturque rectæ E B K, O B I, erit K locus phœnomeni Visus ex E, I verò locus ejusdem Visus ex O. Quia inventus jam est in *casu* 1. A E O, & datur H E K distantia à Vertice H Visa ex E, si horum summa dematur à duobus rectis, notus i fiet B E O. Item quia notus est ex *casu* 1, A O E, & datur X O I distantia à Vertice X Visa ex O, si horum summa subducatur à duobus rectis, notus m fiet B O E. Et quia datur arcus E O, etiam Chorda in partibus semidiametri Terræ A E nota erit. In triangulo igitur O B E ex notis angulis B E O, B O E, & latere O E, notum n fiet latus B E in partibus A E. Addatur deindè B E O jam inventus ad A E O notum ex *casu* 1: ita totus A E B notus erit. Quoniam igitur in triangulo E B A, nota sunt latera B E, A E, cum angulo A E B, ex his reperietur o A B E Parallaxis phœnomeni visi ex E.

i Per corol. 13. 1. m Ibid. n Per prob. 9. cap. 3. Geo. pract. o per probl. 10 cap. 3. Geo. pract.

Casus 3. Sit postremò phœnomenum in D, ductâque rectâ A D Z, locus ejus Verus sit Z extra arcum inter Vertices H, X comprehensum; ducanturque rectæ E D N, E D P. Respectu loci E, erit phœnomeni locus Visus N, & Parallaxis E D A; respectu loci O, erit Visus locus P, & Parallaxis O D A; Parallaxium verò differentia E D O. Quia datur H E N phœnomeni distantia à Vertice Visa ex E, & notus jam est a A E O, si horum summam demas à Grad. 180, notus erit N E O, seu D E O. Quod si notum ex *casu* 1. A O E demas à Grad. 180. notus fiet C O E: cui si addas X O P distantiam phœnomeni à Vertice Visam ex O, quæ datur, notus fiet totus P O E, sive D O E. Quare in triangulo O D E, cùm duo noti sint anguli D E O, D O E, non latebit tertius E D O differentia Parallaxium: ex quâ per *Lem. num. præc.* eruentur Parallaxes ipsæ E D A, O D A.

a ex cas. 1.

NUMERUS VII.

Phœnomeni nunquam occidentis, & solo motu Primi Mobilis affecti, data à Vertice distantia Meridiana Visa tam maxima quàm minima cum Altitudine Poli, Parallaxim, si quam habuerit, invenire.

Fig. 10. 11.

TErræ centrum esto A; locus in Terrâ O, cujus linea Verticalis A O D, Vertex D; Meridianus L D T, Polus Mundi X; Horizon A L. Phœnomenon, quando minimam habet Altitudinem Meridianam, sit in C; quando maximam, sit in B: ducanturque rectæ A C I, O C K, A B E, O B G: Parallaxes erunt O C A, O B A, sive I K, E G; distantiæ autem Visæ à Vertice erunt D G, D K. His positis triplex casus exoritur; vel enim phœnomenum in utrâque suâ Altitudine Meridianâ est inter p Horizontem & Verticem, vel in unâ est ultra q Verticem, vel una in Verticem ipsum incidit.

p Fig. 10. q Fig. 11.

Casus 1. Distantiam à Vertice Visam D G minimam, *ex hyp.* notam aufer ex D X complemento Altitudinis Poli datæ; sic nota erit G X. Aufer deinde D X ex D K distantiâ phœnomeni à Vertice visa maxima *ex hyp.* notâ: sic nota fiet K X. Si æquales sunt K X, G X, nulla erit Parallaxis phœnomeni:

Fig. 10.

meni: si inæquales; aufer minorem G X à majori K X, eritque residuum H K notum. Jam quia phœnomenum *ex hypothesi* circumagitur circa Polum X, patet I X, E X Verorum locorum Meridianas à Polo distantias esse æquales. Unde si ab his subducantur æquales *per constr.* X G, X H, etiam E G, H I æquales remanebunt. Quare H K summa est Parallaxium E G, I K, & quidem, ut *suprà* ostendi, nota; ex quâ *per Lemma* Parallaxes singulæ eruentur.

Fig. 11. In *Casu* 2. D G addita D X dabit G X. In cæteris procedatur, ut in primo, sed isthic residuum H K erit Parallaxium differentia: ex quâ *per Lemma num.* 5. elicientur Parallaxes singulæ.

Fig. 10. In *Casu* 3. quando in unâ Altitudine Meridianâ locus phœnomeni Verus Visusque incidunt in Verticem D, liquet rursum æquales esse D X, I X distantias Verorum locorum Meridianas à Polo X. Quia ergo nota est D X, complementum nempè Altitudinis Poli, etiam I X nota erit. Quod si D X notam subducas ex D K datâ, nota relinquetur X K: à qua si demas notam I X, nota relinquetur I K Parallaxis quæsita. *Figura hunc casum non exprimit, sed facilè cogitatione fingitur.*

Lemma.

Data Parallaxium summa E G, I K, datisque à Vertice distantiis Visis D G, D K, Parallaxes singulas exhibere.

Fig. 10. Sinus Visarum à Vertice distantiarum confer in unam summam, à quâ subtrahe Sinum alterutrum. Deinde fiat ut Sinuum semisumma ad residuum è subtractione, ita Tangens semisummæ Parallaxium ad Quartum; hoc erit Tangens semidifferentiæ Parallaxium. Theoria eadem est, quæ *Lemmatis num.* 5. si termini convertantur.

NUMERUS VIII.

Data duorum locorum distantia, in quorum Horizontibus eodem tempore phænomenum appareat, datur Parallaxis phænomeni.

Fig. 12. Sit A centrum Terræ, in quâ duo loca sint B & C: Horizontes eorum Visibiles determinent tangentes B F N, C F M. Quia phœnomenum simul apparere ponitur in utroque, necesse est illud sit in communi sectione F. Ducantur rectæ A D F G, A B, A C. Quia B F, C F æquales sunt per *corol.* 2. *p.* 36. *lib.* 3, liquet triangula A F B, A F C sibi mutuò æquilatera esse. Undè anguli B A F, C A F æquales sunt, ac semisses totius B A C. Quare cùm detur arcus distantiæ B D C, adeoque & angulus B A C, etiam semisses B A F, C A F notæ erunt. Quoniam igitur in triangulo A F B, rectangulo *a* ad B, notus sit B A F, etiam *b* notus erit B F A Parallaxis quæsita.

a *Per* 18.3.
b *Per* 32. 1.

Hunc in modum si distantia locorum B C sit Grad. 177. 30', Altitudo phœnomeni A F reperietur semidiametrorum Terræ 47; si Grad. 178. 48', erit semid. Terræ 90. ita calculus Riccioli in Tabellâ *lib.* 10. *Almag. pag.* 629.

NUMERUS IX.

Aliis quibusdam viis an phænomenum Parallaxi sit obnoxium, cognoscere.

§. 1. Ope filaris trianguli ad normam erecti, de quo Ricciolus agit *Almag. lib.* 5. *cap.* 15. *num.* 16, & nos ex illo, *lib.* 3. *num.* 2. observa an phœnomenum cum duabus stellis in ejusdem Verticalis plano existat; quod quidem in tantâ stellarum multitudine facilè continget. Deinde eâdem vel aliâ nocte, quando Fixæ illæ ob motum Primi Mobilis à præcedenti plano notabiliter declinaverint, filare triangulum sic inclina, ut oculo post ipsum posito rursum eædem stellæ in ejus plano appareant, si tum etiam phœnomeni centrum adhuc in plano illo existat, nullam subire Parallaxim concludes.

§. 2. Si phœnomeni distantia ab iisdem Fixis eodem momento in quibuslibet diversis Terræ locis observata, sit eadem, phœnomenum carebit Parallaxi.

§. 3. Si phœnomenum, *e*, existat cum duabus Fixis *g*, *h*, in lineâ rectâ, itaque semper permaneat, situ quomodocumque ob motum Primi Mobilis immutato, ut in E, G, H, phœnomenum nulli erit Parallaxi obnoxium. Vide tamen §. 4. *num. seq.* Fig. 8.

§. 4. Sit phœnomenum, quòd præter motum Primi Mobilis feratur Vero motu sibi proprio per eundem maximum circulum. Si id in duobus sitibus notabiliter diversis cùm iisdem binis Fixis rectam lineam constituat, carebit Parallaxi.

NUMERUS X.

Fallacia quædam Parallactica.

Longè omnium perspicacissimus in hoc negotio fuit Ricciolus noster, uti patet ex *lib.* 8. *sect.* 1. & 2, quæ librum benè magnum conficiunt. Ex illo sequentes regulas delibo.

§. 1. Si phœnomenum Parallaxim habens sensibilem motu Vero describat circulum maximum, motu Viso non describit: & vicissim si Viso describat, non describet Vero.

§. 2. Potest phœnomenum sensibili Parallaxi obnoxium esse, & tamen motu Viso describere circulum maximum. Quamvis enim motu Vero non describeret circulum maximum, posset tamen phœnomeni, partim Parallaxis, partim motus tortuosus efficere, ut in ejusdem maximi circuli plano phœnomenum appareat remanere.

§. 3. Quamdiu non constat de Parallaxi phœnomeni, non potest ex solo motu Viso certò cognosci an describat motu Vero circulum maximum; potest tamen probabiliter.

§. 4. Ex eo solo quòd phœnomenum perseveret in eâdem distantiâ ab iisdem Fixis ex unico Terræ loco observatâ, non potest certò concludi id Parallaxi carere, aut solo motu Primi Mobilis affici. Posset enim continuatio ejusdem distantiæ conferri in motum phœnomeni proprium irregularem ejusmodi, qui Parallaxim perpetuò elidat.

Adverto nihilominùs carentiam Parallaxis hinc concludi valdè probabiliter, imò certò moraliter. Vix enim erit credibile motum phœnomeni esse talem præcisè, qui Parallaxim tam constanter & exactè elidat.

§. 5.

Fig. 9. §. 5. Quamvis valdè parva reperiatur differentia Parallaxium ex observationibus factis in locis Terræ diversis, potest nihilominùs Parallaxis phœnomeni esse magna, & multò Lunari major. Si enim loca E, O non essent valdè distantia, & phœnomenum D Horizonti propinquum, satis ex ipso tum schemate apparebit ODE Parallaxium differentiam fore exiguam, quamvis Parallaxes ipsæ ADE, ADO sint magnæ.

Hæc delibasse modò sufficiat: qui plura desiderat, legat Riccioli *cap. 10. sect. 5. lib. 10.*

CAPUT III.

An Cometæ & Novæ Stellæ, quæ ab Anno 1572 apparuerunt, suprà vel infrà Lunam extiterint.

Tycho & Astronomi celebriores plerique uno consensu suprà Lunam evexerunt, unus ferè adversùs omnes Claramontius Astronomus etiam ipse, pluribus eo argumento libris editis infrà Lunam deprimere conatus est. Acerrima utrimque fuit ac diuturna contentio, Astronomis passim in Claramontium insurgentibus, ipso interim minimè se deserente, sed novis responsionibus adversariorum impetus repellente. Integra volumina pervolvat exeutiatque necesse est, qui judicium ferre de controversiâ voluerit. Id mihi quidem haud vacat, neque, si vacaret, luberet ad alia festinanti. At libuit vacavitque Ricciolo nostro, qui hoc in negotium eâ diligentiâ conatuque incubuit, ut nihil in eo genere accuratiùs subtiliusve præstari à quoquam posse existimem. Primis duabus libri 8. *Almag.* sectionibus, quæ si seorsim exeuderentur, librum benè magnum conficerent, utriusque partis demonstrationis prætentas, argumentaque omnia, mirâ subtilitate examinat, expensisque omnibus, de singulorum phœnomenorum sede in universo pronunciat; ejusque demùm ea sententia est, à nullo hactenùs demonstratum esse, è novis phœnomenis ullum, quæ ab Anno 1572 apparuere, suprà Lunam fuisse. In quo quidem quod ad demonstrationem absolutam pertinet, quamvis illi non gravatè assentiar, vereor tamen ne Lectoribus suis, quantumvis protestetur ipse nitaturque contra, in Claramontium propensior quàm in Tychonem fuisse videatur.

NUMERUS XI.

Satis constat novam Stellam, quæ Anno 1572 in Cassiopeâ apparuit, longè suprà Lunam extitisse.

Ita sentiunt cum Tychone authores 36, inter quos Astronomi celeberrimi plerique omnes. Fuisse in firmamento aut ei proximam sensit inprimis ipse Tycho, qui integro id volumine demonstrare conatus est, eique adstipulantur Longomontanus, Keplerus, Hagecius, Hainzelius, Mæstlinus, Gemma, Munosius, Maurolycus, Clavius, Blancanus, Barazanus, Argolus, Galilæus, Licetus, Fromondus, Santutius, Camillus, Gloriosus, Raymundus, Frangipanus, Cartesius. Fuisse saltem inter orbes Planetarum asseruêre Langgravius Hassiæ, Fabricius, Vallesius, Reinholdus junior, Peucerus junior, Sculerus, Prætorius, Ioannes Dee, Appianus junior, Benedictus, Diggesæus. Contra tot tantosque viros Scipio Claramontius duobus libris Anti-Tychonis sui hanc Stellam infrà Lunam reponere conatus est. Riccioli judicium examinatis utriusque partis rationibus est probabiliter hanc Stellam infrà Lunam fuisse, sed probabiliùs suprà. Quod nimis benignè videtur pro Claramontio pronunciatum fuisse.

Fatetur enim Ricciolus *lib. 10. pag. 165*, si hæc Stella ubivis terrarum & eodem tempore observata fuerit eamdem servasse ad easdem Fixas positionem, sive eùm altissima esset, sive cum Horizonti propinqua, haud dubiè Parallaxi sensibili caruisse. Concedit deinde id quidem in diversis Terræ locis quamplurimis observatum fuisse, sed negat constare an eodem tempore. Atqui ego contendo, licet de *eodem tempore* non constaret, alterum sufficere ut Claramontij opinio omninò improbabilis habeatur. Si enim, quod ex historiâ observationum constat, à tot peritissimis observatoribus in diversissimis regionibus numquam potuerit deprehendi hujus Stellæ, sive cùm Horizontem stringeret, sive cùm sublimis extaret, immutatam sensibiliter fuisse ad easdem Fixas positionem distantiamve, dicaturque nihilominus Parallaxim habuisse sensibilem, & Lunari majorem, necesse fuit eam proprio quodam motu agitatam fuisse præcisè tali, qui Parallaxim illam & ex variatione continuâ Diurnæ Altitudinis suprà Horizontem & ex ipsâ locorum diversitate semper aliam atque aliam, ita præcisè constanterque eliserit, ut ea neque tanto temporis intervallo (15 omninò menses fuêre) neque in locis tam diversis & tantâ observationum multitudine, adverti ab ullo umquam notarive potuerit. Talis porrò motus cùm improbabilis omninò sit & prorsus inane commentum, profectò etiam Parallaxis novæ Stellæ Lunari major omninò improbabilis & commentitia erit.

NUMERUS XII.

Satis etiam constat, Stellam novam quæ ab Anno 1600 usque ad 1621 & fortè ultra in Cygno apparuit, & illam quæ Anno 1604 visa est in Serpentario, Parallaxi sensibili caruisse.

Prior enim quotcumque noctibus, & ex quibuslibet Terræ locis tam cùm propior esset Vertici, quàm cùm propinqua Horizonti, per annos plures quàm 20, visa fuit in eodem *Cygni* loco, eademque ab ijsdem Fixis distantiâ. Quare eodem argumento, quod pro Stellâ Anni 1572 *praced. num.* jam formavimus, moraliter certò evincitur Parallaxi sensibili caruisse. Quod autem observationes hujus Stellæ non sint memoriæ commendatæ, indè factum videtur, quòd eas Astronomi supervacaneas esse ducerent, videntes hanc Stellam tot jam annos eodem cæli loco hærere.

Eodem modo Stellæ in *Serpentario* enatæ supralunaris sedes probabitur. Nam neque illa anni spatio, quo duravit, ab ullo observata est distantiam ab ijsdem Fixis valdè sensibiliter immutasse.

NUMERUS XIII.

De sede Cometarum qui ab Anno 1577 apparuerunt.

QUinque sunt Cometæ præcipui, de quorum loco in universo à recentioribus dimicatum est. Primus effulsit Anno 1577, secundus 1585; tertius 1590; quartus 1607; quintus 1618. Astronomi præcipui suprà Lunam extulêre: Claramontius suum institutum tenens, ut secundùm Peripateticæ Philosophiæ placita omnem à cælis corruptionem excluderet, acerrimâ contentione infrà Lunam omnes deprimere conatus est.

Cometam Anni 1577 suprà Lunam constituunt Tycho, Mestlinus, Lantgravius Hassiæ cum Rothmanno, Hagecius, Gemma, Reslinus, omnes Astronomi præstantes: Et fatetur Ricciolus *lib.8. pag. 90*, eorum, sed potissimùm Tychonis argumenta tam multa esse ac tanta confirmationum varietate stabilita, ut parùm absint à demonstrationibus absolutis. Quare censet probabilius illum suprà Lunam fuisse.

Idem ferè propter Tychonis & Rothmanni argumenta sentit de Cometâ Anni 1585. Tychonicis etiam argumentis illum qui fulsit Anno 1590 potiùs suprà Lunam, quàm infrà videtur statuere. Cometam verò Anni 1618 probabile est, inquit, fuisse suprà Lunam, ita tamen ut oppositum non sit improbabile. At manifestè Claramontio favet in Cometâ Anni 1607, expensis utrimque rationibus, affirmans probabiliùs infrà Lunam extitisse. Mihi operæ pretium non est istis diutiùs immorari. Qui partium fundamenta cognoscere desiderat, authores ipsos, vel potiùs Ricciolum adeat omnium argumenta ad examen labore indefesso revocantem.

Scholium.

De generatione & origine Cometarum, de Caudæ figurâ & situ, cur modò recta sit, modò curva, cur aliquando dilatetur ad modum scopæ vestiariæ; unde illa vibratio, quâ fit ut subitò brevis ex longâ appareat, & contra; de his inquam aliisque similibus attingo pauca, quia pauca scio. Me tædet Mathematicis ratiociniis assuetum conjecturis referendis excutiendisque immorari. Ne tamen te Lector omninò jejunum demittam, hæc pauca accipe.

Videtur cauda Cometæ oriri à radiis Solis per caput Cometæ trajectis, qui per refractionem collecti, ac proinde redditi intensiores, in materiam incidant minùs densam quidem, sed tamen similem ei ex quâ Cometa coaluit, eamq; illuminent. Sic enim causa datur cur cauda semper ad plagam Soli oppositam porrigatur. Quia porrò Cometæ caput, ut tubi optici experimento constat, non conflatur ex materiâ homogeneâ, sed ex pluribus corpusculis polyangulis; hinc fit ut refractio maximè varia ac multiformis existat: atque ex illâ refractionum varietate diversa illa ac multiplex caudarum forma fortassis enascitur. Imò etiam caudæ sinuatio oriri à refractione potest, si materia Solares radios excipiens, sit multùm difformis in densitate: facit enim illa medii difformitas, (quod in Dioptricâ [a] Deo favente ostendam) ut radius refractus quamcumque figuram accipiat. Quod si Cometæ cauda non aliundè quàm à Sole splendescat, videtur neque caput aliundè quàm à Sole illustrari. Materia porrò ipsa, ex qua Cometarum tam capita quàm caudæ coalescunt, videntur esse quædam Solis, & fortè etiam Planetarum, profluvia. Ex Sole enim, quasi è fornace quadam immensâ, maculas illas notissimas ac faculas ebullire satis arbitror à Scheinero nostro in Rosa Ursina *ostensum fuisse: & quidem Anno 1618, quo tres Cometæ sunt visi, nulla circa Solem macula apparuère. Sed jam conjecturarum satis: qui plures desiderat, legat Tychonem, Longomontanum, Keplerum, Galilæum, Cysatum, Cabæum, Ricciolum, aliosque.*

[a] *mors Authoris Dioptricam ejus intercepit.*

TRACTATUS TERTIUS
DE LUCE ET MACULIS SOLIS AC LUNÆ.

NUMERUS I.

De lumine primario Lunæ.

LUnæ duplex est lumen; primarium & secundarium. De secundario agam *num. sequenti*: hîc paucis de primario.

Inprimis certum est lumen Lunæ primarium esse à Sole. Hoc patet ex totâ phasium ejus varietate, & potissimùm ex Eclipsi: videmus enim quod in plenilunio umbram Terræ ingressa illicò pro ratâ portione, quâ ingreditur, lumine destituatur. Quare vanum est Berosi commentum relatum à Plinio, fingentis unum Lunæ hemisphærium esse ex se lucidum & candens, alterum obscurum & lucis expers.

Sed quæritur, quomodo Solis lumen ad nos Luna transmittat. Putarunt nonnulli veteres transmittere instar speculi. Error est manifestus, 1, quia Luna non est polita & tersa, sed inæqualis & aspera, ut patebit [a] *infra*. 2. Quia si Luna Solis lumen instar convexi speculi reflecteret, non nisi unicum ejus punctum [b] dato oculo C appareret illuminatum à Sole A: tunc enim Luna non nisi unicam Solis imaginem ad nos reflecteret, quæ tum ex naturâ figuræ convexæ, tum propter distantiæ magnitudinem instar puncti appareret.

[a] *num. 5.*
[b] *Fig. 14.*

NUMERUS II.

Modus quo Luna & Planetæ Solis lumen ad nos reflectunt.

REm omnē octo quasi pronunciatis complector.

I. Superficies perfectè plana est, cujus omnibus partibus recta linea congruit.

II. Su-

II. Superficies perfectè curva est, quæ plana non est, & tamen omni angulo caret.

III. Superficies curva est convexa vel cava.

IV. Igitur superficies omnis est perfectè vel plana, vel convexa, vel cava, vel ex his composita: neque enim potest alia superficiei inflexio excogitari.

V. Superficies æquabilis, seu polita & specularis est, quæ perfectè vel plana, vel convexa, vel cava est: quælibet enim harum caret omni angulo, hoc est omni inæquabilitate.

VI. Superficies inæqualis, seu aspera & scabra, ex multis minutis superficieculis perfectè planis, concavis, convexis variè inter se permixtis componitur. Neque enim aut alia superficierum species, aut processus in infinitum dari potest.

VII. Cùm igitur superficieculæ perfectè planæ, convexæ, concavæ, omnes sint speculares per quintum pronunciatum, superficies aspera nihil aliud erit, quàm innumerabilium ac minutissimorum specillorum mixtura, quorum alia plana sint, alia cava, convexa alia: quæ cum situ multiplici varijsque angulis inter se sint permixtæ nexæque, inde fit ut corpora asperam habentia superficiem, radios sibi incidentes non in unam partem aliquam, sed in omnes quaquaversùm reflectant. Atque hic modus est verus & unicus, quo Luna & Planetæ Solare lumen ad nos transmittunt.

VIII. Quamvis Lunæ vel corporis alterius asperi superficies ex multis specillis constet, non exhibet tamen distinctam Solis imaginem. Sunt enim specilla illa & innumera & minutissima & infinita situs varietate inter se contexta; & quæ ex illis sunt plana vel concava, non nisi minimas Solis particellas repræsentant; quæ verò convexa, totum quidem Solem referre possunt, sed puncti instar. Quæ apparentiæ tam multiplices conciſæque, & tantâ situs varietate inter se commixtæ, non distinctam ullam Solis imaginem, sed merum lumen repræsentant, quasi si quis statuam dividat in millenas particulas, easque deinde confuso ordine iterùm conjungat. Quâ egregiâ similitudine usus est vir subtilissimus, mihique, dum viveret, in studijs conjunctissimus Ignatius Derkennis è Societate Jesu, in opere suo præclarissimo, *a* quod de Deo Uno, Trino, Creatore conscripsit: cui cùm meam hanc speculationem, ut solebam ejusmodi omnia indicarem, ipsum comperi in eamdem incidisse. *Vide caput ipsius tertium ad Diem Mundi quartum pag.* 622. 623. 624. 625.

a Pag. 615. *in Die Mundi quarto.*

NUMERUS III.

De lumine secundario Lunæ.

§. 1. Phœnomena hæc sunt.

1. Ante & post Novilunium in phasibus nimirùm primis ac ultimis Lunæ sereno cælo & longiùs à luce crepusculanâ post occasum Solis vel ante ortum spectatæ pars obscura apparet similis cineri incenso & lucidè albicanti; estque lumen hoc secundarium, si cornu luminoso Lunæ post caminum aliquem aut obstaculum aliud latente, ipsum solum spectetur subinde tam intensum, ut *Saturni* splendorem quandoque æmulari videatur. Ubi etiam hoc imprimis admirationem movet, quod albicans isthæc lucula elarior & intensior ante, quàm post Novilunium appareat. Diebus deinde Novilunium consequentibus vel antecedentibus, quò Luna longiùs à Sole abest, eò lumen istud secundarium fit remissius, sic ut in Quadraturis penè sit nullum, nec nisi adultâ jam nocte notari possit. Præterea circa marginem Lunæ obscurum apparet intensius quàm in medio, videturque instar annuli Lunam ambire. Sed hoc merum est ludibrium oculorum, inde ortum quod fulgor iste secundarius circa marginem longiùs à cornu illuminato distans, ab eo hebetetur minùs, quàm circa medium. Itaque si cornu lucido post caminum aliquem (ut dixi) latente, pars obscura spectetur sola, apparet splendore illo secundario uniformiter perfusa, dicto annulo penitùs evanescente.

2. In Plenilunijs Eclipticis, quando Luna deficit tota, sæpiùs tamen visa est luce aliquâ variè coloratâ sublucere, potissimùm versùs marginem.

3. In Solis deliquio centrali subinde visus est lucidus annulus circa discum Lunæ Solem suo interpositu obducentis. Deliquia Solis ejusmodi præ cæteris certiora sunt omninò tria. Primum est observatum à Clavio Romæ Anno 1567. die 9 Aprilis, qui c. 4. in Sphæram affirmat Solem non totum defecisse, sed relictum fuisse exilem quemdam circulum lucentem circumcirca. Secundum observavit Torgæ in Misniâ Doctor Jessenius Anno 1598. mense Februario: erat ferè centrale totò Solis margine prominente instar lucidi circuli. Ita ex Keplero Lansbergius in *Thesauro observat. pag.* 114. Tertium observavit ipse Lansbergius Goësæ Anno 1601, Dec. 24. Luna tota intra Solem sic erat, ut Boreus Lunæ margo tangeret Boreum Solis, Austrinus verò Lunæ distaret ab Austrino Solis Minutis 6¼.

Hæc sunt phœnomena, quorum causas ut assignem, à postremo exordiar.

§. 2. Tertij igitur phœnomeni causa est, quod in deliquijs ejusmodi centralibus aut ferè centralibus, diameter Apparens Lunæ fuerit minor diametro Apparente Solis; hoc est, quòd angulus sub quo spectabatur Luna, minor esset angulo, sub quo Sol. Unde factum est ut Luna, quamvis tota oculum inter Solemque esset interposita, Solem tamen totum non tegeret. Tycho annulares has Eclipses omninò negat contra observationum historias adeò testatas, quòd illas ipse ex suo calculo præstare non posset, qui Lunæ diametrum Apparentem numquam minorem esse diametro Apparente Solis statuisset. Keplerus contendit lucidum illum annulum fuisse aërem, sive mavis, ætherem circumsolarem, qui modò rarior sit, modò satis densus ut possit ex Solis radijs splendescere. Quæ causa si non sufficiat, aliam adjungit, aërem nempè densiorem, sive vapores Lunam ambientes ex ejus maribus ac lacubus eductos, in quos Solis radij incidentes refractique Solem augeant, ultraque Lunæ marginem circumquaque faciant eminere. At hæc vera si essent, sæpiùs deberet hoc phœnomenum apparere vel totum, vel ex parte; apparet autem rarissimè.

§. 3. Quod ad secundum phœnomenum attinet, lucula illa variè colorata quâ Luna in totalibus Deliquijs suis imbuta cernitur, provenit à Solis radijs per vapores Terram ambientes trajectis refractisque. *Vide Keplerum in Astronomiâ Opticâ toto cap. 7.*

§. 4. Venio ad primum. De origine lucis secundariæ in Lunâ, è multis opinionibus, duæ sunt præcipuæ. Prior eam refundit in radios Solis à lucido Terræ hemisphærio reflexos ad portionem Lunæ obscuram, atque inde reflexos denuò ad hemisphærium Terræ directâ Solis luce destitutum: altera in Solis radios per totum Lunæ corpus utcumque diapha-

num tralucentes. Priori magis assentior, quia omnes phœnomeni partes egregiè explicat. Sic enim datur causa, cur splendor ille secundarius maximè appareat ante & post Novilunium, quia tunc videlicet Luna Soli proxima situm habet aptissimum, ut radios Solis quàm plurimos ab illuminato Terræ hemisphærio reflexos parte sui obscurâ excipiat: quò autem longiùs à Sole abfuerit, eò excipiet pauciores. Unde etiam fit ut in Quadraturis hæc lucula evanescat penè tota, quia nempè Solares radij à Terræ hemisphærio luminoso reflexi, jam vix ulli possunt ad obscurum hemisphærium Lunæ, utpotè Gradibus 90 à Sole distantis, pertingere. Datur item causa cur in Deliquijs Solis totalibus lucula illa adeò tenuis & obscura appareat, quia videlicet Luna Soli objecta intercipit partem maximam eorum radiorum, qui ad ipsam fuerant reflectendi à Terrâ. Postremò datur causa cur in phasibus postremis ante Novilunium intensius fit hoc phœnomenum, quàm in phasibus primis post Novilunium. Nam antè Novilunium spectatur hoc phœnomenum in Oriente antè Solis ortum, ac proinde globi Terraquei portio Solare lumen tunc ad Lunam reflectens, tota Terrestris est, Europam videlicet ferè omnem Asiamque, & Africæ partem complexa. Post Novilunium verò spectatur phœnomenum in Occidente post occasum Solis, adeóque terraquei globi portio, quæ Solares radios ad Lunam tunc reflectit, majori ex parte aquis constat, cùm Oceanus antiquum orbem novumque interfluens, latissimè respectu harum regionum in Occidentem porrigatur. Est verò manifestum Terras validius lumen reflectere quàm aquas, uti etiam *infra* a ostendam. Habitantibus in Brasiliâ & novà Franciâ, quibus in Occasum Americæ continens porrigitur, in Ortum verò Oceanus idem diffunditur, contrarium apparere debet. Quare ex illis locis causæ jam allatæ confirmatio expectanda. Hæc consideratio egregia profectò & elegans est Nicolai Succhij è Societate Jesu, in *Opticâ Philosophiâ pag.* 252, qui totum hoc phœnomenum à *pag.* 247 *usque ad pag.* 260 eruditè pertractat.

a *num. seq.* §. 3.

Non desunt quæ adferri contra possint. Ricciolus *lib.* 4. *Almag. pag.* 200 & 201 argumenta 10 enumerat solvitque: è quibus cùm nullum sit quod magnoperè urgeat, ea præterire visum est. Fuit etiam qui ex Catoptricæ fundamentis se demonstrasse arbitratus est incapacem esse terram, quæ tantùm lucis ad Lunam transmitteret. Sed illum Succhius *pag.* 253. & *seq.* solidè confutavit. Paralogismus potissimùm in eo situs est, quod author ille supponeret lumen à Terrâ reflecti tamquam à speculo; quòd planè falsum, est enim Terra inæqualis atque aspera, ac proinde eo modo reflectit, quem *num.* 2. *suprà* exposui.

§. 5. Contra opinionem alteram, quæ hoc phœnomenum in transparentiam Lunæ refundit, hæc faciunt. 1. Si radij Solis totam Lunæ spissitudinem duo circiter milliariorum millia æquantem penetrare possunt, penetrabunt multò magis apices illos montium Lunarium, qui fulgentissimi apparent, cùm reliquæ circum partes adhuc obscuræ sunt; ac proinde radij per illos apices trajecti deberent etiam partes disci obscuras viciniores illustrare, quod experimento repugnat: neque aliud responderi potest, quàm solos montes illos penitùs opacos esse: quod parum credibile est, quando totum corpus Lunæ reliquum esse diaphanum asseritur. 2. Si lux secundaria est à radijs Solis transparentibus, non minùs illa appareret in Quadraturis, quàm propè Novilunium, quod phœnomeno repugnat. Responderi posset non apparere ob splendorem Lunæ primarium tunc, quàm antea, majorem. Sed hoc effugium præcluditur, si parte Lunæ primario lumine illustratà post tectum aliquod vel caminum latente, obscura videatur sola, in eà quippe ne tum quidem alborem illum, qui propè Novilunia vividus cernebatur, nisi ægrè ac ferè extinctum notabis.

NUMERUS IV.

Lunarium Macularum phænomena.

§. 1. Lunares maculæ sunt antiquæ & novæ: illæ nudo oculo sunt conspicuæ, lacusque ingentes ac maria imitantur: has, ob parvitatem, visus nisi tubo optico instructus non percipit. Primi observatores ijdem fuêre, qui macularum Solarium, Galilæus & Scheinerus, sed rudi adhuc minervâ, si cum subsecutis aliorum conatibus comparentur. Exactam hoc in genere operam primus exantlavit Michaël Florentius Langrenus, Catholici Regis Cosmographus, qui schema Novilunij suâ manu in æs incisum jam pridem evulgavit, in quo maculas 270 à se observatas expressit, opus de his integrum & alia schemata 30 promittens. Hunc subsecutus Ioannes Hevelius librum de Lunæ maculis elegantiâ & multitudine schematum suâ etiam manu sculptorum, & copiâ atque ubertate doctrinæ spectandum publicavit. Horum vestigijs insistentes Ricciolus, & inprimis Grimaldus, Selenographiam proprijs observationibus augere atque perficere conati sunt: & affirmat de Grimaldo Ricciolus eum tantùm solertiæ, fidei, ac diligentiæ in hoc studium contulisse, ut nihil hoc in genere perfectius sperari posse existimet. Astronomi judicabunt, ubi, quod nondùm accidit, liber eo argumento conscriptus prodierit.

§. 2. Qui Lunæ vultum inspicere accuratiùs & contemplari desiderat, telescopio instructus sit oportet, non qualicumque, sed eximio & benè longo. Ejusmodi instrumento in Lunam directo, visui sese offeret Lunæ facies admirabili varietate destincta. Cernes primùm partes majores, quæ maria, paludes, scopulos, flumina, insulas peninsulasque, ac continentem Terræ nostræ repræsentent: maculas deinde minores per totum Lunæ discum ingenti numero sparsas conspicies: earum numerus in Plenilunio Grimaldi ad sexcentas excrevit, *non quod plures* (inquit Ricciolus) *non observaverimus; sed quia reliquæ ob sui parvam profunditatem aut eminentiam aut certè exilitatem, rarò, nec nisi cùm primò aut ultimò Solis lumen attigerint, distingui possint: quæ sanè innumerabiles sunt, adeò ut tota Lunæ superficies nobis conspicua hu veluti glebulis aspera sit, seu scrupea aut crepidinosa.*

§. 3. Partes Lunaris disci majores illæ, quas lacus & maria vocavimus, apparent subobscuræ; illæ verò quas Terræ continenti assimulamus, albæ protsus & lucidæ. Minores maculæ partim obscuræ sunt, partim lucentes & claræ. Minorum igitur illæ, quæ lucent, montes sunt ac rupes, ut *num. seq.* demonstrabitur; quæ verò subnigræ, valles sunt. E majoribus quæ obscuriores apparent, videntur esse fluidæ; quæ clariores, solidæ instar continentis nostræ: id colligitur insigni experimento. E monte sublimi, hinc terras inde maria contemplanti Sole lucente hæc pallida

&

& subobscura; illæ albicantes ac splendidæ conspiciuntur. Ita mihi è vertice turris Antverpiensis, quæ pedes alta est 440, hinc Scaldis æstuaria latissimè Zelandiam versùs Hollandiamque diffusa, inde spatia Terræ longissimè patentia apparuêre.

§. 4. Maculis porrò tam minoribus quàm grandioribus, ut discerni inter se possent, sua singulis nomina indidêre Langrenus, Hevelius, & cum Grimaldo Ricciolus, sed diversa singuli. Optandum fuit ut iisdem omnes nomenclaturis uterentur. Ita laborem studiosis minuissent.

NUMERUS V.

Luna non est æqualis, sed aspera, montibus vallibusque distincta.

Demonstratur evidentissimis experimentis.

1. Si Luna telescopio inspiciatur tam cùm est dichotoma, sive dimidia, quàm ante & post dichotomiam, linea dividens partem lucidam ab obscurâ, manifestè cernitur multis anfractibus intercisa interruptaque: indicio evidenti partes alias alijs esse elatiores.

2. Die circiter quartâ post Novilunium, & insequentibus, in parte Orientali Lunæ adhuc obscurâ, apparent quædam cuspides luminosæ tamquam scopuli aut parvæ insulæ à portione illuminatâ separatæ. Contrà, decrescente Lunâ in portione Occidentali Solis lumine jam destitutâ, cernuntur ejusmodi cuspides adhuc lucentes, & à continente luminosâ itidem avulsæ. Quid verò aliud sint cuspides istæ, quàm Lunæ montes ac rupes, quæ ut excelsis Terræ montibus contingit, & citiùs illustrentur à Sole, quàm valles, & seriùs lumine destituantur. Neque dici potest partes illas, quæ inter cuspides prædictas & lucidam Lunæ portionem interjacent, tenebrosas esse, non quia sint alijs depressiores, sed quòd ob nimiam vel densitatem vel transparentiam sint luminis incapaces: sic enim illæ deberent semper apparere obscuræ, quod observationi repugnat; quà constat etiam ipsas crescente Lunâ aliquantò post apices illustrari, prorsus ut in Terrâ valles aliquantò seriùs quàm montes illuminantur.

3. Lunares maculæ in splendido Lunæ disco umbras projiciunt ad partes Soli oppositas, in Orientem videlicet Lunâ crescente, in Occidentem decrescente. Montes igitur sint necesse est.

Sunt porrò hi montes sublimes & excelsi. Artificium altitudinis eorum mensurandæ vide apud Ricciolum *pag.* 208. *& in Geom. Practica nostra cap.* 8. *Probl.* 2. Ille, quem *S. Catharina* Ricciolus appellat, ad duo saltem unius horæ milliaria attollitur.

Quæret aliquis cur in ambitu Lunæ plenæ, item in margine Occidentali Lunæ crescentis, & in Orientali margine decrescentis asperitates nullæ appareant.

Respondeo 1. quia nullæ ibi sunt.

Respondeo 2. etiam isthic, quamvis rariùs, apparere tunc videlicet, quando disci Lunaris libratio (de quâ *numero seq.*) eas conspectui exhibet, aliàs ultra limbum vel citra constitutas.

NUMERUS VI.

Multiplex libratio Lunæ per Maculas detecta.

Primus observavit Galilæus; tum Langrenus; deinde Gassendus, Bullialdus, Hevelius, & è Societate nostrâ Succhius, Bartolus, Sirsalis, Grimaldus. Ab his observatum est maculas propè limbum Occidentalem positas, jam accedere ad limbum, jam recedere; cùm verò hæ accedunt, tunc maculas illis oppositas à limbo Orientali recedere & contra. Ex quo Lunæ libratio ab Oriente in Occidentem, & ab Occidente in Orientem innotuit. Observarunt ijdem maculas propè limbum Boreum existentes ad eundem accedere & recedere; cùm autem illæ accedunt, tunc maculas oppositas ab Australi limbo recedere, & contra. Unde libratio ab Austro in Boream & à Boreâ in Austrum deprehensa fuit. Pari modo librationes aliæ à binis prioribus declinantes sunt observatæ. Quare necesse est polos & axem ejus vertiginis, quâ Luna circa suum centrum libratur, multipliciter variari, ut librationes in plagas tam diversas possint explicari. Quantitas librationis maximæ, sive arcus maximi Lunæ circuli, quem librationis beneficio modò versùs unam partem, modo versùs oppositam videmus, aliàs non visuri, à Ricciolo colligitur Grad. 27. 31'. 48". Maculæ igitur quæ toto illo spatio continentur, modò conspicuæ sunt, modò conspectui subducuntur. Librationis periodus, hoc est tempus à maximâ ejusdem maculæ distantiâ à limbo Lunæ ad maximam sequentem, Bullialdo est dierum 26, Hevelio dierum circiter 28. Unde satis constat neque multò majorem esse diebus 28, neque multò minorem 26. Qui de his plura desiderat, legat Bullialdi *cap.* 13. *lib.* 3. *Selenographiam* Hevelij, & Riccioli *cap.* 9. *lib.* 4. *Almag.*

NUMERUS VII.

Macularum Solarium phænomena.

Maculas in Sole primi observarunt Christophorus Scheinerus è Societate Jesu, & Galilæus Galilæi. Hic illum plagij arguere, seque primum asserere phœnomeni observatorem conatus est eo libro, quem Italicè conscriptum Trutinatorem appellavit. At Scheinerus Rosæ Ursinæ *lib.* 1. evidentissimis rationibus planeque convincentibus se purgavit: & quamvis primam inventionis laudem sibi non arroget, contentus affirmare, se suas observationes à nullo alio accepisse, ipsius tamen cum aliorum observationibus chronologica comparatio satis indicat primum ipsum macularum observatorem fuisse. Tantâ porrò diligentiâ, fide, assiduitate ac industriâ bis mille peractis observationibus, hoc phœnomenum scrutatus est, ut nihil aut sperari possit aut optari hoc in genere præstantius. In manibus est *Rosa Ursina*, volumen amplum & eruditum: ad hoc Lectorem de his judicaturum remitto.

§. 1. Duobus modis præcipuis hoc phœnomenum observatur. Primus tubo optico vitris coloratis instructo Solem directè contemplatur. Altero Solis species unà cum maculis cubiculo mediocriter obscurato per foramen in chartâ excipitur. Sed foramini applicanda est vel una lens convexa, vel (quod melius est) telescopium. Lege Scheinerum *lib.* 2. de toto observationis modo accuratissimè differentem.

§. 2.

§. 2. Præter maculas in Sole conspiciuntur faculæ & umbræ. Nomine umbrarum veniunt tenuissimæ quædam & informes partes quasi fumo vel nebulâ Soli aspersæ. His Solis tota facies infecta conspicitur planè ut syndon candidissima telâ subtili araneæ, vel ut tersissimum speculum manus contactu, orisve halitu. Facularum splendor reliquum corpus Solare plerumque vincit. Aliæ sunt candidissimæ, flavæ aliæ, hebetiores etiam & minùs lucentes nonnullæ. Macularum color niger aut cærulus. Ex his multæ nigriores apparent circa limbos Solis si cum alijs eoëant, quàm in medio: ubi quamvis nonnihil diaphanæ subillustrentur à Sole, sunt tamen maculis Lunaribus obscuriores.

§. 3. Macularum figura irregularis, & instabilis, ut nulla ferè postridiè appareat, qualis visa est pridiè. Numerus varius. Numeratæ quandoque sunt 50, subinde una alteráve, aliquando nulla, uti accidit Anno 1618 quo tres Cometæ arserunt, item Anno 1632 à die 12 aut 19 Iulij usque ad 15 Sept. quo tempore aura fuit siccissima.

§. 4. Maximæ maculæ decimam circiter partem obtinent Solaris diametri: mediocres trium sunt Minutorum, quantam nempè Scheinerus Apparentem *Veneris* Diametrum statuebat. Blancanus affirmat visam fuisse maculam, quæ partem quintam Solaris diametri occuparet; quæ proindè major fuit Terrâ. Galilæus majusculas maculas Asiæ simul, & Africæ æquales facit.

Fig. 13. §. 5. Maculæ & faculæ omnes moventur circa Solem, vel potiùs Sol circa suum centrum revolutus eas circumducit. Discus Solis conspicuus sit A D B E C, centrum Solis A, Eclipticæ segmentum B A C, limbus sive Horizon Solaris D B E C. Omnes igitur maculæ & faculæ, per discum Solis conspicuum moventur ab Oriente in Occidentem, per discum nobis inconspicuum ab Occasu in Ortum; estque periodus hujus motus Dierum 27. Est autem hic motus stabilis & constans, sic ut nulla macula unquàm visa sit aut stare, aut regredi, aut præcipitare. Bis in anno rectilineus est, aliàs curvilineus, ut *num. seq.* exponetur.

§. 6. Zona R O S X, intra quam pleræque maculæ existunt volvunturque, Gradus 60 non excedit, & ad utramque Eclipticæ partem porrigitur. Extra illam vagantur maculæ & faculæ secundariæ: sunt hæ in mutatione sui perpetuâ, ijsque Solis superficies ubique plena est.

§. 7. Maculæ & faculæ oriuntur, & occidunt non solùm Astronomicè, sed etiam physicè. Oriuntur aut occidunt Astronomicè, cùm videri ob Solis vertiginem in limbo Solis Orientali incipiunt, in Occidentali desinunt. Physicè oriuntur & occidunt, cùm realiter nascuntur, vel intereunt. Sic porrò nasci & interire certissimis experimentis constat. Nam 1. macularum pars maxima longè à margine Ortivo nascitur, augetur, & progreditur, donec in margine Occiduo Astronomicè occumbat. 2. Magna item pars oritur Astronomicè, sed antè prorsus intereunt quàm ad Occasum Astronomicum pertingant. 3. Multæ Astronomico neque Ortu neque Occasu potitæ, in ipso Solis disco conspicuo nascuntur pereuntque. 4. Quædam ab Ortu Astronomico ad Occasum perdurant; neque desunt, quæ post integram periodum dierum 27 redeant eædem. Majores autem maculæ plerumque absque Astronomico Ortu Occasúque deficiunt & evanescunt. 1. & 2. etiam in faculis cernitur. Pauciores tamen in medio Solis disco accenduntur: diutiùs enim perseverant quàm maculæ; & multæ (non tamen omnes) post dies 27 redeunt eædem: plurimæ autem intra anni unius spatium intereunt. Denique corruptionis indicium manifestum est, quòd maculæ aliquando nullæ appareant; neque minùs evidens istud, quod pleræque in faculas transformentur.

NUMERUS VIII.

De motu Macularum & Facularum.

Fig. 13. §. 1. Maculas moveri circa Solem, vel potiùs ipsas à Sole circa suum centrum rotato circumagi dictum est §. 5. *num. praced.* Nunc hujus motus proprietates præcipuas ex Scheineri observationibus recensebo.

1. Macularum eodem tempore apparentium itinera sunt similia & figurâ, & positione.

2. Omnes Macularum & Facularum viæ, seu itinera sunt rectilinea bis in anno, nempè circa finem Nov. ac initium Decembris, rursumque sub finem Maij & initium Iunij. Non sunt tamen viæ illæ ad Eclipticam B C parallelæ, sed ad eandem inclinatæ angulo π A B, seu ϑ A B Graduum circiter 7. Et Brumales quidem ab Ortu Australi ad Occasum Boreum tendunt, ut rectæ R V, ϑ β, P S: Æstivæ verò ab Ortu Boreo ad Occasum Austrinum, ut O T, π ω, Q X. Tempus, quo motus ille rectilineus perdurat, est dierum circiter 14.

3. Reliquo anni tempore viæ Macularum sunt curvilineæ hunc in modum. Ab initio Decembris incipiunt fieri curvæ, arcu intumescente sursum versùs Boream quotidiè magis magisque per menses tres usque ad Martij principium, quando curvitas est maxima; quæ exinde iterùm tres menses minuitur, donec ad finem Maij evadant, ut dixi, rectilineæ. Paulò post sub initium Iunij rursum incipiunt fieri curvæ per tres menses sequentes, sed arcu intumescente deorsum versùs Austrum, & sub Augusti finem iterùm curvitas est maxima: quæ deinde rursum decrescit, donec sub finem Nov. denuò rectilineæ conspiciantur.

4. Quando curvitas est maxima, videlicet sub initia Martij & Septembris, puncta Ortus, & Occasus æqualiter distant ab Eclipticâ B C: ut si macula quæpiam oriatur in R, eadem occidet in puncto X, sic ut arcus R B, X C æquales sint: & si macula alia oriatur in P, eadem occidet in puncto T æquè distito à C, ac P à B. Et sic de alijs.

§. 2. Ex hac vicissitudine constanti & annuâ colligitur Solis ac Macularum menstruam vertiginem fieri circa axem mobilem. Itaque motus Macularum theoriam Scheinerus ejusmodi constituit. Hemisphærium Solis conspicuum (quod ob vertiginem menstruam continuè variatur, & ob immensam distantiam apparet planum instar circuli) esto ADBEC; segmentum Eclipticæ sit B A C, segmentum axeos Eclipticæ D A E. Numerentur à punctis D, E utrimque Gradus 7, D F, D G, E F, E L, & per puncta F, G, item per K, L, descripti intelligantur duo circuli F I G H, L M K N, ad planum ADBEC perpendiculariter erecti. Sub initium Decembris axis, circa quem Macularum vertigo menstrua peragitur, jaceat in L A F, in ipso Solis disco ADBEC. Ita fiet, ut viæ Macularum appareant rectæ veluti R V, ϑ β, P S; & obliquæ ad Eclipticam obliquitate Grad. 7, quantus est arcus E L, vel D F; & ab

Ortu

Ortu Austrino tendentes ad Occasum Boreum. Moveatur deinde axis L A F extremitate sua L, per quandrantem nobis conspicuum L M, altero verò extremo F per quadrantem nobis conspicuum F H, sic ut ad initium Martij axis sit in M A H. Ita fiet ut cursus menstruus Macularum circa axem ita mobilem facti, appareant sensim incurvari in Boream, & curvitas maxima videatur initio Martij quando axis jacet in M A H, Ortusque Macularum & Occasus ab Eclipticâ B C appareant distare æqualiter. Inde usque ad initium Iunij axis percurrat quadrantes M K, H G. Sic continget ut curvitas apparens cursuum menstruorum sensim decrescat, & ad initium Iunij quando axis erit in K A G, in ipso rursum Solis disco, iterùm appareant rectilinei, sed tendentes ab Ortu Boreo ad Occasum Austrinum, ut rectæ O T, π ω, Q X. Hinc usque ad initium Septembris percurrat axis quadrantem conspicuum G I, & inconspicuum K N: ita fiet ut menstrui Macularum cursus iterùm curvescant sensim, sed versùs Austrum, & curvissimi appareant ad Septembris initium axe posito in I A N, rursumque sic videbuntur Ortus & Occasus ab Eclipticâ B C distare æqualiter. Quod si tandem feratur axis per quadrantes reliquos IF, NL, sic ut ad Decembris initium iterùm jaceat in F A L, curvitas viarum menstruarum iterum minuetur sensim, donec ad initium Dec. axe posito in F A L, tota evanescat, cursusque Macularum ex curvilineis iterùm rectilinei appareant.

NUMERUS IX.

Maculæ & Faculæ sunt in ipso Sole, aut propè eum.

DEmonstratur 1. Maculæ eodem tempore in locis Terræ diversis valdeque distantibus, etiam in Occidentali Indiâ, in eâdem parte disci Solaris sunt observatæ: & quando macula aliqua de novo exoritur, fit hoc ubique eodem tempore, & in loco Solis eodem: rursus cùm macula quæpiam centrum Solis aut Eclipticam attingit, ubivis terrarum attingere eodem tempore conspicitur. Ex quibus omnibus certò constat Maculas Parallaxi sensibili carere. Ergo Maculæ non solùm suprà Lunam, sed etiam longè suprà *Venerem* & *Mercurium* Perigeos sunt collocandæ. Imò Scheinerus hinc ostendit assumptis distantijs Tychonicis, eas esse Soli viciniores, quàm Sol in mediâ distantiâ sit sibi ipsi, cùm Apogeus est.

Demonstratur 2. Certum est Faculas Sole ipso esse lucidiores, id enim constat experimento oculari. Ergo si illæ sensibiliter à Sole distarent, deberent circa tempus quo oriuntur vel occidunt, extra limbum Solis orientalem vel occidentalem in ipso æthere aliquando conspici, cùm eas Sol utpotè se lucidiores nequeat suis radijs offuscare, & videantur quotidie in ipso Solis disco. Atqui Faculæ numquam sunt extra Solem conspectæ. Ergo à Sole sensibiliter non distant. Ex Faculis porrò idem de Maculis concluditur, eodem quippè prorsus motu cientur quo Faculæ: & Maculas quidem propè Faculas existere omninò certum est, cùm pleræque in Faculas transmutentur. Alijs idipsum argumentis quamplurimis Scheinerus *lib.* 4. *cap.* 55 confirmat. Sed ea quæ ex illo jam attulimus abundè sufficiunt.

Claramontius *lib.* 9. de Universo, quo ardore Cometas & Novas Stellas, eodem Maculas Solares infrà Lunam deturbare conatus est; at infelici successu: meros enim paralogismos attulit, ut egregiè & fusè ostendit Nicolaus Succhius, in *Philosophia Optica parte* 1. *totâ sectione* 8. *cap.* 17.

Corollarium.

Cùm igitur Maculæ & Faculæ Soli adhæreant, easque constet ex §. 7. *num.* 7. de novo gigni ac interire, quid aliud illas esse putabimus quàm fuligines quasdam ex Sole tanquam fornace igneâ ebullientes? Et verò Solem esse igneum clarissimè indicat Ecclesiasticus *cap.* 43, ita loquens: *Fornacem custodiens in operibus ardoris; tripliciter Sol exurens montes, radios igneos exsufflans.* Ita senserunt Tertullianus, Athanasius, Basilius, Justinus, Ambrosius, Cyrillus Hierosol. Augustinus, Cæsarius, Theodoretus, Chrysostomus, Nyssenus, Procopius, Anastasius Sinaita, Arnobius, Lactantius, Anselmus, Alcuinus, Beda, Isidorus, Hugo Victorinus, Damascenus, Marius Victor, Petrus Damiani: quorum omnium testimonia recenset Scheinerus *Libro* 4. *Rosa Ursina*. Idipsum admirabilis Solis facies tubo optico conspecta confirmat. Si enim tubum prælongum & lentibus eximijs sed coloratis instructum direxeris in Solem, conspicies totam hemisphærij apparentis superficiem heterogeneam ex umbris & luculis conflatam, atque instar maris ignei fluctibus asperi, idque tantâ varietate, ut numquam eadem, sed alia semper atque alia Solaris facies appareat.

FINIS LIBRI OCTAVI.

APPENDIX
TRIGONOMETRIA SPHÆRICA,
SIVE
ANALYSIS TRIANGULORUM SPHÆRICORUM.

Quia perpetuus in Astronomiâ usus est Analysis Triangulorum Sphæricorum, visum est in Lectorum commodum appendicis loco eamdem Astronomiæ nostræ subjungere, omissis demonstrationibus; quas qui desiderat Clavium aliosque consulat.

PARS PRIMA.
ANALYSIS RECTANGULORUM.

Fig. 1.

ARcus CB recto angulo A oppositus vocetur basis, arcus reliqui latera.

Nota est species anguli, cùm scitur acutus sit an obtusus. Arcus specie notus est cùm scitur sitne quadrante major, an minor.

PROBLEMA I.

Data. Basis CB, & latus alterutrum (BA).

Quæsitum. Angulus (C) oppositus lateri dato.

Fiat ut radius ad sinum basis CB, ita sinus lateris dati BA ad aliud. Hoc *a* erit sinus anguli quæsiti (C).

a Clavius prop. 1. trig. sph. in Scholio prob. 1.

At scire oportet an quæsitus angulus (C) acutus sit an obtusus. Si enim acutus est, sinus inventus ipsum angulum quæsitum (C) exhibebit: si obtusus, auferri debet angulus sinui invento respondens à Grad. 180, ut prodeat quæsitus angulus (C). Quod deinceps in quovis quæsito angulo observari debet. Ratio est quia cuilibet sinui, tangenti, secanti duplex semper angulus respondet, unus acutus, alter obtusus.

In hoc Problemate quæsitus (C) acutus sit an obtusus, ita colliges. Si latus datum (BA) sit quadrante minus, erit quæsitus (C) acutus; si latus datum est quadrante majus, quæsitus angulus erit obtusus.

PROBLEMA II.

Fig. 1.

Data. Basis BC, & angulus alteruter adjacens (B).

Quæs. Latus (AC) dato angulo oppositum.

Fiat ut radius ad sinum basis BC, ita sinus anguli dati (B) ad aliud. Hoc *b* erit sinus lateris quæsiti (AC).

b Clavius ibid. probl. 2.

At sciri debet quæsitum latus sitne minus quadrante an majus. Si enim quadrante minus est, sinus repertus ipsum latus suppeditat: si majus, oportet arcum sinui reperto respondentem subtrahere à Grad. 180, ut prodeat arcus, seu latus quæsitum. Quod deinceps in quolibet latere quæsito erit observandum. Ratio est, quia cuivis sinui, tangenti, secanti duplex semper arcus respondet unus quadrante minor, alter major.

In hoc Problemate quæsitum latus quadrante minus sit, an majus, ita scies. Si datus angulus (B) sit acutus, erit latus quæsitum (AC) minus quadrante; si obtusus, erit quadrante majus.

PROBLEMA III.

Fig. 1.

Data. 1. Latus alterutrum (AC) 2. Angulus (B) dato lateri oppositus. 3. Species anguli obliqui alterius (C) vel lateris alterius (AB).

Quæsitum. Basis BC.

Fiat ut sinus anguli dati (B) ad sinum dati lateris (AC), ita radius ad aliud. Hoc *c* erit sinus basis quæsitæ BC.

c Clavius ibid. probl. 3.

Aliter.

Fiat ut radius ad sinum anguli dati, ita secans complementi lateris dati ad aliud. Hoc *a* erit secans complementi basis.

a Clavius prop. 54. in Schol.

Erit basis quadrante minor, si obliqui anguli B, C, sint ambo acuti vel ambo obliqui:

Vel si latera AB, AC sint ambo quadrante majora, vel ambo quadrante minora.

Erit basis BC quadrante major, si latus datum (AC) sit quandrante majus, alterum verò (AB) quadrante minus:

Vel si latus datum sit quadrante minus, alterum verò majus.

PROBLEMA IV.

Fig. 1.

Data. Anguli obliqui ambo C, B.

Quæsit. Latera AC, AB.

Fiat ut radius ad sinum anguli B, quæsito lateri AB adjacentis, ita secans anguli C ad aliud. Hoc erit secans lateris AB. Rursum fiat ut radius ad sinum anguli C quæsito lateri AC adjacentis, ita secans anguli B ad aliud: hoc *e* erit secans lateris AC.

e Clavius prop. 52. in Scholio.

Porrò latera quæsita erunt quadrante minora, si angulus oppositus datus sit acutus; quadrante majora, si obtusus.

Aliter.

Fiat ut sinus anguli (B) quæsito lateri (AB) adjacentis,

jacentis, ad sinum totum, ita sinus complementi alterius anguli (C) ad aliud. Erit hoc *d* sinus complementi lateris quæsiti (AB).

d Clavius prop.42. prop.1. in schol.

PROBLEMA V.

Fig. 1. *Data.* Latus alterutrum (AC) & angulus (C) adjacens.

Quæsit. Angulus (B) oppositus lateri dato.

Fiat ut radius ad sinum anguli dati (C), ita sinus complementi lateris dati (AC) ad aliud: hoc *e* erit sinus complementi anguli quæsiti (B): qui acutus erit, si datum latus fuerit quadrante minus; obtusus, si majus.

e Clavius prop. 42. in schol. probl.2.

PROBLEMA VI.

Fig. 1. *Data.* 1. Latus alterutrum (AB) cum angulo opposito (C). 2. Species alterutrius arcuum reliquorum (AC, CB).

Quæsit. Angulus obliquus alter (B)

Fiat ut sinus complementi lateris dati ad sinum complementi dati (C); ita radius ad aliud. Hoc erit *a* sinus alterius obliqui anguli (B).

a Clavius prop.42. in sch. prob.2.

Aliter.

Fiat ut radius ad sinum complementi lateris dati, ita secans dati anguli ad aliud. Hoc *e* erit secans complementi anguli quæsiti.

e Clavius prop.56. in schol.

Erit quæsitus angulus (B) acutus, si latus non datum (AC) fuerit quadrante minus:

Vel si & basis BC sit quadrante minor, & datus (C) angulus acutus.

Vel si & basis BC sit quadrante major & angulus (C) obtusus.

Erit quæsitus angulus (B) obtusus, si latus non datum (AC) sit quadrante majus:

Vel si & basis sit quadrante minor & datus angulus (C) obtusus:

Vel si & basis sit quadrante major, & angulus datus (C) acutus.

PROBLEMA VII.

Fig. 1. *Data.* Latus utrumque AC, AB.

Quæsit. Basis BC.

Fiat ut radius ad sinum complementi utriuslibet laterum (putà AC), ita sinus complementi lateris alterius (AB) ad aliud. Erit *b* hoc sinus complementi baseos CB.

b Clavius prop. 43. in schol.

Aliter.

Fiat ut sinus totus ad sinum utriusvis lateris, ita tangens complementi alterius lateris ad aliud: hoc erit tangens complementi.

Basis quæsita BC erit minor quadrante, si latus utrumque sit quadrante majus, vel utrumque quadrante minus.

Basis quæsita erit major quadrante, si latus unum sit quadrante majus, alterum minus quadrante.

PROBLEMA VIII.

Data. Basis BC, cum latere alterutro (AC).

Quæsit. Latus alterum (AB).

Fiat ut sinus complementi lateris dati (AC) ad sinum complementi basis, ita sinus totus ad aliud: hoc *c* erit sinus complementi lateris quæsiti (AB).

c Clavius prop. 43. in schol.

Aliter.

Fiat ut radius ad sinum complementi lateris dati, ita secans baseos ad aliud. Hoc erit secans lateris quæsiti.

Latus quæsitum erit quadrante minus, si tam basis quàm latus datum, sint quadrante minora.

Latus quæsitum erit majus quadrante si basis sit quadrante major, latus verò datum quadrante minus; vel contra.

PROBLEMA IX.

Data. Latus alterutrum (BA) & angulus adjacens (B). *Fig. 1.*

Quæsit. Latus alterum (AC).

Fiat ut radius ad sinum lateris dati (BA), ita tangens dati anguli (B) ad aliud, Prodibit *b* tangens lateris quæsiti (AC): quod minus erit quadrante, si angulus datus fuerit acutus; majus verò, si obtusus.

b Clavius prop.44. in sch. prob.1.

PROBLEMA X.

Data. 1. Latus alterutrum (AC) & angulus oppositus (B). 2. Species alterius anguli obliqui (C); vel baseos. *Fig. 1.*

Quæsit. Latus alterum (AB).

Fiat ut tangens anguli dati (B) ad tangentem dati lateris (AC), ita radius ad aliud: hoc *c* erit sinus lateris quæsiti.

c Clavius prop.44. in sch. prob. 1.

Aliter.

Fiat ut radius ad tangentem lateris dati (AC), ita tangens complementi anguli dati (B) ad aliud: prodibit *d* sinus lateris quæsiti.

d Clavius prop. 49. in schol.

Erit latus quæsitum (AB) quadrante minus, si angulus non datus (C) sit acutus:

Vel si & basis BC, & latus datum (AC) sint quadrante minora:

Vel si & basis & latus datum sint quadrante majora.

Erit latus quæsitum (AB) quadrante majus, si angulus non datus (C) sit obtusus.

Vel si basis BC sit quadrante minor, latus autem datum (AC) quadrante majus:

Vel si basis sit quadrante major, latus verò datum (AC) quadrante minus.

PROBLEMA XI.

Data. Latus utrumque AB, AC. *Fig. 1.*

Quæsit. Uterque obliquus angulus.

Fiat ut radius ad sinum lateris AC quæsito angulo B oppositi, ita tangens complementi alterius lateris AB ad aliud. Hoc erit *a* tangens complementi anguli quæsiti B. Rursum fiat ut radius ad sinum lateris AB quæsito angulo C oppositi, ita tangens complementi alterius lateris AC ad aliud. Hoc erit tangens complementi quæsiti anguli C.

a Clavius prop. 48. in schol.

Erit porrò quæsitus angulus acutus, si latus oppositum sit quadrante minus; erit obtusus, si quadrante majus.

Aliter.

Fiat ut sinus lateris quæsito angulo oppositi ad radium,

l *Clavius prop. 44. in sch. prob. 2.* radium, ita tangens alterius lateris ad aliud. Hoc erit l tangens anguli quæsiti.

PROBLEMA XII.

Fig. 1. *Data.* Latus alterutrum (AC) & angulus adjacens (C).

Quæsit. Basis.

Fiat ut radius ad sinum complementi anguli dati (C), ita tangens complementi lateris dati (AC) ad aliud: dabit hoc m tangentem complementi basis. m *Clavius prop. 46. in sch.*

Aliter.

Fiat ut sinus complementi anguli dati (C) ad radium, ita tangens dati lateris (AC) ad aliud: hoc n erit tangens basis. n *Clavius prop. 45. in sch. prob. 1.*

Erit basis quadrante minor, si datus angulus fuerit acutus, & latus datum quadrante minus:

Vel si datus angulus sit obtusus, & latus datum quadrante majus.

Erit basis quadrante major, si datus angulus fuerit acutus, & latus datum quadrante majus:

Vel si datus angulus fuerit obtusus, & latus datum quadrante minus.

PROBLEMA XIII.

Fig. 1. *Data.* Basis BC, & latus alterutrum (AB).

Quæsit. Angulus (B) ijs comprehensus.

Fiat ut tangens basis BC, ad tangentem dati lateris (AB), ita radius ad aliud. Hoc o erit sinus complementi anguli quæsiti (B). o *Clavius prop. 45. in sch. prob. 2.*

Aliter.

Fiat ut radius ad tangentem complementi basis, a ita tangens dati lateris ad aliud: erit hoc a sinus complementi anguli quæsiti. a *Clavius prop. 51. in sch.*

Erit porrò quæsitus angulus acutus, si basis & latus datum sint quadrante, pariter minora vel pariter majora: erit obtusus, si basis sit quadrante major, latus verò datum quadrante minus: vel si contrà.

PROBLEMA XIV.

Fig. 1. *Data.* Basis BC, & angulus adjacens alteruter (B).

Quæsit. Latus dato angulo adjacens (AB).

Fiat ut radius ad sinum complementi anguli dati (B), ita tangens basis ad aliud. Hoc erit tangens lateris quæsiti (AB).

Erit latus quæsitum quadrante minus, si basis sit quadrante minor & datus angulus acutus:

Vel si basis sit quadrante major, & angulus datus obtusus.

Erit latus quæsitum quadrante majus, si basis sit minor quadrante, & datus angulus obtusus:

Vel si basis sit major quadrante, & datus angulus acutus.

PROBLEMA XV.

Fig. 1. *Data.* Basis BC, & angulus adjacens alteruter (B).

Quæsit. Angulus obliquus alter (C).

Fiat ut radius ad sinum complementi basis, ita tangens anguli dati (B) ad aliud. Hoc erit b tangens complementi anguli quæsiti (C). b *Clavius prop. 47. in sch.*

Angulus quæsitus erit acutus, si basis sit quadrante minor, & datus angulus acutus:

Vel si basis sit quadrante major & datus angulus obtusus.

Angulus quæsitus erit obtusus, si basis sit quadrante minor, & datus angulus obtusus:

Vel si basis fuerit quadrante major, & datus angulus acutus.

PROBLEMA XVI.

Fig. 1. *Data.* Obliquus angulus uterque (B, C).

Quæsit. Basis (BC).

Fiat ut radius ad tangentem complementi utriusvis dati anguli, ita tangens complementi alterius dati anguli ad aliud. Hoc c erit sinus complementi basis: quæ erit quadrante minor, si uterque datus angulus fuerit vel simul acutus, vel simul obtusus; erit quadrante major, si unus sit acutus alter obtusus. c *Clavius prop. 50. in sch.*

PARS SECUNDA

Analysis triangulorum Sphæric. obliquangulorum.

PROBLEMA XVII.

Datis omnibus angulis, omnia latera invenire.

In triangulo obliquangulo BAC vel omnes anguli sunt a æquales, vel duo b tantùm, vel omnes c sunt inæquales. a *Fig.* 3. b *Fig.* 4. c *Fig.* 2.

Casus 1. *in quo æquales sunt anguli tres, vel solùm duo B, C.*

Fig. 3. & 4. Ex angulo A ducatur arcus circuli maximi AD perpendicularis ad latus BC duobus æqualibus angulis B, C adjacens. Cadet hic intra triangulum, secabitque bifariam latus BC & angulum A. Quoniam igitur datur angulus A, etiam semissis BAD datur. Ex datis igitur in trigono rectangulo BDA angulis B, & BAD, per probl. 16. elicietur basis BA, & per probl. 4, latus BD; cui cùm æquale sit DC, totum latus BC notum erit. Latus autem AC notum est ex æquali secum latere AB.

Quod si omnes anguli, adeoque omnia latera inter se æquantur, ex uno AB, reliqua BC, AC innotescunt.

Casus 2. *in quo omnes anguli sunt inæquales.*

Fig. 2. Oporteat primò invenire latus AB.

1. Fiat ut radius 100000 ad sinum anguli A quæsito lateri AB adjacentis, ita sinus alterius adjacentis anguli B ad aliud, quod voca X, & serva.

2. Subtrahe B à Grad. 180, & residuum sit M.

3. Subtrahe A ex M, vel contra M ex A, ut habeatur ipsorum differentia P.

4. Inquire sinus versos differentiæ P & tertij anguli C, eorumque differentiam accipe.

5. Fiat ut X ad radium, ita differentia sinuum versorum ad aliud: hoe a erit sinus versus lateris quæsiti AB. Eodem modo reperies latera AC, BC, ut facilius sie. a *Clav.*

6. Fiat ut sinus anguli C lateri invento AB oppositi

positi ad sinum lateris inventi A B, ita sinus anguli B ad aliud: hoc *b* erit sinus lateris A C oppositi angulo B. Rursum fiat ut sinus anguli C ad sinum lateris A B; ita sinus anguli A ad aliud: erit hoc sinus lateris B C. Ut verò scias an repertis sinibus latera debita sumi debeant minora quadrante, an majora, consule regulas sequentes.

b Colligitur ex prop. 58. Sch. 2. & prop. 41.

In triangulo obliquangulo Sph. si omnes anguli fuerint acuti, latera singula erunt quadrante minora. *Reg.* 9. 4. *Clau.* 29.

Si duo anguli sint æquales acuti, erunt latera iis opposita quadrante minora; majora verò si æquales obtusi. *Reg.* 10. 11. 4.

Si duo anguli inæquales sint acuti, erit latus minori acuto oppositum quadrante minus; sin obtusi, majori oppositum erit majus quadrante. *Reg.* 12. 13. 4.

PROBLEMA XVIII.

Datis omnibus lateribus omnes angulos invenire.

In triangulo obliquangulo vel omnes anguli sunt *a* æquales, vel duo *b* tantùm B, C; vel omnes sunt *c* inæquales.

a Fig. 3. b Fig. 4. c Fig. 2.

Casus 1. in quo æquales sunt anguli tres, vel solùm duo B, C.

Fig. 3. & 4.

In latus B C adjacens æqualibus angulis B, C, ductus intelligatur ab angulo opposito A arcus perpendicularis maximi circuli A D. Hic secabit bifariam tam latus B C quàm angulum B A C. Quare cùm detur B C, etiam dantur semisses B D, C D. In triangulo igitur rectangulo B D A ex basi B A, & latere B D datis reperietur angulus B A D per probl. 1. qui cùm sit semissis totius B A C, etiam notus erit B A C, adeoque & anguli C, B, si omnes tres sint æquales. Quod si tantùm æquales fuerint duo B & C, ex notis B A, B D innotescet B per probl. 13. adeoque & C notus erit.

Casus 2. in quo tres anguli sunt inæquales.

Fig. 2.

Oporteat invenire primò angulum A.

1. Accipe latera A B, A C quæsitum A continentia, & fac ut radius est ad sinum lateris A B, ita sinus lateris B C ad aliud; quod voca X, & serva.

2. Accipe differentiam laterum A B, A C, eaque sit F.

3. Inquire sinus versos differentiæ F, & lateris B C quæsito A oppositi: quorum differentia sit G.

4. Fiat ut X ad G, ita radius ad aliud. Hoc *b* erit sinus versus anguli quæsiti A. Eodemque modo reperientur anguli B & C, vel facilius sic.

b Clavius prop. 58. Sch. 2. c Clavius prop. 41. o Henrion.

5. Fiat ut sinus lateris B C ad sinum inventi anguli A, ita sinus lateris A B ad aliud. Hoc erit sinus anguli C. Eodem modo ut sinus lateris B C ad sinum anguli A, sic fiat sinus lateris A C ad aliud. Hoc erit sinus anguli B. Sed nota *o* sit oportet species angulorum C, B: aliàs enim ex vi hujus analogiæ sciri nequit acutus angulus an obtusus sinui reperto respondens accipi debeat. Quod si tria latera data sint quadrante majora, vel unum quadrans & reliqua quadrante majora, nota erit species angulorum, erunt quidem *d* omnes obtusi.

d Clavius prop. 27.

Aliter quoad secundum casum.

Hoc problema solvetur hunc in modum. Oporteat invenire angulum A.

1. Sinus laterum B A, C A quæsitum angulum continentium, per invicem multiplicati producant M.

2. Differentiam laterum B A, A C adde lateri B C, & summa sit X: tum ab hoc illam subtrahe, vel contra, & differentia sit Z.

3. Fiat ut M rectangulum è sinibus laterum quæsitum angulum A continentium ad quadratum radii, ita rectangulum è sinibus dimidiæ summæ X, & dimidiæ differentiæ Z, ad aliud. Hoc *o* erit quadratum sinus dimidii anguli quæsiti A.

o Trigon. Britanni. ca. pag. 22.

Hæc solutio posterior si per logarithmos instituatur, magnum calculi compendium habet, est vero problematis hujus & sequentis in rebus Astronomicis usus longè frequentissimus. Quare imprimis illa expediet logarithmico compendio expedire.

PROBLEMA XIX.

Datis duobus lateribus & angulo iis comprehenso, invenire latus reliquum & reliquos angulos.

Latera angulum datum (A) continentia vel æqualia sunt vel inæqualia.

Fig. 4. 5. 6.

Casus 1. in quo latera data B A, C A sunt æqualia.

Fig. 4.

Ductus intelligatur ex dato angulo A ad latus quæsitum B C arcus perpendicularis circuli maximi A D: qui intra triangulum cadet, secabitque bifariam tam angulum A, quàm latus B C; & quia datur totus A, etiam semissis B A D, datur. Igitur in trigono rectangulo B D A ex basi B A & angulo B A D innotescet pro probl. 2. latus B C, adeoque & duplum ejus B C. Angulus alter B reperietur per probl. 6. ex latere B D, & invento angulo B A D, vel per probl. 13 ex basi B A, & latere invento B D.

Casus 2. in quo latera data B A, C A inæqualia sunt.

Fig. 5. & 6.

Ex alterutro non datorum angulorum A B C, A C B cadat arcus perpendicularis B D in latus oppositum, si opus est productum: quod quando contingat, ex arcu B D mox inveniendo innotescet. Quoniam in trigono rectangulo B D A dantur basis A B, & angulus adjacens A, ex his reperietur B D per probl. 2. & A D per probl. 14. Ex basi verò A B, & latere A D innotescet A B D per probl. 1. Jam quia inventum est A D, & datum A C, horum differentia D C nota erit. Igitur in trigono rectangulo B D C ex lateribus B D, D C, per probl. 7. reperietur basis B C quæsita, cum angulo D C B, (qui est quæsitorum unus, vel in altera figura, est quæsiti A C B complementum ad duos rectos) & angulo D B C: qui (juxta duplicem casum arcus B D) additus vel demptus invento suprà A B D, dabit A B C alterum quæsitorum.

Aliter & faciliùs secundus casus expeditur hunc in modum.

Oporteat invenire latus B C.

1. Fiat ut radius 100000 ad finum lateris dati A B, ita finus alterius dati lateris A C ad aliud: quod voca X, & ferva.

2. Fiat ut radius ad finum verſum anguli dati A, ita X ad aliud Z: cui ſi addas ſinum verſum differentiæ datorum laterum A B, A C, prodibit *a* ſinus verſus lateris quæſiti B C.

a Clavius prop. 58. Schol. 2.

3. Ex tribus lateribus & angulo A elicientur reliqui B, C, ut in probl. 18 caſu 2. *num.* 5.

PROBLEMA XX.

Datis duobus angulis (B, C) & latere ijs adjacente (BC) invenire reliquum angulum (A) & latera reliqua.

Fig. 4. 5. 6.

Dati anguli vel ſunt æquales vel inæquales.

Caſus 1. in quo dati anguli B, C ſunt æquales.

Fig. 4.

In latus datum B C ex angulo oppoſito cadat arcus perpendicularis A D; qui biſecabit tam B C, quàm B A C. Quia B C datur, etiam datur ſemiſſis BD. In trigono igitur rectangulo BDA ex latere B D & angulo B per probl. 5. reperies B A D ſemiſſem quæſiti B A C, & ex B D ac B A D per probl. 3. baſin B A, cui cùm æqualis ſit arcus A C, etiam hic notus erit.

Caſus 2. in quo C B A, & C anguli dati ſunt inæquales.

Fig. 5. & 7.

Ex alterutro datorum angulorum cadat in latus oppoſitum, ſi opus eſt, productum arcus perpendicularis B D. In trigono rectangulo C D B ex baſi B C & angulo C datis, reperies D B per prob. 2. Rurſum ex baſe B C & latere D B innoteſcet C D per probl. 8. & angulus C B D per prob. 13. quo collato cum dato C B A, patebit an arcus B D cadat intra triangulum B A C an extra. Quoniam verò noti ſunt C B D & C B A, etiam eorum differentia D B A nota erit. In trigono igitur rectangulo A D B ex latere D B, & angulo D B A per probl. 9. reperies latus D A: quod additum vel demptum invento ſuprà C D, dabit latus C A unum è quæſitis. Poſtremò ex iiſdem, latere D B & angulo D B A per probl. 12 reperies baſim A B (quod eſt latus quæſitum alterum) & per probl. 5. angulum B A D, qui in priore figurâ eſt ipſe quæſitus, in poſteriore verò eſt complementum quæſiti ad duos rectos.

Aliter caſus 2. expeditur hoc modo.

1. Accipe ſinus datorum angulorum B, C; & fiat ut radius ad ſinum anguli dati B, ita ſinus alterius dati C ad aliud: quod voca X, & ſerva.

2. Fiat rurſum ut radius ad X ita ſinus verſus lateris dati B C ad aliud: quod voca Z, & ſerva.

3. Alterutrum datorum angulorum (putà C) ſubtrahe à Grad. 180, & reſiduum ſit Q. Hujus porrò reſidui & alterius dati anguli B differentia ſit R: cujus ſinum verſum ſi addideris ad Z, conflabis ſinum verſum anguli quæſiti A.

4. Ex tribus angulis jam notis & latere B C, elicies reliqua latera, ut *probl.* 17. *caſ.* 2. *num.* 6.

PROBLEMA XXI.

Datis duobus angulis (B, C) & latere uni daterum angulorum oppoſito (A B) & ſpecie alterius (A C) quod alteri dato angulo opponitur, invenire tertium angulum (A), & reliqua latera (A C, B C).

Anguli dati vel ſunt æquales vel inæquales.

Caſus 1. in quo dati anguli B, C ſunt æquales. *Fig. 4.*

Sunt igitur æqualia etiam latera A B, A C, unde, quia datur A B, etiam A C datur. Ductus autem perpendiculariter arcus A D biſecabit tam B C, quàm B A C. In trigono rectangulo B D A ex baſi B A & angulo B datis, reperies per probl. 14. B D, adeoque & duplum ejus B C è quæſitis lateribus alterum. Ex baſi verò datâ B A & latere jam reperto B D, elicies B A D per probl. 1. adeoque & duplum ejus B A C, angulum nempè quæſitum.

Caſus 2. In quo anguli dati B & A C B ſunt inæquales.

Fig. 2. Fig. 8.

Ex angulo A, ſeu B A C non dato arcus cadat perpendicularis A D in latus oppoſitum B C, qui quidem intra triangulum cadet, ſi anguli *a* dati B, A C B ambo acuti ſunt vel obtuſi ambo; extra, ſi B acutus, A C B obtuſus. Sciri verò poteſt utrumque, cùm B detur cum ſpecie ipſius A C B. In trigono rectangulo B D A, ex baſi A B, & angulo B datis, per prob. 2. reperies latus A D, & per prob. 14, latus B D, per probl. verò 15. angulum B A D: qui angulus reperietur etiam per probl. 1. ex baſi A B, & latere jam invento B D. Deinde in trigono rectangulo A C D ex latere jam reperto A D, & angulo *a* A C D dato unà cum ſpecie lateris A C, reperietur angulus D A C per probl. 6; qui additus vel ſubtractus reperto ſuprà B A D, dabit angulum B A C quæſitum. Ex latere autem A D & angulo D A C jam inventis, reperies per probl. 2. latus D C, quod additum vel ſubtractum lateri ſuprà reperto B D, dabit latus B C unum quæſitorum. Poſtremò alterum latus quæſitum A C reperies ex latere D C & angulo D A C per probl. 10.

a Reg. 8. 4.

a ACD in priore figura datur immediatè, in poſteriore verò innoteſcit, ſi datus ACB ſubtrahatur à grad. 180.

Si latus A C petitur ſolum, id ſtatim obtinebitur, ſi fiat ut ſinus dati anguli C ad ſinus oppoſiti ac dati lateris A B, ita ſinus alterius dati anguli B ad aliud. Hoc erit *n* ſinus lateris quæſiti A C.

n per 41. Clavij trian. ſph.

PRO.

PROBLEMA XXII.

Datis duobus lateribus (AB, AC) & angulo (B) uni datorum laterum (AC) opposita, cum specie anguli (ACB) qui alteri lateri dato (AB) opponitur, invenire latus tertium (BC) & reliquos angulos (ACB, BAC).

Latera data vel sunt æqualia vel inæqualia.

Casus 1. in quo latera dantur æqualia.

Fig. 4. Ergo etiam æquales sunt anguli B, ACD. Quare cùm detur B, etiam ACD datur. In latus deinde non datum BC ex angulo opposito cadat perpendiculariter arcus AD: hic bisecabit tam BC quàm BAC. In trigono rectangulo BDA ex basi BA, & angulo B datis, elicies per probl. 14 latus BD, adeoque & duplum ejus BC. Ex basi verò BA & latere jam invento BD reperies per prob. 1. angulum BAD, adeoque & duplum ejus BAC.

Casus 2. in quo latera AB, AC dantur inæqualia.

Fig. 2. & 8. In latus non datum BC ab angulo opposito ductus sit arcus perpendicularis AD, qui intra triangulum cadet, si anguli b dati B, ACB sint ambo acuti vel ambo obtusi sint; cadet extra, si B acutus, ACB obtusus. Sciri porrò utrumque potest, cùm angulus B detur cum specie anguli ACB. In triangulo rectangulo BDA ex basi BA & angulo B datis, reperies AD per probl. 2. & BD per prob. 14. & angulum BAD per prob. 15. qui angulus BAD innotescet etiam per prob. 1. ex basi BA, & reperto jam latere BD. Deinde in rectangulo trigono ADC ex basi datâ AC & latere invento AD elicies per prob. 8. latus CD, (quod additum vel subtractum invento suprà BD dabit latus quæsitum BC), & per prob. 1. angulum ACD unum è quæsitis, aut certè (ut in fig. posteriore) complementum quæsiti ad duos rectos. Postremò ex basi AC & latere jam invento CD, reperies per prob. 1. angulum DAC; qui suprà invento BAD additus vel subtractus, dabit alterum quæsitum BAC.

b Reg. 3. 4.

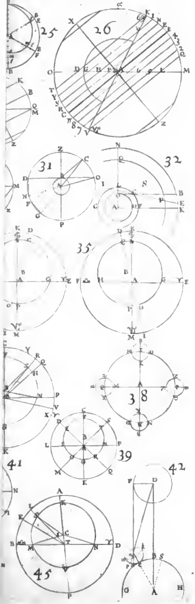
Quod si solus petatur angulus ACB, is statim & immediatè obtinebitur, si fiat ut sinus dati lateris AC ad sinum anguli oppositi & dati anguli B, ita sinus lateris AB ad aliud: hoc enim erit sinus anguli quæsiti ACB.

Quoad ordinem horum 22 Problematum secutus sum Clavium.

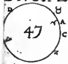
INDEX RECTANGULORUM SPH.

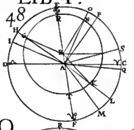
INDEX OBIQUANGULORUM SPH.

FINIS.


25
26
31
32
35
38
39
41
42
45

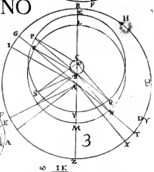
OMIÆ LIB. I.

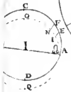




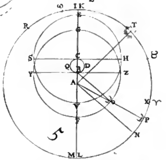


STRONO
MIÆ
LIB 2

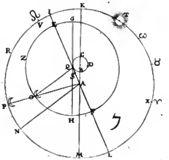


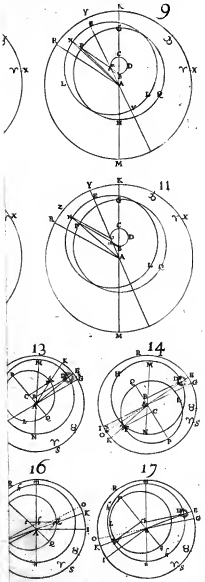


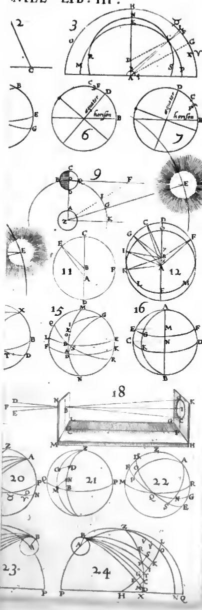


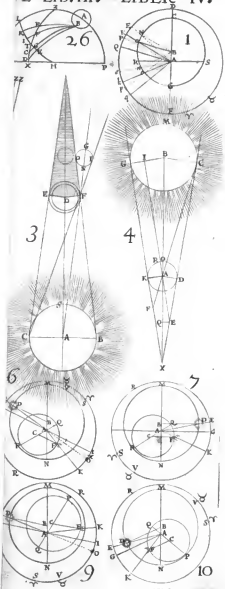


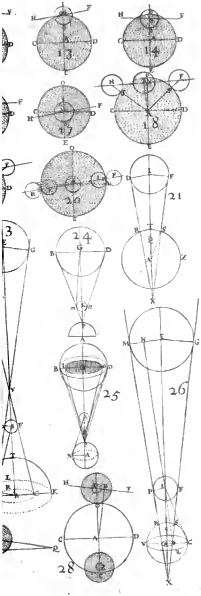


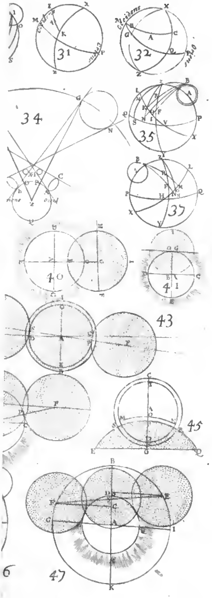


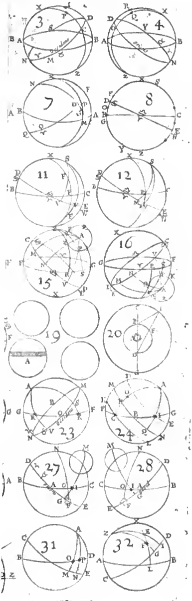

9
11
13
14
16
17

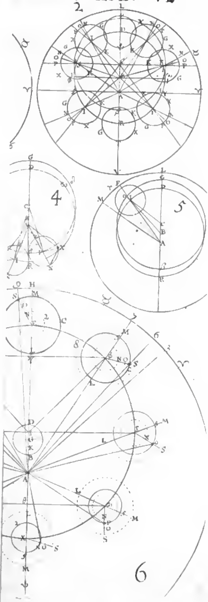

2
3
6
7
9
11
12
15
16
18
20
21
22
23.
24

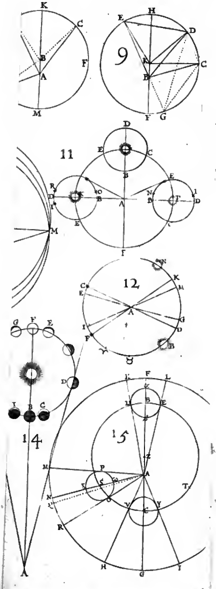

26
1
3
4
6
7
9
10

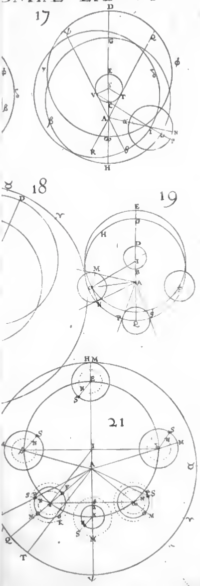



31
32
34
35
37
40
41
43
45
47
6

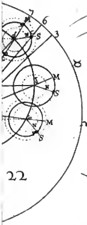


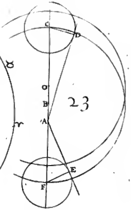

2
4
5
6

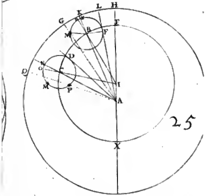

9
11
12
14
15


17
18
19
21

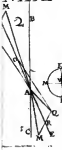
MIÆ LIB. VI.

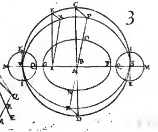


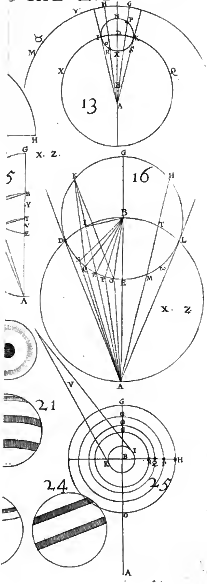


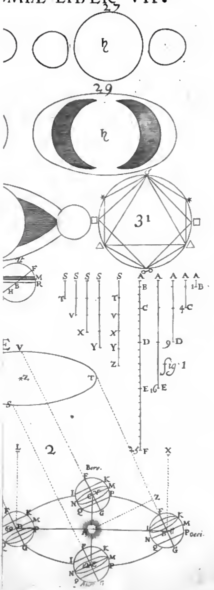


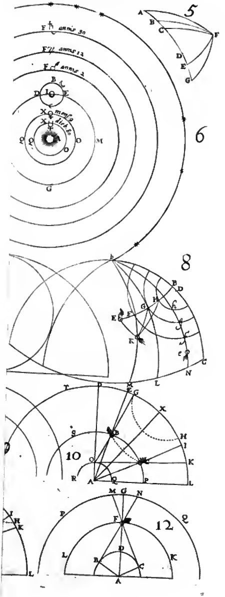
MIÆ LIB. VII.



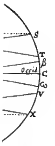


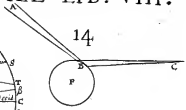

13
16
X. Z.
21
24
25

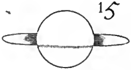



5
6
♄ annis 30
♃ annis 12
♂ annis 2
♀ mensibus 9
☿ diebus 80
8
10
12

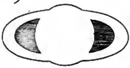
OMIÆ LIB. VIII.



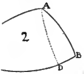


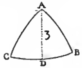


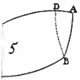


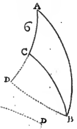


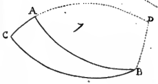
RIGONOM. SPHERIC.











ANDREÆ TACQUET

E SOCIETATE JESU

GEOMETRIA PRACTICA

TRIBUS LIBRIS COMPREHENSA.

ARGUMENTUM.

DVplex Geometria est, Theorica & Practica. Illa quantitatis continuæ, quam uno nomine Geometræ magnitudinem appellant, affectiones abstractè & generatim considerat ac demonstrat, estque cum Arithmeticâ Matheseos universæ basis ac fundamentum. Hæc ad illam sese habet ut rivus ad fontem, & magnitudines de facto existentes expendit metiturque. Quidquid igitur in cælo terrâve quantum est, ad Practicam spectat Geometriam. Quare partes illius sunt, metiri rerum distantias, montium ac turrium altitudines, profunditates puteorum ac vallium, superficies camporum, & corporum quorumcumque soliditatem cognoscere. Nec his contenta ambitum Orbis terræ, ac molem mirabili artificio investigat: atque inde in cælum ipsum provecta Lunæ ac Solis à terrâ distantias magnitudinesque, ac cæterorum corporum cælestium quantitatem sagacitate humanâ propè majori assequitur. Sed rerum adeò reconditarum cognitio, subitò, atque uno quasi impetu non obtinetur. Quemadmodum enim in montis aut turris verticem per gradus & scalas ascenditur, ita & in hisce scientiis sui quidam sunt gradus, per quos in earum abdita quæque & arcana facili negotio penetratur. Porrò hi gradus sunt Elementa Geometriæ & Arithmeticæ, ad quæ proinde intelligenda diligenter incumbat necesse est, qui tum ea, quæ tractaturi modò sumus, tum cætera Matheseos admiranda percipere desiderat.

NOTANDUM

Universim in hac Geometria Practica.

1. *CVm citantur elementa, citari ea quæ nos edidimus: quæ conveniunt cum Euclidæis in numeris propositionum, non tamen in definitionibus, Corollariis, Scholiis, & aliis multis, quæ addidimus.*

2. *In citationibus Problematum &c. hujus tractatus, cùm non additur numerus capitis, semper spectare problema &c. ad caput, in quo versamur.*

3. *Cùm agitur de mensuris, ex. gr. pedibus, milliariis &c. si post aliquem numerum sequantur alii puncti distincti, primum, qui ante punctum est, esse integrum, reliquos decimales: ut si occurrant milliaria 25. 3. 5. 1. 4, designantur mill. 25, & 3 decimæ, 5 centesimæ, 1. millesima & sic deinceps.*

4. *Quod si agatur de gradibus, numerus ante puncta sunt gradus, reliqui minuta prima, secunda, tertia &c. Vt si offerantur Grad. 34. 2. 31. 23. 5. designantur, grad. 34. min. 2. secunda 31, tertia 23. & sic deinceps.*

ANDREÆ TACQUET
E SOCIETATE JESU
GEOMETRIA PRACTICA
TRIBUS LIBRIS COMPREHENSA.

ARGUMENTUM.

DVplex Geometria est, Theorica & Practica. Illa quantitatis continuæ, quam uno nomine Geometræ magnitudinem appellant, affectiones abstractè & generatim considerat ac demonstrat, estque cum Arithmeticâ Matheseos universæ basis ac fundamentum. Hæc ad illam sese habet ut rivus ad fontem, & magnitudines de facto existentes expendit metiturque Quidquid igitur in cælo terrâve quantum est, ad Practicam spectat Geometriam. Quare partes illius sunt, metiri rerum distantias, montium ac turrium altitudines, profunditates puteorum ac vallium, superficies camporum, & corporum quorumcumque soliditatem cognoscere. Nec his contenta ambitum Orbis terræ, ac molem mirabili artificio investigat: atque inde in cælum ipsum provecta Lunæ ac Solis à terrâ distantias magnitudinesque, ac cæterorum corporum cælestium quantitatem sagacitate humanâ propè majori assequitur. Sed rerum adeò reconditarum cognitio, subitò, atque uno quasi impetu non obtinetur. Quemadmodum enim in montis aut turris verticem per gradus & scalas ascenditur, ita & in hisce scientijs sui quidam sunt gradus, per quos in earum abdita quæque & arcana facili negotio penetratur. Porrò hi gradus sunt Elementa Geometriæ & Arithmeticæ, ad quæ proinde intelligenda diligenter incumbat necesse est, qui tum ea, quæ tractaturi modò sumus, tum cætera Matheseos admiranda percipere desiderat.

NOTANDUM
Universim in hac Geometria Practica.

1. *CVm citantur elementa, citari ea quæ nos edidimus: quæ conveniunt cum Euclidæis in numeris propositionum, non tamen in definitionibus, Corollarijs, Scholijs, & alijs multis, quæ addidimus.*

2. *In citationibus Problematum &c. hujus tractatus, cùm non additur numerus capitis, semper spectare problema &c. ad caput, in quo versamur.*

3. *Cùm agitur de mensuris, ex. gr. pedibus, milliarijs &c. si post aliquem numerum sequantur alij punctis distincti, primum, qui ante punctum est, esse integrum, reliquos decimales: ut si occurrant milliaria 25. 3. 5. 1. 4, designantur mill. 25, & 3 decimæ, 5 centesimæ, 1. millesima & sic deinceps.*

4. *Quod si agatur de gradibus, numerus ante puncta sunt gradus, reliqui minuta prima, secunda, tertia &c. Vt si offerantur Grad. 34. 2. 31. 23. 5. designantur, grad. 34. min. 2. secunda 31, tertia 23. & sic deinceps.*

GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER I.

De dimensione linearum rectarum.

Cum lineas audimus, non eas solùm oportet intelligere, quæ atramento in chartâ, aut cretâ describuntur in tabulâ, sed eas præsertim quæ rebus insunt, hoc est omnium hujus universi superficierum ac corporum aspectabilium in longum, latum, ac profundum dimensiones. Cùm igitur lineas mensurabimus, fluminum & camporum longitudines ac latitudines, amplitudinem Horizontis conspicui, Iridis diametrum, altitudines turrium, montium, nubium, imò Solis ac Lunæ & siderum reliquorum metiemur. Quæ res cùm per se maximè admirabiles & scitu jucundissimæ sint, tum multò admirabiliores ac jucundiores evadent, quando non praxim tantùm, sed etiam Theoriam, explicatis earum rerum fundamentis, intelligemus.

CAPUT PRIMUM.

De Mensuris.

Mensura est magnitudo quæpiam data sive pro libitu assumpta, cujus applicatione aliæ ipsâ majores innotescunt. Cùm enim scitur quoties mensura data in magnitudine mensurandâ contineatur, magnitudo ea dicitur esse nota, sive quantitatis exploratæ. Cùm autem tres sint magnitudinis species, linea, superficies, corpus; triplex quoque mensura est, linearis, superficialis, & corporea seu solida; lineæ siquidem per lineam, superficies per superficiem, corpora seu solida per solidum mensurantur. Non tamen superficies per quamlibet superficiem, neque solida per quodlibet solidum; sed hæc per cubum, illa per quadratum metimur, quia quadratum & cubus figuræ sunt maximè simplices, adeoque notiores: quadratum enim fit ex uno ductu lineæ in seipsam, cubus verò ex ductu lineæ in seipsam duplicato generatur: nam linea in se ducta facit quadratum, quo ducto rursum in eandem lineam gignitur cubus, cùm tamen mensura simpliciter nominatur, semper linearis intelligitur.

Mensuræ præ cæteris usitatæ sunt digitus, pes, passus, pertica, milliare.

Pes dividi solet in partes æquales, 10, vel 11, vel 12, vel 16, & hæ partes vocantur Digiti.

Passus continet pedes 5.

Pertica pedes 10, vel 12, vel 16, vel 20.

Milliare passus 1000, seu pedes 5000.

Porrò hæ mensuræ incertæ sunt, nisi pedis quantitas ad quam illæ referuntur, fuerit determinata. Pes verò tot propè magnitudines sortitur diversas, quot sunt civitates. Nos eo utemur, qui hic, ubi ista scribimus, versatur in manibus, videlicet Antverpiensi; ex alijs verò duos, Rhynlandicum, & Italicum Bononiensem adhibebimus. Quos ex omnibus visum est seligere, quod per eos milliaris Italici, ac Belgici, sive horarij, quantitas determinetur.

Constitutio pedis.

Proportio trium prædictorum pedum ea est, quæ inter numeros, 1000, 1200, 909; proinde quarum partium Rhynlandicus, est 1000, earum Bononiensis est 1200 (adeoque Rhynlandicus ad Bononiensem est ut 5 ad 6) Antverpiensis 909

Pes	Rhynlandicus	1000	5
	Bononiensis	1200	6
	Antverpiensis	909	

Rhynlandicum esse ad Antverpiensem ut 1000 ad 909 habemus ex observatione Willebrordi Snellij in suo Eratosthene Batavo, ubi summâ diligentiâ variarum urbium pedes cum Leydensi sive Rhynlandico confert.

Rhynlandicum verò esse ad Bononiensem ut 5 ad 6, sic ostendo. Ex observatione a Riccioli pes Bononiensis est ad pedem Romanum antiquum seu Vespasianeum, ut 1495 ad 1200, hoc est quàm proximè ut 5 ad 4: si enim pro 1495 ponantur 1500, haberetur exactè proportio 5 ad 4. differentia est 5, quæ solùm est pars 299 numeri 1495, ac proinde contemni potest. Igitur pes Bonon. est ad Vespasianeum ut 5 ad 4, sive ut 6 ad $\frac{24}{5}$. Pes autem Vespasianeus ad Rhynlandicum seu Leydensem, ut 24 ad 25, sive ut $\frac{24}{5}$ ad $\frac{600}{120}$ ut compertum à Ricciolo *pag. 62. num. 6.* Igitur ex æquo pes Bononien. est ad Rhynlandicum pedem, ut 6 ad $\frac{600}{120}$, hoc est ut 6 ad 5. Quod si præcisionem omnimodam desideres, erit Bononiensis pes ad Rhynlandicum ut $6\frac{6}{299}$ ad 5. Sed ea fractiuncula, ut dixi, meritò contemnitur.

a *Lib. 2. cap. 8. num. 2. quam num. 7. egregiè stabilit.*

Constitutio Milliaris.

Milliare Belgicum sive horarium est, quod spatio unius horæ commodè à mediocri pedite absolvitur. Ex accuratâ Snellij observatione complectitur pedes Rhynlandicos 18000, sive decempedas Rhynland. 1800.

Ut scias quot Pedes Bononien. contineat milliare horarium, sic age. Quia pes Rhynl. est ad Bononiensem ut 5 ad 6, quanto 5 minus est quàm 6, tanto reciprocè numerus Pedum Bononiensium conficiens milliare horarium, minor erit numero Pedum Rhynlandicorum conficientium milliare horarium, ac proinde quæstio pertinet ad regulam proportionum eversam.

Pes Rhynl.	Mill. hor.	Pes Bonon.	Mill. hor.
5	18000	6	......

quam solve, ut tradidi Arith. *lib. 4. cap. 1.* nimirum duc primum 5 in secundum 18000, & productum 90000, divide per tertium: quotiens 15000, sunt

Pedes

Pedes Bononienses milliare horarium conficientes.

Pari modo quia Pes Rhynlandicus est ad Antverpiensem, ut 1000 ad 909, milliare horarium continebit Pedes Antverpienses 19, 801 $\frac{891}{909}$

Milliare Bononiense continet 5000 pedum Bononiensium, & quia pes Bononiensis est ad Rhynlandicum ut 6 ad 5; milliare Bononiense continebit *a* pedes Rhynl. 6000. Rursum quia pes Bononiensis est ad Antverpiensem ut 1200 ad 909, milliare Bononiense *b* continebit pedes Antverpienses 6600 $\frac{200}{303}$.

a Per reg. proport. eversam.
b per eand.

Ut hactenùs dicta paucis complectar,

Milliare horarium seu Belgicum continet

Pedes Rhynlandicos	18,000
Pedes Bononienses	15,000
Pedes Antverpienses	19, 801 $\frac{891}{909}$.

Milliare Italicum Bononiense continet

Pedes Bononienses	5000
Pedes Rhynlandicos	6000
Pedes Antverpienses	6600 $\frac{200}{303}$.

Ex his manifestum est milliare Bononiense esse tertiam partem milliaris horarij: hoc enim continet pedum Bononiensium 15,000, illud 5000.

Cùm igitur quantitas tam milliaris horarij sive Belgici, quàm Italici, Bononiensis, & utriusque ad invicem proportio, ex ijs, quæ hic deduxi, perfectè nota sit, his duobus deinceps solis in hoc tractatu, alijsque utar, ne etiam ipse in eum errorem incidam, quem sæpè fui in multis scriptoribus aversatus, qui dum mensuras quas adhibent non exponunt, adeoque ignotas relinquunt, omnia pariter, quæ ijs metiuntur, ignota relinquunt.

CAPUT II.

Quid Sinus, Tangentes, Secantes & quomodo inveniantur.

Sinus, Tangentes, Secantes sunt rectæ quædam lineæ, quarum in Analysi triangulorum, in Geometriâ Practicâ, in Astronomiâ, alijsque usus est maximus.

Sinuum Definitiones.

Fig. 1.

Esto quadrans circuli ACE, cujus circumferentia CE divisa sit in partes 90 æquales, quas Gradus vocant, & singuli gradus in partes æquales 60, quæ vocantur Minuta, sic ut totus arcus CE divisus sit in partes æquales, seu minuta 5400. Ex centro A ad singulos gradus & minuta emittantur rectæ, quarum unum designo litteris AF. Constituentur hoc facto anguli 5400, quibus subtenduntur arcus totidem uno sese invicem minuto excedentes. Ex his unum designo litteris CAF. Primus angulus erit minuti unius, secundus duorum minutorum, & sic porrò; sexagesimus minutorum 60; hoc est Gradus unius, & sic deinceps: postremus EAC est Graduum 90, adeoque rectus. Tandem per minuta singula ducantur rectæ ad semidiametrum AC perpendiculares, quæ proinde etiam ipsæ numero erunt 5400 computando radium AE, quarum unam designo litteris FX. Hæ appellantur Sinus arcuum & angulorum uno minuto sese mutuò superantium.

1. Igitur arcus ex. gr. FC, & anguli FAC ab ipso subtensi sinus est recta FX, quæ ab F termino arcus perpendicularis est radio AC.

2. Pars radij XC inter arcum & sinum intercepta est sinus versus ejusdem arcus FC, & anguli FAC.

3. Sinus complementi sive sinus secundus arcus FC, & anguli FAC, est FI sinus illius arcus, nempè FE, qui quadrantem complet, adeoque & sinus illius anguli, nempè FAE, qui cum priore FAC complet rectum CAE.

4. Sinus totus sive radius est semidiameter AE.

5. Arcus QF quadrante major eumdem habet sinum FX, quem arcus minor CF, qui cum eo semicirculum constituit: & angulus recto major FAQ eundem habet sinum FX, quem angulus acutus FAC, qui cum eo efficit duos rectos.

Fig. 2.

6. In omni triangulo rectangulo BAC, latus BC recto angulo oppositum, est sinus totus sive radius: reliqua verò latera sunt sinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirum AB est sinus anguli *o*; latus AC sinus anguli *r*.

Nam si centro C intervallo CB describatur quadrans FBL; quia latus angulo recto oppositum CB, est jam radius quadrantis, erit CB sinus totus per *defin.* 4: latus verò AB, per *defin.* 1, erit sinus anguli *o*, seu FCB. Rursum centro B, intervallo BC descripto quadrante QCI, patet per eandem defin. 1. AC esse sinum anguli *r*, sive QBC. Ex quo jam nunc apparet, quantus sinuum futurus in Trigonometria sit usus.

Definitiones Tangentium, & Secantium.

Fig. 3.

Esto circulus BXZ, cujus quadrans BX intelligatur, ut suprà, divisus in gradus, & minuta. Hunc tangat recta infinita BR, & ex centro A, ad contactum B, ducatur radius AB, qui *a* cum tangente constituet angulum rectum. Cogitentur deinde per quadrantis gradus singulos, & minuta ex centro A, emitti rectæ AF, AL &c. quo facto constituentur anguli FAB, LAB &c. ad 5400, ut suprà, quibus subtenduntur totidem arcus BC, BO, &c.

a Per 18. lib. 3.

7. Arcus igitur BC; & anguli BAF tangens est recta BF, secans verò AF, sinus totus AB: similiter arcus BO, & anguli BAL, tangens est BL, secans AL, & sic deinceps.

8. Arcus quadrante minor BO, & arcus quadrante major ZO, cum priore BO faciens semicirculum, eandem habent Tangentem BL, & Secantem AOL.

Fig. 3.

9. In omni triangulo rectangulo FBA respectu acuti anguli FAB tangens est FB ipsi oppositum; latus alterum AB, ipsi adjacens est sinus totus, seu radius; hypotenusa verò AF, seu latus recto angulo oppositum est secans. Patet ex defin. 8. & prop. 16. lib. 3, si centro A per B describatur circulus.

Pari modo respectu alterius acuti anguli, AFB tangens est AB, sinus totus seu radius est FB, secans FA. Patet ex defin. 8. & prop. 16. lib. 3, si centro F per B circulum descripseris.

Hypotenusa igitur utriusque acuti secans est, ac proinde cùm hi anguli inæquales sunt, diversis numeris in tabulis Sinuum, hypotenusa exprimitur.

Cæterùm notandæ inprimis sunt, ac probè intelligendæ definitiones 6, & 9, ut Sinus Tangentes, Secantes ad usum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

Invenire Sinus, Tangentes, Secantes, est earum proportionem ad radium circuli aut veram, aut à vera insensibiliter aberrantem, numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes divisus, ut in 100000, aut 1000,0000: Tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radij partibus singuli Sinus, Tangentes, Secantes contineant: quæ inventio ut postea ostendam, eò accuratior futura est, quò plures in partes radius circuli divisus assumetur. Hoc Sinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menelaus; horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolomæus, & novissimè Ioannes Regiomontanus perfecit, qui ad radium 10000000, Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis supputavit. Denique horum omnium conatus egregios, Clavius noster, Pitiscus, Rheticus alijque complures illustrarunt. Quamvis autem ab ijs omnibus præclarè hoc in genere laboratum sit; quia tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio est, optandum sanè videtur, ut facilior ea studiosis, atque expeditior, si fieri potest, efficiatur. Quare animus mihi est artificium quàm utile, tam pulchrum, & clariùs, quàm cæteri fecerint, & breviùs exponere. Rem omnem tribus Porismatis, & 6 Problematis absolvam. Sit ergò

PORISMA I.

Fig. 4. *Dato sinu (FC) cujusvis arcus (FB), complementi sinum (FO) invenire.*

Ducto radio AF, quadratum AF a æquatur quadratis FC, AC. Quare si ex quadrato radij, seu Sinus totius auferas quadratum sinus dati FC, remanet quadratum AC, hoc est quadratum FO. Igitur radix quadrata ex eo extracta dabit rectam FO, Sinum complementi quæsitum.

a Peri 47. lib. 1.

PORISMA II.

Fig. 5. *Dato sinu (CF) cujusvis arcus (IC) sinum semisseos ejusdem arcus invenire.*

Arcui IC, subtende rectam IC, ad quam è centro perpendicularis sit AL; quæ tam b rectam IC, quàm c arcum ILC bisecabit; ac proinde IO, est sinus arcus LI semisseos arcus ILC.

b 3. lib. 3. c 30. lib. 3.

Ex sinu dato CF, per præced. inveniatur sinus complementi CQ, seu FA: quo ablato ex sinu toto AI, nota fit FI. Nota igitur est summa quadratorum IF, CF, hoc est, d quadrati IC. Ex quo eliciatur radix quadrata, dabit ea rectam IC, ejusque semissis sinum quæsitum IO.

d 47. lib. 1.

PORISMA III.

Fig. 6. *Datis sinibus (LX, FR) duorum arcuum (LB, FB) quorum differentia non sit major 45 minutis, sinum (IS) arcus cujusdam medij invenire.*

Ducatur perpendicularis FOQ: erunt LQ, IO, differentiæ sinuum LX, IS ad sinum FR. Et quia arcus LF est non major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF sensibiliter à rectis lineis; ac proinde LFQ, IFO assumi possunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO est parallela LQ erit k.

k coroll. 4. prop. 4. lib. 6.

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia LF	ad arcus medij, & minimi differentiam IF
ita sinuum datorum maximi, & minimi differentia LQ	ad sinus medij, & minimi differentiam IO.

Quare cùm hujus analogiæ tres primi termini sint noti, etiam quartus IO innotescet. Quem si addamus sinui dato minori FR, notus erit medius quæsitus IS.

Lemma.

Semissis subtensa (CB) alicujus arcus (CFB), est sinus semisseos ejusdem arcus. Fig. 7.

Ex centro A ducatur radius AGF ad CB perpendicularis. Erit ergo CG per defin. 1. sinus arcus CF. Atqui per 3. lib. 3. CG est semissis CB, & per 30. lib. 3. CF semissis CFB. Ergo &c.

PROBLEMA I.

Sinum arcus 45 graduum invenire.

Quadrantem CFB subtendat recta CB, ad quam ex centro A sit perpendicularis AGF. Quoniam igitur arcus CB 90 grad. a bisectus est in F; erit FB arcus graduum 45; cujus sinus est BG. Deinde ergò ob æqualitatem laterum AC, AB, anguli b quoque ACB, ABC æquales sunt; qui verò c ad A rectus; erit c ergò ABC, seu ABG semirectus. Est autem d AGB rectus: reliquus ergo BAG e semirectus est, ideoque par ipsi ABG. Ergo latera BG, AG n æqualia sunt. Ergo quia quadratum AB æquatur f utrique quadrato BG, AG, unius quadrati BG duplum erit. Semissis ergo quadrati sinus totius AB, æquatur quadrato sinus 45 graduum, BG.

Fig. 7. a 30. lib. 3. b 5. lib. 1. c coroll 11. prop. 32. lib. 1. d hyp. e 32. lib. 1. n 6. lib. 1. f 47. lib. 1.

Quare si ex semisse quadrati sinus totius eliciatur radix quadrata, dabit ea sinum 45 grad. qui quarum partium sinus totus ponitur 10000000, reperietur earundem esse 7071068 ferè.

PROBLEMA II.

Arcuum 60, & 30 graduum sinus invenire.

Esto quadrans BC; arcus BF graduum 60, & sinus ejus DF. Erit ergo arcus FC graduum 30, cujus sinus sit FG. Ducatur autem BF, & ex centro AF. Quoniam arcus BQF est grad. 60, hoc est sexta pars circumferentiæ circuli, erit BF latus hexagoni, ideoque a æquale radio AF. Anguli a igitur ad A, & B in triangulo AFB æquales sunt. Cùm igitur in triangulis X, Z, æquales sint anguli FBD, FAD, item anguli FDB, FDA, utpote recti; latus verò FD commune; erunt b quoque latera BD, AD æqualia: ac proinde quadratum BD est quarta pars quadrati sinus totius AB, seu FB: sed quadratum FB æquatur c quadratis BD, FD. Auferatur ergò quarta pars quadrati sinus totius, sive quadratum semisseos BD sinus totius, à quadrato sinus

Fig. 8. a Coroll. 1. p. 15. l. 4. n 6. lib. 1. b 26. lib. 1. c 47. lib. 1.

sinus totius F B, remanebit quadratum F D; cujus radix quadrata dabit rectam F D, sinum 60 graduum. Posito igitur sinu toto 10000000, sinus grad. 60 est 8660254.

Sinus porro F G grad. 30 est semissis sinus totius, utpote æqualis ipsi D A. Idem patet ex lemmate. Posito igitur sinu toto 10000000, sinus grad. 30 est 5000000.

PROBLEMA III.

Fig. 9.

Sinum 36 graduum invenire.

Esto semicirculus F B G, cujus basi radius A B rectus insistat. Tum radio A G bisecto in D, ducatur recta D B, quæ transferatur ex D in C. Recta B C erit *a* latus pentagoni, circulo inscripti. Ex summâ quadratorum A B radij, sive sinus totius, & A D semisseos radij, extrahe radicem quadratam, dabit ea *b* rectam D B, hoc est D C. Ex D C aufer D A semissem radij; fiet nota A C; cujus quadratum adde quadrato radij A B; notum fiet *c* quadratum C B, ex quo radix elicienda, dabit B C latus pentagoni, subtendens gradus 72. Illius ergo semissis *d* dabit sinum 36 graduum.

a Ptolem. lib. 1. Almag.
b 47. lib. 1.
c 47. lib. 1.
d Lem.

Posito sinu toto 10000000, sinus grad. 36 reperitur partium 5877852.

Corollarium.

Ex sinu grad. 36, reperitur *e* sinus complementi, nempè grad. 54, partium 8090170.

e Poris. 1.

PROBLEMA IV.

Sinum graduum 12 invenire.

Fig. 10.

In quadrante C B, sit arcus B F graduum 30, K B grad. 54, & eorum sinus D F, G K. Igitur erit earum differentia K F grad. 24, complementa verò erunt F C, grad. 60, K C grad. 36; quorum sinus sint P F, N K.

Sinus N K, grad. 36. inventus per probl. 3. auferatur ex sinu P F grad. 60 invento per Probl. 2. remanebit O F nota. Tum sinus F D grad. 30, inventus per Probl. 2. dematur ex sinu K G grad. 54. invento per Coroll. præc. remanebit O K nota. Radix summæ quadratorum O F, O K dabit *a* K F subtensam 24 grad. Illius verò semissis dabit *b* sinum graduum 12.

a 47. lib. 1.
b Lem.

PROBLEMA V.

Sinus omnium arcuum quadrantis sese ordinatim, uno minuto superantium invenire.

Ex quatuor sinibus per præcedentia quatuor Problemata, graduum videlicet 45, 60, 36, 12, reliquos sinus omnes adminiculo trium Porismatum præmissorum inveniemus hunc in modum.

Ex sinu grad. 45 inveniuntur sinus septem.

Problemate 1. Inventus est sinus arcus grad. 45. sumatur graduum 45 semissis, grad. 22, 30, & semissis horum, grad. 11, 15, quæ amplius bisecari nequit; sinus harum semissium reperiuntur per Porisma 2. nimirùm ex sinu grad. 45 reperitur sinus grad. 22, 30, & ex hoc sinus grad. 11, 15.

ex 45. gradibus
Semissis, 22, 30, 11, 15.

Accipiantur deinde harum semissium complementa: complementum arcus totius, grad. 45, quia ipsi æquale, tanquam inutile omittitur

ex semissibus 22, 30. 11, 15.
Complementa 67, 30. 78, 45.

horum complementorum sinus reperiuntur per Poris. 1. Rursum ex his complementis sumantur semisses semissium, quoties possunt: tum complementa semissium, donec complementum occurrerit, quod bisecari nequeat.

Ex compl. 67, 30. 78. 45.
Semiss. 33. 45. nulla.
Compl. 56, 15.
Semiss. nulla.

Complementa postrema erant grad. 67. 30. & grad. 78. 45: ex posteriori, quia bisecari nequit, nihil ultra eruitur. Prioris, nempè grad. 67. 30, semissis est grad. 33. 45, cujus sinus per Poris. 2. obtinetur. Hujus complementum est grad. 56, 15, cujus sinus reperitur per Poris. 1. Quia verò complementum hoc ultimum non potest bisecari, hic terminus erit inveniendi ex sinu graduum 45.

Igitur ex Sinu graduum 45 inventi jam sunt sinus septem, quorum inventionis series in tabella apposita exhibetur.

	grad.	'	grad.	'	grad.	'	grad.	'
	90.	0	45.	0				
Semiss.					22.	30	11.	15
Compl.					67.	30	78.	45
Semiss.					33.	45		
Compl.					56.	15		

Ex Sinu graduum 60 inveniuntur sinus 16.

Arcus 60 graduum bisecetur quoties potest, & accipiantur semissium complementa; quæ iterùm biseca, quoties potes: tum semissium rursum accipe complementa, quæ denuò biseca, & bisectionis complementum assume. Ex hac alterna acceptione, quæ sexies repetita est, habentur arcus 16, quorum sinus, per Poris. 2. & 1, alternatim accepta, inveniuntur.

Sinus grad. 60 ejusque Semisses	Complementa	Semisses Complementorum	Complem.	Semisses	Complem.
grad. '.	grad. '.	grad. '.	grad. '.	grad. '.	grad. '.
60. 0					
30. 0					
15. 0	75. 0	{37. 30 {18. 45	52. 30 71. 15	26. 15	63. 45
7. 30	82. 30	41. 15	48. 45		
3. 45	86. 15				

Alternam semissium, & complementorum seriem exhibet tabella hic apposita. Atque ita, si hactenùs inventi sinus ordinentur, adnumerato sinu toto grad. 90, habebimus 24. sinus arcuum sese gradibus 3, 45 superantium.

Ex Sinu graduum 36, habentur Sinus 32.

Si enim arcus grad. 36 accipiatur semissis, & semissis semisseos, & sic deinceps: Deinde ipsius sinus 36, & omnium semissium complementa, ac rursum semisses complementorum; eaque alterna semissium ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32, quorum sinus per *Porisma* 2, & 1 alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 36 arcuum exhibet Tabella subjecta.

Sinus gr. 36 cum suis Semissibus.	Complementa	Semisses Complementorũ	Complementa	Semisses	Complem.	Semisses	Complem.
gradus /	grad. /	grad. /	grad. /	grad. /	grad. /	grad. /	grad. /
36. 0	54. 0	{27. 0 {13. 30 {6. 45	63. 0 76. 30 83. 15	{31. 30 {15. 45 38. 15	58. 30 74. 15 51 45	29. 15	60. 45
18. 0	72. 0						
9. 0	81. 0	{40. 30 {20. 15	49. 30 69. 45	24. 45	65. 15		
4. 30	85. 30	42. 45	47. 15				
2. 15	87. 45						

Ex Sinu 12 graduum, inveniuntur Sinus 64.

Hunc in modum. Ex sinu 12 accipiatur semissis, & semissis semisseos & sic porrò: tum ipsius sinus 12, & omnium semissium complementa sumantur, dein semisses complementorum, ac rursus semissium complementa &c. Hæc alterna semissium ac complementorum acceptio, si duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum sinus invenientur per *Porisma* 2 & 1. Seriem inventionis dictorum 64 arcuum exhibet Tabella hic adjecta.

Sinus

Sinus Grad. 12 ejusque Semisses	Complementa.	Semisses Complementorum.	Complementa.	Semisses.	Complementa	Semisses.	Complementa.	Semisses.	Complementa.	Semisses.	Complementa.
Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.	Grad. /.
12 0′	78. 0′	39. 0′ 19. 30′ 9. 45′	51. 0′ 70. 30′ 80. 15′	25. 30′ 12. 45′ 35. 15′	64. 30′ 77. 15′ 54. 45′	32. 15′	57. 45′				
6. 0′	84. 0′	42. 0′ 21. 0′ 10. 30′ 5. 15′	48. 0′ 69. 0′ 79. 30′ 84. 45′	24. 0′ 34. 30′ 17. 15′ 39. 45′	66. 0′ 55. 30′ 72. 45′ 50. 15′	33. 0′ 16. 30′ 8. 15′ 27. 45′	57. 0′ 73. 30′ 81. 45′ 62. 15′	28. 30′ 14. 15′ 36. 45′	61. 30′ 75. 45′ 3. 15′	30. 45′	59. 15′
3 0′	87. 0′	43. 30′ 21. 45′	46. 30′ 68. 15′	23. 15′	66. 45′						
1. 30′	88. 30′	44. 15′	45. 45′								
0. 45′	89. 15′										

Quod si Sinus omnes hactenùs inventos, sinu toto adnumerato, simul in ordinem redigamus, sinus habebimus 120 arcuum, sese mutuo 45 minutis superantium: quorum primus est 45 minutorum, ultimus Grad. 90.

Grad.	/.	Grad.	/.	Grad.	o	Grad.	o
o	o	3.	o	6.	o	9.	o
o	45	3.	45	6.	45.	9.	45
1	30	4.	30	7.	30	&c.	&c.
2	15	5.	15	8.	15	90.	o.

Ex his 120 *Sinibus*,

Reliquos intermedios ope tertij porismatis, per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primò, quæremus inter singulos horum 120 sinuum duos medios duorum arcuum minutis 15. differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur sinus arcuum 358, 15 minutis invicem excedentium.

Deinde inter singulos jam inventos duo quærentur

tur medij duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358, proveniunt sinus arcuum 1076, se minutis 5 superantium.

Denique inter illos singulos quæremus medios quatuor arcuum uno se minuto excedentium, quos si addamus illis 1076, habentur sinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno se minuto superantium.

PROBLEMA VI.
Secantes & Tangentes quascumque invenire.

Fig. 3.

EX Sinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innotescent.

Arcus cujuscumque B S, exemp. gr. 70, 15′ Secans esto A R, Tangens B R, Sinus totus A B. Oporteat secantem A R invenire. Duc S K Sinum arcus S B, & S N Sinum complementi S X. Per *prop.* 4. *lib.* 6. ut A K, (seu N S) est ad A S, ita A B seu A S, est ad A R. Sunt ergo tres proportionales.

NS	AB	AR
Sinus complementi, arcus dati Gr. 70. 15′	Sinus totus 10000000.	Secans quæsita.

Quare si quadratum Sinus totius dividatur per N S Sinum complementi arcus dati, quotiens dabit Secantem quæsitam A R, ut patet *ex* 18. *lib.* 9.

Oporteat deinde dati cujuscumque arcus B S Tangentem reperire B R. Per *prop.* 4. *lib.* 6. ut A K, (seu N S) est ad K S, ita A B ad B R. Sunt ergo proportionales.

NS	KS	AB	BR
Sinus complementi arcus dati,	Sinus arcus dati,	Sinus totus 10000000,	Tangens quæsita

Quare cùm tres primi termini sint noti, per *Regulam trium* innotescat quartus.

Habeat igitur studiosi, quod suprà promiseram, Sinuum, Tangentium & Secantium theoriam tribus porismatis, & problematis sex comprehensam. Scio plures alias esse Sinuum reperiendorum vias: sed ea, quam proposui, cæteris explicatu ac demonstratu mihi est visa facilior.

PROBLEMA VII.
Sinum unius vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

Fig. 4.

REpræsentet P B arcum unius Minuti, seu 60 Secundorum, K B verò arcum 26 Secundorum exem. gr. Sinus verò istorum arcuum sint P M, K N. Quoniam hi arcus insensibiliter differunt à rectis lineis, assumi possunt triangula P B M, K B N tanquam rectilinea. Igitur per 4. *lib.* 6.

ut P B, 1. Min. seu 60 sec.	ad K B 26. sec.	ita P M Sinus 1. Min.	ad K N Sinum 26 secundorum.

Quare per regulam trium reperietur Sinus K N 26 secundorum, multiplicando videlicet secundum (26″) per tertium, nempè per 2909, Sinum 1 minuti; & productum dividendo per primum, nempè 60 sec.

Hoc opere reperitur sinus unius minuti secundi, $49\frac{14}{60}$ posito Sinu toto 10000000: licebitque eàdem methodo reperire Sinum unius tertij, & sic in infinitum.

PROBLEMA VIII.
Invenire Sinum arcus, qui præter Gradus, & minuta prima, etiā secunda contineat.

Fig. 6.

INveniendus sit exem. gr. Sinus Graduum 36, 20′, 16″. Arcum Grad. 36. 20′ proximè minorem dato repræsentet F B: arcum verò dato proximè majorem nempè Grad. 36. 21′, referat L B. Arcum datum Grad. 36. 20′. 16″, qui inter hos medius est, referat I B. Sinus autem horum trium arcuum sint L X, F R, I S, & ducatur perpendicularis F O Q. Arcus igitur L F est 1′, seu 60″; arcus I F, 16″; L Q differentia Sinuum, L X, Grad. 36. 21′, & F R Grad. 36. 20′. Quoniam igitur arcus L F, utpote 1′, insensibiliter differt à rectâ lineâ, & multò adhuc minùs arcus I F, 16″, erit per *prop.* 4. *lib.* 6.

ut	L F 60″	ad	I F 16″	ita	L Q differentia Sinuum, &c.	ad	I O differentiam Sinus &c.

Quare cùm tres primi termini sint noti, etiam innotescet quartus, differentia I O; quæ addita F R Sinui Grad. 36. 20′, dabit Sinum quæsitum IS, Grad. 36. 20′. 16″.

PROBLEMA IX.
Dato Sinui arcum assignare.

SInum datum quære in tabulis. Si eum reperies, arcum illi debitum habes adscriptum: si non reperies, quære eo proximè & majorem & minorem, quos referat L X, F R; datum verò repræsentet I S. Ductâ perpendiculari F O Q, erit per 4. *lib.* 6.

Fig. 6.

Ut	L Q excessus Sinus L X proximè majoris dato, suprà minorem F R	ad	I O excessum Sinus dati I S, suprà minorem F R.
ita	Arcus L F 60 secund.	ad	numerum secundorum, quæ debentur arcui I F.

Quare cùm tria prima sint nota, etiam quartum innotescet, numerus nempè secundorum debitus arcui I F: qui additus Gradibus ac minutis arcus noti F B, dabit arcum debitum Sinui dato I S.

Atque hæc quidem hactenus de Sinuum, Tangentium & Secantium inventione. Reliquum est ut quædam ad plenam hujus rei Theoriam facientia sequenti Scholio declaremus.

Scholium.

Quæstio est, cur radius circuli in tot partes divisus assumatur.

Vt hujus assumpti causa intelligatur, meminisse debemus omnes Sinus, Secantes & Tangentes inventas esse vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum. Et quidem illi 120 Sinus arcuum se invicem 45 minutis superantium per extractionem radicis reperti sunt, ut patet ex Problem. 1,2,3, 4,5. *Cæteri verò omnes inter hos medij ex illis 120 per proportionis regulam innotuêre, ut ex* Problematis 5 *postremâ parte constat. Tangentes autem & Secantes ex Sinibus jam notis per eandem regulam reperta sunt, quemadmodum* Problem. 6. *ostensum est. Iam verò numeri, è quibus radix fuit elicienda, ut plurimum sunt non quadrati, ex quibus si radicem educas, ea semper à verâ, quam (ut* lib. 3. Arith. cap. 6. *demonstravi) impossibilis est, differet excessu defectúve aliquo, minore tamen quam sit unitas. Hæc porrò differentia, quæ ob fractionum in supputando molestiam negligitur, eo minoris momenti erit, quò major fuerit numerus ille è quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eò major, quò radius in partes plures divisus assumetur. Exemplum statuamus in Sinu 45 graduum, quem* Probl. 1. *docuimus obtineri, si ex semisse quadrati Sinus totius radicem extraxeris. Si numerus radij, seu Sinus totius assumatur magnus, qualis hic est 10000000, illius etiam quadratus, adeoq; & quadrati semissis 50000000000000 multò erit major. Porrò radix integra quæ elici potest ex 50000000000000, est 7071067, quæ quia ex maximo numero elicita est, etiam ipsa magnus est numerus. Vnde fit ut ipsius à radice verâ impossibili defectus, qui semper unitate minor est, ad ipsam proportionem habeat insensibilem, proindeq; tutò & absque sensibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob causam tantus numerus partium Sinus totius assumi debet. Verùm ut hujus rei causa manifestior evadat, omnia errorum capita exactiùs erunt colligenda. Primum caput erroris est in Sinibus illis primis 120, quos reperire oportuit per eductionem radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui ex his per regulam prop. eliciuntur, idemq; proinde vitium participant, alij duo insunt errores proprij, videlicet quod in triangulis LFQ, IFO, (vide* Fig. 6.) *arcus LF, 45', & arcus IF, 15', aut 5' assumantur tanquam recta linea; atque insuper cum regulâ proportionum exercetur, quòd fractio ex divisione residua negligatur. Quo vitio postremo etiam Tangentes & Secantes, quæ omnes ex Sinibus per prop. reg. obtinentur, laborent necesse est. Denique cùm Sinus perpauci tantum immediate reperiantur, cæteri verò Sinus omnes deducantur ex invicem, ex Sinibus autem Tangentes & Secantes; manifestum est, singulos præter errores sibi proprios, contrahere etiam vitia eorum è quibus ipsi derivantur: unde fit, ut error, qui in Sinu immediatè invento simplex erat, in secundo quasi duplicetur, in tertio triplicetur, & sic deinceps. Vnde consequens est eos Sinus esse accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactissimos verò eos esse, qui immediatè, hoc est ex alijs nullis inventi sunt. Ex his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Secantium defectus oriuntur: qui ne essent notabiles, sed quodammodo evanescerent, radium maximo partium numero divisum assumere oportuit. Et quamvis defectus illi sint non unus, sed (ut jam ostendi) plures, tamen quod singuli nullius ferè momenti sunt, etiam simul juncti errorem vix sensibilem inducunt, si assumatur Sinus totus partium admodum multarum. Quâ enim proportione augetur numerus radij, eadem crescunt numeri sinuum; ac proinde errores, qui in ijs supputandis committi debent, magis evanescunt.*

Deinde istud etiam tyrones intelligant, si Sinus, Tangentes, Secantes accipiantur ad Sinum totum 10,000000, quales passim in tabulis reperiuntur, abjectis duabus primis notis haberi Sinus, Tangentes, Secantes ad radium 100000, totidem videlicet cyfris mulctatum. Ex. gr. posito radio 10000000 Sinus 8 Grad. est 1391731; si cupiam minorem ad radium 100000, omissis duabus primis notis, is erit 13917. Talis enim Sinus, Tangentis, Secantis, differentia à majori solùm erit fractio cujus numerator sint notæ abjectæ, denominator verò sinus totus duabus cyfris mulctatus. Itaque Sinus 8 Grad. 13917 minoris a majori 1391731, differentia erit $\frac{11}{100000}$ *diametri. Ratio pendet ex naturâ logisticæ decimalis, quam exposui* Arithm. Practicæ lib. 2. cap. 9. *& seq. præsertim ex* theor. 1. *&* 2. cap. 10.

Postremò hoc inprimis hîc observabitur, cùm Sinus, Tangentes, Secantes, expetuntur respectu radij ex. gr. 100000, exactiores fore eas lineas, si supputentur, respectu Sinus 10000000 datum excedentis duabus cyfris, & ab ijs ita supputatis totidem primæ notæ, uti jam dictum est, abjiciantur. Ratio est, quia errores Sinuum multis notis constantium, non versantur nisi in primis notis. Ita Regiomontanus, cùm Sinus cuperet ad partes radij 600000, assumpsit radium 6000000000, & à Sinibus ad eum radium supputatis primas quatuor notas sustulit. Similiter Rheticus, ut haberet Sinus ad radium 10000000000, assumpsit radium 100000, 00000, 00000, & à Sinibus per hunc repertis præscidit quinque notas primas. Quo artificio obtinetur ut notæ residuæ omnes veræ existant, ac proinde Sinus ita reperti à veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis sive Canone assumitur. Et tales sunt ij omnes qui in tabulis passim descripti sunt.

CAPUT III.

Triangulorum rectilineorum Analysis.

TRiangulum omne, quod per se manifestum est, tria latera habet & angulos tres, quæ simul juncta senarium numerum efficiunt. Ex his tria semper nota sint oportet, ut tria reliqua, quæ sunt ignota, cognoscantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, sive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analysis Triangulorum* ab alijs *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud, seu præstantius, seu utilius. Quod ex nunc tyrones ut vel eminùs perspiciant, non ea solùm triangula contemplari debent, quæ in chartâ vel tabulâ delineantur: sed ab his cogitationes suas transferre ad ea oportet, quæ in campis atque in aëre, imò & in ipso cælo per radios visuales, & ipsas rerum distantias longitudinesque describuntur. Opportunum erit ex ijs, quæ postea erunt uberiùs explananda, exemplum unum alterúmve quasi ad rei totius specimen aliquod afferre. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cætera unum: quî dato uno latere trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta sint, invenire possint.

Ex hoc Problemate montis aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta QF, distantiam verò oculi ab eâdem rectâ AQ hori-

Fig. 11.

horizontalis, cum quâ rectum angulum constituit altitudo F Q: radium visualem extensum à turris apice F ad oculum in A, repræsentet recta F A. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aëre descriptum, cujus unum latus est A Q distantia oculi à turre, alterum Q F, ipsa turris altitudo; tertium radius visualis A F. In hoc triangulo angulus Q A F (ut suo loco ostendam) fit notus instrumento; latus A Q, distantia jam supponatur nota. Ex his duobus cognitis, angulo videlicet acuto Q A F, & distantiâ A Q, per universale Problema jam dictum, invenietur quanta sit altitudo turris Q F. Adjungamus & alterum. Inter cætera Problemata Trigonometrica etiam istud occurret: datis in triangulo quolibet duobus angulis; quæ sit laterum inter se proportio, invenire.

Fig. 12. Ex hoc Problemate ad distantiam Lunæ à Terrâ dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ esto C; centrum Terræ A; oculus in superficie Terræ in B; semidiameter orbis Terræ A B. Cogitentur tum ex Terræ centro A, quàm ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo facto constituitur triangulum à Terrâ ad Lunam pertingens, cujus unum latus est semidiameter Terræ A B; reliqua duo sunt distantiæ tam centri Terræ, quàm ipsius oculi à centro Lunæ. In hoc triangulo angulus A C B Astronomico artificio innotescit: angulus verò A B C fit notus per instrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis, per universale problema jam dictum, innotescet, quæ sit proportio lateris C B vel A C. ad latus A B; hoc est quoties distantia Lunæ à Terrâ semidiametrum Terræ contineat: ac proinde, cum alio jam artificio quot milliaria radius Terræ contineat, innotuerit, ipsa etiam distantia Lunæ à Terrâ in milliaribus innotescet. Ad tantæ rei notitiam nos deduxit problema hujusmodi, quod Tyro fortè aliquis nullius esse usus judicasset. Hæc ergo dicta sint in gratiam eorum, quibus illud in ore semper: cui usui, ut ex his etiam cætera, quorum usum non perspiciunt, æstimare discant.

Annotationes quædam pro tyronibus.

Priusquam ultrà tendamus, expediet hîc in memoriam revocare nonnulla, quæ in elementis traduntur, in quibus sub hæc initia hærere plerumque Tyrones solent. Prætereant ista, qui his non indigent.

1. Datum & notum idem significant in hac materiâ.

2. Circumferentiam circuli partiri solent Mathematici in partes æquales 360, quas Gradus appellant, & harum singulas rursus in 60 æquales, quas Minuta vocant.

3. Arcus circuli, seu pars circumferentiæ nota dicitur, cùm scitur quot gradus contineat; tunc enim arcus ille quanta sit totius circumferentiæ pars, innotescit.

Fig. 13. 4. Angulorum mensuræ sunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tamquam centro inter ejus crura describuntur. Sic anguli C, mensura est arcus O Q, centro C descriptus, inter anguli crura A C, B C. Patet ex ultima *lib.* 6. Hâc de causâ angulus (C) dicitur esse tot graduum quot graduum est ille arcus (O Q) ut si arcus O Q est grad. 32, etiam angulus C erit graduum 32.

5. Angulus ille (C) dari, seu notus esse dicitur, quando scitur, quot graduum sit; hoc est quot graduum sit arcus (O Q) inter ejus crura ex vertice ut centro descriptus.

6. Angulus rectus dicitur 90 grad. quia arcus inter ejus latera centro vertice descriptus est 90 grad. seu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180. quia arcus inter eorum crura descriptus eosque subtendens, est grad. 180, semissis nempe circumferentiæ.

Et quatuor recti dicuntur efficere 360 grad. quia subtenduntur à totâ circumferentiâ.

7. Si ex anguli vertice ut centro inter ejus latera plures describantur arcus O Q, S V: minor æquè est mensura anguli ac major; quia minor æquè magna pars est suæ circumferentiæ totius, ac major suæ: ac proinde si arcus major O Q est ex. gr. 32 graduum, quorum tota circumferentia major O Q L H est 360, etiam minor arcus S V est graduum 32, quorum minor circumferentia S V R T est 360. Patet ex *Corol.* 3. *prop.* 33. *lib.* 6. *Fig.* 14.

8. Cujuscumque trianguli tres anguli simul sumpti efficiunt gradus 180: Quia per 32. *lib.* 1. tres illi anguli simul sumpti semper efficiunt duos rectos; ac proinde, si ex angulorum verticibus (A, B, C) tamquam centris, inter trianguli cujusvis crura describantur, eodem intervallo circini, tres arcus (FG, XZ, O Q) hi simul sumpti semper conflabunt semicirculum, hoc est arcum 180 graduum. Nam si centro C perficiatur semicirculus O Q P, & arcus F G transcribatur ex Q in L: tertius arcus X Z æqualis erit residuo L P, adeoque tres simul arcus O Q, F G, X Z conficiunt integrum semicirculum O Q L P. *Fig.* 15.

9. Cùm in triangulo (A B C) quocumque, noti sunt duo anguli (A grad. 125, B grad. 34) etiam (C) tertius innotescit, si utriusque dati gradus (159) subtrahantur à 180 gradibus. Remanent enim gradus (21) tertij anguli (C). Patet ex annotatione 8. & ex 32. *lib.* 1. Atque hac de causâ datis duobus angulis, etiam tertius dicitur esse datus.

10. Pari ratione si in quovis triangulo (A B C) notus sit unus angulus (B grad. 39) innotescit etiam summa reliquorum (C, A) si gradus anguli noti (B Grad. 39) subtrahantur à 180 gradibus; remanent enim gradus (141) summæ duorum reliquorum (C, A). Patet ex annotat. 8, & 32 *lib.* 1. & hac de causâ dato uno angulo, dicitur & summa reliquorum dari. *Fig.* 15.

11. In triangulo rectangulo (B A C) dato acuto uno (C, grad. 31) etiam acutus alter (B) innotescet, si acuti dati (C) grad. (31) subtrahantur à gradibus 90, remanent enim grad. (59) pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8, & 32. *lib.* 1. Et hac de causâ in triangulo rectangulo, cùm datur acutus unus, dari dicitur etiam alter. *Fig.* 16.

12. Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cùm primus A est ad secundum B, ut tertius C ad quartum Z.

ut A ad B
ita C ad Z

13. Termini noti sunt, qui numeris exprimuntur; hoc est quando scitur quot partes alicui certæ æquales contineant.

14. Cùm è quatuor proportionalibus tres termini sunt noti, quartus verò incognitus; is semper innotescet, si secundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum; quotiens enim divisionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc est ea Regula, quæ vulgò Proportionum,

num, sive Trium, & ob summam utilitatem Aurea appellatur. Demonstrata est *prop.* 19. *lib.* 9. de quâ vide plura *lib.* 4. *Arithm. cap.* 1.

Dato angulo, datur ex tabulis sinus ejusdem; & dato sinu, datur angulus: ut si detur angulus grad. 40.16'. gradus quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columnâ primâ ad lævam. His adscriptum reperies non solùm sinum illis debitum 6463460, sed etiam tangentem 8470620, & secantem 13105396. Contra si detur sinus ex. gr. 6563460, cujus angulum ignores, quære in columnâ sinuum numerum datum; vel si non reperiatur, ei proximè æqualem: in columnâ primâ ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæsiti.

Denique hoc observa: in Analysi trianguli rectanguli, quamvis solum duo data exprimantur; ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto: tamen datum tertium semper est ipse angulus rectus, qui quia per se notus est, & triangulo rectangulo nominato satis subintelligitur, ulteriùs exprimi non solet.

ANALYSIS TRIANGULI RECTANGULI

PROBLEMA I.

Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.

BASI A C adscribe sinum totum: lateri A B sinum oppositi anguli C: lateri C B sinum anguli oppositi A. Eadem erit laterum proportio, quæ sinuum. *Fig.* 15.

Demonstratio patet ex *defin.* 6. *cap.* 2. Itaque si cupiam scire quanto latus unum sit altero majus ex. gr. A C quàm B C: sinum 10000000 divide per sinum 5150381. Quotiens $1\frac{4849619}{5150381}$ hoc indicabit: sicut enim quotiens est ad 1, ita A C est ad B C.

Vel alterutri lateri circa rectum, putà B C, adscribe sinum totum; lateri B A tangentem acuti, C; basi A C secantem ejusdem anguli C. Ita patebit laterum proportio, ut patet ex *defin.* 9. *cap.* 2.

PROBLEMA II.

Datis basi (B C pedum 100) & acuto uno (B Grad. 59) reliqua latera (A C, A B) invenire.

IN triangulo rectangulo hypotenusa, sive basis dicitur, quæ recto angulo opponitur, latera verò, quæ rectum angulum continent. *Fig.* 16.

Inventio lateris A C.

Ut	data basis B C, prout est sinus totus 10000000	Ad	latus A C, prout est sinus anguli B gr. 59. 8571673.
Ita	eadem basis B C prout est pedum 100	Ad	ejusdem lateris A C, pedes quæsitos.....

In quo analogismo, quia tres primi termini sunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempè pedum lateri A C debitorum, innotescet per regulam proportionum multiplicando videlicet secundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10000000, quotiens enim $85\frac{71673}{100000}$ ex eâ divisione proveniens, est quartus qui latebat, numerus pedum scilicet, quos continet latus quæsitum A C.

Non absimilis est inventio lateris A B. nam quia datur acutus B (graduum 59) etiam per 32. *lib.* 1. seu annotat. 11, datur acutus alter C (graduum 31.) unde etiam sinus utriusque dantur. Jam,

Ut	basis B C, prout est sinus totus 10000000	Ad	latus ignotum A B, prout est sinus anguli gr. 31 5150381;
Ita	basis B C, prout est pedum 100	Ad	lateris ignoti A B pedes quæsitos......

Cùm ergo tria prima sint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri A B debitorum per regulam Trium innotescet.

Demonstratio.

Hoc unum tum hîc, tum ferè etiam in sequentibus erit demonstrandum, quatuor supradictos terminos esse proportionales. Id verò ex definitione 6. c. 2. manifestum est. Nam basis B C, latus nempè recto angulo A oppositum est sinus totus, seu radius; latus verò A C est sinus anguli oppositi B, ex. gr. 59 graduum, qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium sinus totus, nempè basis B C, est 10000000, earum sinus anguli B, nempè latus A C, est 8571673: ac proinde ut basis B C, prout est sinus totus 10000000, est ad A C 8571673 sinum anguli B; ita eadem basis B C ex hyp. 100 pedes ad idem latus A C quæsitum, sive ad numerum pedum in latere A C contentorum. Quod erat demonstrandum.

Pari modo per defin. 6. B C est sinus totus 10000000, & B A sinus anguli C 31 grad. qui ex tabulis datur 5150381. Ergo ut B C sinus totus 10000000 ad B A sinum 5150381; ita eadem B C ex hyp 100 pedes, ad eamdem B A incognito pedum numero constantem. Quod erat demonstrandum.

NOTA.

Fundamentum hujus & omnium sequentium operationum ac demonstrationum est, quod

quando duæ quantitates A & Z notæ sunt secundùm quamvis eamdem mensuram, & una earum A etiam nota est in aliâ mensurâ ex. gr. in pedibus; tunc etiam altera, Z, in pedibus necessariò innotescat per regulam auream, vide cap.1. lib.4. Arithm. nostræ, ubi id demonstratum est.

PROBLEMA III.

Datis Latere uno (A C milliariorum 1000) & acuto uno, latus reliquum (B A) & basim (B C) invenire.

Ex uno acuto dato notus fiat alter: ut si B detur grad. 54, his subductis à 90, erit C grad. 36. Fig. 17.

Inventio lateris A B.

Ut	latus datum A C, prout est sinus totus 10000000,	Ad	latus ignotum A B, prout est anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426
Ita	latus datum A C, prout est milliariorum 1000	Ad	lateris ignoti A B milliaria quæsita.....

Inventio basis B C.

Ut	latus datum A C, prout est sinus totus 10000000	Ad	basim ignotam B C, prout est acuti C dato lateri adjacentis secans 12360680
Ita	latus datum A C prout est milliariorum 1000	Ad	ignotæ B C, baseos milliaria quæsita.....

Quare cùm in utroque Analogismo tria prima sint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innotescet: eritque latus A B milliariorum 726 $\frac{5426}{10000}$; basis verò B C milliariorum 123 $\frac{6068}{10000}$.

Demonstratio.

Per defin. 9. *cap.* 2. latus A B est tangens anguli C grad. 36, quæ ex tabulis datur 7265426; latus verò A C est sinus totus 10000000: hoc est quarum partium latus A C est 10000000, earum est A B latus 7265426. Ergo ut A C 10000000 est ad A B 7265426: ita eadem A C ex hyp. 1000 milliari, ad milliaria quæsiti lateris A B, hoc est ad numerum milliariorum in A B contentorum. Ergo &c.

Pari modo per defin. 9. *cap.* 2. respectu anguli C grad. 36, A C est sinus totus 10000000, & B C secans, quæ ex tabulis datur 12360680. Ergo ut A C sinus totus 10000000 est ad B C secantem 12360680; ita eadem A C ex hyp. 1000 milliari, ad eamdem B C ignotum numerum milliariorum continentem. Ergo &c.

PROBLEMA IV.

Fig. 18. Basi (C B 1000 perticarum) & uno latere (A C 891 perticarum) datis, invenire acutos angulos, & latus alterum (A B).

Ut basis data C B perticarum 1000	Ad latus datum A C perticarum 891,
Ita basis eadem C B prout est sinus totus 10000000	Ad anguli ignoti B, qui dato lateri A C opponitur, sinum.......

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8910000: huic in tabula invenitur proximè æqualis 8910065, cui adscriptus est angulus grad. 63, qui per probl. 9. *cap.* 2 adhuc reperietur exactius. Is ergo est angulus B, qui latebat. Invento autem acuto B, datur etiam acutus alter C. grad. 27.

Quoniam verò jam in triangulo rectangulo nota est basis C B cum angulo C, latus quæsitum B A invenietur per probl. 2.

Idem latus independenter ab angulis, reperitur per probl. 3. in scholio prop. 47. *lib.* 1. *elem.*

Demonstratio.

Per defin. 9. *cap.* 2. C B est sinus totus (10000000) & C A est sinus anguli B. Ergo ut basis B C, 1000 pertic. ad latus A C 891 pertic. Ita basis eadem B C, prout est sinus totus 10000000 ad idem latus A C, prout est sinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus C A datum pertic. 891	Ad basim C B, pertic. 1000
Ita Sinus totus 10000000.	Ad secantem ignoti anguli C datis C B, C A comprehensi.

Demonstratio eadem sed ex defin. 9. *cap.* 2.

PRO-

PROBLEMA V.

Fig. 19. **Duobus lateribus datis (B A, pedum 79, C A ped. 100) acutos angulos & basim invenire.**

Inveniendus sit angulus acutus C.

Ut datum latus A C adjacens quæsito angulo C,	Ad alterum latus datum A B;
Ita Sinus totus 10000000	Ad anguli quæsiti C tangentem. ....

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000, huic proximè æqualis invenitur in tabulâ 6156615, cui adscriptum reperies angulum 38 graduum, qui *probl. 9. cap. 2.* adhuc reperietur exactius. Tantus ergo est acutus O, qui latebat, quo ex grad. 90 subtracto, datur & alter B grad. 52.

Quia verò noti jam sunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera, per probl. 2. etiam basis B C fiet nota.

Alia basis inventio ab angulis independens traditur probl. 2 scholij prop. 47. *lib. 1. elem.*

Demonstratio.

Per defin. *9. cap. 2.* respectu anguli C, Sinus totus est C A, Tangens B A. Ergo ut C A ex hyp. pedum 100 ad B A, ex hyp. pedum 79, ita eadem C A prout est sinus totus 10000000, ad eandem B A, ut est tangens quæsiti anguli C.

ANALYSIS TRIANGULI OBLIQUANGULI.

Triangulum, in quo nullus angulus rectus est, obliquangulum voco.

PROBLEMA VI.

Fig. 20. 21. **Datis omnibus lateribus, lateris segmenta (B F, C F) facta à perpendiculari (A F) ex opposito angulo ducta, & ipsam perpendicularem invenire.**

Centro A intervallo lateris minoris A B, describatur circulus secans reliqua latera in O & Q, & producatur C A in L. Manifestum est L C esse summam laterum A C, A B, & O C differentiam eorumdem. Item patet ex prop. 3. *lib.* 3 B Q bifectam esse in F. His ita constitutis, rectangula B C Q, & L C O *a* æqualia sunt. Ergo per 14 vel 16. *lib. 6.*

a Coroll. 1. p. 36. l. 3.

Ut (BC) latus in quod perpendicularis cadit	Ad (LC) summam laterum reliquorum (BA, AC)
Ita (OC) differentia reliquorum laterum	Ad rectam (CQ)

Quare cùm tria prima sint nota, etiam quartum nempè C Q innotescet, hæc, si perpendicularis intra triangulum cadit (ut in *Fig.* 20) ablata à latere noto B C, notam relinquet B Q, cujus semissis B F est segmentum quæsitum minus; quo subtracto à latere B C, etiam majus segmentum C F innotescet.

Quod si perpendicularis cadat extra (ut in *Fig.* 21) tunc ex quartâ proportionali C Q, subtrahe latus B C, ut innotescat residuum B Q; hujus enim semissis B F dabit segmentum minus: ad quod adjecto latere B C, habetur segmentum majus C F.

Ipsa verò perpendicularis A F fiet nota, si ex quadrato lateris B A adjacentis minori segmento, subtrahatur quadratum minoris segmenti B F, & ex residuo extrahatur radix, ea enim erit A F. Patet ex *pag. 47. lib. 1.*

Porrò ipsa quarta proportionalis C Q indicat quando perpendicularis intrà triangulum cadat, quando extra. Cùm enim minor est latere dato B C, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cùm major, extrà.

Hoc problema, quod sanè perinde pulchrum atque utile est, expeditur etiam per prop. 13 & 12. lib. 2. *ut tradidi in Scholio ibidem: sed modus hic traditus aliquantò facilior est.*

PROBLEMA VII.

Datis omnibus angulis, laterum proportionem invenire. *Fig. 22. 23.*

In quovis triangulo eadem est inter latera proportio, quæ inter sinus angulorum lateribus oppositorum.

Demonstratio.

Esto triangulum obliquangulum A B C, latera habens inæqualia (aliàs enim res per se esset manifesta) & ex majori C B abscindatur C I æqualis minori A B, ducanturque I L, B F ad A C perpendiculares, quæ quia sunt inter se parallelæ, erit *a* C I (hoc est A B) ad C B ut I L ad B F. Sed posito sinu toto C I, est I L sinus *b* anguli C; & posito sinu toto A B, hoc est eodem quo antè; cùm A B, C I æquales sint) B F est *c* sinus anguli B A C. Ergò latus A B est ad latus C B, ut sinus anguli C ad sinum anguli B A C. Idem erit in reliquorum comparatione laterum demonstratio.

a Coroll. 1. p. 4 l. 6.
b defin. 6. cap 2.
c per eand.

Tantùm Nota. Cùm perpendicularis B F extra triangulum cadit, eam nihilominùs esse sinum anguli B A C, quia *d* sinus est anguli B A F, cum quo *e* eundem habet sinum angulus B A C, sive complementum ad duos rectos.

d per eand.
e defin. 5.

PROBLEMA VIII.

Datis omnibus lateribus, angulos invenire.

Concipiatur in aliquod latus ex opposito angulo demissa perpendicularis A F, & per probl. 6, nota fiant segmenta B F, F C. *Fig. 24.*

Tum quia in triangulo rectangulo B F A dantur B A, & B F: per probl. 4. innotescet angulus B. Rursum quia in triangulo rectangulo C F A dantur C A, C F, per probl. 4. similiter innotescet angulus C: Et per *prop. 32. lib. 1.* seu annot. 9. etiam tertius B A C.

PROBLEMA IX.

Dato latere (A C) & duobus angulis, reliqua latera (A B, C B) invenire.

Per Problema 7.

Fig. 25.

Ut	anguli, B, qui dato lateri A C opponitur, Sinus 6293204.	Ad	anguli C oppositi quæsito lateri A B Sinum 2756374.
Ita	latus datum A C 1000 passuum	Ad	lateris quæsiti A B passus.....

Rursum per Problema 7.

Ut	anguli B dato lateri A C oppositi Sinus 6293204	Ad	anguli A oppositi quæsito lateri C B Sinum 8191521
Ita	latus datum A C 1000 passuum	Ad	lateris quæsiti C B, passus.....

In utroque Analogismo tria prima nota sunt. Quartum igitur utrobique, nimirum latera A B, C B, innotescent per regulam proportionum.

PROBLEMA X.

Datis duobus lateribus (C A ped. 216, B A ped. 112) & angulo (A grad. 113) iis comprehenso reliquos angulos (C, B) & latus reliquum (C B) invenire.

Fig. 26.

Quoniam C A, B A latera dantur, etiam datur eorum summa 328 ped. & eorumdem differentia ped. 104. Rursum quia datur angulus A grad. 113, datur & reliquorum ignotorum, C, B, summa (67. grad.) adeoque & semissis summæ (grad. 33. 30') cujus proinde tangens 6618856 datur ex tabulis. His positis

Ut	laterum datorum C A, B A summa 328 ped.	Ad	laterum C A, B A, differentiam 104 ped.
Ita	tangens 6618856 semisseos summæ incognitorum ang. C, B,	Ad	tangentem..... semisseos differentiæ ignotorum ang. C, B.

Cùm ergo tria prima sint nota, per reg. prop. innotescet quartum, nempè tangens semisseos differentiæ angulorum ignotorum C, B, ... Huic in columnâ tangentium proximè reperitur æqualis...... cui adscripti sunt grad..... pro angulo semisseos differentiæ angulorum C, B, quàm si addas ad semissem summæ Grad. 33. 30', angulorum C, B, habetur B major quæsitus; si subtrahas, provenit minor, C.

Latus reliquum C B reperitur per *praeced.* Jam enim præter latus, dantur & anguli.

Demonstratio.

Fig. 27. & 26.

Analogismi suprà positi est ejusmodi. Fiant anguli H P F, F P G, æquales angulis ignotis B, C. Centro P descripto circulo, qui latera angulorum secet in H, F, G; ducantur ad F P perpendiculares H R, G L, quæ per *defin.* 1. & 6 & 5 erunt sinus angulorum H P F, F P G, posito sinu toto, seu radio, P H, P G. Ducatur deinde recta H O G, & fiat H X par ipsi G O, jungaturque P X. Erit X O differentia ipsarum H O, H X; hoc est ipsarum HO, OG. Deniquè ex centro P ducatur ad H G perpendicularis P Q, quæ [a] bisecabit H G. Quoniam igitur æquales sunt H Q, G Q, & H X, G O; etiam X Q, O Q æquales erunt. Unde Q O est semissis differentiæ X O rectarum H O, O G. Ex quo facilè etiam ostenditur angulum H P Q esse semissem summæ angulorum H P O, O P G, hoc est [b] angulorum, B, C; & Q P O esse semissem differentiæ angulorum H P O, O P G; hoc est B, C. His positis differentia laterum C A, A B, esto Z.

a 3. *lib.* 3.

b *const.*

Quia H R est Sinus anguli H P F, hoc est B; & G L Sinus anguli F P G, hoc est C; erit latus [c] C A ad latus B A, ut H R Sinus anguli B, ad G L Sinum anguli C; hoc [d] est (quia æquiangula sunt triangula H R O, G L O) ut H O ad O G. Ergo C A [e] est ad Z differentiam laterum C A, B A, ut H O, ad ipsarum H O, O G differentiam X O: & invertendo laterum differentia Z est ad C A ut differentia X O ad H O. Atqui (ut jam ostendi) C A est ad B A, ut H O ad O G. Igitur [f] ex æquo Z differentia laterum est ad B A, ut X O differentia ad O G. Ergo invertendo B A est ad Z, ut O G ad X O. Quoniam ergo (ut ostensum suprà) C A est ad A B, ut H O ad O G; ac proinde [g] componendo summa C A, A B est ad A B, ut H G ad O G, A B verò (ut jam ostendi) sit ad Z ut O G ad X O; ex æquo [h] erit summa laterum C A, A B ad Z laterum differentiam, ut H G ad X O. Sed ut H G ad XO, sic semissis HG, nempè H Q, quæ [i] tangens est anguli H P Q, ad semissem X O, nempè Q O tangentem [k] anguli Q P O. Ergo summa laterum CA, AB, est ad Z differentiam laterum, ut H Q Tangens anguli H P Q (qui, ut ostendi suprà, est semissis summæ angulorum B, C) ad Q O tangentem anguli Q P O, qui est semissis differentiæ angulorum B, C. Quod erat demonstrandum.

c Probl. 7.
d 4. *lib.* 6.
e Coroll. 2. p. 18. *lib.* 5.
f 22. *lib.* 5.
g 18. *lib.* 5.
h 22. *lib.* 5.
i *defin.* 6. *cap.* 2.
k *Ibid.*

Alia

Alia Problematis solutio.

Fig. 28. 29. Ex alterutro angulo incognito, ex. gr. ex B in latus oppositum ducta concipiatur perpendicularis BF. In triangulo rectangulo B F A, cùm detur basis B A, & acutus unus B A F, per *Prob.* 2. invenientur B F, & A F, quâ subtractâ ex data C A in *Fig.* 28, additâ verò ad C A in *Fig.* 29, nota fiet etiam C F.

Rursum ergo in trigono rectangulo C F B cùm dentur duo latera B F, C F, per *Probl.* 5, innotescet B C latus quæsitum, & angulus C: quem unà cum dato A subtrahe 180 Grad. a 32.1. remanebit B alter quæsitorum.

PROBLEMA XI.

Fig. 30. 31. **Datis duobus lateribus (A B, C B) & angulo uno (C) ijs non comprehenso, reliquos angulos, & latus reliquum (A C) invenire.**

Per Probl. 7.

Ut	A B latus datum dato angulo G oppositum	Ad	alterum latus datum C B
Ita	Sinus anguli dati C	Ad	Sinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato C B opponitur.

Quare cùm tria prima sint nota, etiam quartum, nempè Sinus anguli ignoti A, innotescet, & per Sinum invenietur in tabulis angulus ipse A, si acutus sit: si verò A obtusus, tunc angulus per Sinum inventus, subtractus à 180 gradibus, relinquet quæsitum A. Ratio patet ex *defin.* 5.

Necesse igitur hic est ad inventionem anguli, ut ejus species aliundè nota sit.

Inventis angulis latus ignotum A C innotescet per *Probl.* 9.

Aliter.

Fig. 32. 33. Ex angulo B datis lateribus comprehenso ducta intelligatur B F perpendicularis ad latus ignotum A C.

In triangulo rectangulo B F C, cùm detur basis B C, & unus acutus C, innotescent per *Prob.* 2. C F, & B F. Rursum in trigono rectangulo B F A, cùm dentur basis A B, & latus B F, innotescent per *Problema* 4, angulus B A F, & latus F A.

Fig. 32. Quod si angulus ignotus B A C, qui datis lateribus A B, C A non comprehenditur, sit acutus, ac proinde perpendicularis B F, ut in *fig.* intra triangulum cadat, angulus B A F jam inventus est ipse B A C quæsitus; & tunc F A jam nota addenda est ad C F ante repertam, ut innotescat totum latus quæsitum A C.

Fig. 33. Si verò B A C sit obtusus, adeoque perpendicularis B F, ut in *Fig.* extra triangulum cadat, angulus inventus B A F, subtrahendus est à 180 gradibus, ut innotescat quæsitus B A C; & tunc F A jam nota, demenda ex notâ F C, ut innotescat latus quæsitum A C.

Rursum igitur ad inventionem anguli B A C, & lateris A C necesse est ut aliunde anguli B A C nota sit species.

CAPUT IV.

Fabrica instrumenti mensorij, & Scalæ.

Per mensorium instrumentum non aliud intelligo, quàm circulum aut circuli quadrantem ad metiendum debitè præparatum: hoc enim utemur solo, quia cæteris parabilior, usu planior atque universalior.

Fabrica Circuli, & Quadrantis.

Fig. 34. Efformetur lamina ænea circularis exactè plana F O L Q, cujus centrum sit A. Per id describe binas diametros Q O, F L sese perpendiculariter intersecantes, quæ totum circulum dividant in 4 quadrantes, quorum arcus singulos QL, LO, OF, FQ, partire in partes æquales 90 hoc ordine: seca primò quadrantem in tres arcus æquales per *Coroll.* 13. *prop.* 32. *lib.* 1. Tum hos singulos in 5 subdivide, & habebis arcus 15: quibus iterùm trisectis arcus proveniunt 45: quos singulos bisecando habes quadrantem totum in 90 æquales arcus, seu Gradus divisum. Simili divisione in tribus reliquis quadrantibus continuatâ, tota circumferentia erit in 360 Gradus secta. Solent Astronomi, cùm patitur instrumenti magnitudo, singulos Gradus denuò subdividere in 60 æquales partes, quæ Minuta appellant: tum ea rursum singula in alia 60, quæ secunda minuta vocitant. Ejusmodi divisio adhibetur, cùm exactissima angulorum inventio ad usus potissimùm Astronomicos requiritur. Quod si per instrumenti parvitatem designari minuta prima & secunda non possint, expediet Gradus singulos dividere in partes 6, aut in 3, aut certè in 2. Porrò divisio sexagenaria sic peragitur: primò Gradum divide in partes 5, quas singulas trisecando partes efficies 15: has bisecando habes 30: quibus rursum bisectis provenient 60.

Cur autem ad circumferentiæ divisionem ex omnibus numeris Mathematici elegerint numeros 360, & 60, causa est, quod hi numeri plurimas habeant aliquotas, quod in calculo solet esse percommodum: numerus 360 aliquotas habet 22.

Partes aliquotæ numeri 360.

2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18
180	120	90	72	60	45	40	36	30	24	20

Partes aliquotæ numeri 90.

2	3	5	6	9
45	30	18	15	10

Partes aliquotæ 60.

2	3	4	5	6
30	20	15	12	10

In his seriebus numeri oppositi sese invicem denominant, quales nempè sint partes totius, ex. gr. in primâ ordine 45 oppositum sibi habet 8; ac proinde 45 est octava pars 360; 8 autem est 45 pars 360.

Graduum ac minutorum divisione peractâ, si integrum desideras mensorium circulum; ad centrum clavo tereti affige regulam, quæ circa ipsum centrum possit circumagi eâ lege, ut latus regulæ BAC semper transeat

transeat per centrum A. Regulæ extremitati affigendæ erunt utrimque dioptræ. Est autem dioptra lamella rectangula R K, habens in medio crenam, seu rectam lineam perforatam X Z; vel ejus loco fidem tensam: sed tunc rectangulum dioptræ est patens, sive vacuum. Sunt autem dioptræ ita regulæ affigendæ, ut crena, seu fides X Z perpendiculariter insistat regulæ lateri B A C, per centrum transeunti: sic enim radius per dioptras trajectus ad oculum, secundùm regulæ latus B A C, quod est omninò necessarium, feretur. Denique ad diametri O Q extremum circellus fiat versatilis S, ex quo suspensum instrumentum se libret perfectè, sic ut diameter Q O, sit horizonti perpendicularis, & F L eidem parallela.

Fig. 37. Si quadrantem circuli desideras, describe in æneâ laminâ exactè planâ rectum angulum B A C, ac centro A inter ejus crura arcum C B; quem partire, ut suprà docui, in 90 gradus, hosque, si fieri potest, singulos in partes 6, aut 3, aut certè in 2. Adjungatur deinde regula, quæ circumagi possit circa centrum A, sic ut ejus latus O A semper per A centrum transeat. Tum utrique lateri A C, A B, & regulæ A O binæ singulis insistant dioptræ, universim nempè sex, quarum crenæ lateribus A C, A B, A O insistant ad quadrantis planum perpendiculares. Contrahi possunt ad tres solùm, si una statuatur ad centrum ita mobilis, ut ejus crena semper centro insistens, maneat ad planum instrumenti recta. Denique ut instrumentum baculo imponi possit, tergo ex oppositâ centri parte tubus affigatur, circa quem moveri & circumagi, prout feret res, instrumentum valeat. Quadrantem sic præparatum Stabilem, sive Firmum appellant, quod in suo usu ferè semper unum eundemque requirat situm, videlicet perpendicularem unius lateris ad horizontem, ad quod opus, ut perpendiculum ad manum sit, quod uni laterum A B, vel A C applicari possit. Quod si loco regulæ A O ex centro perpendiculum appenderis A Y, reliquis omnibus manentibus, quadrantem habes quem vocant Mobilem; quòd in usu suo modò attolli debeat, modò deprimi; ac proinde continuò situm permutet. Expediet utrumque conjungere, quòd fiet si ex crenâ dioptræ centralis perpendiculum suspendatur. Tandem dioptræ laterum extremæ B, C, æqualiter debent esse à centro A remotæ, ut quadrante ex annulo liberè suspenso, radius per eas ductus horizonti æquidistet, hoc enim usum habet præstantem, ut in *Probl. 13. cap. sequ.* apparebit.

Artificiosa inventio minutorum, licet in instrumento descripta non sint.

Fig. 36. Modum hujus artificij ex Petro Nonio Lusitano proponit Clavius, sed operosum nimis & vix practicabilem. Feliciùs id exequitur Guidus Ubaldus in Problem. Astron. &, quod opinor, alij ex illo.

Consule partes aliquotas numeri 60, & ex ijs aliquam, vel ipsum numerum 60 auge unitate. Nos hic ex. gr. sumemus 15, partem quartam 60, quæ aucta unitate facit 16. Ex circumferentiâ, in quâ minuta desiderantur, accipe arcum *a* Z graduum tot, quot in numero 60 unitate aucto, aut in parte ejus aliquota (15) unitate aucta, sunt unitates: hic ergo *a* Z erit grad. 16. Huic arcui æqualem & similem describe *l b*, quem divide in partes æquales unâ pauciores gradibus arcus *a* Z; hoc est vel in 60 partes æquales, aut in tot, quot unitates habet pars aliquota assumpta, quæ hic est 15. Ex hac partitione

Manifestum est 1. unam partem arcus *l b* excedere unum gradum circumferentiæ *a x*, minuto toties sumpto, quoties numerus partium arcus *l b* ingreditur 60: ac proinde, cùm in exemplo nostro arcus *l b* sit partium 15, qui numerus est quarta pars 60, una pars arcus *l b* excedet unum gradum circumferentiæ *a x* minutis 4. Facilis est demonstratio. Nam per const. arcus *l b* partium 15 æquatur arcui *a z* graduum 16. Ergo 15 partes *l b* excedunt 15 gradus *a r* uno gradu *r z*, hoc est 60' minutis. Ergo una pars *l k* excedit unum gradum decimâ quintâ parte 60' minutorum, hoc est minutis 4.

Manifestum est 2. si excessum unius partis suprà unum gradum toties sumpseris, quot partes dantur, haberi minuta, quibus partes datæ excedunt totidem gradus. Ut si dentur *c b* partes 10, decupla minuta quibus una pars excedit unum gradum, provenient minuta quibus *c b* 10 partes, excedunt 10 gradus. Patet ex manifesto primo.

Ex his

Minuta in circumferentiâ datâ, quamvis in eâ non sint descripta, hunc in modum reperiemus. Ponamus regulam, seu perpendiculum, præter gradus integros *a f*, abscidisse partem gradus *f o*; quæritur quot minuta sint in *f o*. Arcum *l b* applica circumferentiæ *o a*, sic ut ejus initium *b* tangat *o*: Vide cujus partis initium conveniat cum initio alicujus gradus. Hic *c* convenit cum *q*. Patet tot partes esse in *c b*, quot gradus in *q f*. Igitur ex manifesto 2, & 1, scietur quot minutorum sit excessus *f o*, quo partes *c b* excedunt totidem gradus *q f*; ac proinde notum fiet, quot minuta contineat *f o*.

Ita totum hoc artificium habent Tyrones brevissimè & propositum & demonstratum.

Scala constructio.

Scalam voco lineam rectam in partes sectam progressionis decuplæ. Usum habet insignem non solùm in hac materiâ, sed in alijs etiam quàm plurimis. *Fig. 35.*

Ex lineâ infinitâ Z A X abscindantur æquales particulæ A *b*, *b g*, *g h* &c. usque in Z, quæ quò majores erunt vel minores, eò tota scala erit major, minórve. Deinde totum intervallum A Z particularum 10, circino acceptum transcribatur decies in rectam infinitam A X, nimirùm ex A in M; ex M in V; ex V in X, & sic deinceps. Hæc erit scala, quæ petebatur.

In quâ si velis particulam A *b* repræsentare pedem unum, A *g* pedes duos, A *h* tres &c. repræsentabit M A pedes 10; V A pedes 20; X A pedes 30. Si autem velis A *b* accipere pro 10 pedibus, A *g* pro 20 pedibus, A *h* pro 30 &c. tunc M A referet pedes 100; V A pedes 200; & sic deinceps.

Itaque si cupiam unicâ circini aperturâ sumere intervallum ex. gr. partium 27, ex V in A sunt pedes 20; ex A in *n* sunt pedes 7, circini igitur crure uno fixo in V, & altero extenso usque in *n*, habes lineam V *n* partium 27.

Eodem modo operandum erit, si cupias intervallum pedum 280. Tunc enim V A refert partes 200 & A *n* partes 80; ac proinde V *n* partes 280.

Sed quoniam scala hujusmodi solùm potest exhibere partium decades, & unitates, aut centenas & decades,

decades, aut millia & centenas, hoc est duos tantùm gradus progressionis decuplæ; aliam Practici Geometræ excogitarunt, quæ tres gradus progressionis decuplæ contineat, nimirùm millenas, centenas, decades; vel centenas, decades, unitates; vel decades, unitates & unitatis decimas.

Alterius scalæ exactioris constructio.

Fig. 35. Construatur, ut suprà, scala simplex Z A X, & ex A erigatur perpendicularis infinita A L, in quâ signentur 10 æquales particulis ex A in L, sive eæ æquales sint particulis *A b*, *b g* &c. sive non; & ex *b* termino particulæ A *b* ducatur *b* L, ut constituatur triangulum A L *b*, cujus ope invenientur partes decimæ ipsius A *b*. Deinde per singula divisionum puncta rectæ A L ducantur parallelæ ad Z X, quarum postrema est C L T; & per singula divisionum puncta ipsius *b* Z, parallelæ ducantur ad *b* L, quarum postrema est Z C. Denique per divisiones M, V, X, &c. ducantur M Y, V T, X ϕ &c. parallelæ ad A L. Quibus peractis, absoluta est scala exhibens tres gradus progressionis decuplæ.

Nam lineolæ interceptæ in triangulo A L B, sunt partes decimæ ipsarum A B, B G &c. quæ rursum decimæ sunt ipsarum A M, M V &c. *Quod facilè demonstratur hunc in modum.* Quoniam *p k* per constr. est parallela ad *b* A, erit *a b* A ad *p k*, ut A L ad *k* L. *Coroll. 1. prop. 4. 6.* Atqui per constr. quarum partium A L est 10, earum *k* L est 9. Ergo etiam quarum partium *b* A est 10, earundem *p k* est 9; hoc est, *p k* est novem decimæ ipsius *b* A. Eodem modo ostendam interceptam sequentem esse ipsius *b* A, 8 decimas, & huic proximam, 7 decimas, & sic deinceps, ac tandem *a* esse decimam unam.

In hac scalâ si in triangulo *b* L A intercepta prima *a* supponatur pro unitate quamlibet mensuram ex. gr. pedem unum repræsentante, tunc intercepta secunda erit 2; tertia erit 3; & sic deinceps usque ad A *b*. A *b* verò, seu L *f* erit 10; L ω erit 20; & sic deinceps usque ad L C. L Y erit 100., L T 200; & sic deinceps.

Quod si *a* supponatur pro 1 decimâ unitatis, quamlibet mensuram repræsentantis, tum intercepta secunda erit 2 decimæ, tertia 3 decimæ; & sic porrò. A *b* verò, seu L *f* erit 1; L ω erit 2; & sic deinceps. L Y verò erit 10, L T erit 20, & sic deinceps.

Usum hujus scalæ ostendent Praxes sequentes.

PRAXIS I.

Tres gradus proportionis decuplæ ex scalâ desumere unâ circini aperturâ.

Ex gr. 366 partes scalæ, hoc est 3 centenas, 6 decades, 6 unitates. Incipe à gradu infimo, & in triangulo *b* A L quære sextam lineam *s r*, quæ dabit 6 unitates; tum in *s r* continuatâ versùs *d* numera 6 decades, seu 60, ex *s* usque in *q*. Rursum ex *r* usque in β numera 3 centenas, seu 300. Denique circini pede uno fixo in β, alterum extende usque in *q*; recta seu intervallum β *q*, continet partes scalæ 366.

Eodem modo erat operandum si petitæ forent partes 26 & 6 decimæ.

PRAXIS II.

Quot partes scalæ recta quævis in chartâ descripta contineat, invenire.

Accipiatur circino quantitas datæ rectæ E; quæ si major sit quàm L Y, eligatur ex rectis M Y, V T, X ϕ &c. ea, cujus distantia ab A L, sit minor proximè quàm E; ea sit X ϕ. Deinde in rectâ X ϕ eligatur intersectio talis, ex. gr. β, ut uno circini crure posito in β, alter etiam incidat in aliquam parallelæ β *d* intersectionem, ex. gr. in *q*. Quo obtento, nota erit recta E, nam β *r* est 300, *s q* est 60, *s r* est 6; ac proinde tota β *q*, hoc est, E, continet partes scalæ 366. Si uno crure posito in β, alterum incidisset in *s*, tunc data E fuisset 306 part. scalæ, nam β *r* est 300, & *s r*, 6: si in *r*, tunc data recta fuisset 300.

Quod si data recta E minor sit quàm L Y, tunc ejus quantitate, ut priùs, circino acceptâ, in recta A L eligenda est intersectio talis ex. gr. *r*, ut uno circini crure posito in *r*, alterum etiam incidat in aliquam parallelæ *r d* intersectionem, puta in *q*. Quo obtento, nota erit rursum data recta E. Nam *q s* est partes scalæ 60, & *s r*, 6; adeoque tota *q r*, seu E est 66.

CAPUT V.

Distantiarum & altitudinum dimensio.

Ad dimetiendas rerum distantias & altitudines varia Geometræ instrumenta, sive organa excogitarunt: quæ omnia si proponere atque exponere voluerimus, varietate rerum & praxium multitudine Tyrones obruentur potiùs, quàm instruentur. Quare hîc alio non utemur, quàm circulo, & quadrante circuli, sive firmo, sive pendulo. Hoc instrumento nihil simplicius, nihil parabilius. Caret varietate casuum, quâ implicatur quadratum; usum verò præ cæteris omnibus habet non solùm in Practicâ Geometriâ, sed etiam in Astronomiâ universâ amplissimum & immediatum. Ubi cætera nihil possunt, nisi prout à circulo derivantur.

Definitiones.

1. *Altitudo* est linea recta ad horizontem, id est Terræ superficiem perpendicularis, ac proinde ad terræ centrum directa.

2. *Distantia oculi ab altitudine mensuranda*, est recta A B, ab oculo A ad altitudinem C B perpendicularis. Atque ea semper intelligitur, cùm distantia simpliciter nominatur. Fig. 38. 39.

3. *Distantia oculi ab aliquo puncto* C, seu distantia puncti A à puncto C, est linea recta ab oculi centro ad punctum, vel à puncto ad punctum extensa.

4. *Angulus Altitudinis* est (B A C) quem in oculo A efficit distantia B A cum radio C A à vertice altitudinis ad oculum emisso.

5. *Angulus Distantiæ* est (C A B) quem in oculo A efficit A C perpendicularis ab oculo ad ipsam B C distantiam ducta, & radius B A, ab extremitate distantiæ ad oculum directus. Fig. 41.

6. *Angulus intervalli duorum locorum* X, Z est (X A Z) quem in oculo A efficiunt radii à locis X, & Z ad oculum directi. Fig. 44.

7. *Mensuratio Geometrica* est, quæ ex quibusdam cognitis Geometrico ratiocinio peragitur.

8. *Mechanica*, quæ absolvitur applicando mensuram, ex. gr. perticam.

Geometrica adhibetur, cùm deficit mechanica. Hæc ubicumque adhiberi potest, illi præferenda; quia minùs errori exposita. Quamvis enim operationes Geometricæ secundùm se infallibiles sint, facilè tamen, sive vitio instrumenti, sive collocatione instrumenti mali, error committitur, si mensor est imperitus aut incurius.

Ut autem in calculo vitentur fractionum molestiæ; pertica, sive regula, quæ ad dimensiones mechanica adhibenda est, sectione denariâ erit partienda: nimirum designanda in eâ erunt 10 pedum aut plurium continua intervalla, quæ deinde singula erunt in decem æquales partes, quas Pollices appellamus, subdividenda. Si major accuratio desideratur; hæ iterùm singulæ in 10 æquales partes, aut certè in quinque vel duas secari possunt. Ita porrò fiet ut pro fractionibus alijs decimales solæ sint obventuræ, quas in calculo tractare possumus ut numeros integros, ut tradidi Arithm. *lib.* 2. *cap.* 11.

9. *Altitudo Accessibilis* dicitur, cujus distantia mechanicè mensurari potest.

10. *Altitudo inaccessa*; cujus distantia non potest mechanicè mensurari.

11. *Triangulum Opticum* voco, quod in aëre aut superficie terræ per radios descriptum intelligitur.

PORISMA 1.

Altitudinis angulum investigare.

Quadrante stabili, seu firmo.

Fig. 39. Baculum ferreâ cuspide armatum solo infige: huic quadrantem A F L impone eâ lege, ut latus unum F A sit perpendiculare ad Terram (quod ope perpendiculi obtinebitur) & centrum A sit infrà, & planum quadrantis dirigatur in altitudinem C B. Deinde regulam A O, quæ circà centrum A volubilis est, ita attolle vel deprime, ut oculus admotus centro A, & per regulæ A O utramque dioptram collimans, conspiciat apicem C altitudinis mensurandæ. Arcus quadrantis L O, quem latus regulæ deorsum intercipit, indicabit quantitatem anguli quæsiti C A B: quot enim gradus & minuta continebit arcus L O, tot graduum & minutorum erit angulus altitudinis C A B.

Quò quadrans erit major, eò erit inventio anguli accuratior, tum quia certiùs collocari potest latus horizonti perpendiculare, tum quia præter gradus, etiam minuta in eo signari possunt. Itaque cùm dimensio summè exacta quæritur, fabricandus esset quadrans eâ magnitudine, qui limbum habeat non solùm in gradus, sed etiam in minuta prima, imò, si fieri possit, etiam in secunda, aut certè in secundorum decades subdivisum. Ex quo patet præstantia quadrantis præcedenti capite descripti, qui licet magnitudine sit mediocri, minuta prima exhibere potest.

Circulo pendulo.

Fig. 38. Baculum, ut suprà, solo infige, & ex eo appenso instrumento, ejusque plano versùs altitudinem C B directo, regulam R A O ita circumage, ut oculus ad ejus extremitatem R applicatus, & per utramque illius dioptram collimans, conspiciat C apicem altitudinis mensurandæ. Arcus L O, quem instrumenti linea horizontalis S A L, & regulæ latus A O intercipiunt, indicabit quantitatem anguli quæsiti C A B.

Ut operatio evadat exactior, ejusmodi examen & correctio adhiberi poterit. Ubi semel collimaveris, verte instrumentum & collima denuò. Si in utràque collimatione arcus L O sint æquales, credibile est operationem fuisse exactam: sin verò inæquales, ut si in primâ collimatione, sit grad. 60; in secundâ grad. 59; certum est aut in instrumento, aut in operatione vitium inesse: tum verò differentiæ semissem adde minori arcui, ut fiat grad. 59. 30', pro angulo exacto.

Quadrante pendulo.

Fig. 40. Baculo, ut prius, in terrâ defixo Quadrantem impone, & latus Quadrantis A o dirige in apicem altitudinis C eâ lege, ut centrum φ o sit apici C propinquius; & oculus in A constitutus per utramque lateris dioptram collimando videat apicem C, & planum Quadrantis sit applicatum perpendiculo liberè pendenti. Arcus *f z* à perpendiculo abscissus, indicabit quantitatem anguli *f o z*, qui angulo altitudinis æqualis est.

Quod sic ostendes. Intelligatur ducta A B perpendicularis ad C B, quam perpendiculum *o f* secet in *q*. Igitur *a* C A B est angulus altitudinis, eademque A B etiam horizonti æquidistat; ac proinde perpendiculum *o f*, ad eam in *q* perpendiculare est. Quoniam igitur ab angulo *b* recto A O X in basim A X cadit perpendicularis *o q*, erit angulus *q o x*, seu *f o z* æqualis *c* angulo *o* A *x*, seu C A B.

a defin. 4.
b ex hyp.
c 8. *lib.* 6.

PORISMA 2.

Angulum distantiæ invenire.

Quadrante stabili.

Fig. 41. Latus unum A F statue horizonti perpendiculare, sic ut centrum A sit suprà, & planum quadrantis existat in plano C A B: tum regulam A O ita volve, ut oculus centro A applicatus, & per utramque dioptram regulæ collimans conspiciat extremitatem distantiæ B. Arcus F O indicabit quantitatem anguli distantiæ B A C.

Circulo pendulo.

Fig. 42. Eadem est operatio, nisi quod circulo liberè & quietè suspenso oculus applicandus sit ad regulæ extremitatem superiorem *r*.

Examen & correctio adhiberi potest, quæ suprà.

Quadrante pendulo.

Fig. 43. Dirige latus quadrantis A O in extremitatem distantiæ B, sic ut centrum A sit suprà, & oculus centro A applicatus per dioptras lateris A O videat extremitatem B. cætera ut suprà. Arcus O *f* à perpendiculo abscissus manifestabit angulum distantiæ B A C quæsitum.

PORISMA 3.

Data sint duo loca X, Z, & oculus in A: angulum intervalli X A Z invenire.

Fig. 44. PEnduli Circulus & Quadrans huic operi inservire non possunt.

Igitur planum Quadrantis firmi baculo in terrâ defixo impositi statue in plano X A Z. Tum latus A B dirige in signum Z, & regulam A C in signum X, sic ut oculus in A centro collimans per dioptras lateris A *b*, videat Z, & collimans per dioptras regulæ A *c* videat X. Arcus *b c* manifestabit angulum intervalli quæsitum X A Z.

Fig. 45. Quando angulus est obtusus, ut F A L; posito centro in A anguli vertice, statue quadrantis latus A P in directum cum uno anguli latere A F, collimando per dioptras B, A, in F: regulam verò A O dirige in anguli latus alterum A L, collimando per dioptras A, O in L. Arcus O C indicabit excessum anguli dati F A L, suprà rectum.

Angulus intervalli duorum locorum longè certiùs colligitur, quàm anguli altitudinis & distantia, quòd neque situs perpendicularis neque libramentum instrumenti, neque perpendiculum hic requirantur in quibus deviatio vel modica errorem notabilem in operationem inducit, ut ostendam infra in scholio probl. 16.

Scholium.

Iudicium de instrumentis.

Cùm certitudo dimensionum, quas tradituri deinceps sumus, ab inventione accuratâ horum angulorum maximè dependeat, opera pretium fuerit hic annotare quadam ad errores pracavendos idonea.

1. In quadrante stabili pracipuum erroris periculum est in collocatione perpendiculari unius lateris; deviatio quippe insensibilis a perpendiculo errorem infert in dimensione sensibilem, ut sub finem hujus capitis ostendam in scholio probl. 16. num. 1.

2. Quadrans pendulus eo periculo caret penitùs; sed aliâ eget cautelâ duplici circa liberum descensum perpendiculi: prima est, ut perpendiculo ita planum quadrantis applicetur, ne tamen illius libertatem contactu suo non impediat: secunda ut quiescat; quare ejus motum leni attactu elidere oportet, si nimis diu titubet. Vtrumque factu perfacile. Vnde Quadrantem pendulum cùm ejus esse usus potest, longè praferendum stabili existimo.

Fig. 48. *3. Circulus liberè suspensus, utroque caret incommodo: cùm enim seipsum libret, curâ nos liberat collocationis perpendicularis; & cùm regulam habeat mobilem, etiam à perpendiculi molestijs expedimur. Verùm alia solicitudo succedit à circuli libramento perfecto, quòd obtineri non potest, nisi diametrum F X, ex quâ circulus suspensus est, quaque alteram S L perpendiculariter intersecat, partes aquè graves circumsistant. Defectum libramenti cognosces, si factâ collimatione unâ, vertas circulum, & denuo in idem punctum collimes. Tunc enim si arcus à regulâ abscissi aquales fuerint in collimatione utrâque, proba erit instrumenti libratio: si inaquales, aut libramentum deficit aut in graduum divisione erratum est. Nihilominus hic error, si non sit magnus, satis corrigitur, si (quod suprà monui) ejus semissem addas arcui ex repertis minori, is enim ita auctus inter nimis magnum & nimis parvum medius est, ac proinde aut verus aut certè vero propinquior. Magnitudine porrò circulus integer utrique quadranti manifeste cedit, cùm è quatuor quadrantibus quos complectitur, unus tantùm angulorum investigationi subserviat, tribus reliquis ad solum libramentum requisitis. Non deest etiam molestia a titubatione penduli instrumenti qua manu leniter admota eludenda est.*

Ex hactenus annotatis ita statuo, Quadrantem pendulum in capiendis angulis altitudinis ac distantia adhibendum pra omnibus; deinde Circulum: postremo loco Quadrantem stabilem: qui tamen duobus illis hoc antecellit, quòd usum habeat latiorem, cùm ejus solius ope reperiri possit, & quidem omnium securissime, angulus intervalli, quod alia duo non possunt. Adde etiam quod illi arcus minutorum expeditiùs applicari possit.

PROBLEMA I.

Distantiam inaccessam montis vel turris, per duas stationes metiri.

TUrris, seu montis altitudo sit B C, distantia A B. In ipsâ lineâ distantiæ eligantur duæ stationes in A, & F, quarum intervallum metire mechanicè, & sit ex. gr. pedum 500. Ad hoc verò requiritur planities ampla & patens, ut accedere ad rem distantem, aut recedere ab eâ tanto intervallo possis, quanto opus erit. Eò autem certior erit dimensio, quò intervallum fuerit majus. Radij visuales ab oculo in utrâque statione ad C verticem altitudinis sint A C, F C. Invenianturᵃ altitudinum anguli C A B, C F B, quibus subtractis à 90 gradibus, noti fiunt ᵇ anguli complentes A C B, F C B. Posito ergo sinu toto C B; ᶜ angulorum A C B, F C B, tangentes erunt A B, F B; ac proinde A F intervallum stationum est tangentium differentia. Ergo est

Fig. 46. *a por. 1. c. 5. b 32 lib. 1. vel annot. 11. cap. 3. c def. 9. c. 2.*

Ut	AF differentia tangentium, angulorum ACB, FCB, complentium altitudinis angulos	Ad	majorem tangentē AB
Ita	AF Stationum Intervallum pedum 500	Ad	distantiæ AB quæsita pedes.....

Tria prima sunt nota. Ergo etiam quartum innotescet, distantia nempè A B, in eâdem mensurâ, in qua notum est A F stationum intervallum.

Aliter.

Intelligatur esse ducta F Z parallela ad A C. Posito sinu toto F B, ᵈ erit C B tangens anguli C F B & Z B tangens anguli Z F B, qui angulo altitudinis C A B per *prop. 27. l. 1.* æqualis est. Ergo C Z est differentia tangentium angulorum altitudinis. Jam per *Coroll. 1. prop. 4. lib. 6.*

Fig. 46. *d defin. 9. cap. 2.*

Ut	CZ differentia tangentium, angulorum altitudinis CFB, CAB	Ad	ZB tangentem minorem
Ita	AF intervallum stationum ped. 500.	Ad	minoris distantiæ FB pedes.....

Cùm ergo tria prima sint nota, etiam quartum fiet notum per regulam proportionum.

Hic modus est primo aliquantò brevior, primus tamen in eo prastat, quòd eâdem ferè operâ exhibeat etiam altitudinem, ut apparebit ex problemate 7.

Absque finibus & calculo inaccessam distantiam, imò & altitudinem eadem opera metiri.

Fig. 46. Angulo in primâ statione invento describatur per prax. 3. schol. *pag. 23. l. 1. elem.* in chartâ æqualis S A X: & quot pedum fuit intervallum stationum, totidem partes ex scalâ acceptas transscribe in latus AS ex A in F. Fiat deinde noto jam angulo stationis secundæ æqualis S F O, & latus F O occurrat lateri AX in C. Ex C demitte perpendicularem CB occurrentem lateri AS in B. Patet ex *prop. 32. lib. 1.* triangula ACB, FCB triangulis opticis utriusque stationis æquiangula, ideoque per *prop. 4. lib. 6.* iisdem similia esse; ac proinde AF referre intervallum stationum, & AB distantiam, & CB altitudinem. Inquire igitur quot partes scalæ contineant AB, & CB: totidem quippe pedes distantia ipsa, & altitudo continebunt.

Cùm enim tres lineæ AF, AB, CB sint proportionales intervallo stationum, distantiæ, altitudini, & cùm ex constr. intervallum stationum tot pedes contineat, quot scalæ partes continet AF; necesse est etiam distantia & altitudo tot sint pedum, quot partium scalæ sunt AB, & CB.

Scholium.

Practici Geometræ; qui de hoc argumento hactenus scripsêre, praxes suas absque limitatione ullâ solent proponere. Vnde fit ut ij, qui in rebus Geometricis parùm sunt experti, dum absque scrupulo ullo ubique & semper eodem modo operantur, in magnos errores incidant: cæteri verò, qui peritiores sunt, dum errores tantos observant, neque satis ex quibus nascantur causis expendunt, sibi persuadeant ferè nihil exactum hisce dimensionibus posse obtineri. His incommodis facile occurretur, si limitationes & determinationes necessariæ suis locis adhibeantur. Quod igitur in Geometriâ Practicâ desiderari potissimùm video, supplebunt scholia, quæ problematis, ubi opus erit, subjungentur.

I.

Sub angulo altitudinis valdè parvo incerta erit distantiæ dimensio.

Fig. 47. *Si enim instrumentis utamur ordinariæ magnitudinis, facilè error aliquis in capiendis angulis, altitudinis præsertim, committitur. Error autem vel minimus in quantitate anguli valdè parvi determinandâ commissus, ingentem causat errorem in distantiâ. Altitudo montis sit* B C; *distantia horizontaliter infinitè extensa* B X. *Exilem aliquem Angulum altitudinis, in statione videlicet admodùm remotâ, ponamus inventum esse* C A B, *vero majorem: verus autem sit* C F B. *Quoniam* C A B *externus* k *utrique* C F B, & F C A *æqualis est; erit* F C A *differentia falsi* C A B, & *veri* C F B; *hoc est* F C A *est ipse error, seu erroris quantitas. Statuamus deinde in statione viciniori repertum esse aliquem altitudinis angulum præcedenti majorem* C Q B, *qui à vero* C O B *etiam differat angulo* O C Q: & *sint errores ambo* F C A, O C Q *æquales. Manifestum est* F C A *longè majorem intercipere partem (*F A*) in lineâ distantiæ quàm sit* O Q *intercepta ab* O C Q. *Sunt autem* F A, O Q, *errores distantiæ; siquidem* F B *est distantia vera collecta ex vero angulo altitudinis* C F B, & A B *est distantia falsa deducta ex falso angulo* C A B, *ac proinde* F A, *distantiæ veræ ac falsæ differentia, est error distantiæ. Atque idem eodem modo ostenditur in* O Q. *Liquet ergo cùm peccatur in parvo altitudinis angulo, errorem distantiæ multò causari majorem, quam in magno.*

k 32. lib. 1.

Imò fieri potest, ut idem error etiam minimus in altitudinis angulo semper decrescente, errorem in distantiâ causet quovis dato majorem; hoc est ut distantia colligatur verâ major minórve decuplo, centuplo, millecuplo. Assumatur enim in quovis altitudinis angulo eadem semper quantitas erroris, quæ supra nempe F C A *vel* O C Q, & *ex* C *ducatur* C Z *parallela ad* B X. *Cogitemus angulum* F C A, *moveri versus parallelam* C Z, *sic ut tandem unum ejus latus incidat in ipsam parallelam, & sit* L C Z *idem qui* F C A. *Tunc unum latus* C L *alicubi cum* B X *concurret, alterum verò nusquam, utpotè parallelum: ac proinde angulus ille cùm parallelam attigerit, in lineâ horizontali intercipiet longitudinem infinitam. Ergo accedendo semper propiùs ac propiùs ad parallelam, intercipere poterit longitudinem datâ quâvis finitâ majorem. Atqui decrescente in infinitum altitudinis angulo* C F B, *unum ejus latus* C A, *ac proinde etiam angulus* A C F, *qui est erroris quantitas, accedit ad parallelam* C Z *propiùs semper ac propiùs in infinitum. Ergo decrescente absque termino altitudinis angulo, potest error* A C F *intercipere partem ex* B X *datâ majorem; ac proinde vel minimus error in altitudinis angulo errorem in distantiâ causare potest quovis dato majorem.*

Nota, *Hîc solùm expendisse me defectum anguli altitudinis ortum ex situ vitioso lateris superni* C L; *supponendo infernum latus situm habere debitum, nempe horizonti parallelum, ex cujus defectu quid nascatur erroris, exponam in scholio probl. 16. Vitiatur situs lateris superni ex malâ collimatione ad apicem altitudinis, & inæquali divisione graduum altové instrumenti vitio.*

II.

Quantum esse debeat intervallum stationum.

In constructione Problematis requiritur differentia aliqua tangentium, vel angulorum altitudinis, vel angulorum ipsos complentium. Ea autem ut habeatur, necesse est ut aliqua sit differentia ipsorum angulorum: & ut differentia angulorum obtineatur, opus est justo stationum intervallo. Loca stationum sint A & F. *Angulorum altitudinis in his stationibus* C A B, C F B, *differentia est* A C F *(est enim* C F B *par duobus* b C A B, A C F*): qui angulus* A C F *quò fuerit major, eò certior operatio erit: erit porrò eo major, quò stationum* A, F *intervallum fuerit majus. Toto hic cælo aberrant ij qui non satis ista expendunt, dum arbitrantur stationum intervallo quolibet ad libitum assumpto, sensibilem angulorum differentiam posse obtineri. Quantum fallantur, ex inventione ipsâ intervalli apparebit.*

Fig. 46.

b 32. lib. 1.

Quoniam consultum est ut differentia angularis ACF *unius gradus existat, statuamus altitudinis angulum* C A B, *in statione* A *esse* 14 *grad.* C F B *in statione* F, *grad.* 15. *Ergo complementa eorum,* A C B, F C B *sunt grad.* 76, & 75; *quorum tangentes sunt* c A B, F B; & *ex tabulis dantur* 401078, & 373205, *adeoq; & tangentium differentia* 27873, *ipsum videlicet intervallum stationum* A F: *cujus proinde ratio ad distantiam majorem* A B *reperitur, majorem tangentem per tangentium differentiam dividendo. Comperies igitur hac ratione, cùm in prima statione habetur altitudinis angulus*

c defin. 9. cap. 2.

gulus 14 grad. ut obtineatur in statione secundâ angulus uno gradu major, nempè grad. 15, oportere accedere per spatium (A F) quod fere sit pars decimaquarta totius distantiæ A B, eodem modo investigabitur quocumque dato altitudinis angulo in statione unâ, quanto opus sit stationum intervallo, ut acquiratur in statione alterâ angulus altitudinis differens gradu uno aut pluribus.

Anguli altitudinis graduum	*requirunt intervallum stationum, quod sit majoris distantiæ A B pars.*
19 & 20	18 [illegible]
14 & 15	14 [illegible]
10 & 11	10 [illegible]
5 & 4	4 [illegible]

III.

Quæ sit proportio altitudinis ad distantiam sub variis angulis.

Fig. 46.

In triangulo rectangulo A B C, dato altitudinis angulo A, datur proportio laterum A B distantiæ, quæ est sinus totus, & C B altitudinis, quæ est tangens anguli A per defin. 9. cap. 2. Itaque

posito altitudinis angulo C A B	*erit altitudo CB, distantiæ A B*
Graduum	Pars
20	2 [illegible]
15	3 [illegible]
10	5 [illegible]
5	11 [illegible]
3	19 [illegible]
1	57 [illegible]

Fig. 48.

Hæc intellige, si distantia non sit tanta, ut propter rotunditatem terræ sensibiliter curva evadat; quod eveniet si gradum unum adæquet ambitus terreni. Altitudo montis esto C B, quæ protracta transit per terræ centrum X. Oculus sit in A. Intervallum A B grad. 1. quamvis in figurâ amplius sit assumptum commoditatis gratiâ. Quoniam angulus altitudinis per instrumentum capitur, dirigente perpendiculo, quod semper tendit ad centrum terræ X; triangulum rectangulum distantiæ, quod hactenus consideravimus, non erit F B C, sed A O F, in quo F O minor est sensibiliter, (ut ostendam infrà in Scholio 2 Probl. 8.) altitudine montis B C: distantiarum tamen A O, A B, differentia minoris quidem, sed alicujus tamen adhuc momenti est, si cum B C comparentur; nullius, si inter se, ut ostendam numero 4. Quare cùm distantia æquat. 1. grad. proportiones jam traditæ sunt proportiones ipsius A O, seu A B ad F O; ac proinde majores quam A B distantia, ad altitudinem veram B C.

IV.

Utrum rotunditas terræ officiat huic mensurationi distantiæ.

Fig. 48.

Ita suspicari quispiam posset ex iis, quæ num. 3. observavimus. Repetantur isthic observata unà cum diagrammate, in quo distantia mensoris à monte sit A B gradus unus terreni ambitus; hoc est (ut cap. 6. Prob. 4 docebitur) 24 milliarium Belgicorum. Linea distantiæ, cujus quantitas ex vi Problematis reperitur, est non arcus A B, sed A O tangens superficiem terræ. Ducatur subtensa A B. Tangens A O unius gradus, excedit A B subtensam unius gradus ne quidem parte millesimâ. Igitur A O subtensam A B, adeoq; adhuc magis arcum A B insensibiliter excedit. Unde ne quidem in distantiam 24 milliarium Belgicorum quidquam erroris ullo modo perceptibilis rotunditas terræ derivat.

PROBLEMA II.

Distantiam inaccessam per duas stationes aliter metiri.

Fig. 49. vel 50.

Distantia mensuranda sit A B; in cujus extremitate sit turris, seu altitudo alia, cujus apex C distinctè videri possit. In planitie circumpositâ eligatur altera statio lateralis F, cujus distantia à primâ A mensuretur mechanicè. Investigentur deinde utriusque stationis anguli, nimirùm F A C, A F C: cum quibus, & latere noto A F reperietur per *Probl. 9. cap. 3.* latus A C distantia mensoris à vertice turris B C; si nimirùm fiat ut sinus anguli F C A ad sinum anguli A F C, ita latus notum A F ad aliud.

Requiruntur ergo hæc.

1. Planities ampla circa A, ut mensurari possit mechanicè intervallum stationum A F.

2. Intervallum stationum quam fieri potest maximum, ut angulus F C A fiat sensibilis: quò enim ille major erit, eò certior operatio evadet. Expediet igitur eum non esse minorem uno gradu; imò si fieri poterit, ut gradus æquet 4 vel 5, aut saltem tres, duósve.

3. Ut non solum in termino distantiæ mensurandæ erecta sit altitudo quæpiam, cujus apex distinctè videri possit ex statione utràque A & F, sed etiam ut in A extet signum, quod ex F, & in F signum, quod ex A spectari possit, ex. gr. cacumen turriculæ aut domus. Quod si desint signa visibilia in A & F, ea erunt quocumque demùm modo supplenda.

4. Ut angulus A F C, vel F A C quem stationum intercapedo A F facit cum radio visuali, sit rectus, aut recto quam proximus: tunc verò solvetur quæsitum per Probl. 3. cap. 3.

Inventâ in hunc modum A C distantiâ mensoris ab apice turris B C, si existat sensibilis differentia inter A C & A B, (quod quando accidat, in Scholio tradetur) tum in rectangulo trigono A B C, cum jam inventâ A C & altitudinis angulo C A B, qui notus fiet per *por.* 1, invenietur ipsa A B per *Prob. 2. cap. 3.*

Quod si defectu planitiei circa A mechanicè mensurari nequeat intervallum stationis lateralis A F; aut ex F loca A & C spectari nequeant; aut tanta sit distantia, ut nimis magno opus sit stationum intervallo ad obtinendum sensibilem angulum F C A; confugiendum erit ad Problema sequens.

Cæterùm hæc mensurandæ distantiæ ratio videri posset anteponenda præcedenti, primò quia minori indiget stationum intervallo, ut ostendam infra in Scholio num. 4. Secundò quod ad longe majorem distantiam mensurandam se extendit, quam præcedens. Quamvis autem hæc praxis tres requirat angulos, unum altitudinis, duos distantiæ, ubi altera solùm duos altitudinis: id tamen inde satis videtur compensari, quòd securior sit (ut dixi por. 3. sup.) angulorum distantiæ investigatio.

Aliter absque sinibus & calculo non solùm distantiam inaccessam, sed etiam altitudinem invenire.

Fig. 49. vel 50.

Stationibus institutis, ut suprà, inventisque per instru-

instrumentum angulis: sume ex scalâ tot partes, quot passus ex. gr. erant in stationum intervallo, easque transscribe ex A in F. Ad extremitates rectæ A F fac a angulos F A Z, A F X, æquales angulis per instrumentum inventis; sitque F A Z primæ stationis angulus: latera deinde A Z, F X concurrant in C. Erit ergo triangulum b A C F æquiangulum; ac proinde c etiam simile triangulo optico, cujus basis erat stationum intervallum, apex verò in ipso apice altitudinis mensurandæ.

a Prax. 3. Schol prop. 23. lib. 1.
b Coroll. 9. prop. 32. l. 1.
c 4. lib. 6.

Fiat deinde d angulus C A Q æqualis angulo sub quo visa fuit altitudo; & ex concursu C demittatur perpendicularis C B, concurrens cum A O in B. Erit ergo triangulum A C B e æquiangulum; ac proinde f simile alteri optico triangulo, cujus unum latus erat distantia quæsita, alterum altitudo. Unde A F referente intervallum stationum; A B refert distantiam, C B altitudinem. Cùm igitur per constr. tot passus contineat intervallum stationum, quot scalæ partes continet A F; etiam distantia, & altitudo quæsitæ tot continebunt passus, quot scalæ partes continent A B, & C B. Inquire igitur quot partes scalæ sint in A B & C B: & numeri inventi indicabunt passus in distantiâ & altitudine contentos.

d Prax. 3. Schol. 23. lib 1.
e 32. lib. 1.
f 4. lib. 6.

Scholium.

I.

Cur etiam hîc magno opus sit stationum intervallo?

Fig. 49.

Ut intervalli stationum angulus F C A evadat sensibilis: quò enim ille fuerit major, eò certior futura est distantiæ inventio: quò verò minor, eò majus erit erroris periculum, ut ejus quantitas accuratè cognoscatur. Quod autem crescat angulus F C A aucto stationum intervallo A F, per se manifestum est.

II.

Cur expediat ut angulus AFC, vel FAC; quem stationum intercapedo A F facit cum visuali radio, sit rectus aut recto proximus?

Fig. 49.
a 16. 3.

Quia angulo A F C existente recto, intervalli angulus A C F est maximus. Centro A per F describatur circulus, qui a tanget radium C F ex hyp. perpendicularem radio A F. Ad utramlibet partem intervalli A F, sumantur intervalla ipsi A F æqualia nimirùm A O, A L, quæ cum radio visuali efficiant angulos AOC, A L C non rectos. Quoniam radius C F circulum tangit; alii verò C L, C O necessariò secant; patet angulum F C A majorem esse angulis O C A, L C A: atque eodem modo quibuscumque aliis.

Pari modo idem ostenditur, si rectus sit angulus F A C, ut in figurâ 50.

III.

Quanto opus sit stationum intervallo, ut intervalli angulus F C A existat lubitæ magnitudinis.

Fig. 49.

In trigono A F C efficiat A F stationum distantia cum radio visuali F C angulum rectum F; & intervalli angulus F C A ponatur esse grad. 1. Quæritur ratio A F ad A C. In trigono rectangulo A F C, A C est sinus a totus 100000. A F verò est sinus anguli C unius gradus, nimirum 1745. Quare divisis 100000 per 1745, quotiens 75 [illegible] indicabit quanta pars sit A F ipsius distantiæ A C, minor videlicet unâ distantiæ parte quinquagesimâ octavâ, hoc modo supputavi tabellam sequentem.

a def. 6. 3. 2.

Ut intervalli ang. F C A sit	*Stationum intervallum A F debet esse distantiæ A C.*
Grad.	Pars
1	57 [illegible]
2	28 [illegible]
3	19 [illegible]
4	14 [illegible]
5	11 [illegible]
6	9 [illegible]

IV.

Longè minori opus est stationum intervallo, dum una stationum lateralis est, quàm dum utraque directa.

Manifestum erit, si tabulam præcedentem conferas cum eâ, quam supputavi num. 2. Probl. præc. placet exemplo uno alterove rem declarare.

Mensuranda detur distantia milliariorum Belgicorum $5\frac{1}{2}$, in cujus termino sit mons altus dimidio Belgico milliari. Quoniam ergo hæc distantia altitudinis undecupla est, mons ille spectabitur b sub angulo 5 grad. Quando autem altitudinis angulus est grad. 5, ut habeatur in statione altera directa angulus altitudinis uno gradu minor, graduum nempè 4; ac proinde intervalli angulus F C A sit gradus unius; opus est stationum intervallo, c quod sit majus parte quintâ ferè totius distantiæ: hoc est in casu præsenti uno circiter milliari Belgico. Dum verò statio una lateralis est, ut obtineatur intervalli angulus F C A unius gradus, nequidem requiritur pro stationum intervallo A F distantiæ A C quinquagesima octava pars, ut ex num. 3. patet: hoc est in casu præsenti minus quàm $\frac{12}{314}$ unius milliaris Belgici; hoc est ferè decima Belgici milliaris pars. Ergo dum una statio lateralis est, habetur intervalli angulus F C A unius gradus mediante intervallo stationum ferè decies minori, quàm dum utraque statio est directa.

b ostendi num. 3. Probl. præc.
c ostendi num. 2. Prob. præc.
Fig. 49.

Quod si, positis iisdem, intervalli angulus F C A desideretur 4 graduum; tum si utraque statio accipiatur directa, ex calculo, quem tradidi num. 2. Problematis præcedentis, pro stationum intervallo requiretur totius distantiæ pars ferè [illegible]; hoc est intervallum requiretur plus quàm dimidium totius distantiæ A B, ac proinde inutilis est tum praxis primi Problematis. At si una statio lateralis sit, obtinebitur angulus F C A grad. 4. assumpto intervallo, quod non adæquet partem distantiæ decimam quartam.

V.

Ad quantam distantiam mensurandam hoc Problema se extendat.

Assumatur pro intervallo stationum mechanicè cognoscendo medium milliare Belgicum, quod intervallum quamvis non sine gravi labore ac molestiâ mensuretur; tamen quando distantia, quæ proponitur investiganda,

magni

magni momenti est ex. gr. ad reperiendum ambitum terræ, ut dicetur a infrà: operæ pretium erit & hoc spatium, &, si opus est, etiam illo majus applicatâ decempedâ mensurare. a cap. 6.

Hoc igitur assumpto intervallo stationum, si angulus intervalli FCA fuerit gradus unius, distantia per hoc Problema inventa excedet milliaria Belgica 28. distantia enim, ut patet ex num. 3. est ad stationum intervallum ut 57 [illegible] ad 1, cùm angulus intervalli est grad. 1. Ergo distantia hic continebit plus quam 57 dimidia milliaria Belgica, hoc est plus quam 28 integra. Hoc modo constructæ sunt tabellæ sequentes, quæ distantias per hoc Problema mensurabiles accuratè exhibent.

Posito stationum intervallo dimidij Milliaris Belgici, si intervalli angulus FCA est	*Distantia per hoc Problema inventa excedet Milliaria Belgica.*
grad.	
1	28 ½ ferè
2	14 [illegible]
3	9 ½ ferè
4	7 [illegible]
5	5 ½ ferè
6	4 ½ ferè.

Posito stationum intervallo pedum Antverpiensium 5000, si angulus FAC est	*Distantia inventa excedet* Pedes Antv.	*sive Mil. Hor.*
grad.		
1	286532	14
2	143307	7
3	95547	4
4	71684	3
5	57372	2 [illegible]
6	47837	2 [illegible]

Posito stationum intervallo pedum Antverpiensium 1000, si angulus FAC est.	*Distantia inventa excedet* Pedes Antv.	*sive Mil. Hor.*
grad.		
1	57306	2 [illegible]
2	28661	2 [illegible]
3	19109	&c.
4	14336	
5	11474	
6	9567	

Posito stationum intervallo Ped. 100. si FCA est.	*Distantia inventa excedet pedes*
grad.	
1	5730
2	2866
3	1910
4	1433
5	1147
6	956

Ex quibus patet distantiam incomparabiliter majorem posse mensurari, cùm statio una lateralis est, quàm dum utraque directè in lineâ distantiæ accipitur.

VI.

Quando contemni possit differentia inter distantiam verticis AC, & distantiam horizontalem AB. Fig. 49.

In trigono rectangulo ABC ponatur angulus altitudinis CAB grad. 1. Ergo a ACB est grad. 89, cujus sinus est b AB, 99984. quarum sinus totus AC est 100000. horum differentia est 16, quæ ad AB, 99984 est ut 1 ad 6249, adeoq; nullius momenti, hoc modo constructa est tabella sequens, ex quâ intelliges quando contemni possit differentia dicta a 32 3. b defin. 6. cap. 2.

Existente angulo altitudinis CAB	*Distantia AB excedit differentiam*	*plusquam vicibus*
grad.		
1		6249
2		1639
3		724
4		409
5		262
10		65

PROBLEMA III.

Distantiam duorum locorum (A, B) variè impeditam, per duas, & quando ita opus est; per tres aut plures stationes metiri.

PRaxes Problemate 1 & 2, jam expositæ usui esse non possunt. Primò si neuter locus vel alteruter adiri nequeat. Secundò si neuter in plano sit: tunc enim stationum intervallum AF Probl. 1 & 2. assumptum, non poterit mechanicè mensurari. Tertiò si ex neutrâ stationum vel alterutrâ nequeat conspici C apex altitudinis in distantiæ termino erectæ. Quartò si distantia sit tanta, ut duas solùm adhibendo stationes nimis magno opus sit stationum intervallo, quod proinde mechanicè mensurari vix possit. Quintò denique si desideres ex modico intervallo mechanicè noto magnam distantiam invenire. Quis ergo in hisce casibus tenendus sit modus, hoc Problemate exponam. Fig. 49. & 46.

CASUS 1.

Mensuranda sit distantia locorum A & B, quorum neuter adiri possit, vel aliud subsit ex tribus primis impedimentum. Eligantur in planitie aliquâ stationes duæ in C & F, quarum intervallum FC metire perticâ. Noti fiant anguli AFC, ACF: cum quibus & latere noto FC, reperietur m AC. Pari modo noti fiant anguli BCF, BFC: ex quibus, & latere noto FC, innotescet m BC. Inveniatur deinde angulus ACB: cum hoc, & lateribus notis AC, BC, n reperietur AB distantia quæsita. Fig. 51. 52. 53. 54. m per prob. 9 cap. 3. n per probl. 10. cap. 3.

CASUS 2.

Quod si locus, in quo es, sit talis, ut nequeant duæ stationes reperiri utrâque conditione requisitâ præditæ; nimirum, ut & sint in planitie, quò possit earum intervallum mechanicè mensurari, & conspici ex utrâque possint A, B, termini distantiæ mensurandæ; elige primò stationes duas FC in planitie positas, Fig. 55.

quarum

quarum intervallum metire perticâ: deinde duas alias quære, O, Q, è quibus conspici possint A, & B, quarum distantia OQ reperiatur ope lateris mechanicè noti FC, ut jam docui: tum per OQ jam notam eâdem methodo reperietur ipsa AB distantia quæsita.

CASUS 3.

Mensuranda sit distantia AB, etiam maxima, assumpto ad lubitum intervallo mechanicè notificando, etiam exiguo.

Fig. 56.

Perexiguum intervallum intelligo, quod non habet proportionem sensibilem ad distantiam, & cujus angulus inperceptibilis est, is nempe cujus basis est intervallum, vertex autem in loco, cujus distantia quæritur. Unde si distantia sit enormis, qualis esset Pici montis, qui ex distantiâ 4. grad. apparet, etiam 1000 passus, imò medium milliare Belgicum esset respectu ejus intervallum nimis parvum.

Præter stationem primam in A termino distantiæ, determina secundam lateraliter in C modico intervallo, quod metire decempedâ, & sit ex. gr. 100 pedum. Designa deinde intervallum secundum AF multò majus quàm AC, quod præsidio lateris AC noti ex duabus stationibus A & C metire per *præc. Probl.* Rursus tertium designa intervallum AO majus quàm AF, quod ope lateris jam noti AF ex stationibus A & F metire per *præc. Probl.* Quod si jam intervallum AO tantum est, ut exhibeat angulum ABO sensibilem; ope ipsius AO ex stationibus A & O metieris per *præced. Probl.* AB distantiam quæsitam. Quod si angulus ABO nondum esset sensibilis, plures forent designandæ stationes, donec tandem evadat sensibilis. Porrò anguli ad unum (A) punctum existentes simul capiendi sunt, ne sæpiùs oporteat ad eundem locum labore superfluo redire.

Hoc artificio ingentes distantias, & aliàs omninò immensurabiles posse innotescere, licet intervallum primum sit parvum, sic ostendo. AC primum intervallum sit 100 pedum Rhynlandicorum, & anguli ACF, AFO, AOB recti; anguli verò AFC, AOF, ABO unius gradus. Igitur, ut in *Scholio præc. num. 3.* ostensum est, AF continebit AC 100 ped. plus quàm 57 vicibus; ac proinde AF erit major pedibus 5700. Eodem modo erit AO major quàm AF pedum 5700, plus quàm vicibus 57, adeoque AO erit major pedibus 324900, hoc est 18 milliarijs Belgicis. Pari modo AB distantia quæsita excedet AO pedum 324900 plus quàm 57 vicibus; ac proinde AB erit maior pedibus 18519300, hoc est 1028 Belgica milliaria. Tanta distantia assumpto tantum intervallo primo 100 pedum per 4 stationes innotesceret, si locus B ex A & O conspici, & stationes C, F, O, juxta conditiones positas obtineri possent.

Verùm quia intervallorum angulos ABO, AOF, AFC, convenit esse aliquot graduum; ponamus eos esse graduum 5, reliquis datis manentibus ijsdem, quæ suprà. Igitur ut ostendi in Scholio præcedenti, *b* AF erit plus quàm undecuplum primi intervalli AC pedum Rhynlandicorum 100, adeoque majus pedibus 1100. AO verò plus quàm undecuplum ipsius AF pedum 1100; ac proinde majus pedibus 11100: ac tandem AB distantia quæsita erit plus quàm undecupla ipsius AO pedum 11100, ac proinde major pedibus 111100; hoc est major 6 Belgicis milliaribus. Igitur per stationes quatuor in A, C, F, O, intervallo primo tantùm existente pedum 100, distantia mensurabitur major milliaribus Belgicis.

b num. 3.

Quod si intervallum primum assumatur pedum 1000, poterit per stationes tres A, C, F, distantia 6 Belgicorum milliarium major innotescere: & per stationes quatuor major Belgicis milliarijs 66 quod à nullo, quod sciam, hucusque est observatum.

Scio stationes rarò posse juxta conditiones hic positas præcisè ordinari. Verùm hæc eo fine dicta sunt, ut appareat, quousque hac industriâ pertingi possit; simul ut Geometra, quæ optima sit stationum ratio, intelligat, ut si obtinere eam exactè non possit, ad illam certè quàm proximè conetur accedere.

Absque sinibus & calculo.

Omnes casus Problematis absolves, si ex scalâ sumas AF lineam tot partium, quot passus ex. gr. erant in stationum intervallo mechanicè mensurato, & suprà illam facias triangulum simile ACF primo optico triangulo, & suprà AF triangulum AOF simile secundo optico, & sic deinceps quotquot fuerint, quod semper fieri poterit, cum in singulis opticis triangulis duo anguli per instrumentum sint noti. Latus ultimum AB repræsentabit distantiam quæsitam, quæ tot erit passuum, quot reperies in AB contineri partes scalæ.

Fig. 56.

Demonstratio eadem, quæ suprà Probl. 1 & 2.

PROBLEMA IV.

Distantiam inaccessam (AB) turris vel montis, datâ ejus altitudine (BC) metiri.

INveniatur per Porisma 1 altitudinis angulus CAB. Tum quia in trigono rectangulo ABC, dantur acutorum unus CAB, & latus BC; reperietur per Probl. 3. *cap.* 3 latus alterum AB distantia quæsita.

Fig. 40.

Sine calculo.

Angulum altitudinis instrumento inventum aufer à gradibus 90, ut habeatur angulus complementi, cui æqualem fac SCY. Deinde fiat CB tot partium scalæ, quot pedes erant in altitudine datâ; ducaturque BA perpendicularis ad CB, cui occurrat CS in A. Inquire quot partium scalæ sit AB: tot enim pedum erit distantia quæsita.

Est enim triangulum ACB, *prop.* 32. *lib.* 1. æquiangulum optico triangulo, ac proinde per *prop.* 4. *lib.* 6 simile. Quare cùm CB tot scalæ partes contineat, quot pedes altitudo data; etiam AB tot erit partium scalæ, quot pedum distantia quæsita.

PROBLEMA V.

Longitudinem mediocrem (CB) in horizontali plano extensam, horti, areæ, porticus &c. latitudinem fluminis &c. metiri.

NOta sit AC altitudo mensoris, sive ea sit statura ejus, sive major, sive non. Metire *a* angulum distantiæ BAC. Tum quia in trigono rectangulo ACB, dantur acutus BAC, & latus AC; reperietur per Probl. 3, *cap.* 3. latus alterum BC distantia quæsita.

Fig. 43.
a Poris. 2.

Sine

Sine calculo.

Angulo distantiæ per instrumentum reperto fac æqualem S A X. Deinde fiat A C tot partium scalæ, quot pedum datur altitudo oculi; ducaturque C B perpendicularis ad A C, cui occurrat A X in B. Inquire quot partes scalæ contineat C B: tot enim pedum erit longitudo quæsita.

Demonstratio similis præcedenti.

Aliter.

Fig. 57. Quadrantis ad horizontem paralleli, aut ferè paralleli latus A C dirige in signum aliquod in B termino distantiæ modicè elevatum. Collima deinde per latus alterum A F in signum aliud Z isthic erectum, aut erigendum, & mechanicè innotescat A Z. Inveniatur tandem angulus Z: cum quo, & latere noto A Z, reperietur e in trigono rectangulo Z A B, latus A B, distantia quæsita.

e Probl. 3. cap. 3.

Sine calculo.

Angulo acuto per instrumentum invento fiat æqualis F Z S. Deinde fiat Z F A tot partium scalæ, quot pedum erat intervallum mechanicè notum; ducaturque A B perpendicularis ad Z A, cui occurrat Z S in B. Inquire quot partes scalæ sit A B: totidem quippe pedum erit longitudo quæsita.

PROBLEMA VI.

Latitudinem fluminis seu lacus aliter metiri.

Fig. 41. 42. 43. COllimando in ulteriorem fluminis ripam, notus fiat per instrumentum angulus distantiæ. Deinde verte instrumentum ad continentem, & constitue, ut erat priùs: nimirum ut perpendiculum vel regula abscindat eundem distantiæ angulum, sive arcum F O, quem in situ priori. Collimando deinde per dioptras A O, punctum, quod in horizonte conspexeris, putà B, signari jube, & metire longitudinem C B mechanicè: ea enim est par latitudini fluminis, ut per se patet.

Atque hæc hactenùs de distantijs potissimùm. Nunc ad altitudines, quamvis eas suprà jam attigimus, accuratiùs investigandas accedamus.

PROBLEMA VII.

Altitudinem inaccessam montis, seu turris (C B) metiri.

Fig. 58. INstituatur operatio eadem, quæ fuit adhibita in Problematis 1. modo 1. binis stationibus in lineâ distantiæ in A, & F determinatis.

Ut	A F differentia tangentium angulorum ACB, FCB complentium angulos altitudinis CAB, CFB	Ad	Sinum totum B C
Ita	A F stationum intervallum, ex. gr. pedum 1000	Ad	altitudinis quæsitæ BC pedes.....

Tria prima sunt nota. Innotescet ergo etiam quartum, altitudo nempè B C in eâdem mensurâ, in quâ notum erat A F stationum intervallum.

Sine calculo.

Vide Problema 1. ubi distantia & altitudo unâ eâdemque operâ absque sinibus & calculo ullo sunt inventæ.

NOTA, tum hîc, tum in sequentibus, mensurari solùm eam altitudinem, quæ suprà oculum est, quam determinat linea recta A B ducta à mensoris oculo posito in A ad altitudinem perpendicularis: adeòque parallela ad horizontem. Altitudini ergo inventæ addenda est mensoris statura A L, seu B Z, si basis altitudinis Z, & L pes mensoris sint æquè alta: quod si (ut in fig. 59) altitudinis basis sit demissior, pede mensoris, mensuranda est per Probl. 13 altitudo B Z, & altitudini priùs inventæ B C adjicienda, ut priùs

Scholium.

Ex quâ distantiâ securissima sit altitudinum dimensio.

Fig. 60. *Non tutò ex quâlibet distantiâ altitudines mensurantur. Perinde obsunt & magna distantia, & vicinitas magna. Distantia quidem, quia facit, ut sub exiguo angulo spectetur altitudo, ac proinde in capienda angulo facilè committatur error angula justo par aut major, unde fit, ut altitudo colligatur multò major verâ. Ut si angulus justus fit C A B, & putetur esse Z A B; colligetur altitudo B Z pro verâ B C. Accedit quod cùm binis stationibus apus est, ingentia requirantur a stationum intervalla, ut parvi altitudinum anguli sensibilem habeant differentiam. Magna vicinitas obest, quia efficit ut B C Q angulus, sub quo altitudo B Q conspicitur, vix differat à recto; ac proinde alter C Q B sit acutus insensibilis. Unde facilè accidet, ut altitudo colligatur decies, aut centies verâ major: quod demonstrabitur, ut num. 1. si tantùm figuram inverteris, quod hîc factum vides.*

a ostendi in Sch. prob. 1. num. 1.

Fig. 61.

Fig. 58. 59. *Certissima igitur erit altitudinum dimensio ex distantiâ mediocri. Ea porrò est, quæ angulum altitudinis C A B exhibet semirectum, nempè graduum 45, aut semirectо quàm proximum. Ita enim & incommoda jam dicta licebit effugere, & faciliùs angulorum sensibilis differentia stationibus variatis obtinebitur.*

Anguli altitudinis Graduum	*requirunt stationum intervallum, quod sit distantiæ majoris pars*
45 & 46	$29\frac{473}{3433}$
45 & 44	$29\frac{616}{3777}$
45 & 47	$14\frac{1574}{1749}$
45 & 43	$14\frac{3032}{3136}$

Est autem visa sub angulo 45 grad. altitudo par distantia.

Caterùm hac stationum intervalla licèt satis sint moderata, longè tamen adhuc superant ea, quibus utitur Problema sequens, ut patebit, si hac intervalla conferas cum ijs, qua continentur tabellâ numeri 3 in Scholia Probl. 2.

Quoniam verò constructio hujus Problematis eadem est, qua primi Problematis, etiam huc pertinent ea omnia qua ibidem in Scholio, num. 2. 3 4. determinavimus.

Nota. *Etiam hîc (quod notari jusserom suprà in Scholio 1. Probl. num. 1.) ostendisse me hic solummodò situm vitiosum lateris superni in angulo altitudinis, supponendo infernum debitum habere situm, nempè parallelum horizonti. Ex hujus enim defectu quantus error proveniat, ostendam in Scholio Probl. 16.*

PROBLEMA VIII.

Altitudinem inaccessam montis, aut turris (CB) aliter, & certiùs metiri.

Fig. 49.

PRæter A locum stationis primæ, eligatur ad latus statio altera in F, servatis ijs, quæ Probl. 2. præscribuntur. Deinde cognito mechanicè stationum intervallo AF, mensuretur per Probl. 2. AC distantia mensoris à montis, seu turris cacumine C.

Tandem in trigono rectangulo ABC, notus fiat angulus CAB: cum quo & basi notâ AC, reperietur per *Probl. 2. cap. 3.* latus CB altitudo quæsita.

Hic modus videtur prastantior esse pracedenti 1, quia (ut ostendi in Scholio Probl. 2. n. 3 & 4) incomparabiliter minori opus habet stationum intervallo, ut angulus ACF fiat sensibilis, quod omninò requiritur, ut patet ex num. primo citati jam Scholij 2. quod ex primo consequitur; quia ex longè majori distantiâ altitudines mensurari possunt has praxi, quam pracedenti, ut in Scholio sequenti num. 1. demonstrabitur.

Sine calculo.

Vide Problema 2. ubi unâ eâdemque operâ altitudo simul cum distantiâ absque sinibus & calculo inventa est.

Scholium.

Qua de mediocri distantiâ eligendâ, tanquam optima in Scholio Problematis pracedentis determinavimus, omninò etiam ad prasens Problema pertinent. Huc item omninò pertinent ea omnia, qua in Scholio 2. Probl. nu. 1. 2. 3. 4. determinata ac demonstrata sunt, cùm ea omnia spectent inventionem distantia AC, per quam hic elicitur altitudo BC. Verùm hic ulterius superest definiendum.

I.

Ex quantâ distantiâ possint altitudines satis adhuc securè, juxta modum hujus problematis determinari.

Certissimam esse altitudinum dimensionem ex distantiâ mediocri, in quâ altitudo spectatur sub angulo semirecto, in scholio pracedenti ostensum est; qua determinatio tam in hoc problemate locum habet, quam in pracedenti. Nunc alia regula generalior, & huic modo propria hac sit. Ex omni eâ distantiâ satis tutò altitudo mensurabitur, ad quam ipsa proportionem habet sensibilem: *nisi fortè distantia esset tanta, ut rotunditas terra altitudinum dimensioni officiat quemadmodum num. seq. exponetur.*

Ea porrò regula propria huic modo est. Ut enim applicetur ad modum problematis pracedentis, enormia stationum intervalla requiruntur, ut ostensum est, num. 2 scholij probl. 1. & num. 3. ac 4. scholij prob. 2.

I I.

An rotunditas terræ officiat altitudinum dimensioni jam traditæ.

Fig. 48.

Asserit Ricciolus in suo Almagesto, lib. 10. sect. 4. prob. 31. & probat: quem in suâ Dioptrâ Geodaticâ reprehendit Valentinus Stausel, quasi Practicos Geometras immeritò Pseudographia accusaverit. Sed vera dixisse Riccialum manifestum fiet ex hu, qua hîc subjicio.

Dico igitur, si dimensio fiat ex distantiâ magnâ, qua nimirum adaquet unum gradum ambitûs terreni, altitudinem colligi notabiliter verâ minorem.

Altitudo montis sit CB trium milliatiorum Bononiensium, continuata usque ad terra centrum X. Unus gradus maximi terra circuli esto AB. Radius ab oculo in A posito ad montis apicem emissus AC. Recta AO tangens terram in A, altitudini montis occurrat in O. Ex O ad tangentem AO sit perpendicularis OF, occurrens radio AC in F. Ex vi dimensionum hactenus traditarum reperitur non BC altitudo vera, sed OF verâ minor. Reliquum est, ut inquiratur quanta sit differentia ipsarum OF, BC.

Cum differentia ea causetur à rotunditate terra, qua eò insensibilior fit, quò terra ejusque semidiameter ponitur major, roborabitur vis discursus sequentis. si terra diameter assumatur vera major.

Assumatur ergo radius terra milliariorum Italicorum 4169, quantum nemo Recentium Astronomorum potuit invenire. In triangulo AXC dantur latera AX, radius terra, & XC constans radio AB, & montis altitudine BC, qua supponitur esse 3 milliariorum Italicorum, & angulus X datur, nempè unius gradus, quia ex hyp. arcus AB est 1. grad. Erga per prob. 10. cap. 3. reperitur angulus C, qui medius erit inter grad. 87. 9', & grad. 87. 8': quem primò assumamus grad. 87. 8'. vero minorem. In triangulo isoscele AXB, quoniam X est 1 grad. erunt reliqui a XAB, XBA simul grad. 179; ac proinde unus b XBA grad. 89. 30'. Quare externus ABC c est grad. 90. 30'. huic adde ACB grad. 87. 8', vero minorem; erit eorum summa grad. 177. 38', verâ minor: qua subtracta à grad. 179, relinquet d CAB grad. 2. 22' vero majorem. Deinde, quia ante ostensum est XAB esse grad. 89. 30'; si huic demas ab XAO, qui per prop. 16, aut 18. lib. 3. rectus est, remanet BAO 30'. Aufer BAO 30'. ab CAB grad. 2. 22', qui vero major est, remanebit CAO grad. 1. 52, vero major. Iam quia in triangulo rectangulo XAO, dantur latus XA semidiameter terra milliariorum Bononiensium 4169, & angulus X grad. 1. reperietur per prob. 3. c. 3. AO milliariorum Bononiensium 72. 7'. 4''. 9'''. 0'''' 5'''''. pro quâ assumamus milliaria 72. 7'. 5'' justâ majorem. Cum hac igitur, & cum angulo CAO grad. 1. 52', etiam justo majori, in trigono AOF rectangulo e reperietur OF milliariorum Bononiensium 2. 3'. 6''. 9'''. 3''''. 6'''''. 7''''''. 5''''''', vel (brevitatis causâ) 2. 3'. 7'', verâ major, deficiens ab altitudine montis BC pedibus Bononiensibus

a 32. lib. 1.
b 5. lib. 1.
c 32. lib. 1.
d 32. lib. 1.
e per 3 c. 3.

nonienſibus 3150. *Igitur vera* O F *deficit ab altitudine montis plus quàm* 3150 *pedibus, ſeu paſſibus* 630.

Quod ſi deinde angulum C *aſſumamus grad.* 87.9', *juſto majorem, eodem diſcurſu facto, proveniet angulus* C A O *grad.* 1. 51', *vero minor: cum quo & latere* A O *aſſumpto milliariorum Bononienſium* 72, *ac proinde juſto minore (vera enim* A O *inventa eſt ſupra milliar. Bon.* 72. 7'. 4''. 9'''. 0''''. 5''''') *reperietur, per prob.* 3. *cap.* 3. O F *milliar. Bonon.* 2. 3'. 2''. 4'''. 8''''. 8''''', *ſive* 2. 3'. 2'', *minor verâ; ac proinde ab altitudine montis* B C *ex hyp.* 3 *milliariorum Bon. deficiens minùs quam* 3400 *pedibus Bonon. ſeu paſſibus* 680.

Quare cùm differentia altitudinum O F, B C *ſit major pedibus* 3150, *minor verò pedibus* 3400 *liquet eam eſſe notabilem cùm excedat ſemiſſem unius milliaris Italici; hoc eſt plus quàm ſextam partem altitudinis quæſitæ* B C *ex diſtantiâ unius gradus menſuratæ.*

Si dicat quiſpiam angulum C A O, *ſub quo altitudo montis ex unius gradus diſtantiâ ſpectabatur, eſſe nimis parvum, utpote gradus* 1. 52'; *ac proinde caſum hunc, in quo rotunditas terræ errorem cauſavit ſenſibilem, ſub operationes Geometriæ Practicæ non cadere: Sciat is poſitâ majori altitudine montis, angulum quoque multò majorem futurum, & ſenſibilem nihilominus fore altitudinis collectæ* O F *defectum a verâ* B C, *retentâ eâdem, quâ prius, diſtantiâ unius gradus* A B. *Si enim altitudo* B C *ſit milliar. Bonon.* 6, *& paſſuum* 667 *quæ minor eſt altitudine Alpium, & Pici in Teneriffâ: eodem diſcurſu, quem ſupra adhibui, reperies angulum* C A O *grad.* 4. 43'; O F *autem minorem milliar. Bonon.* 6. *paſſ.* 1. *ac proinde deficientem ab altitudine verâ* B C *plus quàm paſſibus* 666. *Si* B C *ſit milliariorum* 10 *& paſſuum* 334. *cui ferè æqualis eſt altitudo Pici & Alpium, erit angulus* C A O *grad.* 7. 32'; O F *verò deficiet a* C B *plus quam paſſibus* 714. *Si* B C *ſit milliar.* 14 *quæ multò minor eſt altitudine montium Caſei, Athos, Caucaſi; erit angulus* C A O *grad.* 11. 19'; O F *verò deficiet ab* B C *plus quam paſſibus* 761.

Ex quibus manifeſtum eſt, cùm diſtantia unum terræ gradum æquat, altitudinum ordinariæ dimenſioni, licet angulus obtineatur juſtæ quantitatis, nihilominus terræ rotunditatem ſenſibiliter officere; ac proinde verè dixiſſe Ricciolum; qui non immeritò proinde culpavit quoſdam practicos Geometras, qui determinationem adeò neceſſariam & curioſam vel ignoraverint, vel præterierint.

PROBLEMA IX.

Altitudinem (CB) inacceſſam metiri, cùm ſtatio altera in plano negatur.

Fig. 62.

IN plano inveſtigetur altitudinis angulus C A B. Deinde ex F ſummitate domus denuò inveſtiga altitudinis angulum C F Z: menſureturque mechanicè A F, & ſit ex. gr. pedum 60. Intelligatur jam A L eſſe parallela radio F C: eritque angulus ALB æqualis angulo F C Z. Sunt autem & A B C, F Z C æquales, utpote recti. Ergo & reliqui L A B, C F Z æquales ſunt. Quia ergo A B eſt ſinus totus, & L B tangens anguli L A B; etiam L B tangens erit anguli C F Z. Eſt verò C B tangens anguli C A B, poſito eod. ſinu toto A B. Ergo C L, ſeu F A eſt differentia tangentium angulorum altitudinis. Eſt igitur

Ut	C L differentia tangentium angulorum altitudinis CAB, CFZ	Ad	tangentem majorem CB,
Ita	CL, ſeu AF ſtationum intervallum 60 pedum	Ad	altitudinis quæſitæ pedes....

Tria prima ſunt nota. Ergo etiam innoteſcet quartum, altitudo turris quæſita C B.

Hæc praxis tunc ſolùm uſui erit, cùm altitudo B C *non eſt tanta, ut requirat majorem ſtationis ſecundæ altitudinem* A F, *quàm quæ poſſit mechanicè menſurari.*

Abſque calculo.

Quot pedum datur altitudo ſtationis ſecundæ, tot partium ſcalæ fiat recta A F cui ſit perpendicularis A O. Fiat deinde angulus O A S par angulo invento in ſtatione primâ; ductâque F X parallelâ ad A O, fiat angulus X F Q par angulo in ſtatione ſuperiori invento; & latera A S, F Q concurrant in C. Ex C demittatur perpendicularis C Z, concurrens cum A O in B. Inquire quot ſcalæ partes contineat C B: totidem quippe pedes continebit altitudo quæſita.

Triangula enim C F Z, C A B, per *prop.* 32. *lib.* 1. æquiangula ſunt triangulis opticis, ac proinde iis ſimilia, ſuntque etiam per conſtructionem ſimiliter poſita. Quare cùm A F referens intervallum ſtationum, ſit ex conſtructione tot partium ſcalæ, quot pedum erat ipſum intervallum ſtationum, neceſſe eſt, ut etiam C B tot partium ſcalæ ſit, quot pedum eſt altitudo quæſita.

Eâdem operâ reperietur diſtantia A B.

PROBLEMA X.

Altitudinem montis, ſeu turris datâ diſtantiâ metiri.

Fig. 38. 39. 40.

QUando diſtantia montis turriſve ſive æſtimatione communi, ſive aliunde eſt nota, expeditiſſima erit altitudinis dimenſio. Tunc enim in triangulo rectangulo A B C, nota eſt A B diſtantia, putà 2. milliarium latus unum; & angulus altitudinis C A B fit notus *a* inſtrumento. Ergo per *prop.* 3. *c.* 3. reperitur latus alterum B C, altitudo quæſita.

a Periſ. 1.

Abſque calculo.

Fig. 40.

Fiat A B tot partium ſcalæ, quot paſſuum datur diſtantia A B: & fiat angulus B A S par angulo altitudinis per inſtrumentum invento. Ex B erigatur perpendicularis B Y, concurrens cum A S in C. Inquire quot partes ſcalæ contineat C B: totidem enim paſſus continebit altitudo quæſita.

PROBLEMA XI.

Altitudinem acceſſibilem metiri.

Fig. 38. 39. 40.

ELige ſtationem A, cujus diſtantiam A B à turre, B C, applicatâ perticâ metiri commodè poſſis. Sit autem ea diſtantia mediocris juxta ea, quæ in ſcholio prob. 8. *unm.* 1. determinavi. Inſtrumento deinde inveſtigetur angulus C A B. Cum quo & latere A B mechanicè jam noto innoteſcet latus *b* alterum B C latitudo quæſita.

b Prob 3. cap. 3.

Idem solo Baculo præstare.

Fig. 63. Baculus, sive hasta *f l* cujus excessus *l o*, suprà mensorem *a s* notus existat ex. gr. trium pedum, solo defigatur perpendiculariter. Tum recede ex. gr. usque in *a s*, sic ut per *l* extremitatem baculi collimans, cernas B apicem turris: intervallum autem illud *a o*, seu *s f*, metire mechanicè. Deinde ab oculo *a* intelligatur ducta *a o* X horizonti parallela; ac proinde perpendicularis ad *l f*, & B Z. Manifestum est baculum *l o* altitudini B X parallelum esse. Unde per *Coroll. 1. pag. 4. lib. 6.*

Ut	AO distantia oculi ab hastâ	Ad	LO excessum hastæ suprà mensorem:
Ita	distantia AX	Ad	altitudinem ineognitam BX

Atqui tria prima sunt nota. Ergo etiam quartum ex his notum fiet.

Potest etiam altitudo inaccessa per duas stationes solo baculo mensurari, quod relinquo industriæ lectoris.

Idem solâ baculi umbrâ efficere.

Fig. 64. Baculum F L solo perpendiculariter defige eo loco, ubi radius solis X B A umbram turris B Z definiens, etiam transeat per L extremitatem baculi. Fac deinde notam mechanicè turris distantiam A Z; baculum F L; baculi umbram F A. Erit per *Coroll. 1. p. 4. lib. 6.*

Ut	A F baculi umbra	Ad	baculum F L.
Ita	distantia A Z	Ad	altitudinem Z B.

Quia ergo tria prima sunt nota, innotescet etiam quartum, altitudo quæsita B Z.

PROBLEMA XII.

Altitudinem accessibilem non solùm absque calculo; sed etiam absque scala metiri.

SOle aut Lunâ 45 gradibus suprà horizontem elevatis, umbræ omnes in horizontalem terræ superficiem projectæ suis altitudinibus sunt æquales.

Fig. 65. Radius Solis umbram turris B C definiens esto X C A. Quoniam ex hyp. angulus solaris altitudinis, X A B in rectangulo trigono, est 45 grad. hoc est semirectus; etiam A C B semirectus *a* erit; ac proinde æqualis angulo X A B, seu CAB. Ergo B A umbra, & B C altitudo *b* æquales sunt.

a 32. lib. 1. *b 6. lib. 1.*

Elevatio Solis suprà horizontem, sive angulus X A B invenitur per porisma 1. hoc solùm immutato, quòd loco oculi per dioptras collimantis, radius Solis per utramque dioptram A, O; vel R, O intromittatur. Vide *Fig. 38. 39. 40.*

Aliter.

Accede vel recede ab altitudine mensurandâ, donec angulum altitudinis C A B deprehendas in instrumento grad. 45. hoc est, regula vel perpendiculum incidat in gradum 45. Ponamus hoc accidere in statione A. Metire perticâ distantiam A B. Ea enim altitudini B C æqualis est, ut patet ex demonstratione præcedenti.

PROBLEMA XIII.

Soli libramentum & inæqualitatem metiri.

EStosolum A E K. Oporteat metiri an A sit altius quàm E, & quantò. *Fig. 66.*

Quadrantem suspende ex annulo *p*; & in E erectâ ad perpendiculum perticâ E G, collima per dioptras *b, c*, in perticam, & notari jube punctum (H) quod visui per dioptras collimanti respondet. Ut verò punctum in perticâ visui respondens faciliùs notetur, chartulam, seu strophiolum sursum deorsumque secus perticam moveri jube à quopiam, donec ejus extremitatem videas per dioptras. Aufer deinde *o* A, seu *b* F altitudinem oculi ab H E, remanet F E elevatio loci A suprà E.

Quod si loca ita distarent, ut unicâ operatione res absolvi non possit; operatio jam tradita sæpiùs iteretur, & inventi elevationum excessus inter se addantur.

Fig. 67. Si inter loca A, N, quorum inquiritur altitudo, intercedat locus X altior utroque; tunc stans in B metire, ut jam traditum est, elevationem loci X suprà A; & elevationem loci ejusdem X suprà N. minorem elevationem A H subtrahe à majori L N, remanet (N Q) elevatio loci A suprà locum N. Ex his colliges quomodo in reliquis casibus sit operatio instituenda.

Fig. 68. Non solùm Quadrante hoc in negotio licebit uti, sed etiam Circulo, in quo regula mobilis priùs erit collocanda parallela ad horizontem. Necesse est autem tam Quadrantem quàm Circulum ita libratum esse, ut linea per dioptras B, C, transiens sit horizonti parallela: aliàs fallax operatio erit. Id verò sic experire. Ubi semel collimaveris per dioptras B, C, & in altitudine ex adverso erectâ observaveris punctum H, verte Quadrantem ut dioptra C jam sit in *c* & B in *b*. Tum si rursum per dioptras idem cernas punctum H radius visualis per dioptras transiens, erit horizonti parallelus: quod si tum aliud quodpiam X punctum visui respondeat, non erit radius per dioptras transiens parallelus horizonti. Erit nihilominus punctum Z, inter utrumque medium ejusdem cum oculo altitudinis. Unde instrumento etiam vitioso licebit in erectâ ex adverso altitudine punctum ejusdem cum oculo altitudinis designare per collimationem duplicem jam dictam, ac proinde soli inæqualitatem reperire.

Fig. 69. Verùm linea horizontalis non alio instrumento certiùs designatur, quàm vitreo syphone D B C E: aqua enim intra illam posita, & pertingens ex. gr. usque in F, & G, ita se sponte suâ librat, ut ipsius in utroque syphonis brachio superficies extrema F, & G, semper distent æqualiter à centro terræ, quomodocumque instrumentum inclinaveris. Ex quo sequitur lineam per extremitates aquæ F & G transeuntem, esse horizonti parallelam. Quare si per F & G, sive juxta F & G collimaveris, radius visualis erit horizonti verè parallelus, punctumque in altitudine ex adverso positâ visui respondens, erit ejusdem cum oculo altitudinis.

Necessarium est hoc problema ad fontes ducendos, & aquæductus ordinandos.

Scho-

Scholium.

Fig. 58. 59.

Ex hoc problemate etiam colligitur quid fieri debeat altitudini illi B Z, quæ infrà oculum est. Ea enim si major aut minor sit altitudine oculi L A, est mensuranda, ut hoc prob. traditum est, & B C altitudini adjicienda: si æqualis est altitudini oculi L A, tunc ipsa L A oculi altitudo addenda est ad altitudinem B C.

PROBLEMA XIV.

Altitudines montis ex monte ipso metiri.

Fig. 70.

ELigantur in monte stationes binæ in C & F, justo intervallo distantes, ex quibus collimari possit in signum aliquod X in plano horizontali positum, per radios A X, B X; & sint A L, B Q ad horizontem perpendiculares. Per porisma 2. noti fiant anguli L A X, Q B X, & mensuretur intervallum stationum C F, seu L Q. quod sit ex. gr. pedum 100.

Per defin. 9. cap. 2. respectu anguli noti L A X, sinus totus est A L, tangens L X; & respectu noti anguli Q B X, sinus totus est B Q, hoc est A L; tangens verò Q X; ac proinde L Q, seu C F, stationum intervallum est tangentium differentia. Ergo est

Ut	CF differentia tangentium angulorum A, B	Ad	AL sinum totum 10000000
Ita	CF stationum intervallum pedum 100	Ad	altitudinis AL pedes....

Tria prima sunt nota. Ergo & quartum nempè A L innotescet: à quo deme A C altitudinem oculi suprà montem ex. gr. 6 pedes, remanet C L nota, ipsa videlicet montis altitudo quæsita.

Sine calculo.

Fig. 70.

Describe in chartâ rectam C F tot partium scalæ, quot pedum erat stationum intervallum: & perpendicularem erige C A tot partium scalæ, quot pedum erat altitudo oculi suprà montem. Fiat deinde angulus C A O æqualis noto angulo stationis primæ. Ex F erige perpendicularem F B, æqualem ipsi C A; & fiat angulus F B K æqualis angulo noto stationis secundæ: concurrant autem A O, B K in X. per X duc C L perpendicularem ad A C productam in L, quæ erit quoque perpendicularis ad B F protractam in Q. Inquire quot partes scalæ contineat A L, seu B Q: totidem quippe pedes continebit altitudo montis unà cum altitudine oculi suprà montem. Demptâ igitur altitudine oculi suprà montem, relinquitur ipsa montis altitudo quæsita.

Liquet enim ex *prop.* 32. *lib.* 1. triangula L A X, Q B X triangulis opticis æquiangula esse, ac proinde per *prop.* 4. *lib.* 6. similia. Quare cùm C F repræsentans intervallum stationum, sumpta sit tot partium scalæ, quot ipsum stationum intervallum continebat pedes; etiam A L, seu B Q altitudinem referens, tot erit partium scalæ, quot altitudo ipsa est pedum.

PROBLEMA XV.

Altitudinem nubis metiri.

Fig. 71.

NEgotium hic facessunt nubis motus, & instabilitas, seu mutatio figuræ continua: unde fit, ut non facilè designari in nube possit stabile punctum, in quod ex duplici statione collimetur. Oportebit igitur nubem seligere, quales tranquillo cælo cernuntur, quæ nimirum non moveatur sensibiliter, & quæ marginem aliquem habeat notabilem, cujus extremitas ex. gr. C dignosci possit, ut in eam eodem tempore duo mensores ex diversis stationibus collimet. His positis,

Punctum in nube collimationibus destinatum esto C; altitudo nubis sit C B; linea distantiæ A B: in quâ designentur binæ stationes in A & F, distantes justo intervallo, quod vix esse minùs poterit aliquot pedum millibus, licet horizontalis distantia nubis A B mediocrem non excederet, sub quâ tutissimam esse altitudinum dimensionem docui in Scholio Probl. 7. Ex his stationibus A & F, duo mensores, signo dato, in designatum C punctum nubis eodem tempore collimantes, notos faciant angulos C A B, C F B: ex quibus & spatio mechanicè noto per Probl. 7 reperietur altitudo nubis quæsita C B.

Aliter & certiùs idem obtinebitur, si statio altera eligatur lateralis in X, & operatio instituatur, ut in Probl. 8.

Ricciolus cum Grimaldo reperit altitudinem nubis candidæ passuum 2177, seu pedum 10885.

PROBLEMA XVI.

Altitudinem Iridis invenire.

Fig. 72. 73. 74.

PRænoscenda sunt quædam ex Dioptricâ. *Primò* Iridem esse perfectè circularem. *Secundò* tria centra, O, A, Z, Iridis nempè, Oculi, & Solis esse in unâ rectâ. *Tertiò*, Rectam illam Z A O, ad quam sunt tria prædicta centra, ad planum Iridis semper esse perpendicularem. *Quartò* Sole occumbente (*vide Fig.* 72) integrum Iridis semicirculum F C Q videri posse: tunc enim linea recta Z A O per centra Solis Z, Oculi A, Iridis O transiens, est horizonti parallela, ac proinde O centrum Iridis suprà horizontem existit. Tunc quoque planum Iridis F C Q est ad horizontem perpendiculare. *Quintò* Sole suprà horizontem L B elevato (*vide Fig.* 73) non apparet integer Iridis semicirculus; tunc enim O centrum Iridis, quod semper est in rectâ per Z centrum Solis, & A centrum Oculi transeunte, existit infrà horizontem L B, unde tantùm pars S C R conspicua est: & tunc planum Iridis est obliquum horizonti, angulusque inclinationis C B A obtusus est. *Sextò* cùm magna est Oculi suprà horizontem altitudo, posse ex Iride videri plus quàm semicirculum Sole occumbente (*vide fig.* 74.) & tunc planum Iridis inclinatur versùs Oculum.

His prænotatis, observatum est à Cartesio, & satis consentiunt experimenta Riccioli. *Primò* Iridis angulum C A O contentum radijs A C, A O ab oculo A, ad Iridis verticem C, ejusque centrum O emissis, esse circiter grad. 41. 47'. Observatum est *secundò* distantiam A O oculi à plano Iridis, non excedere 1000 passus Bononienses.

Altituda Iridis semicircularis.

Fig. 72. *Ex his demonstrabimus radium OC, hoc est Iridis altitudinem, cùm integer illius semicirculus apparet, non excedere 893. 5'. 7" passus, hoc est pedes 4795.*

Cùm enim per prænotatum 3. angulus CO A rectus sit; erit trigonum AOC rectangulum, in quo proinde respectu anguli CAO grad. 41. 47', sinus totus est AO, distantia nempè oculi: tangens verò est CO radius Iridis. Igitur est

Ut AO sinus totus 100000 Ad CO tangentem anguli CAO grad. 41. 47', nempè 89357.

Ita AO distantia oculi, per obser. 2. non major passibus 1000 Ad passus...: radij Iridis CO.

Qui proinde per regulam Trium reperitur passuum 893. 5'. 7".

Quod si ejus distantia, ut fit plerumque sit minor passibus 1000, etiam altitudo ejus CO passibus 893 minor erit, & eodem scrutinio reperietur.

Altitudo Iridis semicirculo minoris.

Fig. 73. Altitudo Iridis sit CF, perpendicularis ad horizontem LABF. Mensuretur altitudo Solis suprà horizontem LABF, angulus nempè ZAL, cui æqualis est OAB. Per prænotatum 3, recta ZAO centra Solis Z, oculi A, iridis O, connectens perpendicularis est ad iridis radium OBC, adeoque trigonum AOB rectangulum est. In quo quia notus est acutus angulus OAB, etiam a acutus alter ABO innotescet: quo subtracto à duobus rectis, hoc est à gradibus 180, remanet notus b ABC. Deinde quia per observationem 1. angulus CAO est gr. 41.47', si ab eo demattur OAB notus, relinquitur etiam BAC notus, latus autem AB per observationem 2 datur circiter 1000 passuum. Ergo cùm in triangulo ACB detur latus AB cum duobus angulis ABC, BAC; reperietur per Probl. 9. *cap.* 3. BC. Subtrahatur deinde ABC notus à gradibus 180, ut fiat c notus CBF: cum quo & notâ BC, reperietur in trigono rectangulo CFB, per Probl. 2. *cap.* 3, CF altitudo Iridis quæsita.

a Coroll. 8. p 32. lib. 1.
b 13. lib. 1.
c 13. lib 1.

Altitudo Iridis semicirculo majoris.

Fig. 74. Linea horizontalis sit L*b*, & suprà eam altitudo oculi A magna XA: altitudinem Iridis repræsentet perpendicularis CK. Centro Quadrantis stabilis posito in A, ita Quadrantem statue, ut radius Solis transeat per utramque lateris dioptram. Tum verò, quia centra Solis Z, oculi A, Iridis *o* sunt in unâ rectâ, patet latus Quadrantis directum esse in Iridis centrum *a*: quo sic manente, dirige regulam mobilem in punctum *b*, in quo diameter Iridis occurrit horizonti. His ita constitutis, innotescit angulus *o*A*b*: cum quo & latere A*o* per observ. 2. noto, fiet in trigono A*ob*, quod per prænot. 3. rectangulum est, nota *o* A*b*. Subtrahe deinde notum jam angulum *o*A*b* à gradibus 90, ut innotescat *p* A*bo*, seu A*b*C: angulo autem CA*o*, qui per observ. 1. est grad. 41. 47'. adde notum angulum *o*A*b*, ut innotescat totus CA*b*. Quoniam ergo in triangulo AC*b*, nota sunt latus A*b*, & duo anguli A*b*C, CA*b*; reperietur per Probl 9. *cap.* 3. *b*C. Mensuretur deinde angulus XAZ: quo dempto à gradibus 90, notus remanebit, per *prop.* 32. *lib.* 1, angulus AZX, sive *o*Z*b*. Tum quia in triangulo Z*ob*, angulus ad *o* rectus est per prænot. 3, & *o*Z*b* altitudo Solis suprà horizontem Z*b* jam notus; etiam Z*bo*, seu *kb*C notus fiet. Quoniam igitur in trigono rectangulo C*kb*, nota est C*b*, & angulus *kb*C, innotescet per Probl. 3. *cap.* 3. C*k* altitudo Iridis quæsita.

o Prob. 3. cap. 3.
p 32. 1.

Scholium.

Concludam hoc caput duplici quæstione ad Mensoria Artis peritiam pleniorem non parùm utili.

PRIMA

Quantus sit error, qui oritur ex perpendiculi defectu?

Hìc ferè præcipuus defectus est, & maximè ordinarius, quo altitudinum dimensio vitiatur. Quare ejus origo & quantitas hìc erit nonnihil accuratiùs exponenda. Fig. 39.

Cùm altitudines metimur, semper infernum latus AB anguli CAB, qui per instrumentum invenitur, esse debet horizonti parallelum; alias enim non haberetur trigonum rectangulum ABC. Id verò obtinetur ope perpendiculi: nam in Quadrante stabili ope perpendiculi statuitur latus instrumenti Af, perpendiculare horizonti: unde consequens est, ut latus alterum AL, ipsum nempè anguli CAB latus infernum, sit horizonti parallelum. Quod si latus AF non sit accuratè perpendiculare, neque latus ALB erit accuratè parallelum.

In Quadrante autem pendulo angulus instrumento inventus foZ æquatur angulo CAB; cujus latus AqxB est ad perpendiculum of perpendiculare, ut patet ex prop. 8. lib. 6. Vnde si funiculus of non sit perpendicularis horizonti, (quod accidere solet vel propter motum ejus, vel quòd nimis radendo planum instrumenti, non pendeat liberè) non erit etiam AqxB horizonti parallela. Fig. 40.

Ponamus igitur latus infernum anguli per instrumentum inventi, non esse horizonti parallelum, ac proinde neque rectum cum altitudine bC angulum efficere, sed cadere infrà vel suprà parallelam horizonti Ab, uti cadunt recta Az, Az. Quæritur quantitas erroris ex hoc defectu in altitudinis mensionem derivata. Fig. 75.

Statuamus mensoris oculum in A; altitudinem veram bC; radium AC ab oculo per ejus apicem C; distantiam Ab, ac proinde & Az, 1000 pedum; ex z erectam zX perpendicularem ad Az, cui occurrat radius AC in X, zC est altitudo falsa, cujus quantitas ex hoc situ vitioso innotescet, loco vera bC. Ponamus insuper angulum zAb, quo deflectit Az à parallelo situ Ab, 30' min. ipsum verò altitudinis angulum instrumento repertum CAZ graduum 10.

His ita constitutis, cadat primò Az infrà Ab. Quoniam CAz est grad. 10, & zAb 30' min. erit CAb grad. 9. 30': cum quo & latere Ab 1000 pedum, in trigono rectangulo AbC reperitur a altitudo vera bC pedum 167. 3'. 4". Iam in trigono rectangulo AzrX, quia dantur rursum latus Az 1000 pedum, & angulus XAz 10 grad. reperietur b altitudo falsa zX pedum 176. 3'. 2". Erroris ergo quantitas est fermè pedum 8. 9'. 8". Quod si Az cadat supra Ab, eodem ratiocinio similiter reperie-

a Probl. 3. cap. 3.
b per idem

reperietur erroris quantitas pedum 9. 0'. 1". Itaque, posito licet adeò crasso perpendiculi defectu, in casu primo error non aquat. 18 partem altitudinis, in secundo nequidem vigesimam.

Quare cum distantia mensoris ab altitudine ea est, qua altitudinis angulum quantitatis justa exhibeat, puta non minorem 10 gradibus, error quoque dimensionis magnus non erit. Nam & defectum perpendiculi tantum assumpsimus, minutorum nempe 30': quantum non facile accuratus mensor committet; & distantiam eam, qua angulum satis efficeret parvum, videlicet 10 graduum; cùm debeat, & facile plerumque possit obtineri major, sub quo error adhuc multo insensibilior evadet: nam reliquis datis iisdem, si angulus altitudinis X A Z fuerit 45 grad. eodem discursu reperies errorem non aquare 56 partem altitudinis vera A b, cadente A Z infra parallelam A b: cadente vero supra, neque dem 58. Ex quibus omnibus manifestum est, si caute & accuratè operemur, posse altitudines, secùs ac nonnullis barum non sat peritis aliquando visum est; absque errore notabili, etiam mediocri adhibito instrumento, reperiri. Quod ipsum etiam ex sequentibus confirmabitur.

Quod si angulus altitudinis instrumento repertus, sit valde parvus, major evadet ac sensibilior error. Nam si reliquis datis omnibus iisdem, qua supra, altitudinis angulus sit grad. 5, eodem scrutinio reperietur error major nonâ, sed minor octavâ altitudinis parte, cùm A Z cadit infra parallelam horizonti A b: cum vero A Z cadit supra A b, error proveniet major undecimâ parte altitudinis, sed minor decimâ. Qui error cùm ne ipse quidem adeo sit enormis, prasertim sub angulo altitudinis tam exili, videlicet grad. 5, & perpendiculi defectu posito tam crasso, 30' nempe minutorum; veritas eorum, qua paulo ante sunt dicta, amplius elucescit.

Vlterius tamen decrescente altitudinis angulo, prædictus error fiet intolerabilis. Reliquis enim datis manentibus, si altitudinis angulus sit grad. 3. & A Z cadat infra A b, proveniet error quinta parte altitudinis major: si 2 graduum, & A Z etiam cadat infra A b, error tertiam excedet altitudinis partem.

Pari ratione gravis evadet error, cùm distantia mensoris tam exigua erit, ut angulus altitudinis proveniat valdè magnus, hoc est proximè accedens ad rectum. Nam datis iisdem, qua supra, si altitudinis angulus fuerit grad. 88, error tertiam partem altitudinis excedet.

Ex hactenus dictis etiam confirmantur ea, qua in Scholio Problematis 7 ostensa sunt, tutissimam nempè altitudinis dimensionem institui ex distantiâ mediocri, qua exhibeat altitudinis angulum quam proximè graduum 45.

Nota suppofuisse me anguli altitudinis latus supernum, quod ab oculo mensoris per altitudinis apicem extenditur, debitum semper situm obtinuisse attendendo solùm ad situm vitiosum lateris inferni, a situ nimirum horizontali A B sursum deorsumve deflectentis. Is porrò oritur non solùm ex malâ divisione graduum, aliòve vitio instrumenti: sed potissimùm, ut suprà expositi, ex perpendiculi defectu. Caterùm ut plena cognitio habeatur erroris qui ex vitio anguli in altitudinis ac distantia dimensionem derivatur, conjungenda sunt hoc Scholio dicta cum iis, qua exposui in Scholio Probl. 7, & in Scholio Probl. 1. num. 1.

SECUNDA.

An distantiæ & Altitudines inaccessæ, ex unicâ statione possint mensurari.

P. Clavius censuit posse, & praxim affert hujusmodi. Quadrati Geometrici (hoc enim utitur) latus inferiùs Q F dirige in altitudinis apicem C, per dioptras collimando. Oculo deinde translato ad quadrati centrum A per dioptras regulæ in eundem collima apicem C. Ita opticum habes trigonum rectangulum A Q C, cui simile est in instrumento triangulum O S A: ac proinde est ut O S, ad S A, ita A Q (hoc est S A) ad Q C. Cùm ergo O S, & S A, sint nota in particulis, in quas divisum est latus S A; ac proinde sciatur quoties O S contineatur in S A, innotescet etiam quoties A Q (quod ponatur esse unius pedis) contineatur in Q C. Nota vero Q C; & invento per porisma 1. altitudinis angulo C Q B, innotescent a altitudo C B, & distantia Q B. Fig. 67. a Probl. 2. cap. 3.

Hac praxis non differt ab eâ, quam tradidi probl. 8, & 2. Nam si eam attentiùs expenderimus, comperiemus non unâ statione rem absolvi, sed duabus. Prima enim statio fit in Q & A ad reperiendum Q C: altera deinde tantùm in Q, ut ex Q C, & angulo C Q A reperiantur C B, & Q B. Intervallum porrò stationum est A Q latus instrumenti: quod quia est exiguum ac momenti propè nullius ad distantias, nihil hac praxi efficitur. Quod sic ostendo.

Statuamus Q C distantiam ab altitudinis vertice esse 1000 pedum, valde nimirùm moderatam; latus autem instrumenti A Q, pedis unius, quo majora vix esse solent ordinaria instrumenta. His datis, in trigono rectangulo A Q C reperietur angulus A C Q b minor 4' minutis, qui angulus ad hoc negotium ob nimiam parvitatem inutilis est. Cùm enim is par c sit sibi alterno S A O; erit etiam ille 4' minutis minor: unde fiet ut regula insensibiliter distet à latere A S; ac proinde ipsa etiam S O insensibilis existat. Quare sciri non poterit quot S O contineat particulas lateris A S, quod ad inventionem ipsius Q C requirebatur. Quòd si latus instrumenti sit pedum 4, eademque retineatur distantia pedum 1000, Angulus A C Q, hoc est S A O proveniet minor 15', minutis, qui ne ipse quidem sufficit, ut succedat dimensio. Si vero adhuc augere ultra voluerimus instrumentum, & distantiam minuere, angulus quidem utcumque sensibilis obtinebitur, sed inutili prorsus dispendio, cùm idem ille angulus instrumento mediocri obtineri possit per stationes duas, quarum intervallum lateri instrumenti illius enormis sit aquale. Ex quibus manifestum est hac methodo nihil ad praxim effici: aut si quid ob instrumenti inusitatam magnitudinem effici contingat, id fieri non statione unicâ, quod petebatur, sed duabus, cùm bis collimari debeat, in utraque videlicet lateris extremitate A & Q; & quidem adhuc impensâ, ut dixi, superfluâ. b Probl. 5. cap. 3. c 27. lib. 1.

CAPUT VI.

Quâ arte investigetur Ambitus & Diameter Orbis Terræ.

HActenùs altitudines & distantias in terrâ, aut circa terram positas dimensi sumus. Majora jam aggredimur. Ambitum & Profunditatem terreni Orbis, altitudinem Lunæ Solisque investigare deinceps erit propositum. Meritò semper omnibus ea in-

investigatio admirabilis visa est. *Altitudinem cæli* (inquit Siracides) *& latitudinem terræ, & profundum abyssi quis dimensus est?* & Plinius de Ptolomæo, ita scribit: *vir ingens supraq; naturam mortalium, qui tantorum corporum magnitudines tam admirabili ratione comprehenderit.* Ut verò rerum adeò reconditarum scientia comparetur, non est necesse aut orbem ipsum circumnavigare, aut viam sibi ad centrum usque per interpositas terræ moles aperire, aut per immensa spatia in Lunæ Solisve cælum conscendere. Unâ opus est duce Geometriâ, quæ eò absque funibus & scalis, quò eniti aliàs nulla humana industria possit, suis illis Elementorum theorematis quasi quibusdam alis instructa, penetrabit, omniaque arcana ista proferet in lucem.

Ut ad rem ipsam aliquando aggrediamur; ex Astronomiâ suppono molem ex terrâ & aquâ compositam esse sphæricam: quod, omissis aliorum demonstrationibus, brevissimè sic ostendo. Ubivis terrarum circumferentia horizontis visum terminans, apparet circularis. Hoc fieri non posset si alterius esset figuræ moles terraquea quàm sphæricæ, ut in sphæricis demonstratum est. Ergo moles terraquea est sphærica.

PROBLEMA I.

Semidiametrum Orbis Terræ invenire.

Fig. 78. Eligatur Mons quispiam excelsus, ex quo liber pateat horizontis conspectus, nullis aliis montibus, seu collibus impeditus. Aptissimus huic negotio Mons erit, ex quo liber sit prospectus in mare: illius enim superficies æquabilis est, ac proinde visibilem horizontis circumferentiam absque impedimento præbet. Talis est Mons Æthna in Siciliâ, qui & altissimus est, & longissimum exhibet in mare prospectum. Montis igitur ejusmodi altitudo sit A B, quæ protracta transibit per terræ centrum Z. Altitudinem illam A B fac notam per *Probl.* 7, vel 8, *cap.* 5. Constitutus deinde in ejus vertice A, metire per Porisma 2. *cap.* 5. angulum C A B, quem radius ab oculo ad C terminum horizontis pertingens, ac proinde superficiem globi terraquei contingens, efficit cum ipsâ montis altitudine A B. Quod accuratè ut fiat, non sufficiet Quadrans magnitudinis ordinariæ, sed adhibendus est planè magnus, in quo præter Gradus, notata sint Minuta Prima, imò & Decades saltem Minutorum Secundorum: quâ fere magnitudine instrumenti opus etiam erit suprà, ut altitudo ipsius montis A B reperiatur exactè. Et quia difficile est ob speciérum ex distantiâ tantâ debilitatem determinare punctum in circumferentiâ horizontis distinctè visibile, captandus est ortus occasusve alicujus Stellæ, vel Lunæ potius aut Solis, cùm ita jam infrà horizontem deprimitur, ut solus margo extremus appareat: tunc enim in lucidum illius marginem collimando, eadem operâ collimabis in punctum aliquod circumferentiæ horizontis, radiusque visualis A C terraquei globi superficiem præcisè tanget.

Hîs ita constitutis: concipiatur ex Terræ centro Z ad contactum C emissa recta Z C. Ita triangulum habebitur C A Z, cujus latus unum Z C est Terræ semidiameter; alterum A Z ex A B altitudine Montis, & B Z Semidiametro Terræ compositum; tertium A C radius visualis globum terraqueum contingens in C. In hoc triangulo, quia ex Z centro ad contactum ducta est Z C, erit angulus *a* Z C A rectus; ac proinde duo reliqui *b* A & Z unum rectum

a Per 18. *lib.* 3. *b Per* 32. *lib.* 1.

conficiunt, seu 90 grad. Quare si gradus noti jam anguli A, qui ferè sunt grad. 87. 11'. auferamus à 90 gradibus, remanent gradus 2. 49' pro angulo Z. Ita angulus Z in ipso Terræ centro abditus innotescit. Jam quia trigonum Z C A rectangulum est, per *defin.* 9. *cap.* 2. respectu anguli Z erit C Z Sinus totus 100000, & A Z Secans; quæ ex tabulis datur 100120. Quare si C Z, seu Z B 100000 dematur ex Z A 100120, remanebit A B 120 in partibus sinus totius C Z 100000. Sed eadem A B, altitudo nempè Montis etiam nota est in Milliariis. Ergo

Ut AB, 120 partes sinus totius	Ad	CZ Sinum totum 100000
Ita A B milliariorum 5	Ad	milliaria incognita.... semidiametri terræ C Z.

Cùm igitur tria prima sint nota, innotescet etiam quartum, Milliaria videlicet Semidiametri Terræ, quæ quærebantur, quæ ex hoc scrutinio proveniet milliariorum Bononiensium $4166\frac{80}{120}$.

Huic indagini, quæ sanè ingeniosa est, initium dedit Maurolycus; cujus ratiocinatio primò rudior (arcum enim C B, qui notabiliter curvus est, pro rectâ lineâ assumpsit) correcta & exposita in hanc, quam proposui, formam evasit.

Semidiameter duplicata dabit totam diametrum, ex quâ circumferentia ipsa, sive ambitus Terræ elicitur eo modo, quem tradidi in selectis ex Archimede in Scholio *prop.* 6. & tradam infrà *lib.* 2. *cap.* 12. *Probl.* 3. Verùm quia etiam diameter elicitur ex circumferentiâ, utriusque seorsim & immediatè reperiendi artificium omninò tradendum est, præsertim cùm expeditior plerumque sit inventio immediata circumferentiæ, quam diametri.

PROBLEMA II.

Orbis Terræ circumferentiam invenire.

Primo loco proponam modum Eratosthenis Cyrenensis sed correctum: subtilis est, & à Plinio aliisque meritò laudatus. *Fig.* 77.

Dimensurus igitur Eratosthenes ambitum Terræ, hæc assumpsit: Primò urbem Syenem esse sub Tropico Cancri; isthic enim scribunt Cleomedes, Plinius & Strabo in meridie Solstitij per 150 stadia circumquaque, gnomones nullam umbram projicere: addit Plinius puteum isthic ejus rei gratiâ factum esse, cujus in meridie Solstitij totus fundus illustratur à Sole. Secundò, Syenem & Alexandriam: (has enim Urbes tanquam ad hoc scrutinium commodas elegerat) sub eodem sitas esse Meridiano: in quo quidem est corrigendus, cùm Alexandria sit Occidentalior grad. 1. 30'. min. Tertiò, distantiam Syenis ab Alexandriâ esse stadiorum 5000. Quartò, radios emissos ex Solis centro (F,) & extremitate diametri (L) in terram, esse quoad sensum parallelos, in quo etiam corrigendus erit infrà. His positis, ut ex Cleomede refert Nonius, aliique, hunc ferè in modum ratiocinatus est.

Alexandria sit in *a*; Syene in B; Meridianus per utramque transiens X *a* B. Centrum terræ Z, centrum Solis F, ejusque semidiameter terræ parallela L F. In *a*, nimirum Alexandriæ scaphium ita collocavit, ut gnomon *a o* perpendicularis esset ad superficiem terræ, adeoque productus transiret per terræ centrum Z. Est porrò scaphium hemisphærium ca- *Fig.* 77.

vum,

vum, gnomonem habens *a o*, centrum apice suo attingens, & Quadrantes *a*N, *a*S in 90 gradus divisos. Tum in meridie Solstitij observavit quantitatem arcus *a c*, umbram nempè gnomonis A *o*, quam determinat radius L *o c* ab extremo Solis margine, seu extremitate diametri L per *o* scaphij centrum & gnomonis apicem incedens, eumque reperit grad. 7. 12′. Jam quia Syene est sub Tropico Cancri, radium F B in Syenem è Solis centro directum in meridie Solstitij, conclusit transire per terræ centrum Z, ibidemque concurrere cum gnomone *o a* Alexandriæ erecto, & efficere angulum F Z *o*. Ut hujus anguli quantitatem inveniret, assumpsit radios *L o c*, F B Z ob enormem Solis distantiam quoad sensum esse parallelos; ac proinde per *prop.* 27. *lib.* 1. angulum F Z *o* æqualem esse sibi alterno *c o a* grad. 7. 12′. Sed in eo falsus est Eratosthenes; non enim radij *L o c*, F B Z; sed F *o q*, F B Z, quoad sensum paralleli sunt, ut à Ricciolo demonstratum est *lib.* 3. *Almag. cap.* 27. *num.* 7. *& Geograph. lib.* 5. *cap.* 3. *num.* 3. ac proinde angulus F Z *o*, æqualis est angulo *q o a*, qui priorem *c o a* excedit angulo *q o c*, seu *b* L*o*F, sub quo spectatur Solis semidiameter F L, qui est 15′, aut 16′ minutorum. Unde ipso *q o a*, adeoque & F Z *o*, seu B Z *a* est grad. 7. 27′, aut 28′. Quare etiam *a*B arcus Meridiani inter Alexandriam, & Syenem fuit Grad. 7. 27′, aut 28′ min. Hinc cùm Meridiani arcus *a*B grad. 7. 27′. ex assumpto 3 conficiat 5000 stadiorum, per regulam proportionum. 1 gradus conficiet stadia 671, vel correctione adhibitâ. (ex eo quod Alexandria & Syene non sint præcisè sub eodem Meridiano) stadia 600, quæ multiplicata per gradus 360, producunt stadia 216000 pro totâ Meridiani circumferentiâ, hoc est ambitu orbis terræ.

b 15. *lib.* 1.

Ut grad. 7. 27′	Ad stadia 5000
Ita grad. 1.	Ad stadia.....

Quod si, ut valdè probabile est, stadia illa fuerint Alexandrina, 600 stadia debita uni gradui maximi terræ circuli efficient 72 milliaria Bononiensia: & stadia 216000 debita toti circumferentiæ, dabunt milliaria Bononiensia 25920, ut eruditè probat Ricciolus. Quoniam verò *cap.* 1. ostensum est milliare Belgicum, sive horarium esse triplum Bononiensis, unus gradus terreni ambitus, ex ratiocinio Eratosthenis ritè correcto, continebit milliaria Belgica 24: ambitus verò totus 8640.

PROBLEMA III.

Ambitum Orbis Terræ aliter investigare.

Fig. 79.

Eligantur duæ urbes *l*, *s*, positæ sub eodem Meridiano, qui in cælo sit C B F Z, in terrâ, *q l s v*, horizon urbis *l* sit C A Z; urbis verò *s*, sit horizon X A R: puncta ipsis verticalia B, F. Distantia harum urbium *l s*, per *Probl.* 3. *cap.* 5 quàm accuratissimè fiat nota in milliaribus, adhibito instrumento exquisito & amplo; aut certè longo usu & commeatione frequenti ea distantia sit nota; id quod, si urbes sint celebres, & una sit passim omnium æstimatio distantiæ, obtineri potest citra errorem sensibilem.

Notâ hunc in modum urbium assumptarum distantiâ *l s* in milliaribus, reliquum est, ut eadem quoque nota fiat in gradibus. Quod ita fiet: mensuretur C I altitudo poli urbis *l* suprà horizontem ejus C Z: similiter altitudo poli X I suprà horizontem X R urbis *s*. Minor X I subtrahatur à majori C I, & nota erit earum differentia C X. Quoniam ergo B C, F X æquales sunt, (sunt enim ambo meridiani quarta pars) ablato communi X B, erunt residui arcus C X, F B æquales. Quia ergo notus est C X, etiam B F notus erit; hoc est scietur quot gradus contineat B F Meridiani cælestis. Atqui tot gradus *c* continet meridiani terrestris *q l v*, arcus *l s*, quot gradus meridiani cælestis continet B F. Ergo etiam noti sunt gradus *l s*, qui est distantia urbium *l*, & *s*.

c Cor. 3. *prop.* 33 16

Hoc ipsum etiam per altitudines meridianas alicujus stellæ ita poterit obtineri. Eligatur stella quæpiam O, cujus altitudo meridiana Z O suprà horizontem C Z urbis *l* fiat nota; & nota fiat similiter altitudo stellæ O meridiana R O suprà X R horizontem urbis *s*. Tum minore Z O subtractâ à majore R O, noti fient gradus arcus R Z: cui cùm æqualis sit arcus B F (sunt enim rursum ambo arcus B Z, & F R quadrantes meridiani, adeoque æquales inter se: à quibus proinde dempto communi F Z, remanent B F, Z R etiam æquales) gradus quoque ipsius B F noti erunt. Ergò, ut suprà, noti erunt *d* etiam gradus *l* Z.

d per idem.

Ponamus igitur arcum *l s*, sive hac methodo, sive præcedenti, repertum esse graduum 2; milliaria verò continere $144\frac{1}{2}$. Si gradus 2 efficiant milliaria $144\frac{1}{2}$: gradus 360, hoc est totus terræ ambitus, quot milliaria efficiet? per regulam proportionum provenient milliaria 26010.

Hoc artificio usus est Possidonius Philosophus, laudatus a Plinio, Strabone & Cicerone, ille, cujus januæ Pompejus Magnus, cùm ad eum audiendum accederet, imperij fasces submisit. Usi sunt eâdem Alamon Rex Arabiæ, multique Arabes, Naucleri item recentiores, ex longo navigandi usu rei maritimæ peritissimi, ex quorum observationibus debentur uni gradui milliaria Bononiensia saltem 70.

PROBLEMA IV.

Tertius modus indagandi Ambitum Orbis Terræ.

Fig. 79.

Eligantur duo loca *l*, *s* aliquot milliaribus horarijs dissita, sive sint sub eodem Meridiano, sive non; quorum ea positio sit, ut eorum distantia *l s*, per Probl. 3. *cap.* 5. possit mensurari: quod fieri debet summâ curâ & Quadrante amplo. Inveniatur deinde arcus B F, verticalis circuli inter loci utriusque vertices B & F interceptus, cujus inventionis quæ planè Astronomica est, modum tradere hujus loci non est. Notis gradibus arcus B F in cælo, innotescunt etiam gradus totidem arcus *l s* in terrâ. Tum, ut suprà, ratiocinabimur: si tot gradus distantiæ *l s*, efficiant milliaria tot: gradus 360 quot milliaria efficient? Per regulam Trium prodibit numerus milliariorum toti circumferentiæ orbis terræ debitorum.

Hanc viam tenuit Ioannes Baptista Ricciolus Noster. Elegit is distantiam inter villam Collegij nostri Bononiensis sitam in monte Serrâ propè Paternum, & Turrim Mutinensem quam juxta methodum *Probl.* 3. *cap.* 5. maximâ curâ & industriâ dimensus reperit passuum Bononiensium 21176, hoc est milliariorum Bononiensium 21 & passuum 176. Intervallum autem, quod ad hanc dimensionem peragendam, applicatâ decempedâ, notum fecit, fuit passuum Bononiensium

Absque finibus & calculo inaccessam distantiam, imò & altitudinem eadem opera metiri.

Fig. 46. Angulo in primâ statione invento describatur per prax. 3. schol. *pag. 23. l. 1. elem.* in chartâ æqualis S A X: & quot pedum fuit intervallum stationum, totidem partes ex scalâ acceptas transscribe in latus A S ex A in F. Fiat deinde noto jam angulo stationis secundæ æqualis S F O, & latus F O occurrat lateri A X in C. Ex C demitte perpendicularem C B occurrentem lateri A S in B. Patet ex *prop. 32. lib. 1.* triangula A C B, F C B triangulis opticis utriusque stationis æquiangula, ideoque per *prop. 4. lib. 6.* iisdem similia esse; ac proinde A F referre intervallum stationum, & A B distantiam, & C B altitudinem. Inquire igitur quot partes scalæ contineant A B, & C B: totidem quippe pedes distantia ipsa, & altitudo continebunt.

Cùm enim tres lineæ A F, A B, C B sint proportionales intervallo stationum, distantiæ, altitudini, & cum ex constr. intervallum stationum tot pedes contineat, quot scalæ partes continet A F; necesse est etiam distantia & altitudo tot sint pedum, quot partium scalæ sunt A B, & C B.

Scholium.

Practici Geometræ; qui de hoc argumento hactenus scripsére, praxes suas absque limitatione ullâ solent proponere. Unde fit ut ij, qui in rebus Geometricis parùm sunt experti, dum absque scrupulo ullo ubique & semper eodem modo operantur, in magnos errores incidant: cæteri verò, qui peritiores sunt, dum errores tantos observant, neque satis ex quibus nascantur causis expendunt, sibi persuadeant ferè nihil exactum hisce dimensionibus posse obtineri. His incommodis facilè occurretur, si limitationes & determinationes necessariæ suis locis adhibeantur. Quod igitur in Geometriâ Practicâ desiderari potissimùm video, supplebunt scholia, quæ problematis, ubi opus erit, subjungentur.

I.

Sub angulo altitudinis valdè parvo incerta erit distantiæ dimensio.

Fig. 47. *Si enim instrumentis utamur ordinariæ magnitudinis, facilè error aliquis in capiendis angulis, altitudinis præsertim, committitur. Error autem vel minimus in quantitate anguli valdè parvi determinandâ commissus, ingentem causat errorem in distantiâ. Altitudo montis sit B C; distantia horizontaliter infinitè extensa B X. Exilem aliquem Angulum altitudinis, in statione videlicet admodum remotâ, ponamus inventum esse C A B, vero majorem: verus autem sit C F B. Quoniam C A B* k 32. lib. 1. *externus k utrique C F B, & F C A æqualis est; erit F C A differentia falsi C A B, & veri C F B; hoc est F C A est ipse error, seu erroris quantitas. Statuamus deinde in statione viciniori repertum esse aliquem altitudinis angulum præcedenti majorem C Q B, qui a vero C O B etiam differat angulo O C Q: & sint errores ambo F C A, O C Q æquales. Manifestum est F C A longè majorem intercipere partem (F A) in lineâ distantiæ quam sit O Q intercepta ab O C Q. Sunt autem F A, O Q, errores distantiæ; siquidem F B est distantia vera collecta ex vero angulo altitudinis C F B, & A B est distantia falsa deducta ex falso angulo C A B, ac proinde F A, distantia vera ac falsa differentia, est error distantiæ. Atque idem eodem modo ostenditur in O Q. Liquet ergo cùm peccatur in parvo altitudinis angulo, errorem distantiæ multò causari majorem, quàm in magno.*

Imo fieri potest, ut idem error etiam minimus in altitudinis angulo semper decrescente, errorem in distantiâ causet quovis dato majorem; hoc est ut distantia colligatur verâ major minórve decuplo, centuplo, millecuplo. Assumatur enim in quovis altitudinis angulo eadem semper quantitas erroris, quæ supra nempè F C A vel O C Q, & ex C ducatur C Z parallela ad B X. Cogitemus angulum F C A, moveri versus parallelam C Z, sic ut tandem unum ejus latus incidat in ipsam parallelam, & sit L C Z idem qui F C A. Tunc unum latus C L alicubi cum B X concurret, alterum vero nusquam, utpotè parallelum: ac proinde angulus ille cùm parallelam attigerit, in linea horizontali intercipiet longitudinem infinitam. Ergo accedendo semper propiùs ac propiùs ad parallelam, intercipere poterit longitudinem datâ quâvis finita majorem. Atqui decrescente in infinitum altitudinis angulo C F B, unum ejus latus C A, ac proinde etiam angulus A C F, qui est erroris quantitas, accedit ad parallelam C Z propius semper ac propiùs in infinitum. Ergo decrescente absque termino altitudinis angulo, potest error A C F intercipere partem ex B X datâ majorem; ac proinde vel minimus error in altitudinis angulo errorem in distantia causare potest quovis dato majorem.

Nota, *Hic solùm expendisse me defectum anguli altitudinis ortum ex situ vitioso lateris superni C L; supponendo infernum latus situm habere debitum, nempè horizonti parallelum, ex cujus defectu quid nascatur erroris, exponam in scholio probl. 16. Vitiatur situs lateris superni ex mala collimatione ad apicem altitudinis, & inæquali divisione graduum aliove instrumenti vitio.*

II.

Quantum esse debeat intervallum stationum.

In constructione Problematis requiritur differentia aliqua tangentium, vel angulorum altitudinis, vel angulorum ipsos complentium. Fig. 46. *Ea autem ut habeatur, necesse est ut aliqua sit differentia ipsorum angulorum: & ut differentia angulorum obtineatur, opus est justo stationum intervallo. Loca stationum sint A & F. Angulorum altitudinis in his stationibus C A B, C F B, differentia est A C F (est enim C F B par duobus b C A B, A C F):* b 32. lib. 1. *qui angulus A C F quò fuerit major, eò certior operatio erit: erit porrò eo major, quò stationum A, F intervallum fuerit majus. Toto hic cælo aberrant ij qui non satis ista expendunt, dum arbitrantur stationum intervallo quolibet ad libitum assumpto, sensibilem angulorum differentiam posse obtineri. Quantum fallantur, ex inventione ipsa intervalli apparebit.*

Quoniam consultum est ut differentia angulorum ACF unius gradus existat, statuamus altitudinis angulum C A B, in statione A esse 14 grad. C F B in statione F, grad. 15. Ergo complementa eorum, A C B, F C B sunt grad. 76, & 75; quorum tangentes sunt c A B, F B; & c defin. 9. cap. 2. *ex tabulis dantur 401078, & 373205, adeoq; & tangentium differentia 27873, ipsum videlicet intervallum stationum A F: cujus proinde ratio ad distantiam majorem A B reperitur, majorem tangentem per tangentium differentiam dividendo. Comperies igitur hac ratione, cùm in prima statione habetur altitudinis an-*

gulus

gulus 14 grad. ut obtineatur in statione secundâ angulus uno gradu major, nempè grad. 15, oportere accedere per spatium (A F) quod ferè sit pars decimaquarta totius distantia A B, eodem modo investigabitur quocumque dato altitudinis angulo in statione unâ, quanto opus sit stationum intervallo, ut acquiratur in statione alterâ angulus altitudinis differens gradu uno aut pluribus.

Anguli altitudinis graduum	*requirunt intervallum stationum, quod sit majoris distantia A B pars.*
19 & 20	$18\frac{81}{172}$
14 & 15	$14\frac{108}{191}$
10 & 11	$10\frac{403}{784}$
5 & 4	$4\frac{161}{317}$

III.

Quæ sit proportio altitudinis ad distantiam sub variis angulis.

Fig. 46. *In triangulo rectangulo A B C, dato altitudinis angulo A, datur proportio laterum A B distantia, qua est sinus totus, & C B altitudinis, qua est tangens anguli A per defin. 9. cap. 2. Itaque*

posito altitudinis angulo C A B	*erit altitudo CB, distantia A B*
Graduum	Pars
20	$2\frac{273}{373}$
15	$3\frac{796}{1089}$
10	$5\frac{410}{578}$
5	$11\frac{3722}{8749}$
3	$19\frac{46}{123}$
1	$57\frac{585}{1948}$

Fig. 48. *Hac intellige, si distantia non sit tanta, ut propter rotunditatem terra sensibiliter curva evadat; quod eveniet si gradum unum adaquet ambitus terreni. Altitudo montis esto C B, qua protracta transit per terra centrum X. Oculus sit in A. Intervallum A B grad. 1. quamvis in figurâ amplius sit assumptum commoditatis gratiâ. Quoniam angulus altitudinis per instrumentum capitur, dirigente perpendiculo, quod semper tendit ad centrum terra X; triangulum rectangulum distantia, quod hactenus consideravimus, non erit F B C, sed A O F, in quo F O minor est sensibiliter, (ut ostendam infrà in Scholio 2 Probl. 8.) altitudine montis B C: distantiarum tamen A O, A B, differentia minoris quidem, sed alicujus tamen adhuc momenti est, si cum B C comparentur; nullius, si inter se, ut ostendam numero 4. Quare cùm distantia aquat. 1. grad. proportiones jam tradita sunt proportiones ipsius A O, seu A B ad F O; ac proinde majores quam A B distantia, ad altitudinem veram B C.*

IV.

Utrum rotunditas terræ officiat huic mensurationi distantiæ.

Fig. 48. *Ita suspicari quispiam posset ex iis, qua num. 3. observavimus. Repetantur istic observata unà cum diagrammate, in quo distantia mensoris à monte sit A B gradus unius terreni ambitus; hoc est (ut cap. 6. Prob. 4 docebitur) 24 milliarium Belgicorum. Linea distantia, cujus quantitas ex vi Problematis reperitur, est non arcus A B, sed A O tangens superficiem terra. Ducatur subtensa A B. Tangens A O unius gradus, excedit A B subtensam unius gradus nequidem parte millesimâ. Igitur A O subtensam A B, adeóque adhuc magis arcum A B insensibiliter excedit. Unde ne quidem in distantiam 24 milliarium Belgicorum quidquam errores ullo modo perceptibilis rotunditas terra derivat.*

PROBLEMA II.

Distantiam inaccessam per duas stationes aliter metiri.

Fig. 49. vel 50. Distantia mensuranda sit A B; in cujus extremitate sit turris, seu altitudo alia, cujus apex C distinctè videri possit. In planitie circumpositâ eligatur altera statio lateralis F, cujus distantia à primâ A mensuretur mechanicè. Investigentur deinde utriusque stationis anguli, nimirùm F A C, A F C: cum quibus, & latere noto A F reperietur per Probl. 9. cap. 3. latus A C distantia mensoris à vertice turris B C; sinimirùm fiat ut sinus anguli F C A ad sinum anguli A F C, ita latus notum A F ad aliud.

Requiruntur ergo hac.

1. *Planities ampla circa A, ut mensurari possit mechanicè intervallum stationum A F.*

2. *Intervallum stationum quam fieri potest maximum, ut angulus F C A fiat sensibilis: quò enim ille major erit, eò certior operatio evadet. Expediet igitur eum non esse minorem uno gradu; imò si fieri poterit, ut gradus aquet 4 vel 5, aut saltem tres, duosve.*

3. *Ut non solùm in termino distantia mensurandæ erecta sit altitudo quapiam, cujus apex distinctè videri possit ex statione utrâque A & F, sed etiam ut in A extet signum, quod ex F, & in F signum, quod ex A spectari possit, ex. gr. cacumen turricula aut domus. Quod si desint signa visibilia in A & F, ea erunt quocumque demum modo supplenda.*

4. *Ut angulus A F C, vel F A C quem stationum intercapedo A F facit cum radio visuali, sit rectus, aut recto quàm proximus: tunc verò solvetur quasitum per Probl. 3. cap. 3.*

Inventâ in hunc modum A C distantiâ mensoris ab apice turris B C, si existat sensibilis differentia inter A C & A B, (quod quando accidat, in Scholio tradetur) tum in rectangulo trigono A B C, cum jam inventâ A C & altitudinis angulo C A B, qui notus fiet per por. 1, invenietur ipsa A B per Prob. 2. cap. 3.

Quod si defectu planitiei circa A mechanicè mensurari nequeat intervallum stationis lateralis A F; aut ex F loca A & C spectari nequeant; aut tanta sit distantia, ut nimis magno opus sit stationum intervallo ad obtinendum sensibilem angulum F C A; confugiendum erit ad Problema sequens.

Caterùm hac mensuranda distantia ratio videri posset anteponenda pracedenti, primò quia minori indiget stationum intervallo, ut ostendam infra in Scholio num. 4. Secundò quod ad longe majorem distantiam mensurandam se extendit, quam pracedens. Quamvis autem hac praxis tres requirat angulos, unum altitudinis, duos distantia, ubi altera solùm duos altitudinis: id tamen inde satis videtur compensari, quòd securior sit (ut dixi por. 3. sup.) angulorum distantia investigatio.

Aliter absque sinibus & calculo non solùm distantiam inaccessam, sed etiam altitudinem invenire.

Fig. 49. vel 50. Stationibus institutis, ut suprà, inventísque per instru-

instrumentum angulis; sume ex scalâ tot partes, quot passus ex. gr. erant in stationum intervallo, easque transcribe ex A in F. Ad extremitates rectæ A F fac a angulos F A Z, A F X, æquales angulis per instrumentum inventis; sitque F A Z primæ stationis angulus: latera deinde A Z, F X concurrant in C. Erit ergo triangulum *b* A C F æquiangulum; ac proinde *c* etiam simile triangulo optico, cujus basis erat stationum intervallum, apex verò in ipso apice altitudinis mensurandæ.

a *Prax.* 3. *Schol prop.* 23.*lib.* 1.
b *Coroll.* 9. *prop.* 32.*l.* 1.
c 4.*lib.*6.

Fiat deinde *d* angulus C A Q æqualis angulo sub quo visa fuit altitudo; & ex concursu C demittatur perpendicularis C B, concurrens cum A O in B. Erit ergo triangulum A C B *e* æquiangulum; ac proinde *f* simile alteri optico triangulo, cujus unum latus erat distantia quæsita, alterum altitudo. Unde A F referente intervallum stationum; A B refert distantiam, C B altitudinem. Cùm igitur per constr. tot passus contineat intervallum stationum, quot scalæ partes continet A F; etiam distantia, & altitudo quæsitæ tot continebunt passus, quot scalæ partes continent A B, & C B. Inquire igitur quot partes scalæ sint in A B & C B: & numeri inventi indicabunt passus in distantiâ & altitudine contentos.

d *Prax.* 3. *Schol.* 23. *lib* 1.
e 32.*lib.* 1.
f 4.*lib.*6.

Scholium.

I.

Cur etiam hîc magno opus sit stationum intervallo?

Fig. 49.

Ut intervalli stationum angulus F C A *evadat sensibilis: quò enim ille fuerit major, eò certior futura est distantiæ inventio: quò verò minor, eò majus erit erroris periculum, ut ejus quantitas accuratè cognoscatur. Quod autem crescat angulus* F C A *aucto stationum intervallo* A F, *per se manifestum est.*

I I.

Cur expediat ut angulus AFC, vel FAC; quem stationum intercapedo A F facit cum visuali radio, sit rectus aut recto proximus?

Fig. 49.
a 16. 3.

Quia angulo A F C *existente recto, intervalli angulus* A C F *est maximus. Centro* A *per* F *describatur circulus, qui* a *tanget radium* C F *ex hyp. perpendicularem radio* A F. *Ad utramlibet partem intervalli* A F, *sumantur intervalla ipsi* A F *æqualia nimirum* A O, A L, *quæ cum radio visuali efficiant angulos* AOC, A L C *non rectos. Quoniam radius* C F *circulum tangit; alij verò* C L, C O *necessariò secant; patet angulum* F C A *majorem esse angulis* O C A, L C A: *atque eodem modo quibuscumque alijs.*

Pari modo idem ostenditur, si rectus sit angulus F A C, *ut in figurâ* 50.

I I I.

Quanto opus sit stationum intervallo, ut intervalli angulus F C A existat lubitæ magnitudinis.

Fig. 49.

In trigono A F C *efficiat* A F *stationum distantia cum radio visuali* F C *angulum rectum* F; *& intervalli angulus* F C A *ponatur esse grad.* 1. *Quæritur ratio* A F *ad* A C. *In trigono rectangulo* A F C, A C *est sinus* a *totus* 100000. A F *verò est sinus anguli* C *unius gradus, nimirum* 1745. *Quare divisis* 100000 *per* 1745, *quotiens* 75$\frac{535}{1745}$ *indicabit quanta pars sit* A F *ipsius distantiæ* A C, *minor videlicet unâ distantiæ parte quinquagesimâ octavâ, hoc modo supputavi tabellam sequentem.*

a def. 6. 2.

Ut intervalli ang. F C A *sit*	*Stationum intervallum* A F *debet esse distantiæ* A C.
Grad.	Pars
1	57$\frac{535}{1745}$
2	28$\frac{1308}{3489}$
3	19$\frac{575}{5233}$
4	14$\frac{2510}{6976}$
5	11$\frac{4115}{8715}$
6	9$\frac{1338}{10453}$

I V.

Longè minori opus est stationum intervallo, dum una stationum lateralis est, quàm dum utraque directa.

Manifestum erit, si tabulam præcedentem conferas cum eâ, quam supputavi num. 2. *Probl. præc. placet exemplo uno alterove rem declarare.*

Mensuranda detur distantia milliariorum Belgicorum 5$\frac{1}{2}$, *in cujus termino sit mons altus dimidio Belgico milliari. Quoniam ergo hæc distantia altitudinis undecupla est, mons ille spectabitur* b *sub angulo* 5 *grad. Quando autem altitudinis angulus est grad.* 5, *ut habeatur in statione altera directa angulus altitudinis uno gradu minor, graduum nempè* 4; *ac proinde intervalli angulus* F C A *sit gradus unius; opus est stationum intervallo,* c *quod sit majus parte quintâ ferè totius distantiæ: hoc est in casu præsenti uno circiter milliari Belgico. Dum verò statio una lateralis est, ut obtineatur intervalli angulus* F C A *unius gradus, nequidem requiritur pro stationum intervallo* A F *distantiæ* A C *quinquagesima octava pars, ut ex num.* 3. *patet: hoc est in casu præsenti minus quàm* $\frac{11}{114}$ *unius milliaris Belgici; hoc est ferè decima Belgici milliaris pars. Ergo dum una statio lateralis est, habetur intervalli angulus* F C A *unius gradus mediante intervallo stationum ferè decies minori, quàm dum utraque statio est directa.*

b ostendi num. 3. Probl. præc.
c ostendi num. 2. Prob. præc.
Fig. 49.

Quod si, positis ijsdem, intervalli angulus F C A *desideretur* 4 *graduum; tum si utraque statio accipiatur directa, ex calculo, quem tradidi num.* 2. *Problematis præcedentis, pro stationum intervallo requiretur totius distantiæ pars ferè* 1$\frac{6618}{7610}$; *hoc est intervallum requiretur plus quàm dimidium totius distantiæ* A B, *ac proinde inutilis est tum praxis primi Problematis. At si una statio lateralis sit, obtinebitur angulus* F C A *grad.* 4. *assumpto intervallo, quod non adæquet partem distantiæ decimam quartam.*

V.

Ad quantam distantiam mensurandam hoc Problema se extendat.

Assumatur pro intervallo stationum mechanicè cognoscendo medium milliare Belgicum, quod intervallum quamvis non sine gravi labore ac molestiâ mensuretur; tamen quando distantia, quæ proponitur investiganda,

magni

magni momenti est ex. gr. ad reperiendum ambitum terræ, ut dicetur a infrà: opera pretium erit & hoc spatium, &, si opus est, etiam illo majus applicatâ decempedâ mensurare.

a *cap. 6.*

Hoc igitur assumpto intervallo stationum, si angulus intervalli FCA fuerit gradus unius, distantia per hoc Problema inventa excedet milliaria Belgica 28. distantia enim, ut patet ex num. 3. est ad stationum intervallum ut 57[illegible] ad 1, cùm angulus intervalli est grad. 1. Ergo distantia hîc continebit plus quam 57 dimidia milliaria Belgica, hoc est plus quam 28 integra. Hoc modo constructa sunt tabellæ sequentes, quæ distantias per hoc Problema mensurabiles accuratè exhibent.

Posito stationum intervallo dimidij Milliaris Belgici, si intervalli angulus FCA est	*Distantia per hoc Problema inventa excedet Milliaria Belgica.*
grad.	
1	$28\frac{1}{2}$ ferè
2	14[illegible]
3	$9\frac{1}{2}$ ferè
4	$7\frac{99}{770}$
5	$5\frac{1}{2}$ ferè
6	$4\frac{1}{8}$ ferè.

Posito stationum intervallo pedum Antverpiensium 5000, si angulus FAC est	*Distantia inventa excedet*	
grad.	*Pedes Antv.*	*sive Mil. Hor.*
1	286532	14
2	143307	7
3	95547	4
4	71684	3
5	57372	2[illegible]
6	47837	2[illegible]

Posito stationum intervallo pedum Antverpiensium 1000, si angulus FAC est.	*Distantia inventa excedet*	
grad.	*Pedes Antv.*	*sive Mil. Hor.*
1	57306	2[illegible]
2	28661	2[illegible]
3	19109	&c.
4	14336	
5	11474	
6	9567	

Posito stationum intervallo Ped. 100. si FCA est.	*Distantia inventa excedet pedes*
grad.	
1	5730
2	2866
3	1910
4	1433
5	1147
6	956

Ex quibus patet distantiam incomparabiliter majorem posse mensurari, cùm statio una lateralis est, quàm dum utraque directè in lineâ distantiæ accipitur.

VI.

Quando contemni possit differentia inter distantiam verticis AC, & distantiam horizontalem AB.

Fig. 49.

In trigono rectangulo ABC ponatur angulus altitudinis CAB grad. 1. Ergo a ACB est grad. 89, cujus sinus est b AB, 99984, quarum sinus totus AC est 100000. horum differentia est 16, quæ ad AB, 99984 est ut 1 ad 6249, adeoq; nullius momenti, hoc modo constructa est tabella sequens, ex quâ intelliges quando contemni possit differentia dicta

a *32. 3.* b *defin. 6. cap. 2.*

Existente angulo altitudinis CAB	*Distantia AB excedet differentiam*	*plusquam vicibus*
grad.		
1		6249
2		1639
3		724
4		409
5		262
10		65

PROBLEMA III.

Distantiam duorum locorum (A, B) variè impeditam, per duas, & quando ita opus est; per tres aut plures stationes metiri.

Praxes Problemate 1 & 2, jam expositæ usui esse non possunt. Primò si neuter locus vel alteruter adiri nequeat. Secundò si neuter in plano sit: tunc enim stationum intervallum AF Probl. 1 & 2. assumptum, non poterit mechanicè mensurari. Tertiò si ex neutrâ stationum vel alterutrâ nequeat conspici C apex altitudinis in distantiæ termino erectæ. Quartò si distantia sit tanta, ut duas solùm adhibendo stationes nimis magno opus sit stationum intervallo, quod proinde mechanicè mensurari vix possit. Quintò denique si desideres ex modico intervallo mechanicè noto magnam distantiam invenire. Quis ergo in hisce casibus tenendus sit modus, hoc Problemate exponam.

Fig. 49. & 46.

CASUS 1.

Mensuranda sit distantia locorum A & B, quorum neuter adiri possit, vel aliud subsit ex tribus primis impedimentum. Eligantur in planitie aliquâ stationes duæ in C & F, quarum intervallum FC metire perticâ. Noti fiant anguli AFC, ACF: cum quibus & latere noto FC, reperietur m AC. Pari modo noti fiant anguli BCF, BFC: ex quibus, & latere noto FC, innotescet m BC. Inveniatur deinde angulus ACB: cum hoc, & lateribus notis AC, BC, n reperietur AB distantia quæsita.

Fig. 51. 52. 53. 54.

m *per prob. 9 cap. 3.*

n *per probl. 10 cap. 3.*

CASUS 2.

Quod si locus, in quo es, sit talis, ut nequeant duæ stationes reperiri utrâque conditione requisitâ præditæ; nimirùm, ut & sint in planitie, quò possit earum intervallum mechanicè mensurari, & conspici ex utrâque possint A, B, termini distantiæ mensurandæ; elige primò stationes duas FC in planitie positas, quarum

Fig. 55.

quarum intervallum metire perticâ: deinde duas alias quære, O, Q, è quibus conspici possint A, & B, quarum distantia O Q reperiatur ope lateris mechanicè noti F C, ut jam docui: tùm per O Q jam notam eâdem methodo reperietur ipsa A B distantia quæsita.

CASUS 3.

Mensuranda sit distantia A B, etiam maxima, assumpto ad lubitum intervallo mechanicè notificando, etiam exiguo.

Fig. 56. *Perexiguum intervallum intelligo, quod non habet proportionem sensibilem ad distantiam, & cujus angulus superceptibilis est, ii nempe cujus basis est intervallum, vertex autem in loco, cujus distantia quæritur. Unde si distantia sit enormis, qualis esset Pici montis, qui ex distantiâ 4. grad. apparet, etiam 1000 passus, imò medium milliare Belgicum esset respectu ejus intervallum nimis parvum.*

Præter stationem primam in A termino distantiæ, determina secundam lateraliter in C modicò intervallo, quod metire decempedâ, & sit ex. gr. 100 pedum. Designa deinde intervallum secundum A F multò majus quàm A C, quod præsidio lateris A C noti ex duabus stationibus A & C metire per *prac. Probl.* Rursus tertium designa intervallum A O majus quàm A F, quod ope lateris jam noti A F ex stationibus A & F metire per *prac. Probl.* Quod si jam intervallum A O tantum est, ut exhibeat angulum A B O sensibilem; ope ipsius A O ex stationibus A & O metieris per *praced. Probl.* A B distantiam quæsitam. Quod si angulus A B O nondum esset sensibilis, plures forent designandæ stationes, donec tandem evadat sensibilis. Porrò anguli ad unum (A) punctum existentes simul capiendi sunt, ne sæpiùs oporteat ad eundem locum labore superfluo redire.

Hoc artificio ingentes distantias, & aliàs omninò immensurabiles posse innotescere, licet intervallum primum sit parvum, sic ostendo. A C primum intervallum sit 100 pedum Rhynlandicorum, & anguli A C F, A F O, A O B recti; anguli verò AFC, AOF, ABO unius gradus. Igitur, ut in *Scholio prac. num. 3.* ostensum est, A F continebit A C 100 ped. plus quàm 57 vicibus; ac proinde A F erit major pedibus 5700. Eodem modo erit A O major quàm A F pedum 5700, plus quàm vicibus 57, adeoque A O erit major pedibus 324900, hoc est 18 milliarijs Belgicis. Pari modo A B distantia quæsita excedet A O pedum 324900 plus quàm 57 vicibus; ac proinde A B erit maior pedibus 18519300, hoc est 1028 Belgica milliaria. Tanta distantia assumpto tantum intervallo primo 100 pedum per 4 stationes innotesceret, si locus B ex A & O conspici, & stationes C, F, O, juxta conditiones positas obtineri possent.

Verùm quia intervallorum angulos ABO, AOF, A F C, convenit esse aliquot graduum; ponamus eos esse graduum 5, reliquis datis manentibus iisdem, quæ suprà. Igitur ut ostendi in Scholio præcedenti, *b* A F erit plus quàm undecuplum primi intervalli A C pedum Rhynlandicorum 100, adeoque majus pedibus 1100. A O verò plus quàm undecuplum ipsius A F pedum 1100; ac proinde majus pedibus 11100: ac tandem A B distantia quæsita erit plus quàm undecupla ipsius A O pedum 11100, ac proinde major pedibus 111100; hoc est major 6 Belgicis milliaribus. Igitur per stationes quatuor in A, C, F, O, intervallo primo tantùm existente pedum 100, distantia mensurabitur major milliaribus Belgicis.

b num. 3.

Quod si intervallum primum assumatur pedum 1000, poterit per stationes tres A, C, F, distantia 6 Belgicorum milliarium major innotescere: & per stationes quatuor major Belgicis milliarijs 66 quod à nullo, quod sciam, huc usque est observatum.

Scio stationes rarò posse juxta conditiones hic positas præcisè ordinari. Verùm hæc eo fine dicta sunt, ut appareat, quousque hac industriâ pertingi possit; simul ut Geometra, quæ optima sit stationum ratio, intelligat, ut si obtinere eam exactè non possit, ad illam certè quàm proximè conetur accedere.

Absque finibus & calculo.

Omnes casus Problematis absolves, si ex scalâ sumas A F lineam tot partium, quot passus ex. gr. erant in stationum intervallo mechanicè mensurato, & suprà illam facias triangulum simile A C F primo optico triangulo; & suprà A F triangulum A O F simile secundo optico, & sic deinceps quotquot fuerint, quod semper fieri poterit, cum in singulis opticis triangulis duo anguli per instrumentum sint noti. Latus ultimum A B repræsentabit distantiam quæsitam, quæ tot erit passuum, quot reperies in A B contineri partes scalæ. Fig. 56.

Demonstratio eadem, quæ suprà Probl. 1 & 2.

PROBLEMA IV.

Distantiam inaccessam (A B) turris vel montis, datâ ejus altitudine (B C) metiri.

INveniatur per Porisma 1 altitudinis angulus CAB. Tum quia in trigono rectangulo A B C, dantur acutorum unus C A B, & latus B C; reperietur per Probl. 3. *cap.* 3 latus alterum A B distantia quæsita. Fig. 40.

Sine calculo.

Angulum altitudinis instrumento inventum aufer à gradibus 90, ut habeatur angulus complementi, cui æqualem fac S C Y. Deinde fiat C B tot partium scalæ, quot pedes erant in altitudine datâ; ducaturque B A perpendicularis ad C B, cui occurrat C S in A. Inquire quot partium scalæ sit A B: tot enim pedum erit distantia quæsita.

Est enim triangulum A C B, *prop.* 32. *lib.* 1. æquiangulum optico triangulo, ac proinde per *prop.* 4. *lib.* 6 simile. Quare cùm C B tot scalæ partes contineat, quot pedes altitudo data; etiam A B tot erit partium scalæ, quot pedum distantia quæsita.

PROBLEMA V.

Longitudinem mediocrem (C B) in horizontali plano extensam, horti, areæ, porticus &c. latitudinem fluminis &c. metiri.

NOta sit A C altitudo mensoris, sive ea sit statura ejus, sive major, sive non. Metire *a* angulum distantiæ B A C. Tum quia in trigono rectangulo A C B, dantur acutus B A C, & latus A C; reperietur per Probl. 3, *cap.* 3. latus alterum B C distantia quæsita. Fig. 43. a Poris. 2.

Sine

Sine calculo.

Angulo distantiæ per instrumentum reperto fac æqualem S A X. Deinde fiat A C tot partium scalæ, quot pedum datur altitudo oculi; ducaturque C B perpendicularis ad A C, cui occurrat A X in B. Inquire quot partes scalæ contineat C B: tot enim pedum erit longitudo quæsita.

Demonstratio similis præcedenti.

Aliter.

Fig. 57. Quadrantis ad horizontem paralleli, aut ferè paralleli latus A C dirige in signum aliquod in B termino distantiæ modicè elevatum. Collima deinde per latus alterum A F in signum aliud Z isthic erectum, aut erigendum, & mechanicè innotescat A Z. Inveniatur tandem angulus Z: cum quo, & latere noto A Z, reperietur [c] in trigono rectangulo Z A B, latus A B, distantia quæsita.

c Probl. 3. cap. 3.

Sine calculo.

Angulo acuto per instrumentum invento fiat æqualis F Z S. Deinde fiat Z F A tot partium scalæ, quot pedum erat intervallum mechanicè notum; ducaturque A B perpendicularis ad Z A, cui occurrat Z S in B. Inquire quot partium scalæ sit A B: totidem quippe pedum erit longitudo quæsita.

PROBLEMA VI.

Latitudinem fluminis seu lacus aliter metiri.

Fig. 41. 42. 43. Collimando in ulteriorem fluminis ripam, notus fiat per instrumentum angulus distantiæ. Deinde verte instrumentum ad continentem, & constitue, ut erat prius: nimirum ut perpendiculum vel regula abscindat eundem distantiæ angulum, sive arcum F O, quem in situ priori. Collimando deinde per dioptras A O, punctum, quod in horizonte conspexeris, putà B, signari jube, & metire longitudinem C B mechanicè: ea enim est par latitudini fluminis, ut per se patet.

Atque hac hactenùs de distantijs potissimùm. Nunc ad altitudines, quamvis eas suprà jam attigimus, accuratiùs investigandas accedamus.

PROBLEMA VII.

Altitudinem inaccessam montis, seu turris (C B) metiri.

Fig. 58. Instituatur operatio eadem, quæ fuit adhibita in Problematis 1. modo 1. binis stationibus in lineâ distantiæ in A, & F determinatis.

Ut	A F differentia tangentium angulorum ACB, FCB complentium angulos altitudinis C A B, C F B	Ad	Sinum totum B C
Ita	A F stationum intervallum, ex. gr. pedum 1000	Ad	altitudinis quæsitæ BC pedes.....

Tria prima sunt nota. Innotescet ergo etiam quartum, altitudo nempè B C in eâdem mensurâ, in quâ notum erat A F stationum intervallum.

Sine calculo.

Vide Problema 1. ubi distantia & altitudo unâ eâdemque operâ absque sinibus & calculo ullo sunt inventæ.

Nota, tum hîc, tum in sequentibus, mensurari solùm eam altitudinem, quæ suprà oculum est, quam determinat linea recta A B ducta à mensoris oculo posito in A ad altitudinem perpendicularis: adeoque parallela ad horizontem. Altitudini ergo inventæ addenda est mensoris statura A L, seu B Z, si basis altitudinis Z, & L pes mensoris sint æquè alta: quod si (ut in fig. 59) altitudinis basis sit demissior, pede mensoris, mensuranda est per Probl. 13 altitudo B Z, & altitudini priùs inventæ B C adjicienda, ut priùs

Scholium.

Ex quâ distantiâ securissima fit altitudinum dimensio.

Fig. 60. *Non tutò ex quâlibet distantiâ altitudines mensurantur. Perinde absunt & magna distantia, & vicinitas magna. Distantia quidem, quia facit, ut sub exiguo angulo spectetur altitudo, ac proinde in capiendo angulo facilè committatur error angulo justo par aut major, unde fit, ut altitudo colligatur multò major verâ. Ut si angulus justus fit C A B, & putetur esse Z A B; colligetur altitudo B Z pro verâ B C. Accedit quod cùm binis stationibus opus est, ingentia requirantur [a] stationum intervalla, ut parvi altitudinum anguli sensibilem habeant differentiam. Magna vicinitas obest, quia efficit ut B C Q angulus, sub quo altitudo B Q conspicitur, vix differat à recto; ac proinde alter C Q B fit acutus insensibilis. Unde facilè accidet, ut altitudo colligatur decies, aut centies verâ major: quod demonstrabitur, ut num. 1. si tantùm figuram inverteris, quod hic factum vides.*

a ostendi in Sch. prob. 1. num. 2.

Fig. 61.

Fig. 58. 59. *Certissima igitur erit altitudinum dimensio ex distantiâ mediocri. Ea porrò est, qua angulum altitudinis C A B exhibet semirectum, nempè graduum 45, aut semirecto quàm proximum. Ita enim & incommoda jam dicta licebit effugere, & faciliùs angulorum sensibilis differentia stationibus variatis obtinebitur.*

Anguli altitudinis Graduum	*requirunt stationum intervallum, quod sit distantiæ majoris pars*
45 & 46	$\frac{1}{29\frac{1}{1}\frac{1}{1}}$ [illegible]
45 & 44	$29\frac{1}{1}$ [illegible]
45 & 47	14 [illegible]
45 & 43	14 [illegible]

Est autem visa sub angulo 45 grad. altitudo par distantia.

Cæterùm hæc stationum intervalla licèt satis sint moderato, longè tamen adhuc superant ea, quibus utitur Problema sequens, ut patebit, si hæc intervalla conferas cum iis, quæ continentur tabellâ numeri 3 in Scholio Probl. 2.

Quoniam verò constructio hujus Problematis eadem est, quæ primi Problematis, etiam huc pertinent ea omnia quæ ibidem in Scholio, num. 2. 3 4. determinavimus.

Nota. *Etiam hîc (quod notari jusseram suprà in Scholio 1. Probl. num. 1.) attendisse me hic solummodò situm vitiosum lateris superni in angulo altitudinis, supponendo infernum debitum habere situm, nempè parallelum horizonti. Ex hujus enim defectu quantus error proveniat, ostendam in Scholio Probl. 16.*

PROBLEMA VIII.

Altitudinem inaccessam montis, aut turris (CB) aliter, & certiùs metiri.

Fig. 49.

PRæter A locum stationis primæ, eligatur ad latus statio altera in F, servatis iis, quæ Probl. 2. præscribuntur. Deinde cognito mechanicè stationum intervallo AF, mensuretur per Probl. 2. AC distantia mensoris à montis, seu turris cacumine C.

Tandem in trigono rectangulo ABC, notus fiat angulus CAB: cum quo & basi notâ AC, reperietur per *Probl. 2. cap. 3.* latus CB altitudo quæsita.

Hic modus videtur præstantior esse præcedenti 1, quia (ut ostendi in Scholio Probl. 2. n. 3 & 4) incomparabiliter minori opus habet stationum intervallo, ut angulus ACF fiat sensibilis, quod omninò requiritur, ut patet ex num. primo citati jam Scholii 2. quod ex primo consequitur; quia ex longè majori distantiâ altitudines mensurari possunt hac praxi, quam præcedenti, ut in Scholio sequenti num. 1. demonstrabitur.

Sine calculo.

Vide Problema 2. ubi unâ eâdemque operâ altitudo simul cum distantiâ absque sinibus & calculo inventa est.

Scholium.

Quæ de mediocri distantiâ eligendâ, tanquam optima in Scholio Problematis præcedentis determinavimus, omninò etiam ad præsens Problema pertinent. Huc item omninò pertinent ea omnia, quæ in Scholio 2. Probl. nu. 1. 2. 3. 4 determinata ac demonstrata sunt, cùm ea omnia spectent inventionem distantiæ AC, per quam hic elicitur altitudo BC. Verùm hic ulteriùs superest definiendum.

I.

Ex quantâ distantiâ possint altitudines satis adhuc securè, juxta modum hujus problematis determinari.

Certissimam esse altitudinum dimensionem ex distantiâ mediocri, in quâ altitudo spectatur sub angulo semirecto, in scholio præcedenti ostensum est; quæ determinatio tam in hoc problemate locum habet, quam in præcedenti. Nunc alia regula generalior, & huic modo propria hæc sit. Ex omni eâ distantiâ satis tutò altitudo mensurabitur, ad quam ipsa proportionem habet sensibilem: *nisi fortè distantia esset tanta, ut rotunditas terræ altitudinum dimensioni officiat quemadmodum num. seq. exponetur.*

Ea porrò regula propria huic modo est. Ut enim applicetur ad modum problematis præcedentis, enormia stationum intervalla requiruntur, ut ostensum est, num. 1 scholii probl. 1. & num. 3. ac 4. scholii prob. 2.

II.

An rotunditas terræ officiat altitudinum dimensioni jam traditæ.

Fig. 48.

Asserit Ricciolus in suo Almagesto, lib. 10. sect. 4. prob. 31. & probat: quem in suâ Dioptrâ Geodaticâ reprehendit Valentinus Stansel, quasi Practicos Geometras immeritò Pseudographiæ accusaverit. Sed vera dixisse Ricciolum manifestum fiet ex his, quæ hîc subjicio.

Dico igitur, si dimensio fiat ex distantiâ magnâ, quæ nimirum adæquet unum gradum ambitûs terreni, altitudinem colligi notabiliter verâ minorem.

Altitudo montis sit CB trium milliariorum Bononiensium, continuata usque ad terræ centrum X. Unus gradus maximi terræ circuli esto AB. Radius ab oculo in A posito ad montis apicem emissus AC. Recta AO tangens terram in A, altitudini montis occurrat in O. Ex O ad tangentem AO sit perpendicularis OF, occurrens radio AC in F. Ex vi dimensionum hactenùs traditarum reperitur non BC altitudo vera, sed OF verâ minor. Reliquum est, ut inquiratur quanta sit differentia ipsarum OF, BC.

Cùm differentia ea causetur à rotunditate terræ, quæ eò insensibilior fit, quò terra ejusque semidiameter ponitur major, roborabitur vis discursus sequentis, si terræ diameter assumatur verâ major.

Assumatur ergo radius terræ milliariorum Italicorum 4169, quantum nemo Recentium Astronomorum potuit invenire. In triangulo AXC dantur latera AX, radius terræ, & XC constans radio AB, & montis altitudine BC, quæ supponitur esse 3 milliariorum Italicorum, & angulus X datur, nempè unus gradus, quia ex hyp. arcus AB est 1. grad. Ergo per prob. 10. cap. 3. reperitur angulus C, qui medius erit inter grad. 87. 9', & grad. 87. 8': quem primò assumamus grad. 87. 8'. vero minorem. In triangulo isoscele AXB, quoniam X est 1 grad. erunt reliqui a XAB, XBA simul grad. 179; ac proinde unus b XBA grad. 89. 30'. Quare externus ABC c est grad. 90. 30'. huic adde ACB grad. 87. 8', vero minorem; erit eorum summa grad. 177. 38', verâ minor: quæ subtracta a grad. 179, relinquet d CAB grad. 2. 22' vero majorem. Deinde, quia ante ostensum est XAB esse grad. 89. 30'; si hunc demas ab XAO, qui per prop. 16, aut 18. lib. 3. rectus est, remanet BAO 30'. Aufer BAO 30'. ab CAB grad. 2. 22', qui vero major est, remanebit CAO grad. 1. 52, vero major. Iam quia in triangulo rectangulo XAO, dantur latus XA semidiameter terræ milliariorum Bononiensium 4169, & angulus X grad. 1. reperietur per prob. 3. c. 3. AO milliariorum Bononiensium 72. 7'. 4''. 9'''. 0'''' 5', pro quâ assumamus milliaria 72. 7'. 5'' justâ majorem. Cum hac igitur, & cum angulo CAO grad. 1. 52', etiam justo majori, in trigono AOF rectangulo c reperietur OF milliariorum Bononiensium 2. 3'. 6''. 9'''. 3''''. 6'. 7''. 5''', vel (brevitatis causâ) 2. 3'. 7'', verâ major, deficiens ab altitudine montis BC pedibus Bononiensibus

a 32. lib. 1.
b 5. lib. 1.
c 32. lib. 1.
d 32. lib. 1.
c per 3 c. 3.

nonienfibus 3150. Igitur vera O F deficit ab altitudine montis plus quàm 3150 pedibus, seu passibus 630.

Quod si deinde angulum C assumamus grad. 87.9', justo majorem, eodem discursu facto, proveniet angulus C A O grad. 1. 51', vero minor: cum quo & latere A O assumpto milliariorum Bononiensium 72, ac proinde justo minore (vera enim A O inventa est supra milliar. Bon. 72. 7'. 4''. 9'''. 0''''. 5''''') reperietur, per prob. 3. cap. 3. O F milliar. Bonon. 2. 3'. 2''. 4'''. 8''''. 8''''', sive 2. 3'. 2'', minor verâ; ac proinde ab altitudine montis B C ex hyp. 3 milliariorum Bon. deficiens minùs quam 3400 pedibus Bonon. seu passibus 680.

Quare cùm differentia altitudinum O F, B C sit major pedibus 3150, minor verò pedibus 3400 liquet eam esse notabilem cùm excedat semissem unius milliaris Italici; hoc est plus quàm sextam partem altitudinis quæsitæ B C ex distantiâ unius gradus mensuratæ.

Si dicat quispiam angulum C A O, sub quo altitudo montis ex unius gradus distantiâ spectabatur, esse nimis parvum, utpotè gradus 1. 52'; ac proinde casum hunc, in quo rotunditas terræ errorem causavit sensibilem, sub operationes Geometriæ Practicæ non cadere: Sciat is positâ majori altitudine montis, angulum quoque multò majorem futurum, & sensibilem nihilominus fore altitudinis collectæ O F defectum à verâ B C, retentâ eâdem, quâ prius, distantiâ unius gradus A B. Si enim altitudo B C sit milliar. Bonon. 6, & passuum 667 quæ minor est altitudine Alpium, & Pici in Teneriffâ: eodem discursu, quem suprà adhibui, reperies angulum C A O grad. 4. 43'; O F autem minorem milliar. Bonon. 6. pass. 1. ac proinde deficientem ab altitudine verâ B C plus quàm passibus 666. Si B C sit milliariorum 10 & passuum 334. cui ferè æqualis est altitudo Pici & Alpium, erit angulus C A O grad. 7. 32'; O F verò deficiet à C B plus quam passibus 714. Si B C sit milliar. 14 quæ multò minor est altitudine montium Casii, Athos, Caucasi; erit angulus C A O grad. 11. 19'; O F verò deficiet ab B C plus quàm passibus 761.

Ex quibus manifestum est, cùm distantia unum terræ gradum æquat, altitudinum ordinariæ dimensioni, licet angulus obtineatur justæ quantitatis, nihilominus terræ rotunditatem sensibiliter officere; ac proinde vera dixisse Ricciolum; qui non immeritò proinde culpavit quosdam practicos Geometras, qui determinationem adeò necessariam & curiosam vel ignoraverint, vel prætериverint.

PROBLEMA IX.

Altitudinem (CB) inaccessam metiri, cùm statio altera in plano negatur.

Fig. 62.

IN plano investigetur altitudinis angulus C A B. Deinde ex F summitate domus denuò investiga altitudinis angulum C F Z: mensureturque mechanicè A F, & sit ex. gr. pedum 60. Intelligatur jam A L esse parallela radio F C: eritque angulus ALB æqualis angulo F C Z. Sunt autem & A B C, F Z C æquales, utpote recti. Ergo & reliqui L A B, C F Z æquales sunt. Quia ergo A B est sinus totus, & L B tangens anguli L A B; etiam L B tangens erit anguli C F Z. Est verò C B tangens anguli C A B, posito eod. sinu toto A B. Ergo C L, seu F A est differentia tangentium angulorum altitudinis. Est igitur

Ut	C L differentia tangentium angulorum altitudinis CAB, CFZ	Ad	tangentem majorem CB,
Ita	CL, seu AF stationum intervallum 60 pedum	Ad	altitudinis quæsitæ pedes....

Tria prima sunt nota. Ergo etiam innotescet quartum, altitudo turris quæsita C B.

Hæc praxis tunc solùm usui erit, cùm altitudo B C non est tanta, ut requirat majorem stationis secundæ altitudinem A F, quàm quæ possit mechanicè mensurari.

Absque calculo.

Quot pedum datur altitudo stationis secundæ, tot partium scalæ fiat recta A F cui sit perpendicularis A O. Fiat deinde angulus O A S par angulo invento in statione primâ; ductâque F X parallelâ ad A O, fiat angulus X F Q par angulo in statione superiori invento; & latera A S, F Q concurrant in C. Ex C demittatur perpendicularis C Z, concurrens cum A O in B. Inquire quot scalæ partes contineat C B: totidem quippe pedes continebit altitudo quæsita.

Triangula enim C F Z, C A B, per *prop. 32. lib. 1.* æquiangula sunt triangulis opticis, ac proinde iis similia, suntque etiam per constructionem similiter posita. Quare cùm A F referens intervallum stationum, sit ex constructione tot partium scalæ, quot pedum erat ipsum intervallum stationum, necesse est, ut etiam C B tot partium scalæ sit, quot pedum est altitudo quæsita.

Eâdem operâ reperietur distantia A B.

PROBLEMA X.

Altitudinem montis, seu turris datâ distantiâ metiri.

QUando distantia montis turrisve sive æstimatione communi, sive aliundè est nota, expeditissima erit altitudinis dimensio. Tunc enim in triangulo rectangulo A B C, nota est A B distantia, putà 2. milliarium latus unum; & angulus altitudinis C A B fit notus [a] instrumento. Ergo per *prop. 3. c. 3.* reperitur latus alterum B C, altitudo quæsita.

Fig. 38. 39. 40.

a Peris. 1.

Absque calculo.

Fiat A B tot partium scalæ, quot passuum datur distantia A B: & fiat angulus B A S par angulo altitudinis per instrumentum invento. Ex B erigatur perpendicularis B Y, concurrens cum A S in C. Inquire quot partes scalæ contineat C B: totidem enim passus continebit altitudo quæsita.

Fig. 40.

PROBLEMA XI.

Altitudinem accessibilem metiri.

ELige stationem A, cujus distantiam A B à turre, B C, applicatâ perticâ metiri commodè possis. Sit autem ea distantia mediocris juxta ea, quæ in scholio prob. 8. *num.* 1. determinavi. Instrumento deinde investigetur angulus C A B. Cum quo & latere A B mechanicè jam noto innotescet latus [b] alterum B C latitudo quæsita.

Fig. 38. 39. 40.

b Prob. 3. cap. 3.

Idem solo Baculo præstare.

Fig. 63. Baculus, sive hasta *fl* cujus excessus *lo*, suprà mensorem *as* notus existat ex. gr. trium pedum, solo defigatur perpendiculariter. Tum recede ex. gr. usque in *as*, sic ut per *l* extremitatem baculi collimans, cernas B apicem turris: intervallum autem illud *ao*, seu *sf*, metire mechanicè. Deinde ab oculo *a* intelligatur ducta *ao* X horizonti parallela; ac proinde perpendicularis ad *lf*, & B Z. Manifestum est baculum *lo* altitudini B X parallelum esse. Unde per *Coroll.* 1. *pag.* 4. *lib.* 6.

Ut	AO distantia oculi ab hastà	Ad	LO excessum hastæ suprà mensorem:
Ita	distantia AX	Ad	altitudinem incognitam BX

Atqui tria prima sunt nota. Ergo etiam quartum ex his notum fiet.

Potest etiam altitudo inaccessa per duas stationes solo baculo mensurari, quod relinquo industriæ lectoris.

Idem solâ baculi umbrâ efficere.

Fig. 64. Baculum F L solo perpendiculariter defige eo loco, ubi radius solis X B A umbram turris B Z definiens, etiam transeat per L extremitatem baculi. Fac deinde notam mechanicè turris distantiam A Z; baculum F L; baculi umbram F A. Erit per *Coroll.* 1. *p.* 4. *lib.* 6.

Ut	AF baculi umbra	Ad	baculum FL.
Ita	distantia AZ	Ad	altitudinem ZB.

Quia ergo tria prima sunt nota, innotescet etiam quartum, altitudo quæsita B Z.

PROBLEMA XII.

Altitudinem accessibilem non solùm absque calculo; sed etiam absque scala metiri.

Sole aut Lunâ 45 gradibus suprà horizontem elevatis, umbræ omnes in horizontalem terræ superficiem projectæ suis altitudinibus sunt æquales.

Fig. 65. Radius Solis umbram turris BC definiens esto X C A. Quoniam ex hyp. angulus solaris altitudinis, X A B in rectangulo trigono, est 45 grad. hoc est semirectus; etiam A C B semirectus *a* erit; ac proinde æqualis angulo X A B, seu CAB. Ergo B A umbra, & B C altitudo *b* æquales sunt.

a 32. *lib.* 1.
b 16.*lib.* 1.

Elevatio Solis suprà horizontem, sive angulus X A B invenitur per porisma 1. hoc solùm immutato, quòd loco oculi per dioptras collimantis, radius Solis per utramque dioptram A, O; vel R, Q intromittatur. Vide *Fig.* 38. 39. 40.

Aliter.

Accede vel recede ab altitudine mensurandâ, donec angulum altitudinis C A B deprehendas in instrumento grad. 45. hoc est, regula vel perpendiculum incidat in gradum 45. Ponamus hoc accidere in statione A. Metire perticà distantiam A B. Ea enim altitudini B C æqualis est, ut patet ex demonstratione præcedenti.

PROBLEMA XIII.

Soli libramentum & inæqualitatem metiri.

Esto solum A E K. Oporteat metiri an A sit altius quàm E, & quantò. *Fig.* 66.

Quadrantem suspende ex annulo *p*; & in E erectâ ad perpendiculum perticâ E G, collima per dioptras *b*, *c*, in perticam, & notari jube punctum (H) quod visui per dioptras collimanti respondet. Ut verò punctum in perticà visui respondens faciliùs notetur, chartulam, seu strophiolum sursum deorsumque secus perticam moveri jube à quopiam, donec ejus extremitatem videas per dioptras. Aufer deinde *o* A, seu *b* F altitudinem oculi ab H E, remanet F E elevatio loci A suprà E.

Quod si loca ita distarent, ut unicà operatione res absolvi non possit; operatio jam tradita sæpiùs iteretur, & inventi elevationum excessus inter se addantur.

Si inter loca A, N, quorum inquiritur altitudo, intercedat locus X altior utroque; tunc stans in B metire, ut jam traditum est, elevationem loci X suprà A; & elevationem loci ejusdem X suprà N. minorem elevationem A H subtrahe à majori L N, remanet (N Q) elevatio loci A suprà locum N. Ex his colliges quomodo in reliquis casibus sit operatio instituenda. *Fig.* 67.

Non solùm Quadrante hoc in negotio licebit uti, sed etiam Circulo, in quo regula mobilis priùs erit collocanda parallela ad horizontem. Necesse est autem tam Quadrantem quàm Circulum ita libratum esse, ut linea per dioptras B, C, transiens sit horizonti parallela: aliàs fallax operatio erit. Id verò sic experire. Ubi semel collimaveris per dioptras B,C, & in altitudine ex adverso erectâ observaveris punctum H, verte Quadrantem ut dioptra C jam sit in *c* & B in *b*. Tum si rursum per dioptras idem cernas punctum H radius visualis per dioptras transiens, erit horizonti parallelus: quod si tum aliud quodpiam X punctum visui respondeat, non erit radius per dioptras transiens parallelus horizonti. Erit nihilominus punctum Z, inter utrumque medium ejusdem cum oculo altitudinis. Unde instrumento etiam vitioso licebit in erectâ ex adverso altitudine punctum ejusdem cum oculo altitudinis designare per collimationem duplicem jam dictam, ac proinde soli inæqualitatem reperire. *Fig.* 68.

Verùm linea horizontalis non alio instrumento certiùs designatur, quàm vitreo syphone D B C E: aqua enim intra illam posita, & pertingens ex. gr. usque in F, & G, ita se sponte suâ librat, ut ipsius in utroque syphonis brachio superficies extrema F, & G, semper distent æqualiter à centro terræ, quomodocumque instrumentum inclinaveris. Ex quo sequitur lineam per extremitates aquæ F & G transeuntem, esse horizonti parallelam. Quare si per F & G, sive juxta F & G collimaveris, radius visualis erit horizonti verè parallelus, punctumque in altitudine ex adverso positâ visui respondens, erit ejusdem cum oculo altitudinis. *Fig.* 69.

Necessarium est hoc problema ad fontes ducendos, & aquæductus ordinandos.

Scho-

Scholium.

Fig. 58. 59.

Ex hoc problemate etiam colligitur quid fieri debeat altitudini illi B Z, qua infrà oculum est. Ea enim si major aut minor sit altitudine oculi L A, est mensuranda, ut hoc prob. traditum est, & B C altitudini adjicienda; si aqualis est altitudini oculi L A, tunc ipsa L A oculi altitudo addenda est ad altitudinem B C.

PROBLEMA XIV.

Altitudinem montis ex monte ipso metiri.

Fig. 70.

ELigantur in monte stationes binæ in C & F, justo intervallo distantes, ex quibus collimari possit in signum aliquod X in plano horizontali positum, per radios A X, B X; & sint A L, B Q ad horizontem perpendiculares. Per porisma 2. noti fiant anguli L A X, Q B X, & mensuretur intervallum stationum C F, seu L Q. quod sit ex. gr. pedum 100.

Per defin. 9. cap. 2. respectu anguli noti L A X, sinus totus est A L, tangens L X; & respectu noti anguli Q B X, sinus totus est B Q, hoc est A L; tangens verò Q X; ac proinde L Q, seu C F, stationum intervallum est tangentium differentia. Ergo est

Ut	CF differentia tangentium angulorum A, B	Ad	AL sinum totum 10000000
Ita	CF stationum intervallum pedum 100	Ad	altitudinis AL pedes.....

Tria prima sunt nota. Ergo & quartum nempè A L innotescet: à quo deme A C altitudinem oculi suprà montem ex. gr. 6 pedes, remanet C L nota, ipsa videlicet montis altitudo quæsita.

Sine calculo.

Fig. 70.

Describe in chartâ rectam C F tot partium scalæ, quot pedum erat stationum intervallum: & perpendicularem erige C A tot partium scalæ, quot pedum erat altitudo oculi suprà montem. Fiat deinde angulus C A O æqualis noto angulo stationis primæ. Ex F erige perpendicularem F B, æqualem ipsi C A; & fiat angulus F B K æqualis angulo noto stationis secundæ: concurrant autem A O, B K in X. per X duc C L perpendicularem ad A C productam in L, quæ erit quoque perpendicularis ad B F protractam in Q. Inquire quot partes scalæ contineat A L, seu B Q: totidem quippe pedes continebit altitudo montis unà cum altitudine oculi suprà montem. Demptâ igitur altitudine oculi suprà montem, relinquitur ipsa montis altitudo quæsita.

Liquet enim ex *prop.* 32. *lib.* 1. triangula L A X, Q B X triangulis opticis æquiangula esse, ac proinde per *prop.* 4. *lib.* 6. similia. Quare cùm C F repræsentans intervallum stationum, sumpta sit tot partium scalæ, quot ipsum stationum intervallum continebat pedes; etiam A L, seu B Q altitudinem referens, tot erit partium scalæ, quot altitudo ipsa est pedum.

PROBLEMA XV.

Altitudinem nubis metiri.

Fig. 71.

NEgotium hîc facessunt nubis motus, & instabilitas, seu mutatio figuræ continua: unde fit, ut non facilè designari in nube possit stabile punctum, in quod ex duplici statione collimetur. Oportebit igitur nubem seligere, quales tranquillo cælo cernuntur, quæ nimirum non moveatur sensibiliter, & quæ marginem aliquem habeat notabilem, cujus extremitas ex. gr. C dignosci possit, ut in eam eodem tempore duo mensores ex diversis stationibus collimens. His positis,

Punctum in nube collimationibus destinatum esto C; altitudo nubis sit C B; linea distantiæ A B: in quâ designentur binæ stationes in A & F, distantes justo intervallo, quod vix esse minùs poterit aliquot pedum millibus, licet horizontalis distantia nubis A B mediocrem non excederet, sub quâ tutissimam esse altitudinum dimensionem docui in Scholio Probl. 7. Ex his stationibus A & F, duo mensores, signo dato, in designatum C punctum nubis eodem tempore collimantes, notos faciant angulos C A B, C F B: ex quibus & spatio mechanicè noto per Probl. 7 reperietur altitudo nubis quæsita C B.

Aliter & certiùs idem obtinebitur, si statio altera eligatur lateralis in X, & operatio instituatur, ut in Probl. 8.

Ricciolus cum Grimaldo reperit altitudinem nubis candidæ passuum 2177, seu pedum 10885.

PROBLEMA XVI.

Altitudinem Iridis invenire.

Fig. 72. 73. 74.

PRænoscenda sunt quædam ex Dioptricâ. *Primò* Iridem esse perfectè circularem. *Secundò* tria centra, O, A, Z, Iridis nempè, Oculi, & Solis esse in unâ rectâ. *Tertiò*, Rectam illam Z A O, ad quam sunt tria prædicta centra, ad planum Iridis semper esse perpendicularem. *Quartò* Sole occumbente (*vide Fig.* 72) integrum Iridis semicirculum F C Q videri posse: tunc enim linea recta Z A O per centra Solis Z, Oculi A, Iridis O transiens, est horizonti parallela, ac proinde O centrum Iridis suprà horizontem existit. Tunc quoque planum Iridis F C Q est ad horizontem perpendiculare. *Quintò* Sole suprà horizontem L B elevato (*vide Fig.* 73) non apparet integer Iridis semicirculus; tunc enim O centrum Iridis, quod semper est in rectâ per Z centrum Solis, & A centrum Oculi transeunte, existit infrà horizontem L B, unde tantùm pars S C R conspicua est: & tunc planum Iridis est obliquum horizonti, angulusque inclinationis C B A obtusus est. *Sextò* cùm magna est Oculi suprà horizontem altitudo, posse ex Iride videri plus quàm semicirculum Sole occumbente (*vide fig.* 74.) & tunc planum Iridis inclinatur versùs Oculum.

His prænotatis, observatum est à Cartesio, & satis consentiunt experimenta Riccioli. *Primò* Iridis angulum C A O contentum radijs A C, A O ab oculo A, ad Iridis verticem C, ejusque centrum O emissis, esse circiter grad. 41. 47'. Observatum est *secundò* distantiam A O oculi à plano Iridis, non excedere 1000 passus Bononienses.

Altitudn Iridis semicircularis.

Fig. 72. *Ex his demonstrabimus radium O C, hoc est Iridis altitudinem, cùm integer illius semicirculus apparet, non excedere 893. 5'. 7" passus, hoc est pedes 4795.*

Cùm enim per prænotatum 3. angulus C O A rectus sit; erit trigonum A O C rectangulum, in quo proinde respectu anguli C A O grad. 41. 47', sinus totus est A O, distantia nempè oculi: tangens verò est C O radius Iridis. Igitur est

Ut	AO sinus totus 100000	Ad	CO tangentem anguli CAO grad. 41. 47', nempè 89357.
Ita	AO distantia oculi, per obser. 2. non major passibus 1000	Ad	passus...: radij Iridis CO.

Qui proinde per regulam Trium reperitur passuum 893. 5'. 7".

Quod si ejus distantia, ut fit plerumque sit minor passibus 1000, etiam altitudo ejus C O passibus 893 minor erit, & eodem scrutinio reperietur.

Altitudo Iridis semicirculo minoris.

Fig. 73. Altitudo Iridis sit C F, perpendicularis ad horizontem L A B F. Mensuretur altitudo Solis suprà horizontem L A B F, angulus nempè Z A L, cui æqualis est O A B. Per prænotatum 3, recta Z A O centra Solis Z, oculi A, iridis O, connectens perpendicularis est ad iridis radium O B C, adeoque trigonum A O B rectangulum est. In quo quia notus est acutus angulus O A B, etiam a acutus alter A B O innotescet: quo subtracto à duobus rectis, hoc est à gradibus 180, remanet notus b A B C. Deinde quia per observationem 1. angulus C A O est gr. 41. 47', si ab eo dematur O A B notus, relinquitur etiam B A C notus, latus autem A B per observationem 2 datur circiter 1000 passuum. Ergo cùm in triangulo A C B detur latus A B cum duobus angulis A B C, B A C; reperietur per Probl. 9. *cap.* 3. B C. Subtrahatur deinde A B C notus à gradibus 180, ut fiat c notus C B F: cum quo & notâ B C, reperietur in trigono rectangulo C F B, per Probl. 2. *cap.* 3, C F altitudo Iridis quæsita.

a Coroll. 8. p. 32. lib. 1.
b 13. lib. 1.
c 13. lib 1.

Altitudo Iridis semicirculo majoris.

Fig. 74. Linea horizontalis sit L *b*, & suprà eam altitudo oculi A magna X A: altitudinem Iridis repræsentet perpendicularis C K. Centro Quadrantis stabilis posito in A, ita Quadrantem statue, ut radius Solis transeat per utramque lateris dioptram. Tum verò, quia centra Solis Z, oculi A, Iridis *o* sunt in unâ rectâ, patet latus Quadrantis directum esse in Iridis centrum *o*: quo sic manente, dirige regulam mobilem in punctum *b*, in quo diameter Iridis occurrit horizonti. His ita constitutis, innotescit angulus *o* A *b*: cum quo & latere A *o* per observ. 2. noto, fiet in trigono A *o b*, quod per prænot. 3. rectangulum est, nota *o* A *b*. Subtrahe deinde notum jam angulum *o* A *b* à gradibus 90, ut innotescat *p* A *b o*, seu A *b* C: angulo autem C A *o*, qui per observ. 1. est grad. 41. 47'. adde notum angulum *o* A *b*, ut innotescat totus C A *b*. Quoniam ergo in triangulo A C *b*, nota sunt latus A *b*, & duo anguli A*b*C, CA*b*; reperietur per Probl 9. *cap.* 3. *b* C. Mensuretur deinde angulus X A Z: quo dempto à gradibus 90, notus remanebit, per *prop.* 32. *lib.* 1, angulus AZX, sive *o* Z *b*. Tum quia in triangulo Z *o b*, angulus ad *o* rectus est per prænot. 3, & *o* Z *b* altitudo Solis suprà horizontem Z *b* jam notus; etiam Z *b o*, seu *k b* C notus fiet. Quoniam igitur in trigono rectangulo C *k b*, nota est C *b*, & angulus *k b* C, innotescet per Probl. 3. *cap.* 3. C *k* altitudo Iridis quæsita.

o Prob. 3. cap. 3.
p 32. 1.

Scholium.

Concludam hoc caput duplici quæstione ad Mensoriæ Artis peritiam pleniorem non parùm utili.

P R I M A

Quantus sit error, qui oritur ex perpendiculi defectu?

Hic ferè præcipuus defectus est, & maximè ordinarius, quo altitudinum dimensio vitiatur. Quare ejus origo & quantitas hîc erit nonnihil accuratiùs exponenda. Fig. 39.

Cùm altitudines metimur, semper infernum latus A B anguli C A B, qui per instrumentum invenitur, esse debet horizonti parallelum; alias enim non haberetur trigonum rectangulum A B C. Id verò obtinetur ope perpendiculi: nam in Quadrante stabili ope perpendiculi statuitur latus instrumenti A f, perpendiculare horizonti: unde consequens est, ut latus alterum A L, ipsum nempè anguli C A B latus infernum, sit horizonti parallelum. Quod si latus A F non sit accuratè perpendiculare, neque latus A L B erit accuratè parallelum.

In Quadrante autem pendulo angulus instrumento inventus f o Z æquatur angulo C A B; cujus latus A q x B est ad perpendiculum o f perpendiculare, ut patet ex prop. 8. lib. 6. Unde si funiculus o f non sit perpendicularis horizonti, (quod accidere solet vel propter motum ejus, vel quòd nimis radendo planum instrumenti, non pendeat liberè) non erit etiam A q x B horizonti parallela. Fig. 40.

Ponamus igitur latus infernum anguli per instrumentum inventi, non esse horizonti parallelum, ac proinde neque rectum cum altitudine b C angulum efficere, sed cadere infrà vel suprà parallelam horizonti A b, uti cadunt rectæ A z, A z. Quæritur quantitas erroris ex hoc defectu in altitudinis mensionem derivata. Fig. 75.

Statuamus mensoris oculum in A; altitudinem veram b C; radium A C ab oculo per ejus apicem C; distantiam A b, ac proinde & A z, 1000 pedum; ex z erectam z X perpendicularem ad A z, cui occurrat radius A C in X, z C est altitudo falsa, cujus quantitas ex hoc situ vitioso innotescet, loco veræ b C. Ponamus insuper angulum z A b, quo deflectit A z à parallelo situ A b, 30' min. ipsum verò altitudinis angulum instrumento repertum C A Z gradunm 10.

His ita constitutis, cadat primò A z infrà A b. Quoniam CAz est grad. 10, & z A b 30' min. erit CAb grad. 9. 30': cum quo & latere A b 1000 pedum, in trigono rectangulo A b C reperitur a altitudo vera b C pedum 167. 3'. 4". Iam in trigono rectangulo A z r X, quia dantur rursum latus A z 1000 pedum, & angulus XAz 10 grad. reperietur b altitudo falsa z X pedum 176. 3'. 2". Erroris ergo quantitas est fermè pedum 8. 9'. 8". Quod si A z cadat suprà A b, eodem ratiocinio similiter reperie-

a Probl. 3. cap. 3.
b per idem

reperietur erroris quantitas pedum 9. 0′. 1″. Itaque, posito licet adeò crasso perpendiculi defectu, in casu primo error non aquat. 18 partem altitudinis, in secundo nequidem vigesimam.

Quare cum distantia mensoris ab altitudine ea est, qua altitudinis angulum quantitatis justa exhibeat, puta non minorem 10 gradibus, error quoque dimensionis magnus non erit. Nam & defectum perpendiculi tantùm assumpsimus, minutorum nempè 30′: quantum non facile accuratus mensor committet; & distantiam eam, qua angulum satis efficeret parvum, videlicet 10 graduum; cùm debeat, & facile plerumque possit obtineri major, sub quo error adhuc multo insensibilior evadet: nam reliquis datis iisdem, si angulus altitudinis XAZ fuerit 45 grad. eodem discursu reperies errorem non aquare 56 partem altitudinis vera Ab, cadente Az infrà parallelam Ab: cadente vero suprà, nequidem 58. Ex quibus omnibus manifestum est, si cautè & accuratè operemur, posse altitudines, secùs ac nonnullis harum non sat peritis aliquando visum est; absque errore notabili, etiam mediocri adhibito instrumento, reperiri. Quod ipsum etiam ex sequentibus confirmabitur.

Quod si angulus altitudinis instrumento repertus, sit valde parvus, major evadet ac sensibilior error. Nam si reliquis datis omnibus iisdem, qua supra, altitudinis angulus sit grad. 5, eodem scrutinio reperietur error major nonâ, sed minor octavâ altitudinis parte, cùm Az cadit infrà parallelam horizonti Ab: cùm vero Az cadit suprà Ab, error proveniet major undecimâ parte altitudinis, sed minor decimâ. Qui error cùm ne ipse quidem adeò sit enormis, prasertim sub angulo altitudinis tam exili, videlicet grad. 5, & perpendiculi defectu posito tam crasso, 30′ nempè minutorum; veritas eorum, qua paulò ante sunt dicta, ampliùs elucescit.

Vlterius tamen decrescente altitudinis angulo, pradictus error fiet intolerabilis. Reliquis enim datis manentibus, si altitudinis angulus sit grad. 3. & Az cadat infra Ab, proveniet error quintâ parte altitudinis major: si 2 graduum, & Az etiam cadat infrà Ab, error tertiam excedet altitudinis partem.

Pari ratione gravis evadet error, cùm distantia mensoris tam exigua erit; ut angulus altitudinis proveniat valdè magnus, hoc est proximè accedens ad rectum. Nam datis iisdem, qua supra, si altitudinis angulus fuerit grad. 88, error tertiam partem altitudinis excedet.

Ex hactenus dictis etiam confirmantur ea, qua in Scholio Problematis 7 ostensa sunt, tutissimam nempè altitudinis dimensionem institui ex distantiâ mediocri, qua exhibeat altitudinis angulum quam proximè graduum 45.

Nota *supposuisse me anguli altitudinis latus supernum, quod ab oculo mensoris per altitudinis apicem extenditur; debitum semper situm obtinuisse attendendo solùm ad situm vitiosum lateris inferni, a situ nimirùm horizontali AB sursum deorsùmve deflectentis. Is porrò oritur non solùm ex malâ divisione graduum, aliôve vitio instrumenti: sed potissimùm, ut suprà expositum, ex perpendiculi defectu. Caterum ut plena cognitio habeatur erroris qui ex vitio anguli in altitudinis ac distantia dimensionem derivatur, conjungenda sunt hoc Scholio dicta cum iis, qua exposui in Scholio Probl. 7. & in Scholio Probl. 1. num. 1.*

SECUNDA.

An distantiæ & Altitudines inaccessæ, ex unicâ statione possint mensurari.

Fig. 67.

P. Clavius censuit posse, & praxim affert hujusmodi. Quadrati Geometrici (hoc enim utitur) latus infernum QF dirige in altitudinis apicem C, per dioptras collimando. Oculo deinde translato ad quadrati centrum A per dioptras regula in eundem collima apicem C. Ita opticum habes trigonum rectangulum AQC, cui simile est in instrumento triangulum OSA: ac proinde est ut OS, ad SA, ita AQ (hoc est SA) ad QC. Cùm ergo OS, & SA, sint nota in particulis, in quas divisum est latus SA; ac proinde sciatur quoties OS continetur in SA, innotescet etiam quoties AQ (quod ponatur esse unius pedis) contineatur in QC. Nota vero QC; & invento per porisma 1. altitudinis angulo CQB, innotescent a altitudo CB, & distantia QB.

a Probl. 2. cap. 3.

Hac praxis non differt ab eâ, quam tradidi probl. 8, & 2. Nam si eam attentiùs expenderimus, comperiemus non unâ statione rem absolvi, sed duabus. Prima enim statio fit in Q & A ad reperiendam QC: altera deinde tantùm in Q, ut ex QC, & angulo CQA repeтiantur CB, & QB. Intervallum porrò stationum est AQ latus instrumenti: quod quia est exiguum ac momenti propè nullius ad distantiam, nihil hac praxi efficitur. Quod sic ostendo.

Statuamus QC distantiam ab altitudinis vertice esse 1000 pedum, valdè nimirùm moderatam; latus autem instrumenti AQ, pedis unius, quo majora vix esse solent ordinaria instrumenta. His datis, in trigono rectangulo AQC reperietur angulus ACQ b minor 4′ minutis, qui angulus ad hoc negotium ob nimiam parvitatem inutilis est. Cùm enim is par c sit sibi alterno SAO; erit etiam ille 4′ minutis minor: unde fiet ut regula insensibiliter distet a latere AS; ac proinde ipsa etiam SO insensibilis existat. Quare sciri non potest quot SO contineat particulas lateris AS, quod ad inventionem ipsius QC requirebatur. Quòd si latus instrumenti sit pedum 4, eademq; retineatur distantia pedum 1000, Angulus ACQ, hoc est SAO proveniet minor 15′, minutis, qui ne ipse quidem sufficit, ut succedat dimensio. Si vero adhuc augere ultrà voluerimus instrumentum, & distantiam minuere, angulus quidem utcumque sensibilis obtinebitur, sed inutili prorsus dispendio, cùm idem ille angulus instrumento mediocri obtineri possit per stationes duas, quarum intervallum lateri instrumenti illius enormis sit aquale. Ex quibus manifestum est hac methodo nihil ad praxim effici: aut siquid ob instrumenti inusitatam magnitudinem effici contingat, id fieri non statione unicâ, quod petebatur, sed duabus, cùm bis collimari debeat, in utraque videlicet lateris extremitate A & Q; & quidem adhuc impensâ, ut dixi, superfluâ.

b Probl. 5. cap 3.

c 27. lib. 1.

CAPUT VI.

Quâ arte investigetur Ambitus & Diameter Orbis Terræ.

HActenùs altitudines & distantias in terrâ, aut circa terram positas dimensi sumus. Majora jam aggredimur. Ambitum & Profunditatem terreni Orbis, altitudinem Lunæ Solisque investigare deinceps erit propositum. Meritò semper omnibus ea in-

inveſtigatio admirabilis viſa eſt. *Altitudinem cœli* (inquit Siracides) *& latitudinem terræ, & profundum abyſſi quis dimenſus eſt?* & Plinius de Ptolomæo, ita ſcribit: *vir ingens ſupraq; naturam mortalium, qui tantorum corporum magnitudines tam admirabili ratione comprehenderit.* Ut verò rerum adeò reconditarum ſcientia compareetur, non eſt neceſſe aut orbem ipſum circumnavigare, aut viam ſibi ad centrum uſque per interpoſitas terræ moles aperire, aut per immenſa ſpatia in Lunæ Soliſve cœlum conſcendere. Unâ opus eſt duce Geometriâ, quæ eò abſque funibus & ſcalis, quò eniti aliàs nulla humana induſtria poſſit, ſuis illis Elementorum theorematis quaſi quibuſdam alis inſtructa, penetrabit, omniaque arcana iſta proferet in lucem.

Ut ad rem ipſam aliquando aggrediamur; ex Aſtronomiâ ſuppono molem ex terrâ & aquâ compoſitam eſſe ſphæricam: quod, omiſſis aliorum demonſtrationibus, breviſſimè ſic oſtendo. Ubivis terrarum circumferentia horizontis viſum terminans, apparet circularis. Hoc fieri non poſſet ſi alterius eſſet figuræ moles terraquea quàm ſphæricæ, ut in ſphæricis demonſtratum eſt. Ergo moles terraquea eſt ſphærica.

PROBLEMA I.

Semidiametrum Orbis Terræ invenire.

Fig. 78. ELigatur Mons quiſpiam excelſus, ex quo liber pateat horizontis conſpectus, nullis alijs montibus, ſeu collibus impeditus. Aptiſſimus huic negotio Mons erit, ex quo liber ſit proſpectus in mare: illius enim ſuperficies æquabilis eſt, ac proinde viſibilem horizontis circumferentiam abſque impedimento præbet. Talis eſt Mons Æthna in Siciliâ, qui & altiſſimus eſt, & longiſſimum exhibet in mare proſpectum. Montis igitur ejuſmodi altitudo ſit AB, quæ protracta tranſibit per terræ centrum Z. Altitudinem illam AB fac notam per *Probl.* 7, vel 8, *cap.* 5. Conſtitutus deinde in ejus vertice A, metire per Poriſma 2. *cap.* 5. angulum CAB, quem radius ab oculo ad C terminum horizontis pertingens, ac proinde ſuperficiem globi terraquei contingens, efficit cum ipsâ montis altitudine AB. Quod accuratè ut fiat, non ſufficiet Quadrans magnitudinis ordinariæ, ſed adhibendus eſt planè magnus, in quo præter Gradus, notata ſint Minuta Prima, imò & Decades ſaltem Minutorum Secundorum: quâ ferè magnitudine inſtrumenti opus etiam erit ſuprà, ut altitudo ipſius montis AB reperiatur exactè. Et quia difficile eſt ob ſpecierum ex diſtantiâ tantâ debilitatem determinare punctum in circumferentiâ horizontis diſtinctè viſibile, captandus eſt ortus occaſuſve alicujus Stellæ, vel Lunæ potius aut Solis, cùm ita jam infrà horizontem deprimitur, ut ſolus margo extremus appareat: tunc enim in lucidum illius marginem collimando, eâdem operâ collimabis in punctum aliquod circumferentiæ horizontis, radiuſque viſualis AC terraquei globi ſuperficiem præciſè tanget.

His ita conſtitutis: concipiatur ex Terræ centro Z ad contactum C emiſſa recta ZC. Ita triangulum habebitur CAZ, cujus latus unum ZC eſt Terræ ſemidiameter; alterum AZ ex AB altitudine Montis, & BZ Semidiametro Terræ compoſitum; tertium AC radius viſualis globum terraqueum contingens in C. In hoc triangulo, quia ex Z centro ad contactum ducta eſt ZC, erit angulus *a* ZCA rectus; ac proinde duo reliqui *b* A & Z unum rectum

a Per 18. *lib.* 3.
b Per 32. *lib.* 1.

conficiunt, ſeu 90 grad. Quare ſi gradus noti jam anguli A, qui ferè ſunt grad. 87. 11'. auferamus à 90 gradibus, remanent gradus 2. 49' pro angulo Z. Ita angulus Z in ipſo Terræ centro abditus innoteſcit. Jam quia trigonum ZCA rectangulum eſt, per *defin.* 9. *cap.* 2. reſpectu anguli Z erit CZ Sinus totus 100000, & AZ Secans; quæ ex tabulis datur 100120. Quare ſi CZ, ſeu ZB 100000 dematur ex ZA 100120, remanebit AB 120 nota in partibus ſinus totius CZ 100000. Sed eadem AB, altitudo nempè Montis etiam nota eſt in Milliarijs. Ergo

Ut AB, 120 partes ſinus totius	Ad CZ Sinum totum 100000
Ita AB milliariorum 5	Ad milliaria incognita.... ſemidiametri terræ CZ.

Cùm igitur tria prima ſint nota, innoteſcet etiam quartum, Milliaria videlicet Semidiametri Terræ, quæ quærebantur, quæ ex hoc ſcrutinio proveniet milliariorum Bononienſium 4166 $\frac{2}{3}$.

Huic indagini, quæ ſanè ingenioſa eſt, initium dedit Maurolycus; cujus ratiocinatio primò rudior (arcum enim CB, qui notabiliter curvus eſt, pro rectâ lineâ aſſumpſit) correcta & expoſita in hanc, quam propoſui, formam evaſit.

Semidiameter duplicata dabit totam diametrum, ex quâ circumferentia ipſa, ſive ambitus Terræ elicitur eo modo, quem tradidi in ſelectis ex Archimede in Scholio *prop.* 6. & tradam infrà *lib.* 2. *cap.* 12. *Probl.* 3. Verùm quia etiam diameter elicitur ex circumferentiâ, utriuſque ſeorſim & immediatè reperiendi artificium omninò tradendum eſt, præſertim cùm expeditior plerumque ſit inventio immediata circumferentiæ, quàm diametri.

PROBLEMA II.

Orbis Terræ circumferentiam invenire.

PRimo loco proponam modum Eratoſthenis Cyrenenſis ſed correctum: ſubtilis eſt, & à Plinio alijſque meritò laudatus. *Fig. 77.*

Dimenſurus igitur Eratoſthenes ambitum Terræ, hæc aſſumpſit: Primò urbem Syenem eſſe ſub Tropico Cancri; iſthic enim ſcribunt Cleomedes, Plinius & Strabo in meridie Solſtitij per 150 ſtadia circumquaque, gnomones nullam umbram projicere: addit Plinius puteum iſthic ejus rei gratiâ factum eſſe, cujus in meridie Solſtitij totus fundus illuſtratur à Sole. Secundò, Syenem & Alexandriam: (has enim Urbes tanquam ad hoc ſcrutinium commodas elegerat) ſub eodem ſitas eſſe Meridiano: in quo quidem eſt corrigendus, cùm Alexandria ſit Occidentalior grad. 1. 30'. min. Tertiò, diſtantiam Syenis ab Alexandriâ eſſe ſtadiorum 5000. Quartò, radios emiſſos ex Solis centro (F,) & extremitate diametri (L) in terram, eſſe quoad ſenſum parallelos, in quo etiam corrigendus erit infrà. His poſitis, ut ex Cleomede refert Nonius, alijque, hunc ferè in modum ratiocinatus eſt.

Alexandria ſit in *a*; Syene in B; Meridianus per utramque tranſiens X *a* B. Centrum terræ Z, centrum Solis F, ejuſque ſemidiameter terræ parallela LF. In *a*, nimirum Alexandriæ ſcaphium ita collocavit, ut gnomon *a o* perpendicularis eſſet ad ſuperficiem terræ, adeoque productus tranſiret per terræ centrum Z. Eſt porrò ſcaphium hemiſphærium ca- *Fig. 77.*

vum,

vum, gnomonem habens *a o*, centrum apice suo attingens, & Quadrantes *a*N, *a*S in 90 gradus divisos. Tum in meridie Solstitij observavit quantitatem arcus *a c*, umbram nempè gnomonis A *o*, quam determinat radius L *o c* ab extremo Solis margine, seu extremitate diametri L per *o* scaphij centrum & gnomonis apicem incedens, eumque reperit grad. 7. 12′. Jam quia Syene est sub Tropico Cancri, radium F B in Syenem è Solis centro directum in meridie Solstitij, conclusit transire per terræ centrum Z, ibidemque concurrere cum gnomone *o a* Alexandriæ erecto, & efficere angulum F Z *o*. Ut hujus anguli quantitatem inveniret, assumpsit radios *L o c*, F B Z ob enormem Solis distantiam quoad sensum esse parallelos; ac proinde per *prop.* 27. *lib.* 1. angulum F Z *o* æqualem esse sibi alterno *c o a* grad. 7. 12′. Sed in eo falsus est Eratosthenes; non enim radij *L o c*, F B Z; sed F *o q*, F B Z, quoad sensum paralleli sunt, ut à Ricciolo demonstratum est *lib.* 3. *Almag. cap.* 27. *num.* 7. *& Geograph. lib.* 5. *cap.* 3. *num.* 3. ac proinde angulus F Z *o*, æqualis est angulo *q o a*, qui priorem *c o a* excedit angulo *q o c*, seu *b* L*o*F, sub quo spectatur Solis semidiameter F L, qui est 15′, aut 16′ minutorum. Unde ipso *q o a*, adeoque & F Z *o*, seu B Z *a* est grad. 7. 27′, aut 28′. Quare etiam *a*B arcus Meridiani inter Alexandriam, & Syenem fuit Grad. 7. 27′, aut 28′ min. Hinc cùm Meridiani arcus *a*B grad. 7. 27′. ex assumpto 3 conficiat 5000 stadiorum, per regulam proportionum, 1 gradus conficiet stadia 671, vel correctione adhibitâ, (ex eo quod Alexandria & Syene non sint præcisè sub eodem Meridiano) stadia 600. quæ multiplicata per gradus 360, producunt stadia 216000 pro totâ Meridiani circumferentiâ, hoc est ambitu orbis terræ.

b 15. *lib.* 1.

Ut grad. 7. 27′	Ad stadia 5000
Ita grad. 1.	Ad stadia.....

Quod si, ut valdè probabile est, stadia illa fuerint Alexandrina, 600 stadia debita uni gradui maximi terræ circuli efficient 72 milliaria Bononiensia: & stadia 216000 debita toti circumferentiæ, dabunt milliaria Bononiensia 25920, ut eruditè probat Ricciolus. Quoniam verò *cap.* 1. ostensum est milliare Belgicum, sive horarium esse triplum Bononiensis, unus gradus terreni ambitus, ex ratiocinio Eratosthenis ritè correcto, continebit milliaria Belgica 24: ambitus verò totus 8640.

PROBLEMA III.

Ambitum Orbis Terræ aliter investigare.

Fig. 79.

Eligantur duæ urbes *l*, *s*, positæ sub eodem Meridiano, qui in cælo sit C B F Z, in terrâ, *q l s v*, horizon urbis *l* sit C A Z; urbis verò *s*, sit horizon X A R: puncta ipsis verticalia B, F. Distantia harum urbium *l s*, per *Probl.* 3. *cap.* 5 quàm accuratissimè fiat nota in milliaribus, adhibito instrumento exquisito & amplo; aut certè longo usu & commeatione frequenti ea distantia sit nota; id quod, si urbes sint celebres, & una sit passim omnium æstimatio distantiæ, obtineri potest citra errorem sensibilem.

Notâ hunc in modum urbium assumptarum distantiâ *l s* in milliaribus, reliquum est, ut eadem quoque nota fiat in gradibus. Quod ita fiet: mensuretur C I altitudo poli urbis *l* suprà horizontem ejus C Z: similiter altitudo poli X I suprà horizontem X R urbis *s*. Minor X I subtrahatur à majori C I, & nota erit earum differentia C X. Quoniam ergo B C, F X æquales sunt, (sunt enim ambo meridiani quarta pars) ablato communi X B, erunt residui arcus C X, F B æquales. Quia ergo notus est C X, etiam B F notus erit; hoc est scietur quot gradus contineat B F Meridiani cælestis. Atqui tot gradus *c* continet meridiani terrestris *q l v*, arcus *l s*, quot gradus meridiani cælestis continet B F. Ergo etiam noti sunt gradus *l s*, qui est distantia urbium *l*, & *s*.

c Cor. 3. *prop.* 33 *l.* 6

Hoc ipsum etiam per altitudines meridianas alicujus stellæ ita poterit obtineri. Eligatur stella quæpiam O, cujus altitudo meridiana Z O suprà horizontem C Z urbis *l* fiat nota; & nota fiat similiter altitudo stellæ O meridiana R O suprà X R horizontem urbis *s*. Tum minore Z O subtractâ à majore R O, noti fient gradus arcus R Z: cui cùm æqualis sit arcus B F (sunt enim rursum ambo arcus B Z, & F R quadrantes meridiani, adeoque æquales inter se: à quibus proinde dempto communi F Z, remanent B F, Z R etiam æquales) gradus quoque ipsius B F noti erunt. Ergò, ut suprà, noti erunt *d* etiam gradus *l* Z.

d per idem.

Ponamus igitur arcum *l s*, sive hac methodo, sive præcedenti, repertum esse graduum 2; milliaria verò continere $144\frac{1}{2}$. Si gradus 2 efficiant milliaria $144\frac{1}{2}$: gradus 360, hoc est totus terræ ambitus, quot milliaria efficiet? per regulam proportionum provenient milliaria 26010.

Hoc artificio usus est Possidonius Philosophus, laudatus a Plinio, Strabone & Cicerone, ille, cujus januæ Pompejus Magnus, cùm ad eum audiendum accederet, imperij fasces submisit. Usi sunt eâdem Alamon Rex Arabiæ, multique Arabes, Naucleri item recentiores, ex longo navigandi usu rei maritimæ peritissimi, ex quorum observationibus debentur uni gradui milliaria Bononiensia saltem 70.

PROBLEMA IV.

Tertius modus indagandi Ambitum Orbis Terræ.

Fig. 79.

Eligantur duo loca *l*, *s* aliquot milliaribus horarijs dissita, sive sint sub eodem Meridiano, sive non; quorum ea positio sit, ut eorum distantia *l s*, per Probl. 3. *cap.* 5. possit mensurari: quod fieri debet summâ curâ & Quadrante amplo. Inveniatur deinde arcus B F, verticalis circuli inter loci utriusque vertices B & F interceptus, cujus inventionis quæ planè Astronomica est, modum tradere hujus loci non est. Notis gradibus arcus B F in cælo, innotescunt etiam gradus totidem arcus *l s* in terrâ. Tum, ut suprà, ratiocinabimur: si tot gradus distantiæ *l s*, efficiant milliaria tot: gradus 360 quot milliaria efficient? Per regulam Trium prodibit numerus milliariorum toti circumferentiæ orbis terræ debitorum.

Hanc viam tenuit Ioannes Baptista Ricciolus Noster. Elegit is distantiam inter villam Collegij nostri Bononiensis sitam in monte Serrâ propè Paternum, & Turrim Mutinensem quam juxta methodum *Probl.* 3. *cap.* 5. maximâ curâ & industriâ dimensus reperit passuum Bononiensium 21176, hoc est milliariorum Bononiensium 21 & passuum 176. Intervallum autem, quod ad hanc dimensionem peragendam, applicatâ decempedâ, notum fecit, fuit passuum Bononien-

pedibus, quanta esse solet statura hominis justa. Quæritur ad quantam distantiam ejus visio porrigatur: hoc est quanta sit longitudo à puncto O, cui pedibus insistit, usque ad punctum B, in quo radius visualis globum terraqueum tangit.

Altitudo oculi A O concipiatur producta usque ad terræ centrum Z, & ex centro Z ad punctum contactus ducta semidiameter Z B. Per *prop.* 18. *lib.* 3. Z B cum tangente A B constituit angulum rectum, ac proinde trigonum Z B A rectangulum est: in quo latus Z B est semidiameter terræ, quæ per præcedens problema jam inventa est milliariorum Bononiensium 4139, seu pedum Bononiensium 20 (695000: basis verò A Z composita est ex altitudine oculi A O, 6 pedum, & O Z semidiametro terræ, adeoque est pedum Boniensium 20 (695, 006. Ex his cognitis, per prob. 4. *cap.* 3 reperitur angulus A Z B, seu O Z B minutorum 2'. 37''. 2''' [illegible] hoc est min, 2'. 37''. 3''' ferè. Cùm ergo per prob. 4. uni gradui terrestris ambitus, sive minutis 60 debeantur milliaria Bononiensia 72. 2'. 5''. hoc est pedes Bonon. 361250: minutis 2'. 37'. 3'''. quot pedes debentur? per regulam Trium reperies minutis 2' competere pedes 12041 $\frac{3}{7}$; secundis 37', pedes 3712 $\frac{41}{71}$; tertijs 3, pedes 5 [illegible]. Horum summa facit pedes Bononienses 15759 [illegible]. & tantus est arcus O B, trium videlicet milliariorum Bononiensium & pedum Bononiensium 759, hoc est paulò major uno milliari horario.

Quod si altitudo oculi detur unius milliarij Bononiensis, eodem ratiocinio reperietur arcus O B major grad. 1. 16; minor verò grad. 1. 17'. ac proinde O B quàm proximè erit milliariorum Bononiensium 91.

Aliter.

Quoniam pulchra est hujus rei disquisitio, eam placet aliâ adhuc via scrutari.

a Per 36. lib. 3.

Ponatur rursum altitudo oculi esse 6 pedum. Quia radius A C tangit globum terræ; erit a rectangulum L A O æquale quadrato A B. Rectangulum porrò L A O notum est. Nam per prob. 4. L O terræ diameter continet milliaria Bononiensia 8279 $\frac{27}{71}$, hoc est pedes Bononienses 41391197 $\frac{11}{71}$, quibus si addas A O pedes 6, oculi nempè altitudinem, fiet tota, L A pedum 41391203 $\frac{1}{71}$. Hâc ductâ in A O ped. 6. producitur rectangulum L A O, hoc est (ut jam ostendi) quadratum A B, pedum quadratorum Bon. 248347219 $\frac{3}{71}$. Quare radix quadrata hujus numeri exhibebit pedes tangentis A B. Radix porrò illa major est quàm 15759, & minor quàm 15760. Igitur tangens A B (hoc est O B; differunt enim insensibiliter) est pedum 15759 & particularum aliquot unius pedis, planè quanta fuit priori methodo inventa.

Porrò tangentem A B non excedere sensibiliter arcum O B, sic ostendes: angulus B A Z ex praxi primâ reperitur grad. 89. 57'. 22''. 57'''. Sed demus eum esse justo minorem, nempè grad. 89. 57'. 20'': ducaturque B X perpendicularis ad A L: erit B X sinus anguli B A X grad. 89. 57'. 20'' ad A B sinum totum ut 9999996991 ad 10000000000; quorum differentia 3009 nequidem est pars millionesima ipsius A B 10000000000. Quare cùm arcus O B major sit perpendiculari B X, patebit de hoc intentum à fortiori.

Cæterùm hac via adhiberi solùm potest quando altitudo non est tanta, ut O B arcus horizontis ob magnitudinem suam, non sit sensibiliter curvus, ac proinde sensibiliter minor tangente A C: Tunc enim solus adhiberi debet modus præcedens.

Scholium.

Fig. 83.

Quo altitudo oculi fuerit major, eò etiam major terraquei globi portio spectabitur; quæ tamen necessariò semper minor erit parte dimidiâ, seu hemisphærio, quantacumque fuerit oculi distantia. Quod quamvis ad Opticam pertineat, placet tamen hîc obiter demonstrare.

Data sit sphæra oculo major, O F Q b, & oculus in C ab eâ quantumcumque distans. Ab oculo C emissi radij tangentes in F, & L, determinent portionem visam F Q L. Dico eam esse hemisphærio minorem. Ex centro enim ad contactus F, L, ducantur rectæ A F, A L, & ad oculum recta A C. Quia a A F C rectus est, F A C necessariò b acutus est. Similiter quia A L C rectus est, erit L A C acutus. Ergo duo acuti simul F A C, L A C; non efficiunt duos rectos, sed obtusum angulum F A L duobus rectis minorem, ac proinde F A, L A non sunt una recta, sed inclinantur versus oculum C. Ducatur ergo per A centrum recta O A b: hæc determinat hemisphærium O Q b; unde portio visa F Q L à radijs tangentibus inclusa, minor est hemisphærio.

a 18. lib. 3.
b Coroll. 5. p. 32. l. 1.

Si duobus oculis sphæram intuemur, supponitur diametrum esse majorem intervallo oculorum.

PROBLEMA VI.

Ex quantâ distantiâ vertex alicuius montis, aut summitas mali navis conspici possit.

Fig. 84.

AD solutionem problematis determinanda insuper est altitudo oculi.

Altitudo montis, aut malus navis sit C F, à cujus vertice C, ducta concipiatur recta globum terraqueum tangens in B. Si oculus statuatur in ipsâ terræ, seu maris superficie, manifestum ob terræ ac maris rotunditatem non posse cerni apicem B ultra punctum B, ex. gr. in O. Quod si oculo detur altitudo aliqua O A suprà terræ aut maris superficiem, poterit videri apex C etiam ultra contactum B ab oculo existente in puncto aliquo A tangentis C B productæ.

Quæritur ergo quantus sit arcus F O. Id verò ex problemate præcedenti in promptu est invenire. Per hoc enim reperietur arcus F B tangentis C B: item arcus O B tangentis A B: qui juncti dabunt arcum quæsitum FO. Quare si F C sit altitudo unius milliaris Bononiensis, reperietur arcus FB milliariorum 91; & si A O sit pedum 6, reperietur arcus O B milliariorum 3, pedum 759. Quare totus arcus F O erit milliariorum 94. ped. 759: ac proinde ex tanto intervallo oculus 6 pedes altus, spectabit præcisè apicem montis alti uno milliario Bononiensi.

Quod si major oculo detur altitudo, ex majori etiam distantiâ poterit conspicere summitatem altitudinis datæ.

Corollarium.

Ex his poterimus colligere, quanta sit distantia nubium apparentium in margine horizontis.

CAPUT VII.

Ex inventâ semidiametro terræ, prodigiosæ quorumdam montium altitudines demonstrantur.

EXistimavit Keplerus, alijque, altissimos montes non attolli ultra 2, aut 4. milliaria Italica. Quantoperè fallantur, ex ijs, quæ subjungam, fiet manifestum. Artificium metiendi altitudines montium tradidi *cap.* 5. *prop.* 7 & 8. Verùm deficere illud, cùm mensoris à monte distantia unum gradum adæquat, demonstravi in scholio 8. Problematis. Atqui tanta & major erit assumenda, ut montium quorundam prodigiosam altitudinem investigemus. Quare alia metiendi ratio, cui non officiat terræ rotunditas, à Ricciolo excogitata est, sed quæ inventam prius terræ semidiametrum supponat: neque enim alia superest via, quâ scrutari dictorum montium altitudines possimus.

PROBLEMA I.

Altitudinem montis inaccessi (AB) datis semidiametro terræ, & alterius montis altitudine (O C) invenire.

Fig. 82.

OPortet autem altitudinem montis OC, quæ datur, esse notabilem. Mensuretur in pede montis dati angulus A O C, & in montis vertice angulus A C O: quod quomodo fieri debeat, apparet in figura 83; instrumento enim (ut isthic expressum est) collocato, abscissus à perpendiculo arcus *x o* manifestat angulum *c o a* (sunt enim ob parallelas *k x*, *c o*, alterni *x k o*, & *c o a* a æquales) arcus verò *n s* indicat angulum *o c s*, qui additus recto *s c a*, manifestat totum *a c o*. Quoniam igitur in triangulo *o a c* dantur anguli *c o a*, *a c o*, & latus *c o*; ex his innotescet b latus *a c*. Deinde quia in triangulo *a c z*, notus jam est angulus *c*. & latus *a c*; itemque latus *z c* notum est (nam *z o* est semidiameter terræ quæ inventa est *cap. præc.* est verò *o c* altitudo montis data), ex his c elicietur *z a*: à quâ si demas *z b* semidiametrum terræ, nota relinquetur *a b* altitudo montis quæsita.

a 27. *lib.* 1. *Fig.* 82.

b *Prob.* 9. *cap.* 3.

c *Prob.* 10. *cap.* 3.

PROBLEMA II.

Altitudinem montis (CF) cujus vertex (C) in margine horizontis appareat, data semidiametro terræ, & mensoris ab eo distantia (O F) invenire.

Fig. 84.

MEnsor existat in A O. Radius ab Oculo globi terreni superficiem tangens atque inde ad C verticem montis F C pertingens, esto ABC, terminus igitur horizontis ab Oculo A visibilis est contactus B; cujus amplitudo O B reperitur per prob. 5. *cap. præc.* quâ subtractâ à dato arcu seu distantiâ O F, notus relinquitur arcus F B, ac proinde & angulus C Z B. Continuentur deinde altitudines montis CF, & Oculo A O usque centrum Z: à quo ad contactum B ducatur Z B per *prop.* 18. *lib.* 3. angulus CBZ rectus est. Quoniam ergo in trigono rectangulo C B Z dantur angulus C Z B, & latus Z B, terræ semidiameter, quæ *cap. præc.* reperta est; ex his f invenietur Z C: à quâ si demas terræ semidiametrum Z F, nota relinquetur altitudo montis quæsita CF.

f *Probl.* 3. *cap.* 3.

PROBLEMA III.

Inquiritur altitudo Æthnæ.

Fig. 84.

REferunt Maurolycus & Melitenses Æthnam conspici ex insulâ Melitâ; & ultrà, ex distantiâ milliariorum 216. Hoc dato,

Altitudo Æthnæ colligitur milliariorum Italicorum Bononiensium $5\frac{41109}{100000}$.

Ponantur & construantur eadem, quæ in Problemate præcedenti, sitque altitudo Æthnæ F C, & oculus spectatoris in Melita esto A: altitudo autem oculi A O, sit pedum 6. Igitur O B amplitudo horizontis reperitur g milliariorum Bononiensium 3, pedum 759, qui hic poterunt contemni. Quare si arcum O B 3 milliariorum demas ab arcu, seu distantiâ O F, quæ ex hyp. est milliariorum 216, restat arcus BF milliariorum 213. Jam si milliaria 26010, quantus *cap. præc. prob.* 4. totus terræ ambitus esse ostensus est, efficiunt gradus 360, milliaria 213 arcus BF quot efficient? per regulam Trium proveniunt pro arcu B F gradus 2. min. 56'. & 88 centesimæ unius minuti. Sed demus justo minus arcui BF, adeoque & angulo C Z B, nempè grad. 2. 56'. Secans grad. 2. 56' est 100131. posito sinu toto 100000. Quoniam igitur per prob. 3. cap. 3. est

g *Prob.* 5. *cap.* 6.

Ut	Sinus totus 100000	Ad	secantem anguli CZB grad. 2. 56'. 100131
Ita	Z B semidiameter terræ milliariorum 4139,	Ad	Z C Z C milliariorum.....

Per regulam Trium reperitur Z C milliariorum $4144\frac{41109}{100000}$. Ab hac si auferas Z F semidiametrum terræ milliariorum 4139, relinquitur C F altitudo Æthnæ milliariorum Bononiensium $5, \frac{41109}{100000}$: à quâ detrahere aliquid oportet, ut compensetur refractio, quæ fortè intervenit, & altitudinem verâ majorem facit.

PROBLEMA IV.

Inquiritur altitudo Pici.

PIcus mons, est rupes altissima insulæ Teneriffæ; quæ una est ex Fortunatis, seu Canarijs. Hujus altitudo tanta est, ut sub ejus Meridiano tam versùs Austrum, quàm Boream navigantibus appareat ex distantiâ 4 graduum; hoc est 289 milliariorum Italicorum, & ex insulâ Materiâ, quæ ab eo distat grad.

4. 10', cacumen ejus instar alicujus templi conspiciatur. Ita Cadamustus, Ioannes Hugonis, Snellius, Furnerius Noster. Hoc dato,

Altitudo Pici demonstrabitur æquare 10 milliaria Bononiensia ut minimum.

Fig. 84. Picus esto C F, Oculus A altus pedes 6; cætera ponantur ac ordinentur ut in præcedentibus. Arcus, seu distantiâ ex observatione est grad. 4. 10'; hoc est 300 milliariorum Bononiensium, imò longè major: cùm enim Picus ex eâ distantiâ instar templi appareat, haud dubiè adhuc longè ultra Materiam insulam spectaretur. Sed demus arcui O F solùm gradus 4. 10'. Arcus O B per prob. 5. *cap. præc.* est grad. 0. 2'. 37". 3"', quæ ablata ab arcu O F grad. 4. 10', relinquunt arcum F B, adeoque & angulum CZB, graduum 4. 7'. 22". 57"', justo minorem; in quo etiam secunda & tertia negligemus. Porrò secans anguli C Z B grad. 4. 7', est 100258. Quoniam igitur per prob. 3. cap. 3. est

Ut	Sinus totus 100000	Ad	secantem anguli CZB gr. 4. 7', nempè 100258
Ita	Z B semidiameter terræ milliariorum 4139	Ad	Z C

Per regulam Auream reperitur Z C milliariorum Bononiensium 4149[illegible]. Ab hac si demas semidiametrum terræ Z F, milliariorum 4139, relinquitur C F altitudo Pici mill. Bonon. 10[illegible], quæ longè est minor verâ, quòd arcum F B sumpserimus multò minorem verò. Quare si hoc defectu compensemus augmentum altitudinis à refractione causatum, remanent pro altitudine Pici milliaria saltem 10.

PROBLEMA V.

Altitudo Caucasi inquiritur.

HUjus montis altitudo jure meritò incredibilis videretur, nisi fidem demonstratio extorqueret. Caucasus mons situs in Asiâ ultra mare Caspium longissimo tractu in Ortum & Septemtrionem porrigitur. Hujus montis summitates Aristoteles scribit *lib. 3. Met. textu 63.* videri à locis, quæ vocantur profunda, & à navigantibus in stagnum; hoc est ex eo tractu Ponti Euxini, ubi Palus Mæotis in Euxinum influit. Ea porrò secundùm Ptolomæum est distantia grad. 9. 32'. Hoc dato,

Altitudo Caucasi complectitur saltem milliaria Italica 51; hoc est, plus quàm 16 milliaria Belgica, seu horaria.

Fig. 84. Repetito enim discursu præcedentium problematum, altitudo Caucasi esto C F, Oculus A. Ab arcu, seu distantiâ O F, quæ datur grad. 9. 32', si demas O B arcum horizontis visibilis, qui est per *prob. 5. cap. præced.* grad. 0. 2'. 37". 3"'; remanet arcus B F grad. 9. 26'. 22". 57"': cujus Secans (secundis prætermissis) est 101370. Quia igitur per *prob. 3. cap. 3,* est

Ut	Sinus totus 100000	Ad	anguli CZB grad. 9. 29' Secantem 101370;
Ita	Z B semid. terræ milliar. 4139	Ad	Z C,

Per regulam Trium reperietur ZC milliariorum Italicorum 4195[illegible]: à quâ si demas semidiametrum terræ Z F milliar. 4139, relinquuntur pro altitudine Caucasi C F milliaria 57[illegible]: ac proinde excedit milliaria 57.

Hinc verò oportebit aliquid subtrahere ut compensetur augmentum à refractione inductum: quod cùm 6 milliaria non excedat, manet Caucasi altitudo 51. milliariorum Bononiensium.

Non absimile discursu reperietur altitudo montis Athos, quem Xerxes perforasse fertur, ut per ipsum mare transmitteret, milliariorum 28; & Casius Siriæ milliariorum saltem 20.

Scholium.

Fig. 85. *Possunt etiam ex longitudine ascensûs & descensûs altitudines montium æstimari. Ascensum ac descensum Alpium scribit Polybius complecti stadia 1200, quæ milliaria efficiunt Italica 150. Demus igitur ascensui solì dimidium hujus itineris, milliaria nempè 75. Altitudinem Alpium repræsentet A B ad horizontem C A perpendicularis. Quia verò non ubique eadem viâ, quâ ascenditur, inclinatio est, sed uno loco præceps magis, quàm altero; statuamus æquatione factâ eam ubique uniformem esse secundùm rectam lineam C B, quæ cùm horizontali C A efficiat inclinationis angulum B C A grad. 7. 40'. Quæ sanè modica censeri inclinatio debet; ac proinde & altitudo B A inde collecta minor justâ. Quoniam igitur in triangulo rectangulo B A C datur C B 75 milliariorum, & angulus C grad. 7. 40'; ex his per prob. 2. cap. 3. reperietur A B altitudo Alpium quæsita, major 10 milliariis.*

Unde meritò concluditur Alpium altitudinem milliaria 10 excedere.

CAPUT VIII.

Quo artificio Lunæ à Terra distantiam Astronomi investigaverint.

AD hujus problematis maximè ardui solutionem præter subsidium Trigonometricum opus est notitiâ Parallaxeos; de quâ proinde pauca hic ex Astronomiâ erunt præmittenda.

Quid parallaxis.

Variæ sunt Parallaxium species. Nos hic de eâ solâ agimus, quæ fit in circulo altitudinis, seu Verticali. Parallaxis igitur est angulus quem in centro Astri efficiunt duo radij, quorum unus ducitur ex centro Terræ, seu mundi, alter ab Oculo in superficie Terræ posito.

Fig. 87. Centrum Astri esto C, Verticalis circulus per illud transiens Z C O: Oculus in superficie Terræ in B; Terræ centrum A. Angulus B C A est Parallaxis Astri C. Vocatur etiam Diversitas aspectus, quia existens in B, videt Astrum C quasi suppositum firmamenti puncto F; existens verò in centro A idem Astrum C videt suppositum firmamenti puncto diverso L.

Quod si Astrum existat in O, in margine videlicet Horizontis visibilis, quem determinat tangens B O, vocatur Parallaxis horizontalis, estque angulus AOB. Commodior ea est ad investigandam Astri distantiam, quod triangulum A B O rectangulum fit, ut patet ex *prop.* 18. *lib.* 3.

Non est autem hujus loci modum tradere, quo Parallaxeos magnitudo inveniri debeat: id enim ad profundiorem pertinet Astronomiam, estque inter conatus Astronomicos unus è difficillimis. Vide *lib.* 3. *Astronomiæ nostræ cap.* 2. ubi inventionem ab ipsis trado fundamentis.

PORISMA.

Quo Parallaxis major est, eò Astrum Terræ vicinius est; quò minor, eò remotius.

Fig. 87. Sit Astrum demissius unum in O, alterum altius in Q; quorum Parallaxes sunt anguli BOA, BQA. Angulus B O A externus est respectu trianguli A O Q. Ergo B O A æqualis est utrique [a] interno opposito O Q A, O A Q; ac proinde major solo O Q A, sive B Q A.

a 32. *lib.* 1.

PROBLEMA I.

Distantiam Lunæ à Terra inquirere.

Fig. 88. Semidiameter Horizontis Visibilis esto B*o*, Lunæ centrum *o*, ejusque Parallaxis B *o* A. Ex Astronomis recentioribus, qui longè majori industriâ in hoc negotium incubuêre, quàm veteres, nullus unquam deprehendit [a] Parallaxim Horizontalem Lunæ tantam, quæ æquaret grad. 1. 8'. Verùm assumamus tantam Parallaxin: sic enim [b] certò constabit veram Lunæ distantiam semper longè majorem esse eâ, quæ ex Parallaxi assumptâ colligetur. Quoniam B*o* semidiameter Horizontis tangit superficiem Terræ in B. & ad contactum B, ducta est ex centro A recta A B; erit angulus A B O [c] rectus; ac proinde trigonum Parallacticum est rectangulum. Ergo [d] A*o* est sinus totus, nempè 100000, A B sinus anguli *o*, grad. 1. 8', qui ex Canone Sinuum datur 1977. Divide A C 100000 per A B 1977: reperies hanc ab illâ contineri plus quàm quinquagies: ac proinde A C distantiam Lunæ à Terræ centro majorem esse 50 semidiametris terrenis A B. Atqui hæc distantia deducta est ex Parallaxi nimis magnâ, grad. 1. 8', quantam videlicet nullus è posterioribus Astronomis repererit; Ergo

a vide *Astron. l.* 3. *num.* 12.
b *per porisma.*
c 18. *lib.* 3.
d *defin.* 6. *cap.* 2.

Certum o est distantiam Lunæ à Terræ centro semper o per porisma majorem esse 50 *semidiametris Terræ; hoc est milliarijs Bononiensibus* 163250, *sive horarijs* 54400.

Milliaria deduxi ex semidiametro terræ omnium hactenus inventarum minimâ, milliariorum Bononiensium 3265, sive horariorum 1088.

PROBLEMA II.

Lunarium montium altitudinem inquirere.

Fig. 86. Superficiem Lunæ non æquabilem esse, sed asperam montibus ac rupibus, certissimâ observatione constat. Vide ipse tubo optico longiori duobus vitris convexis instructo in obscuro Lunæ hemisphærio *a f c* apicem quemdam *b* luce clarâ micantem longè ultra *a*, ubi lucis ac tenebrarum confinia sunt. Id ipsum ab alijs quoque Astronomis observatum. Ex quo manifestissimè convincitur apicem illum in tenebroso Lunæ hemisphærio micantem, necessariò esse verticem alicujus montis *o b*, qui ob altitudinem suam priùs illustretur à Sole, quàm partes Lunæ humiliores *a o*. Complures autem ejusmodi esse montes in Lunâ eodem indice tubo evidenter cognoscimus: si enim limbus extremus Lunæ non-Plenæ observetur, is apparebit quasi dentatus, & tamquam rupibus continuis intercisus. Vide de his plura Astronomiæ nostræ *lib.* 8. in tractatu de luce & maculis Solis ac Lunæ *num.* 5.

Unum ex his montibus, quem *S. Catharinæ* appellant, observavit Ricciolus, comperitque illius verticem illustratum *b* distare à confinijs lucis & umbræ $\frac{1}{16}$ parte diametri. Eam distantiam repræsentet recta *b a*, quam supponamus tangere Lunæ superficiem in *a* extremitate diametri *a c*, & continuetur *b o* altitudo montis usque ad centrum Lunæ *z*. Per *prop.* 18. *lib.* 3 angulus *b a z* rectus est. Ergo quadratum *b z* quadratis [a] *b a*, *z a* æquale est. Quoniam verò *b a* [b] est 1, & *a z* 8, erit quadratum *b a*, 1. & quadratum *z a*, 64. quorum summa 65 æqualis jam ostensa est quadrato *b z*. Quare si ex eâ summâ 65 extrahatur radix quadrata, nota fiet *b z*, eritque 8. 0'. 6''. 9''': à quâ si demas 8 semidiametrum *z o*, remanebit *o b* altitudo montis Lunaris 69 millesimæ, quarum *z a* est 8.

a 47. *lib.* 1.
b *ex observ.*

Quare cùm semidiameter Lunæ (ut [b] alibi ostendam) major sit milliarijs Bononiensibus 711; si fiat per regulam proportionum ut 8 ad 69 millesimas, ita milliaria 711 ad alium numerum milliariorum: erit is major quàm 6 milliaria, debitus monti *o b*, ac proinde

b *in Corol. prob.* 8. *cap.* 10.

Certum est ob altitudinem montis Lunaris altiorem esse 6 milliarijs Bononiensibus.

CA

CAPUT IX.

Qua via indagari possit distantia Solis à Terra.

Duabus maximè vijs hujus tam ardui problematis solutionem Astronomi sunt aggressi, videlicet per Umbram Terræ in Eclipsibus, & Lunæ Dichotomiam. Priore usus est Ptolomæus, & Astronomi post illum plerique omnes. Alteram primus aperuit Aristarchus Samius; quam ex recentioribus instaurarunt Keplerus ac Vendelinus, & excoluit præ omnibus Ioannes Baptista Ricciolus noster. Hanc postremam, quia est priore illâ multò certior, etiam nos tenebimus, nonnullis ad clariorem rei intelligentiam præmissis.

Dichotomia Lunæ idem est ac Lunæ bisectio. Tunc autem Luna dichotoma, seu bisecta dicitur, cùm nobis apparet dimidiata, sive instar semicirculi. Pro quo notandum ex Opticâ. Primò, quia Sol Lunâ major est, Lunæ portionem à Sole illuminatam semper majorem esse dimidiâ; sed ob ingentem distantiam excessum esse tam modicum, ut dimidia appareat. Secundò, Partem visam Lunæ, aut corporis alterius cujuscumque Oculo majoris semper esse minorem dimidiâ, (quod etiam in *scholio probl. 5. cap. 6.* demonstratum est). Verùm, cùm distantia est valdè magna, defectum esse adeò parvum, ut quoad sensum pars visa censeri possit dimidia. Tertiò, quamvis Solis ac Lunæ superficies sint sphæricæ, ob immanem distantiam apparere tamquam planas instar circuli. Unde fit, ut cùm pars Lunæ illuminata à nobis tota conspicitur, plana appareat instar circuli: & cùm nobis conspicitur bisecta, appareat instar semicirculi.

PORISMA 1.

Fig. 89. Cùm Luna nobis apparet bisecta, planum *b o c* semicirculum lucidum *b z c* ab obscuro *b x c* discriminans productum transit per *o*, centrum Lunæ & oculi centrum A; & recta linea *o* S centra Lunæ Solisque jungens ad rectam A *o* perpendicularis est.

Primum per se satis clarum est. Alterum sic ostendo. Cùm planum separans partem obscuram à lucidâ transeat per *o* centrum Lunæ, & A centrum Oculi; patet rectam A *o* esse in plano separante. Atqui recta S *o* ad planum separans perpendicularis est; quia pars illustrata *b z c*, adeoque & basis ejus, ipsum nempè planum separans, directè semper Soli obvertitur. Ergo etiam S *o* ad rectam *a* A *o* in plano separante positam, perpendicularis est.

a per defin. 3. 11.

PORISMA 2.

Quò Sol fuerit à Terrâ remotior, eò major erit Lunæ, cùm nobis bisecta apparet, distantia à Sole; & contra. Quantacumque tamen esset distantia Solis à Terrâ, semper tamen ejus à Lunâ, dum bisecta apparet, distantia minor erit gradibus 90, seu quadrante circuli.

I. Pars demonstratur.

Fig. 89. Oculus in Terrâ esto A; Lunæ centrum in *o*; Solis in S. Ducantur radij A S, *o* S; & Lunæ diameter *b c* semicirculum lucidum ab obscuro separans juxta porisma 1. transeat per Oculum A. Producatur deinde *o* S in infinitum, inque ejus puncto altiori F intelligatur constitui centrum Solis. Sole posito in S, distantiam ejus à Lunâ bisectâ metitur arcus *o q*; seu angulus *o* A S: Solis, verò constituti in loco altiori F distantiam à Lunâ dichotomâ metitur arcus *o i*, sive angulus *o* A F; qui cum priori major sit, patet 1 pars porismatis.

II. Pars demonstratur.

In rectâ *o* S infinitè productâ sumatur punctum F quantumcumque distans à Terrâ A: ducaturque radius A F. Per porisma 1. in triangulo A *o* F, angulus ad *o* rectus est. Ergo per *prop. 32. lib. 1.* F A *o* est minor recto, seu gradibus 90. *His præmissis esto*

PROBLEMA I.

Distantiam Solis à Terra inquirere.

Fig. 89. Oculus in terrâ esto in A; huic Luna apparens bisecta instar semicirculi *b z c*, cujus diameter *b c* producta per porisma 1 transibit per Oculum A: Centrum Solis sit in S, ad quod ab Oculo, & centro Lunæ ducantur radij A S, *o* S. Atque ita habemus triangulum Dichotomicum A S *o* à tribus radijs centra Oculi, Solis, Lunæ connectentibus comprehensum. In hoc triangulo Dichotomico angulus A *o* S per porisma 1. rectus est. Quare si notus fiat acutus S A *o*, qui metitur distantiam Lunæ bisectæ à Sole, etiam proportio laterum per *prob. 1. cap. 3* innotescet. Atqui in hujus anguli inventionem summo studio Astronomi incubuêre, quorum nullus jam inde ab Aristarcho eum deprehendit minorem gradibus 87, quin verò est manifestò major. Assumatur tamen graduum 87: sic enim ex porismate 2 certò constabit altitudinem Solis inde collectam, esse verâ minorem. Quoniam igitur in trigono rectangulo A *o* S acutus S A *o* est grad. 87, erit *b* alter *o* S A grad. 3, cujus sinus est 523360. Quare cùm *o* A sit sinus *c* anguli *o* S A: A S verò sinus totus; erit latus A *o* 523360 partium, quarum A S est 10000000. Divide 10000000 per 523360: comperies A S distantiam Solis à Terrâ continere Lunæ à Terrâ distantias A *o* 19.0'.0''.0'''.5''''.6'.7''.9'''. Et quoniam ostendi suprà *d* distantiam Lunæ minimam à Terrâ excedere 50 semidiametros Terræ, ductis 50 in 19, distantia Solis à Terrâ excedet 950 semidiametros Terræ.

b prop. 32. l. 1.
c defin. 6. cap. 2.
d Prob 1. cap. 8.

Certum est igitur altitudinem Solis excedere altitudinem Lunæ plus quam decies & novies; ac proinde majorem esse Terræ semidiametri 950, hoc est milliarijs Italicis Bononiensibus 3101750, horarijs 1033583.

Milliaria deducta sunt ex semidiametro Terræ milliar. Bonon. 3265, hactenus inventarum minimâ, quam satis constat esse verâ minorem. Assumptâ semidiametro veræ proximâ, milliariorum Bononiensium 4139, erit distantiâ Solis à Terrâ major milliarijs Bonon. 3932050, horarijs 1310683.

PROBLEMA II.

Altitudinem Solis veræ propinquiorem determinare.

Fig. 89. LUnæ Dichotomæ distantiam à Sole præ cæteris omnibus investigatur Keplerus, Vendelinus, Ricciolus. Et primus quidem, quamvis sibi in eâ determinandâ non plenè satisfecerit, censet tamen non minorem grad. 89. imò majorem. Secundus asserit se primò comperisse Lunam apparere Dichotomam, cùm à Sole distat gradibus 89. Deinde verò majori curâ adhibitâ, compertum ait à se, Dichotomiam accidere, cùm Luna abest à Sole grad. 89. 30', vel potiùs 45'. Tertius omnium accuratissimus observator summo conatu in hoc negotium incubuit: ex pluribus observationibus suis tres recenset; primâ comperit Lunæ bisectæ distantiam à Sole, *o q*, grad. 89. 28'. 26": alterâ gr. 89. 29'. 45"; tertiâ omnium accuratissimâ, (eam refert in *Almag. pag.* 734. priores *pag.* 108) invenit grad. 89. 34'. 50". Itaque certum videtur distantiam Lunæ Dichotomæ à Sole non esse minorem gradibus 89. Hoc dato

Demonstrabimus Solis altitudinem excedere altitudinem Lunæ non minùs quàm quinquagiesepties; ac proinde Solem à Terrâ non minùs distare quam 2850 Terræ semidiametris; hoc est non minus quam milliariorum Italicorum Bononiensium 9305250.

Cùm enim arcus *o q*, adeoque & angulus *o* A S sit non minor gradibus 89; erit *o* S A non major gradu 1, cujus sinus est 174524. Quare cùm in trigono A *o* S, per porism. 1. rectangulo, A *o* sit *a* sinus anguli *o* S A, & A S sinus totus, erit A *o* partium 174524, quarum A S est 10000000: quibus per 174524 divisis, reperies A S altitudinem Solis continere altitudines Lunæ A *o* 57, 0'. 0". 5'". 2"". 1': hoc est (quia demonstratum est suprà *b* altitudinem Lunæ excedere semper 50 Terræ semidiametros) altitudinem Solis A S excedere semidiametros Terræ 2850: quibus ad milliaria reductis assumendo minimam Terræ semidiametrum milliariorum Bonon. 3265, erit Solis altitudo, saltem milliariorum Bononiensium 9305250.

a Def. 6. cap. 2.

b Prob. 1. cap. 8.

Porrò distantiam tam Solis quàm Lunæ à Terrâ accuratiùs, & à primis principijs investigamus Astronomia nostra lib. 3. cap. 2. & 3.

Scholium.

Ricciolus ex suâ Lunæ Dichotomæ à Sole distantiâ grad. 89. 28'. 26" *elicit distantiam Solis à Terrâ* 7260 *semid. Terræ: ex alterâ verò grad.* 89. 29'. 45", *semidiametros Terræ* 7572: *ex tertiâ, semidiametros* 8333. *Vendelinus autem ex distantiâ Lunæ dichotomæ à se observatâ vix grad.* 89. 45'. *deducit Solis distantiam semidiametrorum Terræ saltem* 13740, *Riccioli scrutinium videtur quàm proximè ad veritatem accedere. Dando igitur altitudini Solis saltem* 7000 *semid. Terræ*, distantia Solis à Terra æquabit saltem milliariorum Bononiensium 22855000, *hoc est plus quàm* 7000000 *milliariorum bovariorum.*

FINIS LIBRI PRIMI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER SECUNDUS
DE SUPERFICIE PLANA.

A Lineis rectis transeo ad superficies sed planas, curvas enim rejeci in librum tertium, quod minùs commodè à corporibus sejungantur. Non interrumpo seriem capitum primo libro inchoatum, ut evitetur prolixitas citationum.

CAPUT X.

Problemata, quorum usus ad sequentia.

Lemma.

Lineam rectam in superficie terra designare.

Extende funem inter duos limites datos. Absque funis adminiculo idem efficies, si per Quadrantis binas dioptras collimans in terminum datum, jubeas plures bacillos certis intervallis infigi perpendiculariter terræ, sic ut omnes simul bacillos per dioptras conspicias. Ita enim, quot placuerit, puncta ad rectam lineam quæsitam existentia notabuntur.

PROBLEMA I.

Ex datæ in superficie terræ lineæ rectæ (GB) puncto dato (A) perpendicularem ducere.

Fig. 1. Applica normæ basim rectæ datæ, sic ut latus normæ respondeat dato puncto: funis secundùm latus normæ extensus dabit perpendicularem quæsitam.

Verùm quia longitudo normæ, quâ in mechanicis utimur, ad summum est pedum trium quatuórve, non satis tuta est praxis jam tradita; quia funis à latere tam brevis normæ deviatio, quamvis oculo percipi vix possit, si valdè longa perpendicularis expetitur, in fine erit sensibilis & magna.

Aliter & certiùs per Quadrantem.

Fig. 1. Instrumentum constitue horizonti parallelum, sic ut ejus centrum sit directè suprà rectæ datæ GB punctum datum A, quo ita permanente, unum latus instrumenti AE sic verte, ut per ejus dioptras conspicias baculum perpendiculariter humi defixum in datæ rectæ puncto quopiam C: quo facto instrumenti latus AE respondebit rectæ datæ GB. Deinde baculum alterum jube perpendiculariter defigi ex adverso, quanto placuerit intervallo in L, sic ut in eum collimans per dioptras lateris AF, intueri possis. Recta per A & L extensa, est perpendicularis quæsita.

Si recta data GB est basis muri, non poterit institui hæc operatio, nisi priùs ducatur MN ad GB parallela, quod ita fiet: præsidio normæ ducantur GM, BN ad GB perpendiculares & æquales, recta MN connectens extremitates erit parallela ad GB; cujus distantia à muro ea sufficiet, quæ requiritur ut possis inter eam & murum consistere. Jam ad MN ducatur LK perpendicularis modo suprà explicato: hæc protracta in A, etiam ad GB perpendicularis erit. Facilè autem erit opus sic ordinare, ut LK protracta incidit in datum punctum A, si priùs normâ ex A ducatur AK perpendicularis ad GB, occurrens MN in K, & tum ex K reperiatur KL perpendicularis ad MN. Fig. 1.

Aliter solo fune.

Ad puncti dati A partem utramque sume duo æqualia intervalla AE, AF. In E & F fige duos funes æquales justæ longitudinis, eosque suprà terram extende, dum se mutuò tangant in D. Recta per D ad A ducta est perpendicularis quæsita, ut patet ex *prop. 8. lib. 1.* Fig. 2.

PROBLEMA II.

Ad rectam (BD) in terra datam, ex dato extra eam puncto (A) perpendicularem ducere.

Applica latus normæ puncto A datò: basim verò datæ rectæ: linea secundùm normæ latus ducta est perpendicularis quæsita. Fig. 3.

Verùm si normâ utimur, oportet distantiam puncti dati non excedere longitudinem normæ. Melius igitur quæsitum obtinebitur.

Quadrante.

Fige palos in dato puncto A, & puncto aliquo E datæ Fig. 3.

datæ rectæ. Deinde in datâ rectâ quære punctum C, suprà quod constituto Quadrantis centro possis per dioptras laterum CF, CG intueri palos fixos in E & A. Recta per C & A extensa, est perpendicularis quæsita.

Solo fune.

Fig. 4. Funem in dato A puncto fixum obliquè ad datam rectam B D extende, donec eam tangat extremitate suâ in E. Extende similiter ad partem alteram in F. Intervallum E F seca bifariam in C; quod fiet funem ipsi E F æqualem complicando conjunctis extremitatibus. Recta per A & C ducta, est perpendicularis quæsita.

PROBLEMA III.

Angulum in terra datæ quantitatis designare ad datæ rectæ (A K) punctum datum (A).

Fig. 5. Quæratur primò angulus recto minor, ex. gr. graduum 34. Regulam A E Quadrantis statue suprà gradum quæsitum, sic ut arcus B E sit grad. 34. Statue centrum A suprà datum punctum, & in aliquo datæ rectæ puncto D fige palum. Collima deinde per dioptras lateris A B, donec videas palum in D. Rursum alium humi palum fige eo loco, putà in F, ut eum videre possis collimando per dioptras regulæ A E. Recta per A & F ducta cum datâ A K efficiet angulum 34. grad.

Fig. 6. Petatur deinde angulus recto major, ex. gr. 117. excessum anguli dati suprà 90, nempè 27 grad. numera in Quadrantis limbo ex C in E, & suprà E pone regulam. Tum centrum Quadrantis statue suprà datum punctum A, & latus Quadrantis A B ita colloca, ut oculo posito in B per dioptras lateris conspicias palum defixum in datæ rectæ A K puncto aliquo D. Oculo deinde ad centrum A applicato baculum figi jube eo loco in F, ut eum videre possis per regulæ A E dioptras collimans. Recta per A & F ducta constituet cum datâ A K angulum grad. 117, ut patet.

PROBLEMA IV.

Quemvis visualem angulum metiri.

Fig. 5. 6. Visualem angulum efficiunt duo radij F A, K A ex duobus punctis K & F ad oculum pertingentes, estque idem cum eo, quem *cap. 5. defin. 5.* angulum distantiæ appellavi. Quare hoc Problema non differt à Porismate 2 ibidem.

Per dioptras lateris A B, ac regulæ A E collima in puncta data K & F. Arcus B E manifestabit quantitatem anguli dati in Fig. 5. In casu figuræ 6. arcus E C additus quadranti, idem præstabit.

PROBLEMA. V.

Ad datam in terra rectam (B C) per datum punctum (A) parallelam ducere.

Fig. 7. Ex dato puncto A duc *a* A D perpendicularem ad B C. Ad hanc deinde ex dato in eâ puncto A, describe *b* perpendicularem A F. Hæc est parallela ad D C. Patet ex *prop. 29. libri 1.*

a *per prob. 2.*
b *per prob. 1.*

Aliter.

Fig. 8. Stans in quovis rectæ datæ puncto D, metire *c* angulum visualem B D A. Tum ad rectæ A D punctum A fac *d* angulum D A F æqualem angulo BDA. Recta A F est parallela quæsita.

Patet ex *prop. 28. lib. 1.* cùm anguli alterni BDA, D A F æquales sint.

c *per prob. 4.*
d *per prob. 3.*

Aliter.

Cùm ad datam rectam B C accessus negatur.

Fig. 9. In datâ rectâ oculo designa duo signa D, E, in quæ ex dato puncto A collimans, metire angulum D A E. Tum aliam quære stationem F, ex quâ collimans in eadem puncta D, E, æqualem ipsi D A E reperias angulum D F E. Dein metire *b* angulum *o*, eique parem designa *f* angulum *n*, seu E A T. Erit recta A T ad B C parallela.

Demonstratio. Quoniam anguli D A E, D F E sunt æquales, patet *g* per D, A, F, E transire circulum. Ergo quia anguli *o*, *m*, sunt in uno segmento AFED, æquales *k* erunt. Atqui *n* per constr. æquatur *o*. Ergo etiam *n* ipsi *m* æqualis est. Ergo A F, B C, sunt *n* parallelæ. Quod erat demonstrandum.

b *per prob. 4.*
f *per prob. 3.*
g *ex 21. lib. 3.*
k *per 21. lib. 3.*
n *per 28. lib. 1.*

Hæc praxis, ut accepi, est Clariss. Viri Gerardi Gutschovij Regij Matheseos in Academiâ Lovaniensi Professoris, cujus lucubrationes Mathematicas avidè jam pridem expectamus.

PROBLEMA VI.

Regularium figurarum angulos tam centri, quàm circumferentiæ invenire.

Fig. 10. Regularis seu ordinata figura est, cujus omnia latera, & omnes anguli inter se æquantur.

Angulus centri est (B A C) quem continent duo radij ab unius lateris extremitatibus ad centrum ducti. Unde figura ordinata tot habet centri angulos, quot latera, quos omnes inter se constat esse æquales.

Anguli circumferentiæ sunt, qui figuræ lateribus continentur; ut B C D, C D E &c.

Inventio anguli ad centrum.

360 gradus divide per denominatorem figuræ: ut si figura data est Septangula, per 7. Provenient gradus debiti angulo centri.

Demonstratio est manifesta: nam omnes simul anguli centri conficiunt *m* 4 rectos, seu grad. 360. Quare unus ex illis est graduum 360 pars ab ipsorum multitudine, seu denominatore figuræ, denominata. Ergo &c.

m *Cor. 2. prop. 13. 1.*

Inventio anguli circumferentiæ.

A duplo numero laterum deme 4. Residuum multiplica per 90. Productum divide per denominatorem figuræ: provenient gradus debiti angulo circumferentiæ.

In Pentagono duplus laterum numerus est 10. Ab hoc si demas 4, remanent 6, quæ ducta in 90 producunt 540: hæc autem divisa per 5 denominatorem figuræ, exhibent 108 gradus, qui debentur angulo circumferentiæ Pentagoni.

Demon-

b Per theor. 2. Schol. post 32. 1.

Demonstratio. Omnes simul anguli *b* cujusvis polygoni, seu figuræ rectilineæ, conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ, demptis quatuor. Quare si duplum laterum numerum demptis 4, ducas in 90 gradus uni recto debitos; provenient gradus debiti omnibus simul figuræ angulis. Quare unus ex illis est pars horum graduum ab angulorum multitudine, seu denominatore figuræ denominata. Ergo &c.

Denominatores figurarum	Anguli centri	Anguli circumferentiæ.
III	120	60
IV	90	90
V	72	108
VI	60	120
VII	51. 25'. 43"	128. 34'. 17"
VIII	45	135
IX	40	140
X	36	144
XI	32. 43'. 38"	147. 16'. 22"
XII	30	150

PROBLEMA VII.

x Vide def. 3. l. 4. elem.

Figuram quamvis *x* regularem in charta delineare; etiam dato radio vel latere.

Fig. 10. o per prax. 3. Schol. post 23. l. 1. q Probl. 6.

Fac *o* angulum O æqualem angulo centri ejus *q* figuræ, quam volebas delineatam. Deinde centro A anguli vertice, intervallo lubito describe circulum lateribus anguli occurrentem in H & B. Recta H B est latus figuræ quæsitæ.

a per prax. 3. Schol. post 23. l. 1.

Exemplum. Oporteat septangulum ordinatum describere. Ejus centri angulus est grad. 51. min. 26 ferè. Tantum fac *a* angulum O. Centro A descriptus circulus secet anguli latera in H, & B. Recta H B septies per circumferentiam traducta, dabit septangulum ordinatum ad radium collibitum.

b per eand.

Si figuram desideras, cujus latus sit longitudinis datæ, sic operare. Angulum O centri figuræ quæsitæ *b* describe, ut suprà. Centro A describatur circulus secans anguli latera in H & B, & duc H B. Inter latera anguli O aptetur latus datum I K, ut sit parallelum ad H B. Centro A describe circulum per puncta I & K (ambo enim ad circulum sunt.) K I per circumferentiam hujus circuli sæpiùs repetita, dabit quæsitum.

Fig. 11. c Per 34. lib. 1.

Aptabitur porrò data recta inter latera dati anguli, sic ut sit alteri H B parallela, hoc modo. Per anguli verticem A duc infinitam A P, parallelam ad H B, & sit A M par datæ. A *b* M duc M K parallelam ad A B, secantem A H in K. Per K ducatur K I parallela ad H B: hæc etiam *c* æqualis erit datæ A M.

Aliter.

Fig. 10. d per prax. 3 Schol. post 32. l. 1. o Probl. 6. b per 5. l. 4.

Describe *d* angulum L E N circumferentiæ *o* ejus figuræ, quamvis delineatam. A lateribus anguli abscinde E F, E D æquales lateri dato. Tum per tria *b* puncta F E D, describe circulum. Hic capiet figuram quæsitam, si F E, vel E D per circumferentiam sæpiùs traducatur.

Scholium.

Caterùm, nondum via reperta est, quâ certè & infallibiliter, nihil videlicet tentando, figuræ omnes ordinatæ describantur. Pendet enim ea descriptio à divisione circumferentiæ in partes æquales 3, 4, 5, 6, 7. & sic deinceps secundùm omnes sequentes numeros; quæ quidem divisio adhuc desideratur. Libro 4 elem. solo circino & regulâ dividitur circumferentia in partes æquales 3, 4, 5, 6: ac proinde inscribuntur circulo, Triangulum, Quadratum, Pentagonum, Hexagonum. Et quoniam arcus quivis Geometricè secari potest bifariam circino & regulâ; conicè verò trifariam parabolâ aut hyperbolâ: manifestum est figuras eas omnes viâ & ratione describi posse, quarum denominatores sunt termini progressionum duplarum & triplarum incipientium ab his quatuor numeris 3, 4, 5, 6. Quibus si eas adjungamus, quarum denominatores producantur ex duarum quarumlibet figurarum jam inventarum denominatoribus inter se multiplicatis, repertæ erunt figuræ ordinatæ omnes, quas aliquâ certâ viâ, seu methodo infallibili possimus describere. Cæteræ præter has omnes hactenus non nisi mechanicè, hoc est tentando, construuntur. Non aliter circuli circumferentia in gradus 360 dividitur. Vnde quæ ejus adminiculo construuntur Problemata, non Geometricè sed mechanicè soluta dicuntur. Sectiones porrò conicæ non videntur à constructione Geometricâ excludendæ: hos enim si adhibueris, perinde viâ ac ratione procedis, atque si rectam lineam aut circulum; neque alia differentia est, quàm quòd minùs expedita sit conicorum linearum descriptio.

PROBLEMA VIII.

x Vide def. 3. l. 4. elem.

Figuram quamvis x ordinatam in terrâ describere, etiam dato radio vel latere.

Fig. 10. u Prob. 6.

PEr Probl. 3. describe in terrâ angulum O, centri u figuræ quæsitæ: ex lateribus anguli abscinde radios collubitæ magnitudinis A H, A B, ducaturque recta H B: hæc erit latus unum figuræ quæsitæ. Fiat deinde angulus alter B A C par priori O; & recta A C par ipsi A B, jungaturque B C: erit hæc latus secundum. Eâ methodo cætera latera reperientur. Ubi latus penultimum F G fuerit designatum, quod tum supererit intervallum G H, necessariò æquale erit lateribus cæteris, aut malè fuit & oscitanter instituta delineatio.

Quòd si figuram desideras habentem latus longitudinis datæ ex. gr. heptagonum, cujus latus sit pedum 1000, ex latere dato quære radium: quo reperto, describe ad eum radium, modo jam explicato, figuram quæsitam, putà heptagonum; habebitque illa latera etiam data, putà 1000 pedum. Reperietur porrò radius ex latere in triangulo H A B: in quo quia notus o est angulus O, etiam summa n reliquorum nota est; ac proinde & singuli, cùm inter se sint m æquales. Cùm igitur in Trigono H A B anguli dentur, & latus unum, etiam latus q A B, nempè radius innotescet.

o per prob. 6. n per corol. 8. p. 32 l. 1. m per 5. l. 1. q per 9 c 3.

Aliter.

Cum statio non conceditur in centro figuræ A.

Fig. 10. a Prob. 3. b Prob. 6.

Describe a in terrâ angulum L E N b circumferentiæ ejus figuræ, quam cupis delineare & à lateribus abscinde partes utrimque æquales E F, E D magnitudinis collibitæ. Ad punctum D constitue secundum circumferentiæ angulum E D C, & fac D C parem E D, E F; atque ita in orbem operare. Ubi designatum fuerit latus penultimum H G, quod tum supererit intervallum G F, si exactè fueris operatus, æquale erit lateribus prioribus, anguliquè circumferentiæ G, & F prioribus circumferentiæ angulis æquales erunt, quod infrà demonstrabitur Probl. 10.

PROBLEMA IX.

Rectilineo irregulari cuicumque (Z) in chartâ dato, simile in terra describere.

Fig. 12. a Per prob. 3.

FAc in terrâ a angulum æqualem angulo C, & ab ejus lateribus abscinde tot pedes vel passus, vel perticas (prout magnam figuram desideras) quot partes scalæ continent C B, C D. Ita in orbem operando, quæsitum obtinebitur.

PROBLEMA X.

Dati loci (Z) ichnographiam describere.

Fig. 12. 13. a Per prob. 4.

HOc est figuræ in terræ superficie datæ, similem in chartâ delineare.

Metire a loci dati angulos A, B, &c. item latera præsidio perticæ; & eorum magnitudines inventas nota inter suos quosque angulos: nimirùm primo loco scribe gradus anguli A, secundo pedes lateris A B, tertio gradus anguli B; atque ita deinceps.

Deinde fac b in chartâ angulum F parem angulo A, ejusque latera F G, F K tot partium scalæ, quot pedum erant latera A B, A E. Rursum angulus G fiat æqualis angulo B, ejusque latus G H tot partium scalæ, quot pedum erat B C. Pari modo angulus H par fiat angulo C, & latus H I tot partium scalæ, quot pedum erat C D. Jungantur postremò puncta I & K, eritque (ut mox ostendam) I K tot partium scalæ, quot pedum erat D E, anguliquè I, & K pares erunt angulis D, & E; adeoque figura X similis erit loco dato Z.

b per prax. 3. Schol. post 32. l. 1.

Demonstratio. Ductis mente ex I & D ad oppositos angulos rectis lineis, figuram utramque in triangula partire. In triangulis D C B, I H G, quia latera D C, C B, & I H, H G circa c æquales angulos C, H, proportionalia d sunt, erunt o anguli o, n: item q, r, æquales: & B C erit ad B D, ut G H ad G I. Quia verò jam ostendi pares esse angulos q, r, & per constr. toti B ac G æquales sunt: etiam reliqui s, t æquales n erunt. Deinde quia f A B est ad B C, ut F G ad G H, & (quod jam ostendi) B C ad B D, ut G H ad G I; etiam ex p æquo A B erit ad B D, ut F G ad G I. In triangulis igitur A B D, F G I, latera A B, B D; & F G, G I circa æquales angulos s, t proportionalia sunt. Ergo etiam s A B est ad A D, ut F G ad F I: & anguli m, p, itemque l, u æquales; ac proinde, quia æquantur k toti A, F; etiam y, δ m æquales erunt. Jam quia ostendi A D esse ad A B, ut F I ad F G; A B verò est ad A E, ut F G ad F K; ex æquo erit A D ad A E, ut F I ad F K. In triangulis igitur A E D, F K I, latera A D, A E; & F I, F K circa æquales angulos y & δ proportionalia sunt. Ergo q A E est ad E D, ut F K ad K I (quod erat unum ex demonstrandis) & p anguli E, K æquales sunt (quod erat alterum) itemque anguli ω. θ æquantur: quibus si addamus ostensos suprà æquales u o, & p n, toti D & I æquales erunt, quod erat tertium.

c Constr. d Constr. e per 6 l. 6. o per 32. l. 1. t Constr. p per 22. lib. 5. s per 6 l. 6. k Constr. m per 32. lib. 1. q per 6. l. 6. p cand.

Scholium.

Ex demonstratione patet tantùm esse necessarium, ut mensurentur omnes anguli loci dati prater duos ex. gr. prater D. & E; & omnia latera prater unum (E D) quod angulis non mensis interjacet.

CAPUT XI.

Figurarum rectis lineis comprehensarum dimensio.

REvocanda huc sunt, quæ cap. 1, de mensuris scripsi. Metimur superficies quadrato alicujus notæ mensuræ, ut quadrato Pede, vel Passu quadrato, vel quadratâ Perticâ: hoc est quadrato, cujus latus est Pes, vel Passus, vel Pertica.

Definitio.

Area, seu quantitas alicujus superficiei mensurari, produci, reperiri dicitur, cùm innotescit quot quadratis alicujus notæ mensuræ, (quadratis ex. gr. pedibus vel perticis) æqualis est.

Et cùm dicitur area alicujus figuræ produci ex multiplicatione duarum linearum, ex. gr. altitudinis in basim: sensus est, aream tot continere Pedes quadratos

dratos ex. gr. quantus est numerus qui fit ex numero pedum altitudinis ducto in numerum pedum basios.

PROBLEMA I.

Aream quadrangularem rectam metiri.

Fig. 14. SI est oblonga, producitur, ex multiplicatione duorum contiguorum laterum A B, A C; si quadrata (*ut in Fig. 15,*) ex multiplicatione unius lateris per seipsum.

Exemplum areæ oblongæ. Metire contigua latera A B, A C; & sit A B pedum 3, A C, 6. Multiplica A B, 3, per A C, 6, provenient 18 pedes quadrati, quibus area A L æqualis est. Si A B fuisset 3 passuum, & A C passuum 6: tunc 3 per 6 multiplicatis, provenissent 18 quadrati passus pro areâ oblongâ A L: atque ita per alias qualvis mensuras procedendo: id quod erit deinceps in sequentibus observandum.

Exemplum areæ quadratæ. Metire latus unum A B, quod sit pedum 3. Multiplica 3 per se. Provenient 9 pedes quadrati, quibus area quadrata A D æqualis est.

Fig. 14. *Demonstratio.* Latera contigua A B, A C divisa intelligantur in suas æquales mensuras ex. gr. in pedes: & per divisionum puncta ducantur lateribus A B, A C parallelæ, sic ut tota area A L sit cancellata, hoc est in minores areas divisa. Demonstrandum est singulas minores areas esse quadrata pedalia, sive pedes quadratos, & quidem tot, quantus est numerus qui fit ex pedibus lateris A B ductis in pedes lateris A C.

Accipiatur areola quævis E P N G. Quia P D est *a* parallela A B, erit externus angulus P D M *b* æqualis angulo B A D interno: sed B A D rectus *c* est. Ergo etiam P D M rectus est. Rursum quia *d* E G æquidistat A C; angulus externus P E G interno PDM *e* æqualis est. Cùm ergo P D M ostensus sit rectus; etiam P E G rectus est. Deinde, quia PN, AC sunt *f* parallelæ, & angulus P D M ostensus est rectus; etiam D P N *g* rectus erit. Pari modo ostendam angulos G & N esse rectos. Areola igitur E B N G rectangula est. Ulteriùs quia P N & E G parallelæ *h* sunt ad AC, erunt inter se *i* parallelæ; & quia N G, P E sunt parallelæ ad A B, erunt & parallelæ inter se. Ergo E P N G est *r* parallelogrammum; eodem modo ostendemus areolas D G, F P, & reliquas omnes esse parallelogramma. Ergo *l* E G æqualis est D M; & P E æqualis Q F. Sed D M, Q F sunt æquales, sunt *m* enim ambo unus pes. Ergo etiam E G, E P æquales sunt. Quare cùm EPNG sit parallelogrammum, patet omnia *n* ejus latera esse æqualia. Ostendi verò etiam omnes ejus angulos esse rectos. Areola igitur E P N G quadratum est, & quidem unius pedis, cùm ostenderim E G æquari ipsi D M, quæ ex hyp. unus pes est. Eâdem ratione ostenderur omnes reliquas areolas esse quadrata pedalia, sive pedes quadratos.

a per const. b per 27. lib. 1. c per hyp. d per const. e per 27. l. 1. f per const. g per 27. 1. h per const. i per 30. lib 1. r per defin. 35. lib. 1. l per 34. l. 1. m hyp. n per 34. lib. 1.

Reliquum est ut demonstremus in tot areolas subdivisam esse superficiem A L, quantus est numerus, qui fit ex numeris laterum A C, A B inter se multiplicatis. Manifestum est aream A L tot continere oblonga quadrangula A I, F S, Q L, quot sunt pedes in latere A B. Atqui ista oblonga tot continent pedes quadratos, quot sunt pedes in latere A C. Ergo tota figura A L tot continet pedes quadratos, sive in tot pedes quadratos divisa est, quot fiunt ex numero lateris AB multiplicato per numerum lateris A C.

Constat igitur veritas dimensionis areæ quadrangularis rectæ, quæ fuerat demonstranda.

Ex demonstratione dimensionis areæ quadrangularis rectæ, demonstrationes dimensionum pendent reliquarum omnium figurarum. Unde ea fuit in gratiam discentium accurate deducenda. Hæc etiam causa fuit, cur a quadrangulo potius, quam a triangulo initium duxerimus metiendi.

Corollaria.

1. Quot milites stare possunt in campo quadrato unius Belgici milliaris, dato singulis passu quadrato?

Milliare Belgicum, sive horarium, continet 18000 pedum Rhynlandicorum, quæ ducta in se efficiunt 324000000 pedum quadratorum pro areâ quadrati milliaris Belgici, quæ si dividantur per 25 (tot enim pedes quadratos continet quadratus passus: nam unus passus facit 5 pedes, qui ducti in se faciunt 25 pedes quadratos pro uno passu quadrato) provenient 12960000 passuum quadratorum, hoc est 12 milliones & 960 millia pro numero quæsito. Tot igitur stare poterunt in quadrato milliari Belgico singulis quadratum passum occupantibus.

2. Est area recta quadrangula, longa pedes 160, lata 70. quot ea homines capiet, 4 pedibus quadratis in singulos assignatis?

Duæ areæ latera 160 & 70 in se mutuò provenient pedes quadrati 11200 pro areâ propositâ: quibus divisis per 4, provenient 2800. pro numero hominum quæsito.

3. Pavimentum offertur porticus alicujus, & lapis quadratus datur. Quot quadratis lapidibus dato æqualibus opus est, ut pavimentum sternatur?

Experire quot lapides juxta se positi expleant longitudinem porticus, quot latitudinem. Hi lapidum numeri per invicem multiplicati dabunt numerum eorum, qui requiruntur, ut pavimentum totum sternatur.

4. Pavimentum alicujus porticus stratum est lapidibus quadratis. Petitur numerus lapidum. Fig. 14.

Inquire quot lapides sint in duobus lateribus contiguis A B, A C. In A C sint 500, in A B 50: hi numeri per invicem multiplicati producunt 25000, numerum quæsitum lapidum dato pavimento contentorum.

Scholium.

Quoniam 3 & 4 Corollario attigi quædam de quadratis lapidibus pavimenti, juvat aliquid his affine, nec scitu injucundum attexere.

Dantur quadrata areæ bina, quarum altera alterius dupla est. Petuntur æquales quadrati lapides quibus utraque sternatur præcisè. Frustra hic se torqueat Architectus Matheseos imperitus: quod enim quærit, nunquam inveniet, cùm quæsitum impossibile sit, quoscumque æquales lapides assumpserit, sive magnos, sive quantumvis parvos. Neque solùm, id erit verum, si areæ sint, altera alterius dupla; verùm etiam si tripla, aut quintupla, vel universim

eam inter se proportionem habeant, quam aliquis numerus primus ad numerum primum.

Demonstratio pendet ex theoremate 2, Arithmeticæ nostræ lib. 5. cap. 7. *Nam si dua quadrata area, habentes eam inter se proportionem, quam 2 ad 1, aut quam aliquis numerus primus habet ad alium primum, lapidibus quadratis aqualibus strata essent pracisè tota: manifestum est ipsos lapidum numeros areas tegentium etiam fore quadratos numeros: ac proinde quadrati dabuntur numeri, qui sint inter se ut 2 ad 1, sive ut primus numerus ad primum numerum. Atqui inter duos quadratos quoscumque dari* q *potest medius proportionalis. Ergo etiam inter 2 & 1, aut inter duos alios primos numeros dari poterit medius proportionalis, quod fieri non posse theoremate suprà citato demonstravi.*

q *per* 11. *lib.* 8.

PROBLEMA II.

Aream cujusvis parallelogrammi invenire.

Fig. 16.

OMnis parallelogrammi area producitur ex altitudine in basim ductâ.

Detur parallelogrammum A B C D, cujus magnitudinem oporteat invenire. Inter duo ejus latera, ubi id commodiùs fuerit, designetur *a* perpendicularis G N; & tam illa, quàm latus A D, in quod perpendicularis cadit, mensurentur. Numeri mensurarum in G N, & A D reperti per invicem multiplicati, dabunt numerum mensurarum quadratarum quibus æquale est parallelogrammum A B C D.

a *per probl.* 1. *c.* 10.

Exemplum. Altitudo G N reperta sit pedum 10, A D basis pedum 40. Due 10 in 40: proveniunt 400 pedes quadrati, quibus area parallelogrammi A C æqualis est.

Demonstratio. Ducatur ex A & D perpendiculares A E, D F. Quadrangulum rectum A E F D producitur ex multiplicatione ipsius E A; hoc est G N, in A D. Atqui A E F D *b* æquale est ipsi A B C D. Ergo etiam A B C D producitur ex multiplicatione ipsius G N in A D. Quod erat demonstrandum.

b *per* 35. *lib.* 1.

Qui hæret in terminis, consulat definitionem positam ante *Probl.* 1. Quod etiam erit in alijs hujus generis demonstrationibus factitandum.

☞ Quando area parallelogrammi ob lacus, arbores vel alia obstacula inpervia est; ac proinde in eâ perpendicularis designari & mensurari nequit, confugiendum erit ad *Problema* 8. *hujus capitis.*

Scholium.

Occurrendum hîc est dubitationi Tyronum satis ordinaria. Parallelogrammum obliquum A B C D, (& idem est de alijs figuris), nequit resolvi in quadrata, sicut ea sibi mutuo opposita obliquum parallelogrammum pracisè expleant, eiq́ commensurentur & congruant, ut vidimus in quadrangulo recto Problemate pracedenti. Qui ergo istud parallelogrammum potest mensurari per quadrata ex. gr. pedalia & certo tolium quadratorum numero esse aquale? Est quidem illa hallucinatio valdè crassa; sed tamen, ut dixi, Tyronibus familiaris. Sciant igitur illi tam superficies quàm corpora aquari inter se posse, licet sint dissimilia, ac proinde unum alteri nequeat congruere, ut ex totâ passim Geometriâ patet. Sic propos. 42. lib. 1. *exhibetur triangulo aquale parallelogrammum, &* prop. 45. *parallelogrammum aquale cuivis alteri figura rectilinea. Congruentia igitur ad aqualitatem non requiritur praterquam in rectis lineis & angulis rectilineis, in quibus hac ab illâ inseparabilis est.*

PROBLEMA III.

Aream quadranguli habentis duo inæqualia latera parallela, invenire.

Fig. 17.

TAlis quadranguli area producitur ex dimidiâ summâ parallelorum laterum in altitudinem.

Esto quadrangulum ABCD, habens parallela latera inæqualia A D, B C. Inter hæc designa *a* perpendicularem K L, & tam hanc, quàm ipsa latera parallela metire, multiplica deinde perpendicularem K L, per dimidiam summam parallelorum laterum B C, A D. Provenient mensuræ quadratæ, quibus quadrangulum A B C D est æquale.

a *per probl.* 1. *cap.* 10.

Exemplum. Perpendicularis seu altitudo K L reperta sit pedum 20, summa laterum parallelorum B C, A D, 60: cujus dimidium est 30. Due 20 in 30; proveniunt 600 pedes quadrati quibus area A B C D æqualis est.

Demonstratio, seca bifariam latera A B, D C in punctis O & P, per quæ duc ad A D, perpendiculares, quæ ipsi B C productæ occurrant in E & G. In triangulis O E B, O F A anguli *b* alterni E & F; itemque anguli ad *c* verticem O æquales sunt: & latera B O, A O *d* æquantur. Ergo *n* etiam tota triangula & latera E B, A F æqualia sunt. Eodem modo ostendam æqualia esse triangula P G C, P N D, & latera C G, N D. Ergo

b *per* 27. *l.* 1. c *per* 15. *l.* 1. d *per const.* n *per* 26. *l.* 1.

EG	Æ	BC AF ND

Quare si utrimque addatur F N, erunt

EG FN	Æ	BC AF ND FN

hoc

hoc est E G, F N æquatur ipsis B C, A D. Ergo cùm E G, F N æquales *c* sint; erit una ex duabus, nempè F N dimidia summæ ipsarum B C, C D. Deinde quia triangulo O E B, P G C ostensa sunt æqualia trianguli O F A, P N D; si utrimque addatur planum FOBCPN, erit FEGN æquale ipsi ABCD. Atqui F E G N; quia rectangulum est, producitur *f* ex E F; hoc est K L, ductâ in F N. Ergo etiam A B C D producitur ex K L ductâ in F N, quam ostendi esse dimidiam summam laterum parallelorum. Liquet ergo quæsitum.

c per 34. lib. 1.

f per prob. 1.

Si area A B C D inpervia est, mensurabitur infrà Problemate g universali, ad quod etiam referenda erit reliquorum irregularium quadrangulorum dimensio.

g probl. 8.

PROBLEMA IV.

Metiri aream triangularem quæ pervia sit.

Fig. 18. 19.

Cujusvis trianguli area producitur ex semisse altitudinis ductâ in basim, sive ex altitudine totâ ductâ in semissem basis.

Detur triangulum A B C, cujus oporteat capacitatem invenire. Ex quovis angulo, putà ex B, designetur *a* perpendicularis B D in latus oppositum, quod Basim voco, sive ea cadat intra triangulum (ut in *Fig.* 18) sive extra in latus productum (ut in *Fig.* 19.) commodiùs erit, si cadat intra. Mensuretur deinde tam perpendicularis B D, quàm basis A C; & per invicem multiplicentur. Semissis producti exhibet quadratas mensuras, quibus area trianguli æqualis est.

a per prob. 2. c. 10.

Vel dimidia altitudo B D ducatur in basim A C; aut tota altitudo B D in basis A C semissem. Provenient utrobique mensuræ quadratæ trianguli dati.

Exemplum. B D reperta sit pedum 14, A C, 20. Duc 14 in 20. Fiunt pedes 280, cujus producti semissis 140 exhibet pedes quadratos, quibus triangulum datum æquale est. Vel ex altitudine pedum 14 sume dimidium 7, & duc in basim 20. Proveniunt item 140 pedes quadrati pro areâ trianguli. Vel ex basi pedum 20 accipe semissem, 10, & duc in altitudinem totam 14. Provenient rursum 140 quadrati pedes pro areâ quæsitâ.

Demonstratio. Fiat parallelogrammum A N O C ejusdem cum triangulo A B C altitudinis B D, & super eâdem basi A C. Per *prop.* 41. *lib.* 1. triangulum A B C dimidium est parallelogrammi A N O C. Atqui area parallelogrammi producitur ex altitudine B D ductâ in basim A C. Ergo area trianguli est istius producti dimidia, sive producitur ex dimidiâ altitudine B D ductâ in basim A C: quod erat demonstrandum.

Corollarium 1.

Fig. 21.

Area trianguli rectanguli habetur, si duo latera, A B, A C angulum rectum continentia ducantur in invicem, & producti sumatur dimidium. Ratio est, quia latus utrumlibet recto adjacens est altitudo trianguli, reliquum basis.

Corollarium 2.

Fig. 20.

Ex angulis singulis trianguli in latera opposita ducantur perpendiculares A E, B D, C F, quæ in sua quæque latera ducantur. Simissis cujuslibet horum trium productorum exhibet aream trianguli. Patet ex demonstratione jam allatâ.

PROBLEMA V.

Aream trianguli inperviam invenire.

Ex præcedenti patet ad dimensionem trianguli opus esse, ut notum sit latus unum unà cum perpendiculari in illud cadente ex opposito angulo. At quando trianguli area est inpervia, non potest in eo perpendicularis designari, & perticâ mensurari. Tunc igitur ea erit Geometricè indaganda, mensuratis primùm omnibus trianguli lateribus, quod fieri potest licet area ipsa inpervia sit. Geometrica porrò perpendicularis inventio traditur *prob.* 6. *cap.* 3 & adhuc aliter in Scholio *prop.* 13. *lib.* 2.

PROBLEMA VI.

Aream triangularem inperviam sine perpendicularis adminiculo, ex solis notis lateribus indagare.

A dimidiâ laterum summâ aufer singula latera. Tria residua quovis ordine inter se multiplica. Productum multiplica per dimidiam laterum summam. Producti ultimi radix quadrata dabit aream trianguli.

Exemplum. Detur triangulum B A C, cujus latus B A sit pedum 45, A C 25, C B 40. Ergo summa laterum est 110, & summæ dimidium 55.

Fig. 23.

Ab hac dimidiâ laterum summâ 55, aufer singula latera: eruntque residua tria 10, 30, 15.

Hæc residua quovis ordine inter se multiplica (semper enim eumdem produci numerum demonstravi *a* in *Scholio prop.* 19. *lib.* 8, qui mihi secundus est): provenient 4500.

a vide Arithm. pr. stram.

4500 multiplica per 55, dimidiam laterum summam. Provenient 247500.

Hujus producti ultimi 247500 radix quadrata 497 pedes quadratos triangularis areæ exhibebit.

Demonstratio hujus Praxeos, pulchra & subtilis est, sed prolixior, quàm ut à studiosis nondum satis exercitatis facilè intelligatur. Minuetur difficultas, si in plura eam quasi Theoremata, sive partes divisam proponamus.

Demonstratio.

I.

Fig. 22.

Trianguli A B C angulos B, & C bisecent rectæ B D, C D, concurrentes in D: & ex C ducantur ad singula latera normales D E, D F, D G.

Dico A E, E B, G C tres esse differentias inter latera trianguli singula, & semissem summæ laterum.

Demonstratio. Junge A D. Ex hyp. anguli ad B sunt pares; & B E D, B G D recti: latus autem B D commune. Ergo *a* E D, D G sunt æquales. Pari modo æquantur F D, D G. Ergo & E D, E D, adeoque & quadrata E D, F D æquantur. Similiter per *prop.* 26. *lib.* 1. E B ipsi G B; & F C ipsi G C æqualis est. Quoniam verò quadratum A D per *prop.* 47. *lib.* 1. æquatur tam quadratis A E, E D, quàm A F, D F; erunt quadrata A E, E D, æqualia quadratis A F, F D: Demptisque æqualibus E D, F D, reliqua A E, A F, adeoque & rectæ A F, A E æquantur. Quoniam igitur A E ipsi A F; & E B ipsi B G,

a Per 26. lib. 1.

&

& F C ipsi G C ostensæ sunt æquales; erunt A E, E B, G C; hoc est A B & G C æquales ipsis A F, B G, F C; hoc est ipsis A C, B G. Ergo tam A B cum G C, quàm A C cum B G, semissis est summæ laterum. Eodem modo ostendam B C cum A F semissem esse laterum trianguli. Lateris ergo A B, & semisseos A B. G C differentia est G C: item lateris A C, ac semisseos A C, B G, differentia est B G, sive B E: lateris demùm B C, ac semisseos B C, A F, differentia est A F, sive A E. Differentiæ igitur inter semissem laterum trianguli, & singula latera sunt A E, E B, G C: quod erat demonstrandum.

II.

Fig. 22. Iisdem positis: ex A B productâ sume B H æqualem C G, quæ est una differentiarum, & ex H ducta normalis H K occurrat A D productæ in K.

Dico D E esse ad E B, ut B H, seu G C, ac H K.

Demonstratio. Fiat B L par ipsi G C, seu B H; jungaturque K L: & ex A H, A C productis sume H M, C I pares B G: junge demum B K. Ostendi in demonstratione præcedenti tam A B cum G C, hoc est cum B H, quàm A C cum B G, hoc est cum C I, semissem esse laterum trianguli. Ergo A H, A I æquantur, & latus A K commune est: anguli quoque ad *b* A sunt pares, cùm ostensum sit in præced. A E, E D, D A, æquari A F, F D, D A. Ergo H K par *c* est K I, & angulus A H K par angulo A I K. In triangulis igitur M H K, C I K; cùm etiam M H, C I ex constr. sint pares; *d* æquantur M K, K C. Quare cùm in triangulis M B K, C B K, ex constr. B M, *e* ipsi B C; & M K ipsi K C; & B K sibi ipsi, æqualia sint; anguli M B K *f*, C B K æquantur. Quia igitur in triangulis H B K, L B K etiam latera H B, B K æquantur lateribus L B, B K; anguli *g* H K B, L K B: item K H B, K L B æquantur. Ergo cùm K H B sit rectus ex const. erit & K L B rectus. Sed quadrilateri H B L K, 4 anguli faciunt 4 *h* rectos. Ergo quia H & L sunt duo recti; facient H B L, H K L duos rectos, adeoque æquales anguli H B L, A B L. Dempto igitur communi H B L, reliqui H K L, A B L; ac proinde & E B D, H K B eorum ex hypothesi & Demonstratione dimidij, æquantur. Atqui etiam B E D. B H K ex hypothesi sunt recti, adeoque pares. Triangula ergo D E B, B H K æquiangula sunt. Ergo *n* ut D E est ad E B, sic B H ad H K. Quod erat demonstrandum.

b per 8.l.1.
c per 4.1.
d per eandem.
e per const.
f per 8.l.1.
g per 4.l.1.
h per theo. 1. scho. post 32.l.1.
n per 4.l.6.

III.

Fig. 22. Iisdem positis; concipiantur differentiæ A E, E B, G C, sive B H, nec non & D E sectæ esse in partes æquales ejusdem mensuræ ex. gr. in Pedes; ac proinde concipiantur jam non ut lineæ, sed ut numeri. Dico productum differentiarum A E, E B, B H, inter se multiplicatarum æquari quadrato ipsius D E ducto in A H;

Demonstratio. Quoniam *m* D E est ad E B, ut B H ad H K; erit productum numerorum E D, H K, æquale producto differentiarum E B, B H. Ergo quadratus ipsius E D ad productum utrumque eodem modo se habet. Sed quadratus D E ad productum ex E D in H K *r* est ut E D ad H K. Ergo quadratus D E ad productum ex E B in B H, etiam est ut D E ad H K, hoc est (quoniam æquidistant E D, H K) ut A E ad *o* A H. Quoniam igitur est

m ostendi num. præc.
r Per 1. lib. 6.
o Per 4. lib. 6.

Ut	quadratus ipsius D E	Ad	productum differentiarum E B, B H,
Ita	numerus A E	Ad	numerum A H

erit quadratus ipsius D E ductus in A H par producto differentiarum E B, B H ducto in differentiam A E; hoc est, tribus differentijs A E, E B, B H inter se multiplicatis. Tres enim numeri *p* quomodocumque inter se multiplicati, idem producunt. Patet ergo propositum.

p Demonstravi ad p. 19. 18.

IV.

Fig. 22. Iisdem positis: productum differentiarum A E, E B, B H inter se multiplicatarum ductum in (A H) semissem laterum trianguli æquatur producto quadrati D E, multiplicati in quadratum ejusdem semisseos laterum (A H).

Demonstratio. Per *num.* 3. productum differentiarum se mutuò multiplicantium æquatur producto ex quadrato D E & semisse A H. Ergo productum differentiarum se mutuo multiplicantium, ductum in A H æquatur producto ex quadrato D E & A H ducto in A H. Sed productum ex quadrato D E & A H ductum in A H, æquatur quadrato D E ducto in quadratum A H, ut patet ex Scholio *pag.* 19. 8. Ergo productum differentiarum in se mutuo ductarum, æquatur quadrato ipsius D E ducto in quadratum A H. Quod erat demonstrandum.

V.

Fig. 24. Duo numeri A, B se mutuo multiplicantes faciant numerum D: & eorum quadrati sint C & F. Dico, si C & F se mutuo multiplicantes producant N, hunc esse quadratum numeri D.

Demonstratio. Cùm A multiplicans seipsum, & B gignat C & D; erit (per *prop.* 17. *lib.* 7) ut A ad B, sic C ad D. Item cùm B multiplicans se & A producat D & F; erit ut A ad B, (hoc est C ad D) sic D ad F. Sunt ergo C, D, F in continuâ proportione. Ergo N productum quadratorum C, F, æquatur quadrato ipsius D.

VI.

Fig. 22. Iisdem positis quæ *num.* 2. 3. 4: Dico: Radix quadrata numeri, qui fit ex producto differentiarum se invicem multiplicantium ducto in semissem laterum trianguli, exhibet aream trianguli in quadratis partium, secundùm quas latera sunt nota.

Demonstratio. Triangulum *a* A D B producitur ex normali D E ductâ in semissem ipsius A B. Pari modo quoniam normales D E, D G, D F ostensæ *b* sunt pares, triangula B C D, C D A, producuntur ex normali D E ductâ in semisses ipsarum B C, C A. Tota ergo area trianguli A B C producitur ex D E in semissem laterum omnium, id est in A H, ductâ. Ergo per *num.* 5. quadrati ipsorum D E & A H, inter se multiplicati producunt numerum quadratum areæ triangularis A B C. Atqui per *num.* 4. productum differentiarum A E, E B, B H, seu G C inter se multiplicatarum, ductum in A H semissem laterum æquatur producto quadratorum D E, A H. Ergo productum differentiarum ductum in semissem laterum trianguli gignit quadratum numerum areæ triangularis A B C. Ergo radix ejus quadrata dabit aream trianguli in quadratis, nempe partium lateralium: quod erat demonstrandum.

a per prob. 4.
b num. 1.

PRO-

PROBLEMA VII.

Aream superficiei irregularis multangulæ cujuscumque, quæ pervia sit, invenire.

Resolvenda est area in triangula vel quadrangula hactenùs mensurata.

Modus I.

Intra aream mensurandam designetur linea, quæ potest longissima B Q, ad quam ex omnibus angulis designentur *a* perpendiculares, quæ locum datum secabunt in quadrangula, quorum duo sint parallela latera, & in triangula rectangula. Metire singula per problemata 3 & 4. Summa ex omnibus collecta dabit aream quæsitam.

Fig. 35. *a per prob.* 4. *cap.* 10.

Modus II.

Fig. 26. Areæ mensurandæ rectangulum inscribe, quàm potes maximum A B C D, aut certè quadrangulum maximum bina habens latera parallela. Spatia residua resolve in triangula, &, si opus est, in quadrangula. Metire singula per *prob.* 1. 3. 4. Summa ex omnibus collecta aream quæsitam exhibebit.

Modus III.

Locum datum resolve in sola triangula, quæ metire singula per *prob.* 4. Omnium summa dat aream incognitam.

Fig. 27.

Modus I. est cæteris commodior, quia non cogimur campum sæpius obire. Ab hoc placet secundus. Tertius crebrâ discursatione molestior.

Scholium.

Si area pars aliqua sit curvilinea, inscribe illi triangula & quadrangula, donec residuum curvilineum æstimari non debeat.

PROBLEMA VIII.

Aream inperviam superficiei multangulæ irregularis invenire.

Varij modi sunt: breviter recensebo duos præcipuos.

Modus I.

Metire omnes loci dati *a* angulos (sive interni sint, sive externi, ut A) & omnia latera, quæ inter suos quæque angulos, quibus interjacent, scribe. Tum locum totum rectis ab uno angulo A, ad reliquos angulos mente designatis, in triangula partire. Expediet autem rudem *b* loci ichnographiam (nam exacta hic non requiritur) in charta describere A B C D E F G, annotatâ juxta angulos & latera singulorum quantitate, eamque, ut jam dixi, in triangula M, S, X, Z, N distribuere. Singula deinde triangula metienda hunc in modum.

Fig. 27. 28. *a per prob.* 4. *c.* 10. *b per prob.* 20. *c.* 10.

In triangulo M quia dantur angulus G & latera eum continentia A G, G F; ex his *c* reperietur latus A F, unà cum angulo O, qui ad solutionem sequentis trianguli reservatur. Quoniam igitur nota sunt omnia latera trianguli M, id mensurabitur per prob. 5 vel 6. Eadem erit trianguli N dimensio. Intermedia triangula sic metiemur. Quia notus est totus angulus F, & pars ejus O suprà facta est nota, etiam reliquus Q notus erit. Quoniam igitur in triangulo S nota sunt latera E F ex hyp. & A F ex inventione suprà, notum angulum Q continentia, ex his *d* reperietur latus tertium E A; ac proinde area trianguli S innotescet per prob. 5 vel 6. ac simili planè modo mensurabuntur triangula reliqua intermedia, X, Z. Colligantur tandem in unam summam singulorum triangulorum areæ jam inventæ, & prodibit area figuræ totius.

c per prob. 3. *d per idem.*

Rectas figuram datam parientes duxi ab uno omnes angulo, quia id erat ordinatiùs, non quia necessarium: & potest ea esse loci figura, ut debeant duci à diversis. Tum verò ferè similis est solutio triangulorum ex problemate rursum 10 vel 11.

Modus II.

Loco mensurando ABCDEFG, circumscribe rectangulum I K L M: cujus excessum suprà aream, quæ metienda est, partire vel in triangula, vel in quadrangula, quæ bina habeant parallela latera, vel mixtim in simul utraque. Deinde metire totum rectangulum per probl. 1, & excessum ejus in triangula ac quadrangula resolutum, per prob. 3 & 4. Mensuras quadratas in excessu repertas aufer à mensuris quadratis repertis in rectangulo. Mensuræ quadratæ residuæ debentur areæ quæsitæ inperviæ.

Fig. 29. 30.

Modus primus secundo præstat.

Scholium.

Ex hactenus constructis & demonstratis habetur agrorum quorumcumque dimensio: quam multi dum exemplis adductis sibi videntur illustrare, ob ingentem farraginem numerorum obscurant potiùs & intricant: numeri enim quamvis in ipso opere mensionis evitari non possint; ad docendum tamen majori hic impendio, quàm usu adscruntur.

Verùm inventio angulorum per instrumentum, sit exacta, ita si omnes sint interni, certò cognosces: omnes angulos inventos collige in unam summam. Si ea non præcisè conficias bis tot rectos demptis quatuor, quot latera habet figura mensurando, anguli non erunt exactè inventi. Patet ex Theoremate 2. Scholij *post* prop. 32. lib. 1.

PROBLEMA IX.

Aream cujuslibet figuræ regularis invenire.

Figuram regularem datam referat B C D E F G: centrum sit A: radij ex centro ad angulos ducti A C, A B &c. Perpendicularis ex centro ad latus unum A O. Opus ita institue.

Fig. 31.

Metire unum latus figuræ, C B. Erit C O semissis *a* ipsius C B etiam nota. Quia in triangulo rectangulo A O C notum est latus C O, & acutus A C O

a Per 3. *lib.* 3.

b Per prob. 3. c. 3. *c Per prob. 4. c. 11.*

(est enim semissis anguli D C B, qui repertus est *prob. 6. cap. 10.*) ex his *b* invenietur A O perpendicularis: quæ ducta in C O, dabit *c* aream trianguli C A B. Hæc toties sumpta quot sunt figuræ latera, dabit aream figuræ totius.

d Per prob. 6. c. 10. *e Per prob. 3. c. 3.* *f Per prob. 4. c. 11.*

Exemplum. Datum sit sexangulum ordinatum, cujus latus C B repertum sit pedum 20, semissis C O, 10. Angulus D C B est *d* grad. 120, adeoque A C O grad. 60. Ex latere C O pedum 10, & acuto A C O grad. 60, reperitur *e* A O pedum 20: quibus ductis in C O 10, proveniunt pedes quadrati 200 pro areâ trianguli *f* C A B. Hæc sexies sumpta exhibet pedes quadratos 1200, quibus sexanguli dati area æqualis est.

i Per 8.1. *m Per eand.*

Demonstrandum est, angulum A C O esse semissem anguli D C B, & figuram totam resolvi in tot æqualia triangula, quòt sunt figuræ latera: cætera enim ex constructione patent. Quia triangula CAB, CAD sibi mutuo æquilatera sunt, erit *i* angulus ACB par angulo A C D (quod erat primum); & triangulum *m* C A B æquale triangulo H. Eodem modo erit H ipsi I, & I ipsi K, & K ipsi L, & L ipsi M, & M ipsi demum C A B æquale. Quare omnia triangula dicta inter se æqualia sunt: quod erat alterum.

PROBLEMA X.

Quæ sit proportio inter latera regularium figurarum eidem circulo inscriptarum, indagare.

Fig. 31.

ID obtinebimus, si cujuslibet figuræ latus in partibus radij inveniatur.

a Patet ex 8.1. *b Per def. 6. c. 3.*

Esto figuræ cujusvis ordinatæ latus C B. Ex centro ducatur ad C radius A C (qui ponatur esse 100000) & perpendicularis A O. Angulus centri C A B datur per *prob. 6. cap. 10.* Hujus semissis *a* est O A C. Ergo etiam O A C datur. Ergo & sinus ejus, qui est *b* O C; ac proinde scitur quot partium sit C O (adeoque & ejus dupla C B) quarum radius A C est 100000.

Hoc artificio confecta est tabella hic adjecta, quæ exhibet 9 primarum figurarum latera in partibus radij 10000000.

Radius	10000000
III	17320508
IV	14142135
V	11755705
VI	10000000
VII	8677674
VIII	7653668
IX	6840402
X	6180339
XI	5634651
XII	5176380

Ludolphus supputavit latera polygonorum usque ad 81-angulum, in partibus radij 100000, 00000, 00000; ex quo hæc tabella desumpta est numeris decurtatis.

PROBLEMA XI.

Quæ sit proportio inter areas figurarum regularium eidem circulo inscriptarum invenire.

ASsequemur propositum, si areæ singularum reperiantur in quadratis partium radij.

Fig. 31.

Figuræ ordinatæ cujuslibet latus esto C B, & sit radius A C, perpendicularis è centro A O. In triangulo rectangulo X, angulus A C O est notus: est enim *c* semissis anguli D C B, qui datur per *prob. 6. c. 10.* hujus A O *d* est sinus; ac proinde scitur quot AO partium sit, quarum radius A C est ex. gr. 10000000 sed & C O in ijsdem radij partibus nota ex *problemate præcedenti.* Ergo A O nota in radij partibus ducta in C O semissem lateris C B, etiam notam in partibus ijsdem radij, dabit aream trianguli C A B in quadratis earumdem radij partium: quæ toties sumpta quot sunt figuræ latera, exhibebit in ijsdem quadratis partium radij, aream figuræ totius.

c Patet ex 8.1. *d Per def. 6. c. 3.*

Inventâ hoc modo singularum figurarum magnitudine, manifesta est earumdem inter se proportio.

CAPUT XII.

Circuli dimensio & quadratura veræ propinqua.

PROBLEMA I.

Proportionem circumferentiæ ad diametrum tam propinquam veræ, quàm libuerit, invenire.

RAtionem circumferentiæ ad diametrum numeris exprimere primus ex omnibus Archimedes aggressus est. Inscripsit ille circulo polygonum ordinatum 96 laterum, atque alium huic simile circumscripsit: demonstravit deinde perimetrum circumscripti continere minùs quàm diametros $3\frac{1}{7}$, sive $3\frac{10}{70}$; ambitum verò inscripti continere plus quàm diametros $3\frac{10}{71}$. Atque inde conclusit etiam circuli circumferentiam, quæ ambitu circumscripti sibi polygoni minor est, inscripti verò major, continere minùs quàm diametros $3\frac{1}{7}$, seu, $3\frac{10}{70}$ plus verò quàm $3\frac{10}{71}$; ac proinde rationem circumferentiæ ad diametrum minorem esse quàm 22 ad 7; majorem verò quàm 223 ad 71; hoc est minorem quàm 1562 ad 497, majorem autem quàm 1561 ad 497.

Positâ igitur diametro	497.
erit circumferentia major verâ	1562.
& circumferentia minor verâ	1561.

Quare cùm circumferentiæ hunc in modum inventæ differant inter se tantùm $\frac{1}{497}$ parte diametri; differunt à circumferentiâ verâ inter ipsas media minùs quàm $\frac{1}{497}$ diametri parte.

Modus appropinquandi.

Quod verò ad modum attinet, quo ex polygonorum inscriptorum & conscriptorum collatione ad veram circumferentiæ cum diametro proportionem appropinquari in infinitum potest, is prout ab Archimede

mede instituitur, exactus quidem est & certus, sed operosior aliquantò & implicatior. Quare alium afferam magis expeditum, qui omnis ab hoc uno problemate deducatur: *dato sinu alicujus arcus, sinum semissos ejusdem arcus invenire*: cujus constructionem tradidi porisinate 2. *cap.* 2. Ita ergo ratiocinabimur.

Fig. 32. Inscriptum circulo sit latus hexagoni ordinati *cf* subtendens arcum *cbf* grad. 60, quod in *o* perpendiculariter secet diameter *fab*. Erit ergo tam *a* recta *cf*, quàm *b* arcus *cbf* bisectus, hæc in *o*, ille in *b*; ac proinde *co* semissis lateris hexagonici *cf*, est sinus arcus *cb*, qui est grad. 30. cùm sit semissis arcus *cbf* grad. 60. Quoniam igitur latus hexagoni ordinati circulo inscripti æquale *d* semidiametro est; positâ semidiametro partium 100000, erit lateris hexagonici semissis *co*, nempè sinus grad. 30, earumdem partium 50000.

a 3. 3.
b 30. 3.
d 15. 4.

Ex sinu grad. 30 jam invento, reperietur *li* sinus *e* semisseos, nempè grad. 15: & ex sinu grad. 15 reperietur *f* sinus grad. 7. 30': ex hoc verò sinus grad. 3. 45'; ex illo autem sinus grad. 1. 52'. 30", qui est 327190½. Atque ita initio facto ab sinu grad. 30, sinus omnes per bisectiones continuas procedendo in infinitum reperientur in partibus semidiametri.

e per porif. 2. cap. 2.
f per idem.

Quia porrò *co* sinus grad. 30, est dimidium latus hexagoni, *li* sinus ex bisectione primâ nempè grad. 15, erit dimidium latus dodecagoni; sinus autem bisectionis secundæ, grad. 7. 30' erit dimidium latus polygoni 24-anguli; sinus verò bisectionis tertiæ, grad. 3. 45', erit dimidium latus 48-anguli; & sinus bisectionis quartæ, grad. 1. 52'. 30", erit latus dimidium 96-anguli circulo inscripti: atque eo deinceps in infinitum processu, sinus bisectionum omnium reliquarum, erunt latera dimidia polygonorum, quorum uniuscujusque numerus angulorum sive laterum semper duplo major est, quàm ejus quod ipsum antecessit. Quare cùm sinus prædicti noti jam sint in partibus semidiametri, etiam dimidia latera horum omnium polygonorum in iisdem semidiametri partibus nota erunt.

Quia verò est ut dimidium latus alicujus polygoni ad semidiametrum, ita totum latus ad totam diametrum, manifestum est eos sinus, qui exhibebant latera polygonorum dimidia in partibus ex. gr. 100000 semidiametri, exhibere latera integra in partibus æquè multis (100000) totius diametri. Atque eo modo latera integra polygonorum circulo inscriptorum, 12-anguli, 24-anguli, 48-anguli, 96-anguli, atque ea deinceps in infinitum serie reperiuntur in partibus diametri. Quare si uniuscujusque polygoni latus per denominatorem polygoni multiplicetur, in iisdem diametri partibus, nota erit perimeter polygoni tota. Cæterùm quò plurium erunt laterum polygona, eò pluribus etiam cyfris taxanda diameter erit: unde si usque ad 96-angulum diameter assumpta fuerit 100000, aut 10000000, pro 192-angulo, & sequentibus deinceps, ea statuetur, 100, 000000, aut 1000, 000000, & sic deinceps.

Inventâ perimetro inscripti polygoni, facilè erit perimetrum similis circumscripti invenire. Cujus enim arcus sinus est dimidium latus (*co*) polygoni inscripti, ejusdem tangens est (*xb*) dimidium latus polygoni conscripti: quod proindè per *prob.* 6. *cap.* 2. reperietur in partibus semidiametri, ac proinde totum latus *xz* in partibus æquè multis diametri totius: ut, si *xb* fuerit partium 2610523, quarum semidiameter *ab* est 10000000, etiam *xz* erit 2610523, quarum diameter *fb* est 10000000.

Proportio vera proxima.

Hunc itaque in modum bisectione continuâ, crescente semper in duplum numero inscriptorum conscriptorumque laterum, ad proportionem veram sine termino appropinquabitur. Omnium hoc in genere conatus vicit laboriosissimus logista Ludolp à Ceulen, qui initio facto à latere quadrati bisectione sexagesies repetitâ, hos tandem limites assecutus est:

Diameter

100000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000
Circumferentia minor verâ.
314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950288.
Circumferentia major verâ
314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950289.

differentia utriusque est particula diametri denominata à numero, qui constat unitate, & circulis, sive cyfris 35, cujus ad diametrum proportio minor est, quàm unius arenulæ ad orbem terræ. Assumpsit porrò Ludolphus pro diametro respectu integrorum laterum, unitatem cum 72 circulis; unde circumferentiæ per eam acquisitæ constabant notis 73, sed omissis 37 primis, solas 36 posteriores retinuit. Ex quo apparet quàm accurata proportionis suprà traditæ calculatio sit.

Ad usum proportionis à Ludolpho inventæ observa, diametro ad pauciores circulos taxatæ ex. grad. ad 1, cum cyfris sex (1000000) respondere circumferentiam totidem postremis notis expressam 3141592, cujus defectus à verâ sit minor unâ 1000000 diametri, & diametro existente 10,000000, circumferentiam esse 31,415926, cujus defectus sit minor unâ 10, 000000 diametri; & sic deinceps.

Quæ quidem scienti logisticam decimalem sunt manifesta.

Ratio proxima vera in numeris parvis; 355 ad 113.

Ea traditur ab Adriano Metio; neque alia ulla est ad usum præstantior, in minimis quippè terminis ad veram accedens quàm maximè. Quarum partium diameter est 113, earum est circumferentia 355, tam veræ propinqua, ut eam ne unâ quidem ejus quindecim millionesimâ parte excedat. Positâ enim diametro 10,000000, si fiat ut 113 ad 355 ita 10, 000000 ad aliud., proveniet circumferentia 31415929, cujus septem notæ cum Ludolphæa conveniunt, solâ primâ 9 differente binario. Nam circumferentia 31415926, constans nimirùm 8 postremis notis Ludolphi, est minor verâ; quæ enim constat

ſtat notis 36, poſtremâ exiſtente , 8, eſt minor verâ. Atqui 2 eſt numeri 31415926 pars minor parte denominatâ à numero 15707963, ut dividendo patet. Ergo à fortiori, 2 eſt veræ circumferentiæ pars minor, quàm denominata à numero 15707963; hoc eſt multò minor quàm una quindecim-millioneſima veræ circumferentiæ, ſeu una quinquemillioneſima diametri pars.

PROBLEMA II.

Ad proportionem veræ proximam circumferentiæ cum diametro jam inventam, aliâ viâ breviori pervenire.

Diligenter & eruditè in Cyclometrico ſuo hoc argumentum tractavit Willebrordus Snellius: qui tamen majorem laudem tuliſſet, ſi duo præcipua Theoremata nempè 28, & 29, quibus res ea omnis innititur, demonſtraſſet. Non ita pridem de eodem argumento tractatum inſignem edidit Chriſtianus Hugenius, in quo præter alia præclara non pauca, duo illa Theoremata, quæ Snellius indemonſtrata reliquerat, demonſtravit.

Fig. 33. Primum erat ejuſmodi: *circulum tangat recta B X; & diameter B S à tactu B educta producatur in R, ſic ut R S ſit par radio; & ex R ducatur recta circulum ſecans, & tangenti occurrens in X. Erit B X minor arcu B C.*

Fig. 35. Alterum verò tale: *Circulum tangat B H, & à tactu diametur educatur B S. Sit autem arcus B C triplus arcus S Q. Recta Q C abſcindet à tangente partem B H majorem arcu B C.*

Ex his magno calculi compendio ratio peripheriæ ad diametrum quantumvis propinqua veræ, reperietur hunc in modum.

Modus appropinquandi.

Ex ſinu grad. 30 (qui eſt ſemiſſis lateris hexagoni, hoc eſt per *prop*, 15. *lib*. 4 ſemiſſis radij) inveniatur, per *poriſ*. 2. *cap*. 2, ſinus grad. 15, & ex hoc ſinus grad. 7. 30′ atque ita deinceps ſinus omnium arcuum ſibi mutuo ſubduplorum, qui erunt dimidia latera 6-anguli, 12-anguli, 24-anguli, & poligonorum ſubſequentium circulo inſcriptorum, quæ duplo ſemper plura habeant latera & angulos, quàm quod præceſſit.

Ducamus initium calculi ab inſcripto 96-angulo, hujus latus dimidium eſt ſinus grad. 1. 52′, 30″, qui modo jam dicto reperitur 327190828, quarum radius eſt 10000000000. Ex illo autem per *poriſma* 1. *cap*. 2 reperitur ſinus complementi 9994645875. Inſcriptum igitur circulo ſit latus 96-anguli C F (*vide Fig*. 33) quo biſecto in O, per O ducatur diameter perpendicularis B A S, quâ productâ in R, ſic ut S R ſit par radio A B, ex R per C & F educantur rectæ, circulum in B tangenti occurrentes in X & Z. Igitur C O ſinus grad. 1. 52′, 30″, eſt 327190828: V C verò, ſive A O, ſinus complementi eſt 9994645875, quo addito ad A R, quæ eſt 20000000000, utpote diametro par, ſit tota R O 29994645875. B R demùm cùm ſit par tribus radijs, erit 30000000000. Jam verò eſt per 4. 6, ut R O 29994645875 ad O C 327190828, ita R B 30000000000 ad B X; quæ proinde per reg. prop. reperitur 327249232, quarum ſemidiameter eſt 10000000000. Quare etiam tota tangens X Z eſt 327249232, quarum tota diameter eſt 10000000000. Atqui Z X, per Snellij *Theor*. 1. ſuprà, eſt minor arcu C F, qui eſt pars 96ta peripheriæ. Ergo etiam X Z 327249232, ducta in 96, nimirum 31415926272 minor eſt 96 arcubus C F, hoc eſt totâ circuli circumferentiâ.

Fig. 35. Terminus autem circumferentiâ major ſic reperietur. Inſcribatur rurſum circulo Q L, latus 96-anguli; eoque biſecto in K, per K ducatur diameter perpendicularis S A B. Sumatur autem arcus B C triplus arcus S Q, & B F triplus arcus S L: eritque arcus C B F 32da pars peripheriæ, cùm Q S L ſit pars 96ta. Tangat deinde circulum in B recta HBY, cui in H & Y occurrant rectæ per puncta Q, C, & L, F eductæ. Denique per L, & centrum A emiſſa recta, occurrat peripheriæ in I, tangenti in X. Quoniam anguli L A S I A B a æquales ſunt, etiam arcus æquales b erunt. Ergo cùm totus arcus B C ſit triplus c arcus Q S, ſeu L S; erit reliquus I C duplus ipſius Q S, hoc eſt par toti Q S L. Ergo Q H, L A X ſunt parallelæ. Sunt autem etiam parallelæ Q L, H Y. Ergo L Q H X eſt parallelogrammum. Ergo Q K L, duo nempè ſinus arcus Q S, æqualis eſt H X, B X verò eſt tangens arcus B I, hoc eſt L S, hoc eſt Q S. Quare tota B H æquatur arcus Q S tangenti, & ſinibus duobus. Atqui ſinus arcus Q S in primâ jam parte inventus eſt 327190828, cujus duplo 654387656, ſi addatur ejuſdem arcus Q S tangens, quæ per *Probl*. 6. *cap*. 2 reperitur 327366104, producetur tangens B H 981747760, quarum ſemidiameter eſt 10000000000. Quare etiam tota tangens H Y erit 981747760, quarum diameter tota eſt 10000000000. Atqui H B Y major o eſt arcu C B F, qui eſt pars 32da circumferentiæ. Ergo etiam H Y, 981747760 trigeſies bis ſumpta, nempè 31415928320 major erit arcu C B F 32 bis ſumpto, hoc eſt totâ circumferentiâ.

a 15. 1.
b 33. 6.
c *per conſt.*
o *per Snellij th*. 2. *ſuprà.*

Poſitâ igitur diametro 10000000000, circumferentia media eſt inter hoſce terminos.

31415926272
31415928320

qui cùm Ludolphæis in ſeptem notis poſtremis conveniunt, cum viâ Problematis præcedentis ex eodem 96-angulo inventi limites conveniant in notis ſolùm tribus.

Eodem artificio licebit ad veram circumferentiam appropinquare in infinitum: ſi nimirum pro acquiſitione limitis minoris inſcribatur latus 192-anguli, tum 384-anguli, & ſic deinceps duplicando ſemper numerum angulorum ac laterum: pro limitis autem majoris inventione, ſi B C ſemiſſis arcus C B F à novo inſcripto latere ſubtenſi in *Fig*. 33, transferatur in S Q, in *Fig*. 34, ejuſque triplus accipiatur B C, ac cætera tum omnia peragantur ut prius.

Scholium.

Circa modum approximandi Problemate 1, & 2 jam explicatum, hæc obſerva.

1. Quando limites, inter quos vera circumferentia concluditur, vel non poſſunt haberi exacti, quia acquiri debent per extractionem ex numero non quadrato, vel licet exacti habeantur, tamen adhæret illis fractio, tunc pro

limite

limite minori, assumi debet vero minor, & pro limite majori assumendus est vero major, aliàs inferre certò non poteris circumferentiam qua inter limites media est, esse hoc minorem, illo majorem, aut certè aqualem utrilibet: quod tamen omninò necessarium esse liquet ex discursu ipso approximationis utriusque.

2. *Quamvis approximationibus jam dictis, quantumvis sine termino continuatis, ad veram circumferentia cum diametro rationem perveniri numquam possit; minimè tamen inde concluditur, circumferentiam & diametrum incommensurabiles esse, cùm ad proportiones etiam rationales quascumque possit sine termino appropinquari, sic ut nunquam, quantumvis approximando, pervenire ad ipsam possit.*

Etiamsi autem incommensurabiles magnitudines essent circumferentia & diameter, sciant tyrones, quod aliàs suspicari forsan possent, nequaquam inde sequi impossibilem esse lineam rectam circumferentia aqualem; cùm in Geometriâ notissimum sit lineas rectas dari qua inter se incommensurabiles existant.

PROBLEMA III.

Ex diametro circumferentiam & ex circumferentia diametrum invenire quàm proximè.

Data sit ex. gr. diameter orbis terræ, sive maximi terræ circuli, milliariorum Belgicorum 2759. Oporteat ex eâ, terræ circumferentiam invenire.

Ex proportionibus diametri ad circumferentiam *Probl.* 1. allatis assumatur una, terminus minor statuatur primo loco; major secundo; diameter data milliariorum Belg. 2759 tertio; quartus locus debetur circumferentiæ incognitæ. Sic ergo stabunt termini

Ut	7	Ad	22
Ita	diametri datæ milliar. 2759	Ad	circumferentiæ milliaria.....

Ut	113	Ad	355
Ita	datæ diametri milliar. 2759	Ad	circumferentiæ milliaria.....

Per regulam Trium ex proportione 7 ad 22, proveniet circumferentia $8671\frac{3}{7}$ milliariorum Belg. quæ excedit veram ferè unâ parte 497ma diametri ut initio *primi Probl.* ostensum est.

Ex proportione autem 113 ad 355 proveniet circumferentia $8667\frac{74}{113}$, excedens veram minus quàm unâ diametri parte quinque millionesimâ, ut ostendi sub finem *Probl.* 1. Quare si milliaria diametri 2759, hoc est pedes Rhynlandici 49662000 dividantur per 5000000, reperietur circumferentia terrena sic inventa non integris 10 pedibus veram excedere. Ab hac autem circumferentiâ, quæ tantillo excessu peccat, prior illa milliariorum $8671\frac{3}{7}$, quæ ex ratione 7 ad 22 reperta fuit, differt circiter 4 milliariis Belgicis.

Quare proportio 113 ad 355 cùm sit priori incomparabiliter veræ propinquior; semper erit adhibenda, cùm exactum quid expetitur, & in circulis magnis.

Quod si adhuc amplior accuratio desideretur, ex terminis Ludolphæis accipe pro circumferentiâ postremas notas 9 aut 10, aut plures, si placuerit. Sumuntur plures notæ quàm 8; quia si tantùm sumerentur 8, nimirùm 10000000, & 31415926, ferè nihil amplius obtinebitur quàm per 113 & 355; quæ, positâ diametro 10000000, exhibet septem notas Ludolphæas.

Ut ex circumferentiâ reperiatur diameter; statuere oportet primo loco terminum majorem 355; secundo minorem 113; tertio circumferentiam datam.

Ut	355	Ad	113.
Ita	circumferentiæ milliaria 8667	Ad	diametri quæsitæ milliaria.....

Ex inventâ ratione circumferentia ad diametrum Corollaria.

I.

Circulus ad quadratum suæ diametri, (hoc est quod ipsi est circumscriptum) eam ferè rationem habet, quam 355 ad 452.

Demonst. In selectis ex Archimede, (quæ habes post *lib.* 12. elem. nostrorum) *cor.* 2. *prop.* 5. ostensum est circulum esse ad quadratum circumscriptum, ut circumferentia est ad 4 diametros. Quare cùm circumferentia *a* sit 355, quarum diameter est 113, cujus quadruplum est 452; liquet circulum esse ad quadratum circumscriptum, ut 355 ad 452.

a Vide prob. 1.

Ex ratione Archimedæâ circumferentiæ ad diametrum, nempè 22 ad 7, elicitur ratio circuli ad quadratum diametri ea, quæ est 11 ad 14. Sed altera plus quàm millies exactior est.

II.

Circulus ad quadratum sibi inscriptum est ferè, ut 355 ad 226.

Demonstr. Nam quadratum *o* inscriptum dimidium est circumscripti. Quare cùm circulus sit ad quadr. circumscriptum ut 355 ad 452, idem erit ad circumscripti semissem, nempè ad quadr. inscriptum, ut 355 ad 226 semissem numeri 452.

o per corol. 7. 4.

III.

Circulus ferè est ad quadratum circumferentiæ, ut 113. ad 1420.

Demonstr. Circulus æquatur *b* rectangulo sub quartâ parte diametri & circumferentiâ. Ergo circulus est ad quadratum diametri *c* ut quarta pars diametri ad circumferentiam, sive ut tota diameter ad quatuor circumferentias. Quare cùm diameter sit ad circumferentiam ut 113 ad 355; si numeri 355 sumatur quadruplus 1420, erit circulus ad quadratum circumferentiæ ut 113 ad 1420.

b Vide selecta nostra ex Archim. cor. 1. *prop.* 5.
c per 1. 6.

Ex Archimedæis terminis 22 & 7, proportio dicta elicitur 7 ad 88: Verùm prior plus millies accuratior est.

PROBLEMA IV.

Areæ circularis dimensio veræ proxima.

NOtam fac in aliquâ mensurâ diametrum, atque ex eâ *a* circumferentiam elice. Aut si detur circumferentia, ex eâ *b* elice diametrum. Semissem diametri multiplica per semissem circumferentiæ. Productus numerus exhibet aream circuli in quadratis partium diametri & circumferentiæ.

a per prob. 3.
b per idem

Exempl. Oporteat aream maximi Terræ circuli exhibere. Circumferentia maximi Terræ circuli est milliariorum Belgicorum (seu unius horæ) 8670, quam stabilivi *cap. 6.* hujus semissis est 4335. Ex hac *c* assumptâ ratione 355 ad 113, elicitur semidiameter $1379\frac{41}{71}$, sed fractio negligi potest. Ducatur semicircumferentia 4335 in semidiametrum 1379. Proveniunt milliaria Belgica quadrata 5977965, quibus maximus Terræ circulus æqualis est.

c per prob. 3.

Demonst. In selectis ex Archimede *prop. 5. Coroll.* 1. ostendi circulum æquari rectangulo contento sub semidiametro & semicircumferentiâ. Atqui rectanguli hujus capacitas producitur *d* ex multiplicatione laterum quibus continetur, nimirùm semidiametri & semicircumferentiæ. Ergo & circuli capacitas ex eâdem multiplicatione proveniet.

d per prob. 1 c.11.

PROBLEMA V.

Dati circuli circumferentiæ rectam lineam proximè æqualem exhibere.

Fig. 36.

INscribe circulo latus sexanguli CF, ad quod per A centrum ducatur perpendicularis diameter BAS, quæ continuetur in R, donec SR sit par radio. Ex R, per C, & F duc rectas RE, RG, quibus occurrat tangens ZBX. Recta XZ sexies sumpta tam proximè æqualis est circumferentiæ, ut ab eâ superetur non integris 138 centimillesimis partibus diametri, hoc est minùs quàm 1‴ 3⁗ 8ᵛ vide *theor. 1. cap. 10* nostræ Arithm.

Quod si inscripseris NM latus duodecanguli, & cætera fiant ut priùs; erit tangens KL duodecies accepta, tam proximè æqualis circumferentiæ, ut ab eâ vix superetur unâ decimillesimâ parte diametri.

Demonstr. Per modum approximandi traditum *Probl. 2*, positâ diametro 100000, reperitur circumferentia verâ minor 314022, ea nimirùm quæ constat ex rectâ ZX sexies sumptâ; major autem verâ elicitur 314160. Harum differentia cùm sit 138 quarum diameter est 100000, manifestum est minorem 314022, quæ componitur ex ZX sexies sumptâ, à circumferentiâ verâ excedi minùs quàm partibus 138, quarum diameter est 100000, hoc est paulò amplius quàm unâ millesimâ parte diametri.

Similis erit demonstratio pro latere duodecanguli NM. Nam ex ratiocinio Problematis. 2 positâ diametro 10000000, circumferentia verâ minor, constans 12 rectis KL, reperitur 31415088; major autem verâ, 31416200: quarum differentia cùm sit 1112 decimillionesimæ diametri, patet circumferentiam verâ minorem, 12 nempè rectas NM, minùs excedi ab ipsâ circumferentiâ verâ, quàm 1112 decimillionesimis diametri, hoc est *e* minùs, quàm 1″ 1‴ 1⁗ 2ᵛ, diametri

e per theor. 1. c 10. nostræ Arithm.

Aliter.

Fig. 34.

Ductâ utcumque diametro DE, secetur semiperipheria DAE *a* bifariam in A, reliqua trifariam *b* in B & C. Duæ rectæ AF, FG Quadrantem circuli excedunt non unâ quinque millesimâ diametri. Construxit & demonstravit Christianus Hugenius *lib. de circuli magnitudine prop. 11.*

a per 30.3.
b per 15.4.

Aliter.

Diametro triplicatæ addatur una septima ejusdem. Tota recta sic composita excedet circumferentiam non una 497ma parte diametri, ut ostensum est suprà sub initium *Probl. 1.*

Aliter & omnium optimè.

Triplicatæ diametro adde unam 16^am^ ejusdem. Tota composita excedet circumferentiam non unâ quinquemillionesimâ parte diametri.

Nam si diameter ponatur 113, ea triplicata est 339, cui si addatur 16, fit circumferentia 355: quam esse tam exactam ostendi sub finem 1. Problematis.

PROBLEMA VI.

Dato arcui rectam proximè æqualem exhibere.

Fig. 36.

ARcus detur BQ: quem aliquoties bisecando resolve in partes æquales; donec una earum BN fiat minor sextâ parte circumferentiæ, & accedat ad duodecimam. Tum per B ducatur diameter BS, continueturque in R, donec SR sit par radio. Ex R per N ducatur recta cui occurrat tangens BL, in L. Erit BL proximè æqualis arcui BN, ac proinde aliquoties accepta par toti arcui BQ.

Patet ex demonstratis 5 *Problemate*, quamvis enim arcus BN non esset pars aliquota circumferentiæ totius, sive non subtendens latus alicujus polygoni ordinati, nihilominus clarum est tangentem BL ab eo insensibiliter differre.

Quando arcus datus est pars aliquota, ex. gr. octava, totius circumferentiæ; tunc per *præced.* reperiatur recta toti circumferentiæ par: ejus pars ex. gr. octava, erit par arcui dato.

PROBLEMA VII.

Dato circulo quadratum quàm proximè exhibere æquale.

Fig. 37.

PEr *Problema* 5 dati circuli circumferentiæ æqualis inveniatur recta linea AC, quæ ponatur ad centrum A. Cum CA angulum rectum efficiat radius AB, ducaturque recta BC. Triangulum rectangulum BAC est æquale circulo tam exactè, quàm recta AC est æqualis peripheriæ.

Est Archimedis, & ostensum est à nobis in *selectis* ex eodem *theor. prop. 5.*

Vel Rectangulum construe AGFB, cujus unum latus AG sit par dimidiæ peripheriæ, alterum AB æquale radio. Etiam hoc erit circulo æquale, est enim æquale triangulo ABC ut patet ex 41. 1.

Ad quadraturam circuli satis est quamlibet figuram rectilineam circulo aequalem exhibere, omnes enim ad quadratum reducuntur per 16. 2.

Aliter.

n ex Corol. 1. prop. 20. lib. 6.
u Per cor. 1. post. prob 3.
d ostendi sub fin probl. 1.

Ut 452 est ad 355, ita fiat n quadratum diametri ipsius circuli ad aliud quadratum, quod vocemus Z. Erit hoc circulo aequale quàm proximè.

Nam quadratum diametri u est ad circulum ut 452 ad 355, sic d ut non peccetur unâ quinquemillionesimâ parte diametri. Sed quadratum diametri per constr. etiam est ad quadratum Z, ut 452 ad 355. Ergo quadratum diametri eodem modo se habet ad circulum & ad quadratum. Ea igitur o aequalia sunt.

o Per 9. 5.

Reductiones circumferentiae ad rectam lineam, ac proinde circuli ad quadratum per lineas curvas quadratricem & spiralem. Theoriam quidem habent pulcherrimam; verum ad praxim inutiles sunt, quod earum descriptio sit impedita ac lubrica: & habet spiralis praeterea difficultatem sibi propriam, quod ratio ducendae tangentis, quae ad quadraturam requiritur, neque Geometricè, neque mechanice sit inventa: sciunt vero Geometrae quantus error committatur, si in tangente vel tantillo peccetur.

Scholium.

An quadratura & dimensio circuli absoluta possibilis sit.

Dubitatum de hoc fuit, & olim à multis, & (opinor) etiam modo a nonnullis dubitatur, ii praesertim, qui non admodum Geometriae periti sunt: Occasionem dubitationi praebuit ingens Problematis difficultas, quae bis mille annis propemodum, praecipua totius orbis ingenia nequidquam exercuit. Dubitantium argumenta praeter allatum jam praejudicium; haec ferè sunt.

1. Angulo semicirculi datur rectilineus angulus, & minor, acutus nempè quilibet, & major nimirùm rectus; neque tamen ullus dari potest aequalis. Quamvis igitur lineâ circulari detur recta linea minor, & recta linea major, consequens non est ut dari possit etiam aequalis. Pari modo quamvis circulo dentur quadrata & minora, & majora, non sequitur dari posse etiam aequale.

2. Circulus & quadratum seu figura alia rectilinea, sunt speciei diversae. Ergo non possunt ad aequalitatem revocari.

Ad 1. Respondeo, si (quod fecére hactenus plerique) angulos fatearis esse quantos, urgere argumentum, cui proinde non facile fiat satis. Sin (quod mihi ad prop. *16. 3. videor demonstrasse) anguli quanti non sint, argumentum ruere sponte suâ utpote falsâ nixum hypothesi. Falsum igitur est angulo semicirculi dari rectilineum angulum minorem & majorem. Nullus enim angulus altero est major vel minor, vel aequalis, ut ostendi loco citato, sed alter alteri similis & dissimilis est. Non demonstravit igitur Euclides angulum acutum quemvis esse minorem angulo semicirculi, sed unum latus acuti cadere semper intra circumferentiam, ex quo tantùm sequitur acutum angulum esse dissimilem angulo semicirculi. Nequaquam igitur ab istis ostensum est, aut ostendi ab ullo potest, esse quidpiam ejusmodi, quo possit dari majus, & dari minus, neque tamen dari possit aequale.*

Ad 2. Respondeo mirari me ullum reperiri, qui vim aliquam inesse huic argumento putet, cùm prorsus manifestum sit speciei diversitatem non officere ut aequalitas habeatur, nisi talis sit, quae magnitudines inter se incomparabiles reddat, tum videlicet, cùm una è duabus quotiescumque multiplicata nunquam potest alteram aequare vel excedere. Liquet autem rectam lineam toties sumi posse ut circularem excedat, & quadratum ita posse augeri ut circulum superet, ac proinde magnitudines esse comparabiles, & quarum aliqua sit ad invicem proportio.

Diversitas porrò specifica inter quadratum & circulum haec sola est, quod hic superficies sit curvilinea, sive intra curvam lineam comprehensa, illud verò superficies rectilinea, quam nimirùm recta linea ambiant. Atqui variae superficies curvilineae jam sunt quadratae; Hippocrates enim Chius quadravit quasdam lunulas; & Parabolam Archimedes & alii post illum. Deinde apud Pappum a quadratur pars superficiei sphaericae. Denique partem superficiei Cylindricae quadravit P. Gregorius à S. Vincentio clarissimus Geometra Societatis nostrae operis sui Geom. lib. 9. *& post illum ego, sed aliâ planè viâ,* Cylindric. & Annular. lib. 2. prop. 17 & 24.

a Prop. 30. lib. 4.

Aliâ etiam paritate objectionis inanitas evincitur. Tanta est diversitas inter superficiem planam & curvam, quanta inter planam rectilineam & planam curvilineam. Atqui superficies curva reducta est ad planam ab Archimede; is enim circulum exhibuit aequalem superficiei b Cylindricae, c conicae, d sphaericae. Ergo etiam plana superficies curvilinea, nempe circulus, reduci potest ad rectilineam planam.

Vide selecta nostra ex Arch. b 11. c 13. d 24.

Atque haec dicta sint ad objectiones partis negativae, quae fere ejusmodi sunt ut eas nequeas convellere, quin eâdem operâ quadraturae possibilitatem evincas. Iuvat nihilominus rem adeo celebratam exactius demonstrare.

Quadratura circuli certò possibilis est.

I. Inscribe circulo quadratum A B C D, & aliud eidem circumscribe E F G H. Bisectis deinde singulis arcubus, inscribe octogonum A I B M C L D K, & aliud circumscribe O N V T S R Q P. Si hoc modo duplicando semper laterum numeros, figuras circulo in infinitum inscripseris & circumscripseris, perimetri inscriptarum & conscriptarum figurarum, & inter se, & multò magis ab ipsâ peripheriâ circuli mediâ, differre poterunt a quantitate minore quavis datâ.

Fig. 38.

a dem. in selectis ex Archim. prop 3.

Explicetur perimeter quadrati circumscripti in rectam A B; & perimeter quadrati inscripti in rectam A E: Perimeter item conscripti octogoni in rectam A C, perimeter verò octogoni inscripti in rectam A D. Atque ita sine termino cogitemus perimetros inscriptas & circumscriptas in rectam lineam A B ex puncto A explicari. Differentia perimetrorum quadraticarum erit E D, Octogonicarum D C, & sic deinceps: quae differentiae quoniam b sunt quacumque datâ minores, liquet terminos perimetrorum bini inscriptarum, inde conscriptarum ad invicem accedere ad intervallum quovis dato minus, quamvis nunquam se attingant. Ex quo manifestum est esse terminum quemdam intermedium ex. gr. punctum O, ad quem perimetri inscriptae semper crescendo, circumscriptae verò semper decrescendo, nunquam pertingant, appropinquent tamen eidem ad intervallum dato quocumque minus: ac proinde est recta quaepiam A O major omni perimetro inscriptâ, omni verò circumscriptâ minor, in quam quasi in terminum perimetri inscriptae semper crescendo & perimetri circumscriptae semper decrescendo desinant. Haec igitur recta linea A O circum-

Fig. 39.

b Ibid.

ferentia

ferentia circuli necessariò æqualis est cùm etiam eodem modo inscripta ac circumscripta peripheria desinant in ipsam circumferentiam.

2. *Difficultas quadraturæ reducta est ad magnitudines homogeneas. Nullum autem dubium esse potest, quin duarum magnitudinum homogenearum aliqua sit proportio, quæ proinde possit exprimi rectis lineis, & æqualitas inter eas reperiri.*

Demonstravi lib. 4. Cyl. & Annul. prop. 42. *circumferentiam circuli esse ad diametrum, ut superficies annuli clausi est ad superficiem sphæræ sibi inscriptæ. Atqui superficies annuli ac sphæræ prorsus homogeneæ sunt, cum ambæ genitæ sint ab eadem circuli circumferentiâ circulariter motâ, ac proinde earum aliqua proportio est, quæ possit rectis lineis explicari. Ergo & circumferentiæ ad diametrum proportio est aliqua, & per rectas lineas explicabilis.*

3. *Rursum* lib. 3. Cyl. & Annul. prop. 32. & 34. *demonstravimus annulum clausum circularem esse ad inscriptam sibi sphæram, & ellipticum ad inscriptam sibi sphæroidem, ut circumferentia circuli est ad duas tertias partes diametri. Atqui annulus & sphæra sunt corpora homogenea, fiunt enim ab eodem circulo circulariter moto, adeoq; proportio eorum cognosci & rectis lineis explicari potest. Ergo etiam proportio circumferentiæ ad rectam.*

Quod autem ratio annuli ad sphæram invenibilis sit, sic ulteriùs ostendo. Tam sunt homogenea corpora, annulus circularis & sphæra ei inscripta, quàm annulus clausus parabolicus & inscripta ipsi conoïs parabolica. Atqui horum proportio exhibita a me fuit lib. 4. Cyl. & Annul, prop. 46. *est enim ea, quæ est 16 ad 3. Ergo etiam ratio circularis annuli ad inscriptam ipsi sphæram reperiri potest, & explicari si non per numeros, certè (quod satis est) per rectas lineas.*

4. *Exterior annuli pars, quæ gignitur à semicirculo exteriore, & pars interior annuli, quæ fit a semicirculo interiore, sunt corpora prorsus homogenea, cùm sint producta ab æqualibus semicirculis circulariter motis. Ergo aliqua est eorum proportio, quæ proinde cognoscibilis est.* Sed lib. 3. Cyl. & Ann. prop. 49. *demonstravimus, eâ proportione inventâ haberi quadraturam. Quadratura igitur possibilis est.*

Quod autem exhiberi possit ratio quam habet pars exterior circularis annuli ad interiorem, inde ulteriùs fit manifestum, quòd inventa à me sit c *ratio quam habet annuli clausi parabolici pars exterior ad interiorem, est enim eadem, quæ 11 ad 5. Sunt verò utriusque annuli partes, æqualiter homogeneæ.*

c *lib. 3. Cyl. & annul. prop. 48.*

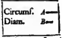
5. *Major est diversitas inter annulum parabolicum vel hyperbolicum, & sphæram, quàm inter annulum circularem & sphæram. Atqui annulo parabolico exhiberi potest sphæra æqualis per* prop. nostram 46. lib. 4. Cyl. & Annul. *Hyperbolici autem annuli parti interiori sphæram æqualem exhibui* lib. 5. Cyl. & Annul. prop. 45. *Ergo etiam circulari annulo exhiberi potest sphæra æqualis, adeoq; & Cylindrus, ut colligitur ex* p. 22. Selectorum ex Archimede theorematum. *Atqui habito Cylindro, qui æqualis sit circulari annulo, habetur linea recta æqualis circumferentiæ circuli, ut patet ex* prop. 5. lib. 3. Cyl. & Annul. *Ergo dari potest linea recta circumferentiæ æqualis.*

Finis non sit si colligere omnia voluero, quæ ex nostris quinque libris Cylindricorum, & Annularium huc spectant. Eò remittimus lectorem, qui plura desiderat.

6. *Semicirculus æquè habet centrum gravitatis ac triangulum & figuræ cæteræ. Ergo illud in semicirculo cognoscibile est perinde ac in aliis, in quibus id jam est repertum. Atqui dato centro gravitatis semicirculi, datur ejus quadratura, ut demonstratum est a Ioanne La Faille, Guldino, Hugenio, & nobis* lib. 5. Cyl. & Annularium. *Ubi demonstravimus* prop. 31. *circumferentiam cujus radius est distantia centri gravitatis semiellipseos à centro figuræ, esse ad quatuor tertias axis qui semiellipseos basis est, ut alter axis ad axem priorem; &* prop. 32. *circumferentiam, cujus radius est distantia centri gravitatis semicirculi à centro communi, ostendi esse ad diametrum semicirculi, ut 4 ad 3: &* prop. 33. *demonstravi circumferentiam circuli, cujus radius est distantia centri gravitatis semicircumferentiæ a centro communi, duplam esse diametri. Ergo circuli quadratura possibilis est.*

Aliis innumeris propè viis eadem veritas demonstrari potest. Sed abundè sufficiunt quæ jam attulimus. Id solùm addo breviter, tam certum esse circumferentiæ aliquam dari posse rectam lineam æqualem, & circulo aliquod æquale quadratum, quam certum est inter ea aliquam esse proportionem; esse verò proportionem æquè certum est, quam, data circumferentia, exhiberi posse rectas majores & minores, & circulo dato quadrata majora & minora. Ea enim inter se proportionem habent quæ aliquoties sumpta se mutuo possunt excedere.

Denique admonendi hic sunt, qui Geometriæ non satis periti, sibi persuadent ad quadraturam necessarium esse, ut ratio lineæ circularis ad rectam aut circuli ad quadratum in numeris exhibeatur. Is sanè error valdè crassus est, & indignus Geometrâ, quamvis enim irrationalis esset ea proportio, modo in rectis lineis exhibeatur, reperta erit quadratura. Sit enim circumferentia ad diametrum ut linea A ad B, sive A & B commensurabiles sint sive non. Per 12. 6, fiat ut B ad A, sic diameter ad rectam quampiam Z. Erit hæc æqualis circumferentiæ. Nam cùm ex hyp. Diameter sit ad circumferentiam ut B ad A, ex constr. autem eadem diameter sit ad rectam Z, etiam ut B ad A, habebit diameter ad circumferentiam & ad rectam Z eandem rationem. Ergo per 9. 5, circumferentia & recta Z æquales sunt.



PROBLEMA VIII.

Quadratura partium circuli veræ proxima.

Datus sit sector ABDC. Per *Probl. 6.* arcui BDC reperiatur recta Z æqualis. Triangulum rectangulum cujus altitudo est radius A B, basis verò recta Z, æquatur sectori dato.

Fig. 49.

Demonst. Nam triangulum cujus altitudo est radius, basis verò peripheria tota, æquatur toti circulo. Ergo triangulum cujus altitudo est radius, basis verò arcus B D C, æquatur sectori B D C, Duo enim illa triangula sunt inter se *a* ut bases, hoc est ut *b* circulus ad sectorem. Cùm ergo circulus sit æqualis uni triangulo, sector erit æqualis alteri.

a Per 1. 6.
b Per 33. 6.

Detur deinde segmentum circuli B D C. Sectori A B D C fiat æquale triangulum, ut jam docui: ab hoc dematur triangulum A B C, reliquum erit æquale sectori.

PROBLEMA IX.

Partium circuli dimensio.

[*Fig. 40.*] Metiendus sit sector, sive is sit minor semicirculo, ut A B D C, sive major, ut A B F C A.

Metire arcum sectoris & radium A B: semissis producti ex radio in arcum ducto, dabit mensuras quadratas quibus sector æqualis est.

Exempl. arcus sectoris esto pedum 200, radius 80. 200 in 80 efficiunt 16000, quorum semissis est 8000. Igitur sectoris area continet pedes quadratos 8000.

Demonstratio patet ex præcedenti, sector enim æquatur triangulo, cujus altitudo est radius, basis verò arcus sectoris; hoc verò triangulum dimidium *c* est rectanguli sub eâdem altitudine ac base contenti. Atqui productum ex multiplicatione altitudinis in basim, (hoc est radij in arcum) exhibet *o* aream dicti rectanguli. Ergo producti illius semissis exhibet aream trianguli, hoc est sectoris quæsiti.

[*c per 41. lib. 1. o per probl. 1. cap. 11.*]

PROBLEMA X.

Ellipseos & parabolæ dimensio.

[*Fig. 41. a per 13. lib 6. b per prob. 4.*] Inter duos ellipseos axes A B, C D reperiatur media *a* proportionalis E F; & circa eam describatur circulus, quem *b* metire: esse enim ellipsi æqualem demonstravit Archimedes.

[*Fig. 42.*] Et quoniam ab eodem demonstratum est, parabolam maximi inscripti trianguli esse sesquiquartam, sive ad illud esse ut 4 ad 3, neque hujus ignota poterit esse dimensio. Fiat enim B G ad B C, ut 4 ad 3, ducaturque A G. Erit triangulum quoque B A G ad *c* triangulum B A C ut 4 ad 3. ac proinde æquale parabolæ B D A E C. Quare si nota fiat *n* area trianguli B A G, etiam area parabolæ nota erit.

[*c per 1.6 n per prob. 4.c.11.*]

CAPUT XIII.

Figurarum planarum transformatio, additio, subtractio, auctio vel diminutio, comparatio.

PROBLEMA I.

Figuras alias in alias transformare.

Transmutatio figurarum rectilinearum plenè tradita est in Elementis.

Triangulo dato exhibetur æquale parallelogrammum habens angulum datum, *prop. 42. lib. 1.*

Et *prop. 44* dato triangulo fit æquale parallelogrammum, quod præter datum angulum, etiam latus habeat datum.

Deinde *prop. 45.* Dato cuicumque rectilineo fit æquale parallelogrammum, habens angulum & latus data.

In libro autem secundo *prop. 14.* parallelogrammum, ac proinde rectilineum quodcumque reducitur ad æquale quadratum.

Denique *libro 6. prop. 25*; quæ omnium hoc in genere universalissima & pulcherrima est, describitur figura, quæ sit magnitudinis datæ, & similis alteri figuræ datæ; ac proinde quælibet in quamlibet transformatur.

De conversione circuli in quadratum tractavi cap. præced.

PROBLEMA II.

Datas quotvis figuras rectilineas in unam speciem datam colligere.

Dentur ex. gr. tria triangula, duo quadrata, & unum pentagonum, seu quinque-angulum; & oporteat his omnibus æquale sexangulum ordinatum construere.

Figuris datis in triangula vel quadrangula resolutis, *a* fac ijs omnibus unum æquale rectangulum. Huic autem *b* construatur æquale sexangulum ordinatum. Id quæsito satisfaciet.

[*a Per 45. vel schol. p. 16. lib. 1. b Per 25. 6. elem. & prob. 7. c. 10.*]

PROBLEMA III.

Datis quotcumque figuris similibus, unam omnibus æqualem ac similem exhibere.

[*Fig. 43. 44.*] Dentur ex. gr. tres circuli, A, B, C. Petitur unus æqualis omnibus. Circuli porrò inter figuras similes computantur, sunt enim inter se in duplicata ratione diametrorum, per 2. 12.

Fac angulum rectum E F G, lateribus infinitis. Fiat F I par radio circuli A, & F L par radio circuli B, ducaturque I L. Erit circulus radio I L descriptus *c* æqualis duobus A, & B. Transfer I L ex F in M, & fac F K parem radio circuli C, ducaturque K M. Erit circulus D descriptus radio K M æqualis tribus circulis A, B, C.

[*c Per 31. 6.*]

Demonst. Nam circulus radij K M *d* æquatur circulis radiorum K F, M F; quorum unus, qui describitur radio M F, æquatur *o* circulo radij I L, hoc est duobus circulis radiorum *k* L F, I F. Ergo circulus radij K M æquatur tribus circulis radiorum, nempè K F, L F, I F; hoc est tribus datis C, B, A.

[*d per 31. 6. o per const. k per 3. 6. Fig. 46.*]

Si plures dentur circuli, quàm tres, eadem constructio continuata, dabit unum omnibus æqualem.

Quemadmodum verò artificio jam explicato reperitur radius circuli, qui pluribus datis æqualis sit; ita eodem, si aliæ dentur figuræ similes quàm circuli, reperietur latus figuræ similis per 18. 6. construendæ quæ illis omnibus æqualis sit.

PROBLEMA IV.

Progressioni infinitarum similium figurarum in eadem proportione decrescentium, unam omnibus æqualem exhibere.

Data sit ex. gr. progressio infinitorum circulorum in quacumque proportione, sed eâdem semper, decrescentium; & oporteat unum omnibus exhibere æqualem.

Fiat *m* C F æqualis tertij circuli diametro D E. Tum ut A F ad A C, ita fiat A C ad X. Inter A C & X reperi *n* mediam proportionalem Z. Circulus diametro Z descriptus infinitis circulis progressionis datæ æqualis est.

[*m per 11. 6 n per 13. 6.*]

Demonstr. Intra primum circulum O B describe circu-

circulum O R parem secundo P Q; eritque annulus N excessus primi suprà secundum. Jam quia circuli per hypothesim sunt continuè proportionales, etiam diametri eorum A C, C D, D E &c. *a* continuè proportionales sunt; ac proinde ratio A C ad D E duplicata *b* est rationis A C ad C D. Ergo primus circulus O B *c* est ad secundum P Q, sive O R, ut A C ad D E; sive *d* F C. Ergo dividendo, invertendo, componendo, & rursum invertendo, annulus N est ad circulum O B, ut A F est ad A C. Atqui per constr. etiam est ut A F ad A C, ita A C ad X. Ergo annulus N est ad circulum O B, ut A C ad X. Sed quia A C, Z, X sunt *e* proportionales, circulus O B etiam est ad circulum diametri Z, ut *f* A C est ad X. Ergo annulus N (excessus primi circuli O B, suprà secundum O R, sive P Q) est ad primum circulum O B, ut idem primus circulus O B est ad circulum diametri Z. Ergo per theorema scholij post *prop.* 11. *lib.* 6. circulus diametri Z toti infinitorum circulorum progressioni æqualis est.

a *Patet ex* 22.6
b *per defin.* 10.5.
c *per* 2.12.
d *constr.*
e *per const.*
f *per* 2.12. & *def.* 10.5

Corollarium.

Fig. 46.

Quod si circulum desideras, cujus circumferentia infinitorum illorum circulorum circumferentijs æqualis sit; fiat ut primæ diametri A C suprà secundam C D excessus ad primam A D, *a* ita eadem prima ad aliam rectam A V. Circumferentia ex diametro A V descripta infinitis progressionis datæ circumferentijs æqualis est.

a *per* 12.6.

Demonstratio. Per theorema Scholij post 11. *lib.* 12. recta A V infinitis diametris progressionis A C, C D, æqualis est. Jam peripheria diametri A V est ad peripheriam B, *b* ut diameter AV ad diametrum AC. Rursum peripheria ex A V est ad peripheriam *c* Q, ut diameter A V est ad diametrum C D: atque ita semper. Ergo peripheria ex A V *d* est ad omnes totius progressionis peripherias, ut diameter A V est ad omnes progressionis diametros. Atqui A V omnibus progressionis diametris ostensa est æqualis. Ergo etiam peripheria ex diametro AV descripta, omnibus progressionis peripherijs æqualis est.

b *per p.* 7. *select. ex Archim. theor.*
c *Per eand.*
d *per* 24.5.

Scholium.

De progressionibus Geometricis librum pulcherrimum subtilissimumq́; scripsit noster Gregorius à S. Vincentio, ad quem lectores remitto. In gratiam porrò tyronum ad prop. 11. lib. 6. elem. *progressionum theoriam breviter demonstravi : & ad* prop. 25. lib. 9. *in Arithm. nostrâ ostendi facillimum esse transitum a progressione finitâ ad infinitam. Quod ipsum adhuc clariùs ostendi Arithm. practica* lib. 5. cap. 4. prop. 18, 19, 20, & cap. 5. prop. 7, 8, 9, 10, 11.

PROBLEMA V.

Figuræ datæ aliam similem in datâ proportione majorem vel minorem exhibere: sive figuram datam iuxta proportionem datam augere vel minuere.

Fig. 45.

DAtus sit circulus B E, vel quodcumque rectilineum, & oporteat ex. gr. circulum, vel rectilineum simile, dati quintuplum reperire.

Circuli dati radio, sive figuræ datæ lateri A B, apponatur indirectum B C quintupla ipsius A B. Inter A B, B C reperiatur *a* media proportionalis B D, circulus hoc radio descriptus erit quantuplus dati B E, & figura datæ similis suprà hoc latus per 18. 6. descripta, erit quintupla datæ.

a *per* 13.6.

Demonstr. Quia ex const. A B, B D, B C sunt proportionales, erit ratio A B, ad B C duplicata *b* rationis A B ad B D. Atqui ratio circuli B E ad circulum B F est duplicata *c* rationis radij A B ad radium B D; & ratio figuræ, cujus latus A B, ad figuram similem, cujus latus B D, est duplicata *d* rationis lateris A B ad latus B D. Ergo circulus B E est ad circulum B F, & figura ex A B est ad similem ex B D, ut A B, ad B C: hoc est per constr. ut 1 ad 5.

b *def.* 10 5.
c *per* 2 12.
d *per eand.*

PROBLEMA VI.

Similium figurarum proportionum cognoscere, sive earum magnitudines comparare.

DUobus homologis lateribus figurarum reperiatur tertium proportionale per 11. 6, si incommensurabilia sint; vel per 18. 9. si commensurabilia. Ut primum latus ad tertium ita figura prima est ad figuram secundam. Patet ex 20.6.

Exemplum 1. Dentur duæ quadratæ areæ; primæ latus sit 1 perticæ, latus secundæ perticarum 3. hæc illâ est major novies. Cùm enim lateribus quæ sunt, 1, 3, tertium proportionale sit 9, erit ut latus primum nempè 1, ad tertium 9, ita area prima ad secundam.

1. 3. 9

Exempl. 2. Dantur binæ circulares areæ : primæ diameter est 1 perticæ, secundæ 10. Quantò hæc illâ major est? Fiat ut 1 ad 10 ita 10 ad 100. Prima ergo est ad secundam ut 1 ad 100, ac proinde hæc illâ est major centies.

1. 10. 100

Exempl. 3. Sint areæ duæ similes, figuræ cujuscumque; latus primæ sit decempedarum 5, latus homologum secundæ decempedarum 6. Quanto secunda major est primâ? Lateribus 5 & 6 per 18. 9 reperitur tertium proportionale $7\frac{1}{5}$: Ergo area prima est ad secundam ut 5 ad $7\frac{1}{5}$.

5. 6. $7\frac{1}{5}$

Ex his cernitur quantopere falli in æstimandis & comparandis superficierum quantitatibus Geometriæ imperitos necesse sit.

Proportio corporum similium cognoscetur ex *prob.* 14. *cap.* 21.

PROBLEMA VII.

Arearum dissimilium proportionem cognoscere.

SI areæ dissimiles datæ sint duo triangula, aut duo parallelogramma, ratio earum invenitur per *Corol.* 3. *prop.* 23. *lib.* 6.

Modus generalis pro quibusvis areis dissimilibus, hic est: per 45. 1, aut per Scholium *prop.* 16. *lib.* 2. areæ datæ reducantur ad rectangula æquè alta. Quæ est ratio inter bases horum rectangulorum, eadem *a* est inter ipsa rectangula, adeoque & inter datas areas his *b* æquales.

a *per* 1.6.
b *per const.*

PROBLEMA VIII.

Superficiem minorem à majori altera subtrahere.

Si similes sunt, habetur intentum per *Problema* 2. *Scholy* post 47. 1. quod licet ad sola quadrata isthic pertineat, universale reddes per 31. 6.

Si dissimiles, reducantur ambæ ad rectangula *e* æquè alta, tunc enim ex 1. 6. liquet subductionis modus.

e per 45. 1. vel per schol. p. 16. lib. 2.

DE FIGURARUM
Rectilinearum Sectione.

CAPUT XIV.

Sectio trianguli per punctum datum.

Cum hujus sectionis modum à nullo hactenùs perfectè traditum animadverterem, integrum de eo tractatum scripsi: quem & seorsim edere in lucem statueram. Verum. mutato deinde consilio, in hunc Geometriæ Practicæ locum ipsi quodammodò proprium rejeci.

PRÆFATIO.

Mirabuntur fortasse; qui ista lecturi sunt, quod ejus problematis tractationem susceperim, cujus ab alijs jam pridem data sit solutio. Id sanè verum si est, & justa illorum admiratio erit, & labor meus aut superfluus aut certè non admodum necessarius. Sed longè aliter se res habet.

Trianguli secundùm rationem datam sectio ex puncto dato, tres casus complectitur. Primus est, cùm punctum datur in ambitu trianguli: tum verò facilis atque obvia problematis solutio est.

Fig. 47. Nam si in perimetro trigoni A B C datum sit punctum G, ex angulo adjacente A, qui à puncto G est non remotior altero C, dividatur triangulum secundùm rationem datam, rectâ A D per 1. 6*a* sic ut pars minor (si ratio data sit majoris ad minus) cadat versùs punctum datum G. Deinde ex ipsius A D termino D ad G ducatur recta D G; cui ex A fiat parallela A F occurrens lateri B C in F. Ex G ad F ducta recta secabit triangulum in partes datam habentes proportionem.

a Per 1. 6.

Cùm enim A F, G D sint per constr. parallelæ, triangula *d* G A D, D F G æqualia sunt. Quare ablato communi G O D, reliqua A O G, F O D æqualia erunt: quibus addito communi trapezio G O D C, æqualia erunt triangula A D C, G F C. Quare etiam residuæ totius A B C, trianguli partes D A B, & A G F B æquales sunt. Atqui per construct. A D C ad D A B datam habet rationem. Ergo etiam G F C ad A G F B datam habet rationem. Igitur ex dato in ambitu puncto G sectum est triangulum, ut petebatur. Quod autem A F parallela ad D G non cadat extra triangulum, sic ostendo: cùm ex constr. A G sit non major, quàm G C, etiam F D erit non major quàm D C. Sed D C est ex constr. non major quàm B D. Ergo etiam F D est non major quàm B D; adeoque G F extra triangulum non cadit.

d Per 37. 1.

At præter hunc primum casum alij præterea duo supersunt, quorum solutio haud paulò majus artificium requirit; videlicet quando punctum datum extra triangulum est, vel intra illud. Et quidem cùm punctum extra triangulum datur, subtiliter & ingeniosè à Geometris non paucis quæsita sectio peracta est. At verò, puncto intra triangulum dato, qui plenam, hoc est universalem hujus problematis solutionem exhiberet, reperire hactenùs nullum potui. Causa difficultatis est quod casus ille postremus determinationes satis multas, easque non vulgares aut obvias comprehendat: quas qui ignoraverit, non erit mirum si ad veram is solutionem minimè pertingat. Quæ cùm ita sint nec ingratum, nec inutile Geometriæ studiosis futurum putavi, si adæquatam hujus problematis solutionem, prout à me inventa fuit, prælo committerem. Id verò eò etiam feci libentiùs, quod determinatio dati problematis alia non pauca seu theoremata, seu problemata secum intimè connexa, involvat, ferè haud minus vel jucunda vel digna scitu quàm ipsum illud cujus gratiâ inventa sunt. Omnium seriem sequens synopsis exhibet.

SYNOPSIS.

PARS I.

De sectione trianguli ex puncto dato extra triangulum.

Primùmà dato angulo ex puncto extra ipsum dato triangulum datæ magnitudinis abscinditur. *Prop.* 4.

Atque hinc deinde datum triangulum secundùm datam rationem dividitur ex puncto extra triangulum dato. *Prop.* 5.

PARS II.

De sectione trianguli ex puncto intra triangulum dato.

A Dato angulo per punctum intra ipsum datum, triangulum minimum absciditur. *Prop.* 8.

A dato angulo per datum intra ipsum punctum, absciditur triangulum magnitudinis datæ. *Prop.* 10.

Pars minima, quæ per datum punctum à triangulo abscindi potest, non trapezium, sed triangulum est. *Prop.* 11.

A dato triangulo per punctum intra ipsum datum, pars minima, seu minimum triangulum absciditur. *Prop.* 13.

Intra quodvis triangulum datur punctum, ipsum videlicet centrum gravitatis, per quod tria minima triangula inter se æqualia abscindi possunt. *Prop.* 14.

vide Fig. 72. Si in triangulo quovis ab angulorum uno ducatur recta B L bifariam secans latus oppositum, ex eâque sumatur pars tertia L E, & dimidia L O; per quodvis punctum inter E & O abscindi possunt duo minima triangula inter se æqualia. *Prop.* 15.

Postremò datum triangulum per datum intra illud punctum secatur in partes, quæ datam inter se habeant proportionem. *Prop.* 20.

PARS I.

De sectione trianguli ex puncto extra ipsum dato.

LEMMA I. PROPOSITIO I.

A dato angulo (EAF) per datum in latere punctum (D) triangulum abscindere æquale dato (GKH).

Fig. 48. 49. FIat ut D A ad G H, ita I K altitudo ad A C, quæ perpendiculariter ponatur ad F A, & per C ducatur C B parallela ad A F, secans A E, in B, ducaturque recta D B.

Erit triangulum D A B æquale dato G K A. Demonstratio patet ex *Coroll.* 15. 6.

LEMMA II. PROPOSITIO II.

Fig. 50. 51. **Data sit recta infinita NZ, bis secta in A & K. Oporteat eam tertiò secare in E, ut N K, A E, N E sint proportionales.**

a Patet ex 31. 3. & Coroll. 2. p. 8. l. 6. COnstr. Inter N K, NA inveni mediam proportionalem N H; quod fiet *a*, si ex A in *Fig.* 50, ex K in *Fig.* 51 erigatur perpendicularis; & N K in *Fig.* 50, N A verò in *Fig.* 51 bisecta in O, centro O per N describatur circulus, occurrens perpendiculari in H, jungaturque NH. Ex H erige ad H N perpendicularem H L, parem K I semissis ipsius K N. Centro L per H describe circulum, qui tanget per 16. 3. rectam N H in H. & per N ac L due rectam N P. Abscinde ipsi N P ex A in E æqualem AE. Dico NK, AE, NE esse proportionales.

b per 17. 6. *Demonstr.* Rectangulum A N K æquale est *b* quadrato mediæ H N; hoc est rectangulo *c* P N M. Rectangulum quoque sub E A, K N æquatur ipsi N P M, sunt enim æquales E A, N P, & K N, P M ex constructione. Ergo duo rectangula A N K, & E A, K N (hoc est *o* ipsum E N K) æquantur duobus P N M & N P M, hoc est *n* quadrato N P. Sed N P est A E per constr. Ergo E N K rectang. quadrato A E æquale est. Ergo sunt *m* proportionales N K, A E, N E. Quod erat propositum.

c per 36. 3. o per 1. 2. n per 2. 2. m per 17. 6.

LEMMA III. PROPOSITIO III.

Fig. 52. **Data sit recta infinita Z N, secta in K, oporteat eam secare in E, ut N K, K E, N E sint proportionales.**

COnstr. Ex K erige perpendiculariter K L parem dimidiæ K N centro L per K describe circulum, & per N, L, due N P. Hæc ponatur ex K in E. Erunt N K, K E, N E proportionales.

Demonstr. Quadr. K E æquatur quadrato N P ex constr. hoc est *a* rectangulis P N M, & N P M. Sed P N M *b* æquatur quadrato tangentis N K, & N P M æquatur ipsi E K N (nam *c* N P est E K, & M P est K N) Ergo quadr. K E æquatur quadrato K N & rectangulo E K N, hoc est *d* ipsi E N K. Ergo proportionales sunt E N, E K, K N.

a per 2. 2. b per 36. 3. c per constr. d per 3. 2.

PROBLEMA I. PROPOS. IV.

A dato angulo (ZAF) triangulum abscindere æquale dato (X) per lineam ductam dato extra angulum puncto (B).

Fig. 53. 54. 55. COnstr. Due B N parallelam F A, lateri Z A productio occurrentem in N. Ab angulo B N Z per punctum B abscinde triangulum B K N æquale dato X, per *prop.* 1. Infinitam N Z ita seca in E, ut N K, A E, N E sint proportionales per *prop.* 2 vel 3. Ducatur B E secans A F in G. Erit triangulum E A G æquale dato X.

Demonstr. Quoniam N K, A E, N E sunt proportionales, erit ratio N K ad N E, hoc est ratio trianguli N B K ad triangulum N B E, duplicata rationis A E ad N E. Sed etiam ratio *o* trianguli A G E ad triangulum idem N B E est duplicata ejusdem rationis A E ad N E, cùm sint propter G A, B N parallelas, similia. Ergo triangula N B K, A G E ad triangulum N B E eandem habent proportionem, ac proinde æqualia sunt.

o per 19. 6.

Corollarium.

Sint proportionales N K, A E, N E, & sit N B parallela quævis lateri A F, versus B infinito: ex punctis autem K & E ad quælibet parallelæ puncta R citra ultraque B ducantur secantes latus anguli in I, I; erit semper triangulum E A I par triangulo K N R.

PRO-

PROBLEMA II. PROPOS. V.

Fig. 56. 57. 58. Triangulum (C A D) per datum extra ipsum punctum (B) dividere secundùm rationem datam (M ad N).

Fig. 56. Datum fit primò punctum B in aliquo, putà in C A, latere producto. Seca adjacens latus A D in puncto L, sic ut segmenta A L, L D sint inter se ut M ad N; & ab angulo C opposito ducatur C L. Hæc per 1. 6. secabit triangulum in ratione datâ M ad N. Deinde ex dato puncto B per rectam B E ab angulo D per 4. hujus abscinde triangulum G E D, æquale triangulo L C D. Manifestum est rectam B E secare latus A D ante A (adeoque abscissum triangulum G E D totum cadere intra datum triangulum C A D) si enim B E secaret latus A D in A aut ultra, triangulum abscissum G E D majus esset ipso L C D. Recta igitur B E ex dato puncto B educta secat triangulum C A D in ratione datâ M ad N.

Cùm enim G E D æquale sit ipsi L C D; hoc verò ad residuum LCA datam habeat rationem, etiam G E D ad residuum G E C A datam rationem obtinebit.

Fig. 57. 58. Quod si datum punctum B extra triangulum, in nullo existat latere producto, ita construe. Ex puncto dato B ad angulum oppositum C duc rectam, quæ latus oppositum A D secet in O. Si hæc secat latus A D secundùm rationem datam M ad N, secabit quoque per 1. 6. triangulum C A D in ratione datâ. Si non; seca A D in L, juxta rationem datam M ad N, atque ad L ex opposito angulo C duc rectam C L, quæ per 1. 6 secabit etiam triangulum C A D in ratione datâ. Tum per 4 hujus ab angulo D per rectam B E, abscinde triangulum G E D, æquale ipsi L C D, vel ab angulo A abscinde rectâ Be triangulum geA par ipsi lcA. Manifestum est rursus abscissum triangulum, totum cadere intra datum triangulum C A D. Recta igitur BGE educta ex dato puncto B secat triangulum C A D in ratione datâ M ad N.

Ex dictis liquet problema duplicem solutionem admittere.

PARS II.

De sectione trianguli per punctum datum intra triangulum.

LEMMA IV. PROPOS. VI.

Fig. 59. Data sit recta infinita A Z, secta in B, X, F. Acceptaque quoque sit B O par A X; & sit rectangulum F O B minus rectangulo F B A. Ut habeatur horum rectangulorum æqualitas. Dico sectionem faciendam ultra F versùs Z.

Demonstr. Fiat enim qualibet sectio ante F, in Q. Quoniam X A major quàm B A, etiam O B, quia par ipsi X A, major erit. Unde factum ex F Q, O B, majus est facto ex F Q, B A. Sed F O B est *a* minus quàm F B A: quare si à minori F O B, auferas majus F Q, O B. & à majori FBA auferas minus F Q, B A, remanet Q O B jam à fortiori minus quàm Q B A. Ergo non habebitur rectangulorum æqualitas, si fiat sectio ante F. Ergo post F, ut in Z, sic enim poterit Z O B æquari Z B A.

a per hyp.

LEMMA V. PROPOS. VII.

Data sit recta infinita A K secta in N & M, sic ut M N sit quadrupla A N. Accepta sit N C par A N. Patet C N, C A, M N fore proportionales. Accipiatur in M N quodvis punctum X diversum A C. Dico ipsarum X N, X A tertiam proportionalem majorem esse quàm M N. Fig. 60.

Demonstr. Fac N O parem A X, & biseca M N in S. Ex datis patet S N esse duplam N A, unde quad. S N (sive rectangulum M S N) duplum est rectanguli S N A; ac proinde æquale rectangulo M N A. Deinde, quia ex const. X A est inæqualis C A, hoc est S N; etiam O N par ipsi X A, inæqualis est S N. Ergo M N in O secta est inæqualiter. Ergo ex 5. 2. rectangulum M O N minus est rectangulo M S N, seu quadrato S N; hoc est (ut jam ostendi) rectangulo M N A.

Fiat jam ut X N ad X A, sic X A ad tertiam NK, ubicumque demùm cadat punctum K. Quia ON par est *a* X A, erit X N, ad X A, ut O N ad K N. Igitur convertendo A N ad A X ut K O ad K N: & si pro A X substituas ei parem O N, erunt proportionales A N, O N, K O, K N. Ergo factum ex A N, K N, sive K N A, *b* æquatur facto ex ON, KO, seu KON. Cùm igitur antè ostensum sit MON esse minus quàm M N A; patet ex *lem. præced.* sectionem K cadere ultra M, ac proinde N K, ipsis X N, X A tertiam proportionalem majorem esse quàm M N. Quod erat demonstrandum.

a ex constr.

b per 16. 6.

PROBLEMA III. PROPOS. VIII.

A dato angulo (S A G) per datum intra ipsum punctum (B) triangulum minimum abscindere. Fig. 61. 62.

Constr. Per datum punctum B duc alterutri lateri parallelam B N. N A pone ex N in C. Per C & B recta transiens abscindet triangulum minimum C A D.

Demonstratio. Abscindatur suprà vel infrà C quodvis aliud X A P. Ostendam hoc esse majus. Accipe N M quadruplam N A. Patet C N, C A, M N fore proportionales. Fiat deinde rectis X N, X A, tertia prop.; hæc erit major quàm N M per prop. 7. Quare posita ex N versus M finietur ultra M in G. Ergo si ducantur B M, B G, erit triang. G N B majus quàm M N B. Quoniam verò C N, C A, M N sunt proportionales, erit ratio C N ad M N (hoc est 1. 6. ratio trianguli C B N, ad triang. M B N) duplicata rationis C N ad C A. Sed etiam ratio trianguli ejusdem CBN ad triang. CDA est duplicata *a* rationis C N ad CA. Ergo triangulum CBN ad triangula M B N & C D A eamdem habet rationem, quæ proinde æqualia sunt. Eodem discursu æqualia ostendemus triangula X A P, G N B. Quare cùm G N B sit majus quàm M N B, etiam X A P majus erit quàm C A D. Minimum igitur est CAD. Quod erat propositum.

a per 19. 6.

Corollarium I.

Triangulum minimum à dato angulo A per punctum datum B resecabile, æquatur triangulo, cujus altitudo est distantia puncti B à latere A G, basis verò

quadrupla rectæ N A, quam abſcindit ex latere A G, linea B N alteri lateri A S parallela.

Corollarium 2.

Si à puncto C ducantur quotcumque rectæ ſecantes parallelam in finitam N L in punctis O, abſcindentur infinita triangula minima eorum, quæ per ſingula puncta O abſcindi poſſunt.

Corollarium 3.

Ex demonſtratis patet ut triangulum M N B ſit par minimo, M N debere eſſe quadruplam N A; ut verò majus ſit minimo quemadmodum G N B, oportere ut G N ſit major quadrupla N A.

LEMMA VI. PROPOSITIO IX.

Datam rectam AK finitam, ſemel ſectam in N, ita denuò ſecare inter N & K in E, ut NK, AE, NE ſint proportionales.

Fig. 63.

C*onſtr.* Inter K N, N A inveni mediam proportionalem N F ut traditur p. 13. 6. deſcripto nimirùm circa A K ſemicirculo, & ex N erectâ perpendiculari uſque ad peripheriam in F. Deinde circa K N alium forma ſemicirculum, & ex F duc parallelam ad A K, occurrentem ſemicirculo in puncto H, ex quo dimitte perpendicularem H Q; Rectam N Q pone ex A in *e*, rectam verò K Q ex A in E, erunt tam N A, A*e*, N*e*, quàm N A, A E, N E proportionales; ac proinde duplex habetur ſolutio, cùm parallela per F ſecat ſemicirculum K H N: Quod ſi tangeret, haberetur ſolùm unica: ſi ne tangeret quidem, nulla.

Oportet igitur ut N F media prop. inter K N, A N, ſit non major ſemiſſe ipſius N K.

Demonſtratio. Quoniam H F, id eſt Q N, eſt major quàm A N, patet Q N ſi ponatur ex A, cadere ultra N, putà in *e*, eritque Q*e* par A N. Et quia rectanguli K Q N, K N A æquantur quadratis Q H, N F æqualibus, erunt æqualia. Unde addito communi quadrato Q N, erit rectangulum K N Q æquale rectangulo K N A cum quadrato Q N, ſive A*e*. Ablatis igitur utrimque æqualibus, nimirùm rectangulo K N, Q*e* & K N A (cùm enim Q*e* & N A ſint æquales, etiam rectangula K N, Q*e*, & K N A æqualia ſunt) remanet rectangulum K N*e* æquale quadrato A*e*. Sunt igitur proportionales *ᵃ* N K, A*e*, N*e*.

a 17.6.

Quod etiam N K, A E, N E proportionales ſint, ſic oſtendo. Quoniam rectangula N Q K, A N K æqualia ſunt, ſi addatur commune quadratum K Q, erit rectang. N K Q æquale rectangulo A N K cum quadrato K Q, ſive A E. Sed rectang. N K Q eſt rectang. ſub K N, A E. Ergo rectang. ſub K N, A E æquatur ipſi A N K cum quadr. A E. Ergo ſi dematur utrimque rectang. A N K, ſeu K N A, remanet rectang. ſub K N, N E æquale quadrato A E. Sunt ergo proportionales N K, A E, N E.

Corollarium.

Ex determinatione jam allatâ ulterior alia colligitur, nimirùm quod A N debeat eſſe non major quartâ parte ipſius N K. Nam N F media inter NK, NA debet eſſe non major quàm dimidia N K, quæ erat determinatio prima.

PROBLEMA IV. PROPOS. X.

A Dato angulo (Z A G) per datum punctum (B) intra eum, triangulum abſcindere æquale dato.

Fig. 64. 65.

C*onſtr.* Ex dato puncto B duc B N alterutri lateri parallelam, & ab angulo B N Z per punctum B in ejus latere datum, abſcinde triangulum B N K par dato per *prop.* 1.

Fig. 64.

Si jam K N eſt quadrupla N A, fac N E parem N A, & per E ac B duc rectam E G, hæc abſcindet triang. E A G par triangulo K N B, hoc eſt dato, & minimum omnium, quæ per B abſcindi poſſunt, quæ omnia patent ex *prop.* 8.

Si K N eſt minor quadruplâ N A, problema eſt impoſſ. tunc enim triang. K N B (hoc eſt datum) eſt minus minimo eorum quæ per B reſecari poſſunt, ut patet ex *prop.* 8. ejuſque 3. *Corollario.* Hæ determinationes etiam patent ex præcedenti, ejuſque corollario.

Fig. 65.

Quod ſi K N eſt major quadruplâ N A, finitam rectam A K, jam ſectam in N, ita denuò ſeca *ᵃ* in E, ut N K, A E, N E ſint proportionales. Quæ ſectio quando in duobus punctis *ᵇ* fieri poteſt nempè in E, & *e*, ab utroque puncto per B ducta recta abſcindet triangula æqualia dato. Unde geminam problema ſolutionem admittit. Quod ſi unica ſolùm haberi poteſt ſectio E, una ſolùm dabitur ſolutio problematis. Cæterùm, quando duæ haberi poſſint ſectiones E; quando una tantùm, determinatum eſt in præcedenti.

a per præc. b ibid.

Demonſtratio. Quoniam E N, E A, N K ſunt proportionales, erit ratio E N ad N K (id eſt *ᶜ* ratio trianguli E B N ad triang. K B N) duplicata rationis E N ad E A. Sed etiam ratio trianguli ejuſd. E B N ad triangulum E G A duplicata *ᵈ* eſt rationis ejuſdem E N ad E A. Ergo triang. E B N ad K B N & E G A eandem habet rationem. Ergo E G A æquale eſt ipſi K B N, id eſt, dato. Quod erat propoſitum.

c per 1.6. d per 19.6.

Corollarium.

Sint proportionales EN, AE, KN, & quævis parallela lateri anguli ſit N B versùs B infinita, in quâ ſumatur quotcumque punctum I ultra citraque B: ſi ex punctis E per punctum I, ducatur recta occurrens lateri in X, erit ſemper triangulum E X A æquale triangulo K I N.

THEOREMA I. PROPOS. II.

Eſto triangulum A B C, & punctum intra ipſum quodlibet K Pars minima quæ à triangulo dato per punctum K datum abſcindi poteſt, non trapezium ſed triangulum eſt.

Fig. 66.

D*emonſtratio.* Si negas, pars minima non eſto triangulum, ſed trapezium C E D B. Ducantur D C, E B. Quoniam igitur C E D B pars minima eſt per K reſecabilis, erit etiam minor quàm EAD, adeoque

que adhuc minor quàm DCA. Ergo BCD est multò minus, quàm D C A. Ergo a B D est minor quàm D A. Pari modo quia C E D B pars minima ponitur, erit rursum minor quàm E D A, adeoque adhuc minor quàm E B A. Ergo C B E multò minus est quàm E B A. Ergo C E quoque minor quàm E A. Jam quoniam ipsarum D K, K E, alterutra est non minor alterâ, ponamus D K esse non minorem K E. Ex D duc D F parallelam AC, & ex F per K rectam FKG, occurrentem lateri in G. Quoniam D K est non minor quàm K E, etiam D F erit non minor quàm G E ob similitudinem triangulorum D F K, E K G. Et quia jam ostendi B D esse minorem quàm D A, ac proinde minorem dimidiâ B A; etiam D F erit minor quàm dimidia A C (est enim b ut B D ad B A, ita D F ad A C). Atqui ostensum est D F esse non minorem quàm G E. Ergo G E minor etiam est quàm dimidia A C. Ostendi autem etiam C E esse minorem quàm E A, adeoque minorem dimidiâ AC. Ergo tota G C est minor quàm A C. Ergo recta per F & K ducta occurrit lateri C A inter C & A, ac proinde à triangulo toto abscindit triangulum, nempè F C G. Deinde quoniam triangula similia sunt DKF, E K G estque D K non minor quàm K E, patet c DKF esse non minus quàm E K G, ac proinde addito communi F K E C, trapezium D E C F esse non minus triangulo G F C. Liquet ergo trapez. totum B D E C esse majus triangulo F G C. Ergo trapezium B D E C non est pars minima, quæ per punctum K abscindi potest. Pars igitur minima triangulum erit.

a per 1.6. b per 4.6. c ex 19.6.

Corollarium.

Pars maxima à dato triangulo resecabilis per datam punctum K, sæpè trapezium est; quotiescumque nimirùm linea D F minimum triangulum abscindens, nullum angulum secat.

Scholium.

Hic discursus exemplum rursus clarissimum prebet ejus ratiocinationis, qua ex contradictorio assertionis directâ ac ostensivâ demonstratione assertionem ipsam concludit. Similem dedi etiam prop. 4. lib. 5. Cylind. & *& Annul. & alibi. Quæ ratiocinandi forma, quando nonnullis ita mirabilis visa est ut eam crederent cum ratione pugnare, quàm sit rationi consentanea non erit alienum obiter hic declarare. Propriùm est propositioni falsæ, ut ex eâ deduci possint contradictoria; qua proinde in ipsâ mediatè seu virtualiter continentur. Iam licet plerumque contradictoria illa sint ab ipsâ falsâ propositione distincta utraque; contingit tamen subinde ut eorum alterum sit ipsa propositio falsa, alterum propositionis falsæ negatio. Quod quando evenit, tum enimverò potest ex ipso falso ejus negatio elici, hoc est, verum: nam falsi negatio, verum est. Atque id quidem falsi natura est planè consentaneum. Neque enim jam magis mirum erit ex falso elici posse verum, quàm in falso contineri contradictoria, quorum alterum sit falsum ipsum, alterum negatio ejusdem falsi.*

LEMMA VII. PROPOS. XII.

Datum sit triangulum, A B C & punctum E intra illud, per quod ductæ sint singulis lateribus parallelæ D F, K I, G H.

Fig. 67. 68.

Si unum lateris alicujus segmentum D B (ut in *Fig. 67*) inter parallelam unam D F, & latus aliud B C interjectum, sit majus reliquo D A; Dico duo semper minima triangula, quæ ab angulis B, & C, lateri B C adjacentibus, resecari possunt, extra triangulum cadere; tertium intra.

Si verò omnia laterum segmenta (ut in *Fig. 68*) inter parallelas & latera interjecta, sint non majora segmentis residuis (nimirùm si D B, F C, reliquis D A, F A; & B I, A K, reliquis I C, K C; & A G, C H, reliquis G B, H B sint non majores.) Dico tria minima triangula, quæ à tribus trianguli angulis resecari possunt, intra triangulum cadere.

Demonst. 1. Pars. Quoniam D B major est ex hyp. quàm D A, ergo si ipsi fiat æqualis, ut D N, ea cadet extra triangulum, ac proinde ductâ per N & E rectâ N M, etiam triangulum N B M extra triangulum A B C terminabitur. Est verò, per 8. *prop.* N B M minimum per E ab angulo B resecabile. *Pari ratione*, quia C F est major quàm F A, (est enim ut B D, ad D A, sic C F ad F A) ipsi æqualis, nempè F L, cadet ultra A. Quare ductâ L E O, triangulum L O C extra datum A B C cadet. Est autem rursus L C O minimum ab a angulo C, resecabile. *Demum* quia A D ponitur minor quàm D B, erit A G adhuc minor, quàm G B. Quare ipsi par G P terminatur ante B. Pari modo quia A F est minor quàm F C, etiam A K est minor quàm K C, adeoque ipsi par KS terminatur ante C. Ductâ igitur lineâ PES, quam ex 8 *hujus* patet esse rectam, abscindetur triangulum intra datum cadens P A S, quod per *prop.* 8. est minimum ab angulo A per E resecabile.

Fig. 67. a per 8. hujus.

Demonstr. 2. Pars. Quoniam ex hyp. I B non major est quàm I C, & B D, quàm D A, ipsis æquales I R, & D O, cadent non ultra C & A. Ergo ductâ recta O E R, triangulum O B R ab angulo B resectum, erit b minimum, & terminatum intra datum A B C. Similiter quia A K, A G ex hyp. sunt non majores, quàm KC, GB, ipsis æquales K M, G N terminantur non ultra C, & B. Ergo ut priùs &c. Demùm quia ex hyp. C F, C H, sunt non majores quàm FA, HB, ipsis pares F X, H T, terminantur non ultra A & B. Ergo ut prius &c.

Fig. 68. b per 8. hujus.

Corollaria.

1. Vel duorum angulorum minima triangula cadunt extra datum triangulum, vel nullius: nunquam unius tantùm, patet ex 1 parte.

2. Vel unius anguli minimum triangulum cadit intra datum triangulum vel trium; nunquam duorum tantùm: si enim duorum tantùm caderent intra, ergo unius tantum anguli caderet extra: quod repugnat primo.

3. Nunquam omnium angulorum minima triangula cadunt extra triangulum datum, patet ex 1. parte prop.

PROBLEMA V. PROPOS. XIII.

A dato triangulo (ABC) per datum intra illud punctum (E) minimàm partem abscindere.

Fig. 69.

Quoniam minima pars à triangulo A B C resecabilis non a est trapezium, sed triangulum ab aliquo trium angulorum, A, B, C abscissum, & totum intra datum triangulum cadens, necesse est illud sic unum

a per 11. hujus.

unum ex tribus minimis, quæ à tribus angulis abscindi possunt, sic ut cadant intra datum ABC. Eorum autem vel unum tantùm vel omnia tria intra triangulum A B C cadere, patet ex *Coroll. 2. præced.* si unum tantùm intra cadit, illud erit minimum quod à triangulo ABC per E abscindi potest. Si tria: quod ex tribus erit minimum quæsito satisfaciet.

Constr. 1. Ducantur igitur per E punctum datum singulis lateribus parallelæ D F, K I, G H. Si alicujus lateris segmentum, ut B D, inter unam parallelam D F, & latus aliud B C interjectum, sit majus residuo D A, accipe G N parem G A: per N & E due N X: hæc à triangulo A B C abscindet triangulum minimum N A F, per datum punctum E.

Demonstr. Quoniam B D inter latus B C, & ipsi parallelam D F intercepta major est reliquâ D A, triangula minima ab angulis B & C resecabilia per E, cadent extra triangulum A B C, solius autem A anguli minimum per E resecabile cadet intra, per 1. *part. præced.* Sed pars minima à triangulo A B C resecabilis per E, necessariò est triangulum per *prop.* 11, & quidem unum ex tribus minimis, quæ ab angulis A, B, C abscindi possunt, ut patet. Ergo minima pars à triangulo A B C per E resecabilis, est minimum triangulum per E resecabile ab angulo E. Atqui N A X, per *prop.* 8. minimum resecabile ab angulo A per E, cùm G E sit parallela lateri A C, & G N par G A. Ergo &c.

Fig. 70. *Constr.* 2. Si ductis per E punctum datum ad latera parallelis tribus DF, KI, GH, omnia segmenta inter latera & lateribus parallelas intercepta suis residuis sint non majora, nimirùm D B, F C non majora sint residuis D A, F A; & A K, B I residuis K C, IC; & A G, C H, residuis G B, H B: fiat ut C H ad B I, ita C F ad Z. Vide quæ ex tribus rectis A K, C F, Z, sit minima: (AK pertinet ad angulum A; C F ad angulum C; Z ad angulum B) cujus anguli linea est minima, ab eo angulo abscinde per E minimum triangulum per *prop.* 8. erit hoc minima pars à triangulo ABC per E resecabilis. *In casu* quia Z est minima, fac DO parem D B: per O & E due rectam O E X; hæc solvit Problema. Poterunt hæ tres rectæ omnes esse pares, ac proinde tria esse minima æqualia; subinde duæ pares erunt & minores tertiâ, ac proinde minima duo. Vide *prop. sequentes.*

Demonstr. Ex dato puncto E duc perpendiculares E Q, EP: per *coroll.* 1. *prop.* 8. triangulum minimum per E ab angulo A resecabile, est æquale triangulo, cujus altitudo E Q, basis quadrupla A K. Similiter minimum anguli C æquatur triangulo, cujus altitudo E Q basis quadrupla C F. Sed hæc triangula sunt ut bases, nimirum ut quadruplæ rectarum AK, CF; hoc est ut ipsæ AK, CF. Ergo minimum anguli A est ad minimum anguli C, ut A K ad C F.

Pari modo triangula minima angulorum C & B per E resecabilia, æquantur per idem *coroll.* triangulis, quorum altitudo E P, bases verò quadruplæ rectarum CH, BI; ac proinde sunt inter se ut quadruplæ C H, B I, hoc est ut ipsæ C H, B I. Ergo & minimum anguli C est ad minimum anguli B, ut CH ad B I; hoc est per constr. ut C F ad Z. Igitur ex æquo, minimum anguli A est ad minimum anguli B, ut A K ad Z. Ergo minima angulorum A, C, B, per E resecabilia, sunt rectis AK, CF, Z ordine proportionalia. Ergo inter hæc tria minima illud erit minus. cujus recta erit minor. Quare cùm hic Z sit minor, quàm A K aut C F; minimum anguli B erit minus minimo anguli A, & minimo anguli C. Ergo triangulum minimum anguli B per E nimirùm resecabile, est absolutè minimum triangulum quod à dato A B C triangulo per E abscindi potest, ac proinde per *prop.* 11, etiam pars minima. Minimum autem ab angulo B resecabile per E, est triangulum O B X per 8, est enim E D parallela lateri C B, & D O par D B. Ergo &c.

THEOREMA II. PROPOS. XIV.

Reperitur punctum intra quodvis triangulum, per quod à triangulo abscindi possint tres partes minimæ, seu triangula tria minima, inter se æqualia. Punctum verò illud est ipsum trianguli gravitatis centrum. Fig. 71.

Demonstr. In triangulo A B C ab angulo quovis B ducta sit B L bisecans latus A C in L, ejusque pars tertia sit L E. Erit E *a* centrum grav. trianguli. Per E ducantur lateribus parallelæ G H, K I, D F, hæ omnia trianguli latera trisecabunt, eruntque triangula tria GBH, KCI, DAF inter se æqualia, & minima quæ à dato triangulo per E abscindi possunt. Quæ omnia sic ostendo. Quia A L par est L C, erit *c* & G E par E H; ac proinde A K par erit F C. Jam quia L B sesquialtera est E B, etiam A C sesquialtera *d* erit G H, ac proinde tripla E H; hoc est A C tripla est A K, seu F C. Unde patet etiam K F esse tertiam partem A C; ideoque A C trisecta est in K & F. Deinde quia L E est tertia pars L B, erit etiam I H tertia pars C B. Rursum quia K I est parallela A B, estque A K tertia pars A C, etiam B I est una tertia B C. Cùm ergo etiam C H sit una tertia B C, patet quoque I H esse unam tertiam B C. Igitur B C trisecta est I & H. Eodem modo ostendam A B trisectam esse in G & D.

a Archim. *c cor. 2. p. 4. 6.* *d per 4. 6.*

Quod triangula illa tria sint æqualia sic patet: ratio totius ABC ad GBH, duplicata est per 19. 6. rationis BA, ad G B, hoc est rationis sesquialteræ. Rursum ratio totius ad K C I est duplicata rationis A C ad K C, hoc est rationis sesquialteræ. Et rursum ratio totius ad D A F est duplicata rationis B A ad D A, hoc est iterum sesquialteræ. Ergo totum ad singula illa tria eandem habet rationem, ac proinde tria illa inter se æqualia sunt.

Singula demùm esse minima sic ostendo. Jam ostensum est H I, esse parem B I, & E I est parallela lateri B A. Ergo per 8, G B H est minimum triangulum quod ab angulo B abscindi potest per E. Similiter quia F K par est F C, & E F parallela lateri B C, per 8. erit K C I minimum ab angulo C resecabile per E. Demùm quia K F est par K A, estque E K parallela lateri B A, rursus per 8, erit D A F minimum ab angulo A resecabile per E. Quare cùm G B H, KCI, DAF sint minima per E resecabilia ab angulis B, C, A, & inter se paria sint; erunt quoque tria minima quæ à triangulo ipso A B C abscindi possunt per E.

Corollarium.

D F bisecatur in E. Nam E F æquatur H C, hoc est B I, hoc est D E.

THEO-

THEOREMA III. PROPOS. XV.

Fig. 72. In triangulo quovis ABC, recta B L bisecet A C, ejusque pars tertia sit L E. Sumatur inter L & E quodvis punctum Z. Dico per hoc abscindi posse à triangulo toto A B C duo triangula minima inter se æqualia.

Demonst. Ducantur lateribus parallelæ, per Z quidem, TV, MQ, DN; per E autem GH, KI. Quoniam ex præc. patet B C trisecari in I & H, ac proinde B I, C H æquari, patet B Q majorem esse quàm CV. Quare si fiat ut CV ad BQ, ita CN ad α, erit α major quàm C N. Jam quia T Z est ad Z V ut A L ad L C, erit T Z æqualis Z V, ideoque & A M ipsi C N æqualis. Patet autem ex *prop.* 12, minima triangula ab angulis A, C, B resecabilia per Z cadere intra triang. ABC: & ex 13, habemus ea esse inter se ut rectas A M, C N, α; sic ut A M respondeat minimo anguli A, C N minimo anguli C, α minimo anguli B. Ergo cùm ostenderim æquales esse AM, CN, & α majorem quàm C N, adeoque & quàm A M, erunt minima angulorum A & C, inter se æqualia, & minora singula minimo anguli B: ac proinde erunt duo æqualia minima omnium quæ per Z ab triangulo toto A B C abscindi possunt.

Fig. 73. Quod si punctum Z detur suprà E centrum gravitatis, non poterunt abscindi duo minima æqualia, licet omnium angulorum minima triangula caderent intra A B C.

Nam tunc C V erit major quàm B Q, adeoque si fiat ut CV ad BQ, ita C N ad α. erit α minus quàm CN, & quàm AM, ac proinde minimum anguli B, erit minus quàm minima angulorum A & C. Ex quo patet determinatio.

Corollarium ad Duas præced.

Fig. 71. In omni triangulo rectæ per gravitatis centrum E lateribus parallelæ GH, KI, DF, abscindunt tres partes æquales maximas AGHC, AKIB, BDFC. Patet ex *prop.* 14.

Fig. 72. In datis verò *prop.* 15. per quodvis Z punctum inter E & L, abscindi possunt duæ partes æquales maximæ.

PROBLEMA VI. PROPOS. XVI.

Triangulum per datum in ipso punctum dividere secundùm rationem datam.

Datum sit triangulum B A C, & punctum E, intra illud; data quoque sit ratio quæcumque α ad β.

Constructio 1.

Fig. 74. Ex quovis angulo B ducatur B D secans latus AC, adeoque etiam per 1.6. triangulum BAC, secundùm rationem datam α ad β. Deinde per datum punctum E abscinde à triangulo BAC minimam partem F A Q per 13 *hujus*. Si triangulum BAD, quod altero BCD minus est, est minus minimo F A Q, impossibile erit Problema. Scietur autem utrum minus sit, si amborum ratio ad rectas lineas a revocetur.

a *Per cor.* 3.p.23.6.

Constructio 2.

Si ratio data α ad β existat intra limites determinationis jam datæ, dividatur ut prius, triangulum BAC rectâ BD secundùm rationem datam. Tum à singulis angulis A, B, C per datum punctum E abscinde a duo triangula æqualia ipsi BAD, vel unum, si duo nequeant. Quando autem possint abscindi duo, quando unum, vide *prop.* 10, & 9. Item a singulis angulis per E abscinde b triangula duo, vel unum, æqualia alteri B D C. Quot ex his triangulis cadent intra triangulum datum BAC, tot habebimus Problematis solutiones.

Fig. 74. a *Per* 10. *hujus.* b *per eam.*

Constructio 3.

Fig. 75. Si ratio data fuerit ipsa ratio partis maximæ ad minimam, quæ à dato B A C triangulo abscindi potest per E, & punctum E fuerit ipsum centrum gravitatis; per ipsum ducantur singulis lateribus parallelæ. Dico quamlibet harum solvere Problema, ut patet ex *prop.* 14. ac proinde triplicem hoc casu haberi solutionem.

Constructio 4.

Fig. 76. Si ratio data fuerit ipsa ratio partis maximæ ad minimam, & punctum datum E sit infrà gravitatis centrum O, in rectâ A Z bisecante aliquod latus B C, duplex habebitur solutio, si nimirum per 8 *hujus* ab B & C abscindantur duo minima triangula B X T, CVQ, per punctum E. Ea enim per 15 erunt æqualia, & minima quæ à triangulo B A C abscindi possunt.

Constructio 5.

Fig. 77. Si ratio data α ad β fuerit majoris inæqualitatis & minor ratione partis maximæ ad minimam, & punctum datum E sit ipsum gravitatis centrum, sextuplicem Problema solutionem poterit admittere hunc in modum.

Fiat ut α ad β, ita C F ad F A, & ducatur B F. A B angulo A per E abscinde per 10 *hujus* duo triangula DAI, NAK, ipsi BAF, quod altero BFC minus est, æqualia. Ea abscindi posse, & terminari intra triangulum BAC, ostendam infrà. Dico tam B D I C ad DAI, quàm CBKN ad NAK esse ut α ad β. Eadem operatio si fiat circa angulos B & C (fieri autem posse ostendam infrà) universim sextuplex obtinebitur solutio Problematis.

Quando autem juxta determinationem in *prop.* 10 vel potiùs 9 demonstratum ab angulo aliquo tantùm unum abscindi poterit triangulum æquale ipsi B A F, pauciores erunt solutiones Problematis: semper tamen tres saltem solutiones poterunt obtineri.

Demonst. Abscindi posse triangula duo ipsi B A F æqualia sic ostendo. Cùm ratio α ad β, hoc est ex const. ratio C F ad FA, hoc est ratio a trianguli BFC ad BAF, sit b minor ratione partis maximæ ad minimam, patet B F C esse minus maximâ parte, & BAF majus minimâ. Ergo per 10 *hujus* abscindi possunt duo triangula, putà DAI & NAK æqualia ipsi BAF.

a *Per* 1. 6. b *hyp.*

Utrumque verò terminari intra B A C sic demonstro. Per E quod est gravitatis centrum trianguli BAC, duc Q L parallelam ad B C. Ostensum est in 14 *hujus* Q A L esse minimum triangulum, quod ab angulo A abscindi per E potest. Deinde cùm ratio

a ad β, hoc est ratio C F ad F A sit ratio d majoris inæqualitatis, cujus major terminus sit CF, patet CBF o esse majus quàm FBA; ac proinde FBA esse minus semisse trianguli BAC. Quod si ex B per E ducatur recta B X, ea c bisecabit A C, cùm punctum E sit idem cum centro gravitatis. Ergo triangulum X B A ex B per E abscissum erit semissis ipsius BAC, adeoque majus quàm FBA. Ergo triangulum DAI quod ab angulo A per E abscindetur æquale ipsi F B A, etiam minus erit quàm XBA, ac proinde erit vicinius minimo Q A L, adeoque necesse est ut terminetur intra triangulum B A C. Eodem modo probabitur alterum N A K, ipsi F B A æquale, totum cadere intra B A C.

d hyp. o Per 1. 6. c ostendi 18. hujus.

Jam verò cùm DAI, & NAK sint paria singula ipsi F B A, etiam residua BDIC, CBKN residuo FBC singula erunt æqualia: ac proinde triangulum B A C rectis DI, NK bis sectum est per E in ratione datâ.

Denique quia eodem plane discursu demonstrabitur à reliquis angulis singulis B & C posse per E abscindi duo triangula æqualia ipsi F B A & terminata intra B A C; manifestum in hoc casu est sex obtineri posse solutiones Problematis. Quod erat demonstrandum.

CAPUT XV.

Cujuscumque rectilinei sectio per punctum datum.

Sectione trianguli ex dato puncto. ad rationem datam adæquatè (nisi fallor) jam constitutâ, desiderabunt, opinor, Geometriæ studiosi similem cujuslibet dati rectilinei sectionem. Quæ quando ex trianguli sectione ferè pendet, eam priori tractatui hic adjungam, demonstrationibus, quæ constructione inventâ satis sunt faciles, aut tantùm indicatis aut breviter perstrictis.

Lemma.

Rectilineorum datorum rationes rectis lineis exprimere: sive datam rectam ita secare ut segmenta ejus sint datis rectilineis proportionalia.

Reducantur a rectilinea data ad rectangula æquè alta: tum ita seca rectam b datam ut ejus segmenta proportionalia sint basibus rectangulorum. Dico Factum. Demonstratio patet ex 1. 6.

a Per 46. 1. b Per 10. 6.

PROBLEMA I.

Fig. 78. Datam figuram rectilineam (BFEDC) ex puncto (A) in circumferentiâ dato, secare secundùm rationem datam (M O ad O N.)

Constr. Ex puncto dato A ductis ad omnes figuræ angulos rectis lineis resolvatur figura data in triangula, H, I, K, L. Tum ita seca a rectam M N, in punctis P, Q, R, ut ejus segmenta sint triangulis H, I, K, L ordine proportionalia.

a Per lem.

Si aliqua sectio incidat in punctum O, solutum est Problema.

Quod si nulla sectionum coincidat cum puncto O, vide segmentum QR, in quo erit punctum O, cui triangulo respondeat. Hic respondet triangulo K: hujus basim E D seca in G rectâ A G, ut sit E G ad G D (adeoque b & triang. EAG ad triang. GAD) ut Q O ad O R. Dico ABFEG esse ad AGDC, ut M O ad O N.

b Per 1. 6.

Demonstratio utriusque constructionis est manifesta componendo, dividendo & ex æquo &c.

PROBLEMA II.

Rectilineum datum (B C D E F) ex dato puncto (A) in perimetro secare in quotvis partes quæ datas inter se habeant rationes. Fig. 79.

Constr. Rationes datas exprimant rectæ F G, GM, MO, OP. Per praeced. figuram totam C E ex dato puncto A seca per rectam A K, ut sit R ad reliquum K F sicut est F G ad G P. Tum per eandem seca reliquum KF per rectam A N, ut sit S ad reliquum N F sicut G M ad M P: hoc reliquum rursus seca per rectam A Q, ut T sit ad V sicut MO ad OP. Dico segmenta R, S, T, V esse rectis F G, GM, MO, OP proportionalia.

Demonstratio est manifesta componendo & ex æquo &c. Vide demonstrationem *Probl. 4. cap. 16.*

PROBLEMA III.

Parallelogrammum (B C D E) ex dato extra illud puncto (A) secare in ratione datâ (F O, ad O P). Fig. 80. 81.

Constr. 1. Ex A ad duos angulos C, D, remotiores, ducantur rectæ A C, A D, quæ secent latus angulis oppositum in K, & G, (qui erit casus primus) dirimentes parallelogrammum datum in duo triangula & unum trapezium. Tum a seca rectam FP in segmenta F M, M N, N P ipsis C B K, C K G D, D G E ordine proportionalia, si aliqua sectionum coincidat cum puncto O, habetur intentum, ut patet. Si nulla coincidat, vide segmentum (N P) in quo est punctum O, cui segmento parallelogrammi respondeat.

a Per lem.

Si respondeat uni ex triangulis, ut DGE, per *p. 5. cap. 14.* seca triangulum D G E ex A, rectâ A Z X, ut DGZX sit ad XZE ut NO ad OP. Dico totum parallelogrammum rectâ A Z X sectum esse in ratione datâ F O, ad O P. Demonstratur componendo, ex æquo, & dividendo. Fig. 80.

Si segmentum, in quo est O, respondeat trapezio CKZD; seca KG rectâ AZX, fit ut KZ sit ad ZG, ut MO ad ON. Dico factum. Demonstratio facilis est. Nam 1. 6. etiam K A Z erit ad Z A G, ac proinde & CAX ad XAD, ut MO ad ON. Ergo etiam CKZX est ad XZGD ut MO ad OP. Cætera patent componendo, ex æquo & dividendo &c. Fig. 81.

Constr. 2. Quod si punctum datum A sit in aliquo latere, ut C B, producto; ad oppositum angulum D due rectam AKD. Tum rectam F P seca in segmenta F M, M P proportionalia segmentis CBKD, DKE. Cætera deinde ut suprà. Fig. 82.

Si punctum A sit in diametro D B productâ, biseca F P in M. Tum ex A rectâ AZX ita seca b triangulum DBE, ut DBZX sit ad XZE ut MO ad OP. Dico factum. Demonstratio patet. Fig. 83. b Per 5. cap. 14.

PRO-

PROBLEMA IV.

Fig. 81. & 84.

Datum sit trapezium DCKG habens duo latera coëuntia in A. Oporteat illud ex puncto A dividere in ratione datâ, MO ad ON.

Fig. 81. a per 10.6.

SI duo reliqua latera DC, GK sint parallela, ut in Fig. 81, fiat ut a MO ad ON, ita DX ad XC. Recta AX satisfaciet Problemati, ut jam in demonstratione præcedenti ostensum est.

b Per lem. c Per 5. cap. 14.

Si etiam reliqua duo latera concurrant, putà in F, fiat b ut DCKG est ad CFK, ita MN ad NQ. Deinde ex puncto A rectâ AX c ita seca triangulum DFG, ut sit DXZG ad XFZ, sicut MO est ad OQ. Dico etiam DXZG fore ad XCKZ, ut est MO ad ON.

Fig. 48.

Demonstr. Quia DXZG per constr. est ad XFZ, ut MO ad OQ; erit quoque DXZG ad DFG, ut MO ad MQ. Et quia per constr. est DCKG ad CFK, ut MN ad NQ, etiam erit DFG ad CFK, ut MQ ad NQ. Igitur ex æquo ita ratiocinabimur.

DXZG est ad DFG, ut MO ad MQ; & DFG est ad CFK, ut MQ ad NQ; & CFK est ad DCKG per constr. ut NQ ad MN. Ergo ex æquo DXZG est ad DCKG, ut MO ad MN. Ergo etiam DXZG est ad XCKZ ut MO ad ON. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA V.

Fig. 85.

Rectilineum quodcumque, ex dato extra ipsum Puncto (A) dividere secundùm rationem datam (KO ad OP).

o Per lem.

COnstruct. Rectis ex dato puncto A emissis partite figuram datam utcumque in triangula & quadrangula B, C, D, E. Tum rectam KP seca o in segmenta KN, NM, MQ, QP, planis B, C, D, E ordine proportionalia. Si aliqua sectio coincidat cum O, habetur quæsitum, si nulla, tunc illud segmentum figuræ, quod respondet segmento rectæ KP, in quo est O, ita d seca, ut ipsum segmentum à puncto O secetur. Dico factum. Ex gr. quia segmentum C respondet segmento NM, in quo est O, seca per 4. ipsum C rectâ AZ secundùm rationem NO ad OM, recta AZ secabit totam figuram in ratione KO ad OP.

d per probl. 5. c. 14. vel probl. 4. hujus.

Demonstratio instituetur, componendo, ex æquo, dividendo &c. *vide demonst. Prob. 4. cap. 16.*

Corollarium.

Quod si oporteat figuram datam secare in partes quotvis, quæ datas habeant inter se rationes, operare ut in 2. Probl. *ut enim isthic per* prop. 17; *ita hic per* 21 *quæsitum obtinebitur.*

PROBLEMA VI.

Fig. 86. 87.

Datum parallelogrammum (BCDE) per punctum intra illud datum (A) dividere in ratione datâ (FO ad OP).

Fig. 86.

COnstruct. Si Problema possibile est, recta illud solvens aut truncabit aliquem angulum parallelogrammi dati, aut secabit duo latera ejus opposita. Tentetur primùm sectio ad angulum B, & ducatur CE. Seca a FP in segmenta FM, MP triangulis BCE, DCE proportionalia. Tum ductâ per A rectâ LAI, divide b triangulum BCE in ratione FO ad OM. Si LAI occurrat lateribus BC, BE inter B, & C, & inter B ac E, vel in C aut E, solutum est Problema, & patet demonstratio: si occurrat ultra C & E, secando nimirùm rectam CE, tentetur eadem sectio circa reliquos angulos.

a Per lem. b Per 16. cap. 14.

Fig. 87.

Quod si in angulis sectio quæsita non succedat, tentanda ea erit ad duo latera opposita ex. gr. CD, BE, hunc in modum. Seca parallelogrammum BD in ratione datâ FO ad OP per rectam RS parallelam ad CB. Biseca deinde RS in Q. Per A & Q ducta recta secans latera opposita in L, & I, solvet Problema. Nam LQS, IQR æqualia erunt: additoque communi CRQLB, erit CILB æquale ipsi BCRS. Ex quo patet quæsitum. Quod si recta per A & Q non occurrat lateribus CD, BE, nisi productis, tentetur eadem sectio ad latera opposita CB, DE.

Si verò neque ad angulos ullos, neque ad ulla opposita latera quæsita sectio succedat, Problema impossibile erit.

Porrò ex inspectione rationis datæ, & situ puncti dati, facilè discernet Geometra, utrum ad angulos, an ad latera opposita, item ad quem angulum & ad quæ opposita latera prædicta sectio tentanda sit.

PROBLEMA VII.

Fig. 88.

Trapezium (BCDE) per datum intra illud punctum (A) secare in ratione datâ (FO ad OP).

TEntetur primùm sectio circa angulos, ut in præcedenti. Quod si ea non succedat, tentetur circa latera opposita hunc in modum.

Vel trapezium nulla habet latera parallela, vel duo. Habeat primò nulla, & sectio tentetur ad latera CD, BE, quæ concurrant in L. Fiat ut a BCDE ad DLE, sic FP ad PZ. Tum per b punctum A ita seca triangulum CLB, ut BCKX sit ad XLK, sicut FO ad OZ. Dico etiam DCKX fore ad XKDE, ut FO ad OP. Demonstrabitur ut *Probl.* 4. Quod si talis sectio trianguli CLB juxta determinationes *Probl.* 16. *cap.* 14. impossibilis sit, aut recta secans XK secet latus ED, tunc latera CB, DE producantur, donec concurrant, & circa novum inde natum triangulum simili modo dicta sectio iteretur. Quæ si etiam isthic successu careat, Problema erit impossibile.

a Per lem. b Per 16. cap. 14.

Habeat deinde trapezium duo latera parallela. Tum verò quid facto opus sit, facilè ex jam dictis, tum hîc, tum in præcedenti, colligetur.

PROBLEMA VIII.

Fig. 89. 90.

Rectilineum quodcumq; datum (BCDEG) per punctum intra illud datum (A) secare in ratione datâ (FO ad OP).

COnstruct. Si possibile est Problema, manifestum est rectam, quæ satisfaciet quæsito, aut truncaturam aliquem angulum, aut secturam duo latera opposita vel non contigua.

Fig. 88.

Tentetur primùm sectio ad angulum B, hunc in modum. Resolve figuram in triangula & quadrangula, sic ut datum punctum A sit in triangulo. Tum seca rectam FP in segmenta FM, MP, planis BCG, GCDE proportionalia. Deinde triangulum k BCG, per A, rectâ RAL secâ in ratione FO ad OM. Si

k Per 16. cap. 14.

RAL occurrat ipsis B C, B G non secando rectam G C, habetur intentum, & demonstratio est manifesta. Si verò recta per A ducta secat GC inter C & G, eadem operatio erit ad alium angulum tentanda.

Fig. 90. Quod si ad angulos sectio quæsita non succedat, tentanda eadem erit ad latera non contigua, ex. gr. CD, GE, hunc in modum resolve figuram in triangula & quadrangula, sic ut datum punctum A sit in quadrangulo. Tum seca FP in segmenta F M, M P, planis BCG, GCDE proportionalia. Deinde quadrangulum GCDE, per A, rectâ RAL seca *h* in ratione MO ad OP. Si RAL secet latera CD, GE, habetur quæsitum, & demonstratio est manifesta: si verò secet G C, tentanda erit eadem sectio ad duo alia latera non contigua.

h per probl. 6. vel 7.

Quod si neque ad angulos ullos, neque ad ulla latera non contigua sectio quæsita succedat, Problema impossibile erit.

Cæterùm etiam hic perito Geometræ ex inspectione rationis datæ, & dati puncti positione haud erit dijudicatu difficile, utrum ad angulos, an ad latera non contigua, item ad quem angulum, & ad quæ non contigua latera, utiliter sectio quæsita tentari possit.

Corollarium.

Quod si figuram datam per datum in ipsâ punctum placuerit secare in partes quotcumque quæ datas inter se rationes habeant, id obtinebitur adminiculo hujus Problematis, operatione ad eum modum institutâ, qui traditur Problemate 2. hujus capitis.

CAPUT XVI.

Rectilinearum figurarum sectio per lineas parallelas.

PROBLEMA I.

Fig. 91. **Triangulum (BAD) per rectam uni lateri (BD) parallelam, secundùm rationem datam (MN ad NP) dividere.**

INter MP, & NP, reperiatur *a* media proportionalis OP. Tum ut MO ad OP, ita *b* fiat BF, ad FA. Per F duc FE parallelam ad B D. Dico BFED esse ad FAE ut MN ad NP.

a per 13. 6. b per 10. 6.

Demonst. Quia ut MO ad OP, *o* ita BF est ad F A, erit componendo ut M P ad O P, ita B A ad F A. Nunc *c* quia triangula BAD, FAE similia sunt, eorum ratio duplicata *n* est rationis laterum BA, FA, hoc est (ut jam ostendi) rationis MP ad OP. Et quia MP, OP NP sunt *p* proportionales, etiam ratio M P ad N P duplicata *d* est rationis MP ad OP. Quare cum rationes BAD ad FAE, & MP ad NP ambæ sunt duplicatæ rationis, MP ad OP, æquales *e* erunt. Igitur, dividendo, BFED est ad FAE, ut MN ad NP.

o per const. c per corol. 1. p. 4. 6. n per 19. 6. p per const. d per defin. 10. 5. e per 34. 5.

PROBLEMA II.

Fig. 92. **Triangulum (BAC) per rectam datæ rectæ (AG) parallelam secundùm datam rationem (MO ad OQ) dividere.**

AB angulo C ducatur ad oppositum latus recta C D parallela datæ A G. Si est B D ad D A ut MO ad OQ, erit quoque per 1. 6. BCD ad DCA, ut MO ad OQ, adeoque recta CD Problemati satisfaciet. Si verò non est, fiat *a* ut BD ad DA, sic MN ad NQ. Deinde triangulum DAC per rectam F E parallelam datæ ita *b* seca, ut sit DFEC ad FAE, sicut NO ad NQ. Dico etiam BFEC fore ad FAE, ut MO ad OQ; adeoq; rectam EF quæsito satisfacere.

a per 10. 6. b per præc.

Demonstratio instituetur, componendo; ex æquo; dividendo.

PROBLEMA III.

Fig. 93. **Trapezium BAGD bina habeat parallela latera BA, DG: reliqua BD, AG coëant in E. Oporteat ipsum recta (CF) lateribus parallelis parallela secare in ratione data PO ad OR.**

FIat PR ad RS *a*, ut BAGD ad GED. Deinde triangulum BAE rectâ CF lateri AB parallelâ ita seca, *e* ut BAFC sit ad CFE, sicut PO ad OS. Dico etiam BAFC fore ad CFGD, ut PO est ad OR.

a Per lem. ante prob. 1. c. 15. e per prob. 1.

Demonstrabitur ut *Probl. 4. cap. 15.*

PROBLEMA IV.

Fig. 94. **Superficiem rectilineam quamcumque, recta datæ rectæ (QS) parallelâ dividere secundùm rationem datam (GO ad ON).**

SUperficies data dividatur in triangula & quadrangula. A, B, C, D, E, F, per rectas à singulis superficiei angulis eductas parallelè ad QS. Secetur deinde recta G N *a* in segmenta ipsis A, B, C, D, E, F, proportionalia. Denique superficiei segmentum E, quod respondet rectæ G N segmento L M in se habenti punctum O, divide *o* per lineam P R datæ QS parallelam, secundum rationem LO ad OM. Dico totam superficiem eâdem illâ P R sectam esse in ratione G O ad O N.

a per lem. ante 1. cap. 15. o per præc.

Demonstratio. Quater componendo, & totidem vicibus argumentando ex æquo, concludes portionem ARP esse ad RVZP, ut GO est ad OM. Deinde quia est per constr. XTRP ad RVZP, ut LO ad O M, erit compon. & invert. R V Z P ad E, sive TVZX, ut OM ad LM. Atqui ex constr. E, sive T V Z X est ad F, ut L M ad M N. Ergo ex æquo RVZP est ad F, ut O M ad M N. Rursum igitur invert. compon. iterumque invertendo RVZP est ad RVQP, ut OM ad ON. Cùm igitur ostenderim suprà, ARP esse ad RVZP, ut GO ad OM, & jam statim ostenderim RVZP esse ad RVQP, ut OM ad ON. ex æquo tandem erit ARP ad RVQP, ut GO ad ON. Quod erit demonstr.

Scholium.

Superficierum sectiones tribus capitibus proximis jam traditæ revocantur ad praxim in campo.

Quoniam sectiones omnes cap. 14. 15. 16. *Geometricè, hoc est circino & regulâ peraguntur, necesse est modum edoceri tyrones, quo ea possint ad campum traduci, ubi circini ac regulæ non est usus. Is verò est ejusmodi.*

Describatur a superficiei secanda ichnographia, quæ ex. gr. sit BCDEG. Hanc Geometricè seca, ut petitur. Sit autem linea secans ex. gr. LR. Tum adminiculo scalæ quàm accuratissimè constructæ inquiratur, quâ proportione secentur latera C D, G E a rectâ L R; sive quot scalæ partes contineant laterum segmenta C L, G R. In campo deinde in iis lateribus, quæ ipsis CD, G E proportionaliter respondent, initio facto ab angulis, qui ipsis C, & G æquales sunt, numerentur tot pedes, quot CL, GR continebant scalæ particulas. Recta linea numerationis terminos utrimq; conjungens, superficiem datam eadem proportione dividet in campo, quâ superficiem BCDEG recta RL secat in chartâ.

Fig. 90. a per prob. 10. c. 10.

FINIS LIBRI SECUNDI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER TERTIUS.
DE CORPORE.

Corporum mensura est cubus alicujus notæ mensuræ linearis, ut pollicis, palmi, pedis &c. Recta A B repræsentet longitudinem unius pedis, suprà quam descriptum sit quadratum, sive pes quadratus A B C. Cubus A O C B suprà hoc quadratum descriptus, est cubus unius pedis, sive pes cubicus, cujus nimirùm & longitudo A B, & latitudo B C, & altitudo B O, unius omnes sunt pedis. Atque idem de alijs mensuris intellige. Porrò cubi ac cæterorum corporum definitiones vide ante librum 11 ac 12 elem. Geometriæ. Fig. 31

CAPUT XVII.

Dimensio corporum planis superficiebus comprehensorum.

PROBLEMA I.

Soliditatem parallelepipedi recti invenire.

Fig. 1. & 4. Parallelepipedum rectum producitur ex basi in altitudinem ductâ, sive (quod idem est) ex multiplicatione trium laterum angulum solidum continentium.

Porrò basis ad arbitrium est quodlibet unum è planis sex, quæ parallelepipedum continent, ex. gr. planum ABCD; altitudo autem est perpendicularis inter basim ABCD, & planum oppositum NEF extensa, quæ in parallelepipedo recto est ipsum latus ejus BF.

Fig. 1. 2. 4. a per probl. 1. c. 11. Metire igitur tria latera AB, CB, FB, angulum solidum continentia. Ex his duo quælibet, ex. gr. AB, CB inter se multiplica. Producetur a numerus quadratorum (ex. gr. pedum) quibus basis A C æqualis est. Quo deinde per numerum altitudinis, seu lateris tertij B F multiplicato, proveniet numerus cuborum, quibus parallelepipedum A E æquale est.

Fig. 4. b per eund. Quod si parallelepipedum sit cubus, uno latere noto, ejus soliditas innotescit. Nam latere A B in se ducto habetur b ejus quadrata basis A C: quâ rursum ductâ in B F altitudinem, quæ ipsi A B æqualis est (cubi enim omnia latera æqualia sunt) habetur soliditas cubi dati A E.

Fig. 1. 2. *Exempl.* 1. Esto B C pedum 3, B A, 5; B F, 3. Latera B C, 3, & B A, 5, per invicem multiplicata producunt 15 pedes quadratos pro areâ baseos A C: quâ rursum ductâ in B F 3, proveniunt 45 pedes cubici, quibus parallelepipedum A E æquale est.

Fig. 4. *Exemplum* 2, pro cubo, latus A B repertum sit 3 pedum: hoc in se ductum exhibet 9 pedes quadratos pro quadratâ basi A C: quæ rursum ducta in 3, producit 27 pedes cubicos pro soliditate cubi A E.

Fig. 1. 2. 4. *Demonstr.* Intelligatur basis A D C B, moveri versus N E F, eâ lege, ut semper maneat sibi ipsi parallela, & lateris B C extremitates rectas CE, BF non excedant. Quando basis A D C B absolverit unum pedem B G, liquet singula ejus quadrata, seu pedes quadratos, produxisse unum cubum, sive unum pedem cubicum. Rursum ubi absolverit pedem secundum G K singuli baseos pedes quadrati produxerunt cubicum pedem unum: & sic deinceps per reliquos pedes lateris B F procedendo. Ergo quando basis pervenerit in N E F, hoc est quando totum parallelepipedum descripserit, manifestum est ipsam tot pariter produxisse pedes cubicos, quantus est numerus qui fit ex quadratis pedibus baseos multiplicatis per pedes altitudinis B F: ac proinde ex multiplicatione dictâ, vera parallelepipedi quantitas innotescit. Quod erat demonstr.

Corollaria.

I. quando conclavia, cubicula, aulæ, plerumque parallelepipeda sunt, eorum capacitas ex hoc problemate nullo negotio reperitur.

II. Quia numerus cuborum soliditatem conficientium producitur ex multiplicatione duplicatâ, hinc fit, ut is enormiter excedat numeros laterum, ex quorum multiplicatione gignitur, adeoque ingentem plerumque admirationem moveat harum rerum inexpertis. Si enim numerus quadratorum superficiem constituens, qui multiplicatione unicâ laterum gignitur,

tur, tantopere excedat ipsorum numeros laterum, ut ostensum est in corollariis *prob. 1. cap. 11.* quantùm excedat necesse est numerus soliditatem efficiens, quando is ex superficie rursum in latus ducta procreatur. Specimen ejus rei dabit milliare cubicum unius horæ.

Milliare quod unâ horâ commodè absolvitur complectitur pedes Rhynlandicos 18000. Hi in se ducti producunt quadratos pedes 324000000, qui constituunt quadratum unius horæ milliare. Hoc rursum per 18000 multiplicatum, producit pedes cubicos 5832,000,000,000, hoc est pedum cubicorum quinque milliones millionum, & octingenta triginta duo millia millionum. Ex quo jam facilè lector perspiciet, formidabilem illum carcerem quem in terræ visceribus puniendis sceleribus impiorum Divina Justitia constituit, exiguam omninò terreni orbis portiunculam esse posse: nam spatium cubicum, cujus latus, aut sphæricum, cujus diameter duo vel tria milliaria non excedat, abundè illi sufficere, assumpto hominum numero multò majore, quàm futurus est, facilè ex jam dictis ostendi potest.

Quod si tantus est numerus pedum cubicorum, qui uno milliario continentur, quantus erit arenarum cubicum unum milliare componentium! Si verò is numerus propè inæstimabilis videatur, quis demùm animo comprehendat numerum arenarum, quem terræ globus universus complectitur? Demonstravit nihilominus Archimedes hunc numerum & scribi breviter & facilè enunciari posse. Nos quoque *Arithm. practica lib. 5. cap. 4. theor. 20.* deductione brevissimâ demonstravimus eum longè minorem esse eo numero, qui constat unitate & cifris 97.

III. Offertur murus quispiam, & quæstio est, quot lateres eum constituant.

Explora quot lateres secundùm longitudinem suam dispositi expleant longitudinem muri. Deinde quot lateres secundùm suam latitudinem dispositi, expleant muri latitudinem. Numeri reperti inter se multiplicati, dabunt lateres qui basim muri constituunt, ut patet ex *prob. 1. cap. 11*, perinde enim est, sive æqualia rectangula, sive quadrata æqualia ad mensuram adhibeas. Inquire tandem quot lateres suprà invicem positi expleant muri altitudinem. Numerus basis suprà repertus, ductus in numerum altitudinis, dabit numerum laterum qui murum totum constituunt.

Quod si murus extruendus sit longitudine, latitudine, & altitudine datis, & quæstio sit, quot lateres requirantur: processus erit idem qui suprà, sed habenda erit ratio spatij à calce lateribus intermixtâ occupandi.

Lemma.

Altitudinem solidi habentis duo parallela plana, item pyramidis & coni, metiri mechanicè.

Si solidum sit erectum, planum parallelum superius producatur, imò & inferius, nisi solo æquabili insistat. Tum è plano superiori ad inferius, sive baseos, perpendiculum demitte, cujus longitudinem metire aliquâ mensurâ. Ea enim est altitudo solidi quæsita.

Si solidum jaceat in terrâ, inter utrumque parallelum planum productum funem aut perticam perpendiculariter pormæ adminiculo extende ejusque longitudinem metire ut prius.

Eadem operatio conveniet pyramidi, si vertici planum basi parallelum imposueris.

PROBLEMA II.

Soliditatem prismatis *a* cujuscumque invenire.

a vide def. 12. 11.

PRismatis soliditas producitur ex basi ductâ in altitudinem.

Est autem basis alterutrum è parallelis planis; quæ quoniam esse possint figura qualibet rectilinea, etiam prismatum species innumeræ sunt. Altitudo, est perpendicularis utraque parallela plana tangens. Si prisma rectum est, latus ipsum (B F) altitudo est.

Fig. 5. 6. 7. Fig. 7. Fig. 7.

Fac igitur *n* notam prismatis altitudinem in aliquâ mensurâ. Deinde, ut *cap. 11* traditum est, ubi omnis generis figuræ rectilineæ mensurantur, unam ex basibus E F G H K notam redde in quadratis ejusdem mensuræ, quâ altitudinem fecisti notam. Numerus quadratorum basis, ductus in numerum altitudinis, dabit numerum cuborum ejusdem mensuræ, quibus datum prisma æquale est.

n Per lem.

Exemplum. Altitudo B F reperta sit pedum 10: basis verò per *cap. 11* mensurata, contineat pedes quadratos 200. basis 200 ducta in altitudinem 10 facit 2000. Igitur prisma continet pedes cubicos 2000.

Demonstr. Super rectangulo, quod basi EFGHKI æquale sit, intelligatur erigi parallelepipedum rectum ejusdem altitudinis cum prismate K C. Erit hoc prismati *b* æquale. Atqui parallelepipedum istud producitur ex basi suâ ductâ in suam altitudinem; hoc est *c* ex prismatis base E F G H K I in altitudinem prismatis. Ergo etiam prisma K C producitur ex basi EFGHKI in altitudinem prismatis. Quod erat demonstr.

b Per cor. 1. & 9. 12. *c per const.*

PROBLEMA III.

Cujuscumque pyramidis quantitatem invenire.

SOliditas pyramidis *a* cujuscumque habetur ex basi ductâ in tertiam partem altitudinis.

a vide defin. 1. 12.

Altitudo pyramidis est perpendicularis A O à vertice in basim demissa. Quia porrò basis esse potest qualibet figura rectilinea, innumeræ sunt etiam pyramidum species.

Fig. 10. 9. 8. Fig. 9.

Metire igitur *n* mensurâ aliquâ pyramidis altitudinem. Explora deinde *b* quot ejusdem mensuræ quadrata basis B C D E contineat. Numerus baseos ductus in trientem numeri altitudinis, aut altitudo tota in basis trientem, dabit cubos ejusdem mensuræ, quibus data pyramis æqualis est.

Fig. 10. 9. 8. *n Per lem.* *b Per aliquod prob. c. 11.*

Exemplum. Altitudo pyramidis reperta sit pedum 90; basis verò pedum quadratorum 10000, contineat. Triens altitudinis 90 est 30; quæ ducta in basim 10000 efficiunt 300000 pedum cubicorum, quibus pyramis data æqualis est.

Demonstr. Concipiatur super basi B C D E pyramidis prisma æquè altum, atque pyramis. Erit pyramis tertia *o* pars hujus prismatis. Atqui soliditas *p* prismatis provenit ex altitudine totâ ductâ in basim. Ergo pyramidis soliditas proveniet ex tertiâ altitudinis parte in basim ductâ, aut ex totâ altitudine in baseos trientem. Quod erat demonstrandum.

o Per 7. 12. *p per prac.*

PRO-

PROBLEMA IV.

Quinque corporum regularium soliditatem investigare.

Corpus regulare, seu ordinatum est, quod planis æqualibus & similibus continetur. Talia sunt quinque tetraëdrum, hexaëdrum, sive cubus, octaëdrum, dodecaëdrum, icosaëdrum. Præter hæc aliud possibile non est, ut ostensum ad *prop.* 21.*l.*11.

Tetraëdrum, sive pyramis ordinata, continetur 4 æqualibus æquilateris triangulis. Latera habet 6, & angulos solidos quatuor, quorum singuli constant tribus angulis trianguli æquilateri.

Hexaëdrum, sive cubus, continetur sex æqualibus quadratis. Latera habet 12, & solidos angulos 8; quorum singuli constant tribus rectis.

Octaëdrum continetur æqualibus triangulis æquilateris 8. Latera habet 12, solidos angulos 6, quorum singuli constant tribus æquil. trianguli angulis. Exhibetur figurâ 11.

Dodecaëdrum 12 continetur æqualibus pentagonis ordinatis. Latera habet 30, & solidos angulos 12, quorum singuli constant tribus angulis pentagoni. Exhibetur figurâ 46.

Icosaëdrum continetur triangulis æquilateris æqualibus 20. Latera habet 30, & solidos angulos 20, quorum singuli constant 5 angulis æquil. trianguli. Exhibetur figurâ 47.

His præmissis.

Tetraëdri & Cubi dimensio tradita jam est *prob.* 3. & 1.

Fig. 11. *a Per lem.* Octaëdrum sic metire. Notam fac distantiam angulorum *a* oppositorum A, & D. Hujus triens ductus in quadratum unius lateris E B, dabit soliditatem octaëdri. Demonstratio patet ex *prob.* 3. Octaëdrum namque resolvitur in duas pyramides E A C B & E D C B, quarum basis communis est quadratum unius lateris E B, seu B C, altitudines verò conjunctæ efficiunt distantiam A D.

Fig. 46. Dodecaëdrum resolvitur in pentagonas pyramides æquales 12, verticem communem in centro habentes. Ex his unam metire, eamque multiplica per 12: proveniet soliditas Dodecaëdri. Pyramidem porrò ex his unam sic metire. Inquire distantiam *e* duorum pentagonorum æquidistantium. Illius semissis est altitudo pyramidis. Metire deinde pentagonum quod basis est pyramidis. Triens altitudinis jam notæ, ductus in basim, dabit soliditatem pyramidis. Patet ex *prob.* 3. *e Per lem.*

Fig. 47. Icosaëdrum resolvitur in 20 æquales pyramides, quarum vertex communis est centrum, bases verò sunt triangula Icosaëdri superficiem constituentia. Si ex his metiaris unam, & per 20 multiplices, habebitur soliditas Icosaëdri. Unam porrò sic metire. Distantiam inquire duorum triangulorum æquidistantium; illius enim semissis est altitudo pyramidis. Metire deinde triangulum quod pyramidis basis est. Triens altitudinis ductus in basim, dabit soliditatem pyramidis ut patet ex *prob.* 3.

Possunt etiam pyramidum jam dictarum altitudines inveniri Geometricè, sed opus non est, quia usus exiguus. Legat, qui volet Clavij Geometriam practicam *lib.* 5. *cap.* 4.

Cætera corpora rectilinea quæcumque, imò & curvilinea, quantumvis inordinata, metiemur infrà.

CAPUT XVIII.

Dimensio corporum superficie curva, aut plano-curva comprehensorum.

Lemma.

Diametrum basis cylindri & coni, & circuli cujusvis metiri.

Inscribe circulo quamvis rectam, & biseca. Per punctum bisectionis ducatur perpendicularis ad peripheriam utrimque pertingens, ea est circuli diameter, per 1. 3. Hanc igitur metire, & habes quæsitum.

PROBLEMA I.

Cylindrum metiri.

Per cylindrum hic intelligo; non eum tantummodo qui propriè cylindrus dicitur, & definitur definitione 3. *lib.* 12; *sed etiam omnia illa solida, quæ fiunt ex plano curvilineo quocumque ducto in aliquam altitudinem. Pro his omnibus regula universalis hæc est.* *Fig.* 12. 13.

Omnis cylindri soliditas habetur ex basi in altitudinem ductâ.

Metire igitur cylindri *n* altitudinem D F aliquâ mensurâ; item basis diametrum A C. Tum ex hac inquire *a* quot ejusdem mensuræ quadrata basis A B C O contineat. Hæc per altitudinem multiplicata, dabit ejusdem mensuræ cubos, quibus cylindrus datus A B C D E æqualis est. *n Per lem. ante prob.* 2.*c.*17. *a Per prob.* 4.*c.*12. *vel aliud*

Exemplum. Altitudo cylindri D F reperta sit pedum 30; basis verò contineat pedes quadratos 100. Due 100 in 30: provenient pedes cubici 3000, quibus cylindrus datus æqualis est.

Demonstr. Concipiatur basis rectilinea æqualis basi cylindri A B C O, superque eâ erectum prisma altitudine eâdem D F, quâ cylindrus. Erit prisma *d* cylindro æquale. Atqui prismatis soliditas provenit *e* ex suâ basi ductâ in suam altitudinem, hoc est per *c* constr. ex basi A B C O in altitudinem D F. Ergo etiam cylindri soliditas provenit ex basi A B C O ductâ in altitudinem D F. Quod erat demonstr. *d Per Cor.* *e p* 11 12. *c Per prob.* 2.

Alia cylindri recti dimensio facilior.

Metire latus *a* A E, & radium basis A N: ea in se invicem ducta dabunt aream *b* rectanguli AM. Tum ex S N, radij A N semisse, tamquam radio elice peripheriam *c* illi debitam. Area rectanguli ducta in hanc peripheriam dabit cubos, quibus cylindrus æqualis est. *Fig.*12. *a Per lem.* *b Per prob.* 1.*c* 11. *c Per prob.* 3.*c*.12.

Demonstratio patet ex *prop.* 2. *lib.* 3. *cyl. & Annular. ejusque corollario*, ubi demonstravi cylindrum æquari parallelepipedo, cujus basis est rectangulum N E, quod cylindrum genuit, altitudo autem par peripheriæ, cujus radius est S N radij A N semissis. Quare manifesta sunt reliqua ex *probl.* 1. *cap.*17.

PROBLEMA II.

Curvam cylindri circularis recti superficiem metiri.

Fig. 12.

Cylindrica superficies producitur ex circumferentiâ basis ductâ in altitudinem.

Regula tantum pertinet ad cylindrum strictè dictum, & quidem rectum.

Metire igitur diametrum A C, basis cylindri; ex quâ reperi a circumferentiam basis. Tum mensurâ eâdem metire b altitudinem C D. Hæc in circumferentiam ducta exhibebit ejusdem mensuræ quadrata, quibus cylindri curva superficies (demptis nempè basibus, quæ duo circuli sunt) æqualis est.

a Per prob. 4 c. 12. b Per lem. prob. 2. c. 17.

Exemplum. Basis diameter A C reperta sit pedum 10. Ex hac reperitur circumferentia pedum $31\frac{17}{113}$. Altitudo reperta sit pedum 20. Hæc ducta in circumferentiam $31\frac{17}{113}$ dabit pedes quadratos $628\frac{36}{113}$ pro superficie cylindri, demptis basibus.

Demonstr. Curva cylindri recti superficies æqualis est rectangulo, d cujus basis est circumferentia, altitudo autem eadem quæ cylindri. Atqui hujus area producitur ex eâ basi in eam altitudinem. Ergo & cylindri superficies. Quod erat demonstrandum.

d demonstravi lib. 2 Cyl & Annul. prop. 4. Item in selectis ex Archim. p. 11. cor. 1.

Nondum inventa est ratio metiendi superficiem cylindri scaleni, multò minus elliptici & aliorum.

PROBLEMA III.

Trunci (ABCED) à cylindro circulari recto obliquè abscissi, tam soliditatem, quàm superficiem metiri.

Fig. 14.

In Minimum trunci latus B C productum ex maximi lateris A D extremitate, designa perpendicularem D F. Tum F C seca bifariam in G; & fit cylindrus rectus A B G E K. Hujus metiri soliditatem per *probl. 1*; superficiem pro *probl. 2*; & quæsito satisfeceris.

Demonstr. Frustum K O E D æquale est frusto C O E G. Addito igitur communi frusto KOECBA, fit truncus DECBA, æqualis cylindro ABGK. Una igitur utriusque demensio est. Pari modo superficies cylindricæ K D E & C G E æquales sunt. Quare adjectâ utrimque KECBA superficie, æquales proveniunt superficies D E C B A & K E G B A. Una igitur utriusque dimensio est.

PROBLEMA IV.

Coni a soliditatem invenire.

a vide defin. 2. 12. Fig. 15. 16.

Conus producitur ex basi ductâ in trientem altitudinis.

Metire igitur aliquo genere mensuræ coni altitudinem a A E, & basis diametrum B C. Tum ex notâ diametro reperi quot b ejusdem mensuræ quadrata basis B D C O contineat. Hæc ducta in altitudinis trientem dabit cubos mensuræ ejusdem, quibus conus B D A C æqualis est.

a Per lem. ante 2. c. 17. b per prob. 4. c. 12.

Exempl. Ex notâ BC diametro basis reperta sit ipsa basis continere pedes quadratos 100. sit verò altitudo A E inventa pedum 12: hujus triens est 4, quo ducto in basim 100. provenient 400 pedes cubici, quibus conus datus B A D C æqualis est.

Demonstr. Intelligatur super eâdem basi B D C O, & altitudine A E erectus esse cylindrus B F. Hic coni B A D C triplus d est. Atqui cylindrus B F producitur ex basi B D C O ductâ in altitudinem totam A E. Ergo conus B A D C producitur ex eâdem basi ductâ in altitudinis A E trientem. Quod erat demonstr.

d Per 10. 12.

Alia coni recti dimensio facilior.

Fig. 15. a Per prob. 4 c. 11. b Per prob. 3 c. 12.

Axem coni duc in semissem radij BB: proveniet area trianguli a B E A, quod conum genuit. Tum ex triente radij B E, tamquam radio, elice peripheriam b illi debitam: in quam ducta trianguli area dabit cubos, quibus conus B A C D æqualis est.

Demonstr. Biseca E B in N, & junge A N, cujus triens esto N Q. Erit c punctum Q, centrum gravitatis trianguli B A E. Ex Q duc Q P parallelam ad N E, ut A Q ad A N, d sic Q P est ad N E. Sed A Q est duæ tertiæ ipsius A N. Ergo etiam Q P est duæ tertiæ ipsius N E, ac proinde una tertia ejus duplæ B E. Ergo peripheriæ à gravitatis centro Q descriptæ, radius Q P est triens ipsius B E. Ergo peripheria centri gravit. Q, rectè est inventa. Atqui soliditas coni B A C D producitur ex triangulo B A E ducto e in peripheriam centri gravitatis Q. Ergo coni B A C D soliditas nota est. Quod erat demonstr.

c Archim. d Per cor. 1. p. 4. l. 6. e Per 2 partem prob 18. c. 18.

PROBLEMA V.

Curvam coni recti superficiem metiri.

Fig. 15.

Omnis coni recti curva superficies producitur ex circumferentiâ basis ductâ in semissem lateris coni.

Metire igitur aliquo genere mensuræ coni latus A B, & basis diametrum B C; ex quâ eodem genere mensuræ inveni circumferentiam a B D C O. Ea in lateris B A semissem ducta dabit quadrata ejusdem mensuræ, quibus conica superficies æqualis est.

a Per prob. 4. c. 12.

Exempl. Ex notâ per mensuram basis diametro B C reperta sit circumferentia BCDO 150 pedum. Latus verò A B inventum sit pedum 12. Circumferentia 150 ducta in semissem lateris 6, efficit pedes quadratos 900, quibus æquatur data superficies conica.

Demonstr. Curva superficies coni recti est æqualis triangulo, b cujus basis est circumferentia basis coni, altitudo autem latus coni. Atqui hoc triangulum producitur c ex suâ basi (nempè basis circumferentiâ) in semissem altitudinis (nempè lateris coni). Ergo & coni superficies curva producitur ex circumferentiâ basis in lateris semissem. Quod erat demonstrandum.

b Demonstravi in selectis ex Archim p. 13 cor. 1. item Cyl. & annul. l 2. p. 2. c Per prob. 4. c. 11.

Superficies cylindricam & conicam ad circulum reductas, & insignes utriusque proprietates vide in selectis nostris ex Archimede theorematis prop. 11, 12, 13, 14 & corollarijs earumdem.

Quod attinet ad superficiem coni scaleni, nondùm reperta est ratio, quâ revocari ad mensuram possit.

PROBLEMA VI.

Fig. 17.

Trunci conici duobus parallelis circulis (AL, EQ) intercepti soliditatem invenire.

Altitudo trunci sit O N, circulorum diametri C D, A F. Metire aliquo genere mensuræ O N, A F, C D. Tum ut differentia diametrorum AF, CD ad minorem diametrum, ita trunci altitudo N O fiat ad aliud. Istud exhibebit O B altitudinem coni CEBD, qui trunco deest. Hanc adde altitudini trunci N O; & habebis N B altitudinem coni totius AGBF. Metire igitur per modum 2. problematis 4 (is enim facilior) tam conum AGBF, quàm conum CEBD, & hunc ab illo subtrahe. Residuum dabit soliditatem trunci quæsitam.

Exempl. altitudo trunci N O esto pedum 10, diameter major A F, 14, minor C D, 12: harum ergo differentia est pedum 2. Fiat per regulam Trium ut differentia 2 ad minorem diametrum CD 12, ita trunci altitudo N O 10 ad alium numerum. Dabit is altitudinem ignotam O B 60 pedum, cui si addas N O 10, fit tota altitudo incognita N B pedum 70. His ita inventis per prob. 4 reperiatur soliditas coni A G B F pedum cubicorum & coni C B E D. Minorem subtrahe à majori: remanent pedes cubici, quibus truncus conicus æqualis est.

Demonstr. Ducatur D P parallela lateri C A, eritque C D par ipsi A P, ac proinde diametrorum A F, C D differentia est F P. Per 2. 6. F P est ad P A, (hoc est ad D C), ut F D ad D B. Atqui rursum per 2. 6. F D est ad D B ut N O ad O B. Ergo F P est ad A P, seu C D, ut N O ad O B. Ritè ergo inventa fuit O B. Cætera demonstratio ex constructione patet.

Corollarium.

Fig. 18.

Ex hoc Problemate habetur dimensio doliorum, quæ componuntur plerumque ex duobus truncis conicis A B D C, A B F E, basi communi A G B O ex adverso insistentibus. De his agam uberiùs *cap.* 19. Hic solùm moneo, ut liquoris dolio contenti quantitas habeatur à diametris A B, C D, & latere A C; deducendam esse asserum crassitiem, antequam operatio in Problemate præscripta instituatur.

Corollarium 2.

Fig. 17.

Dimensio superficiei conicæ inter duos parallelos circulos G L, E Q constitutæ habetur ex *Corollario prop. 3. lib. 2. Cylind. & Annularium*, ubi ostendi eam æqualem esse rectangulo sub A C trunci latere, & semisse peripheriarum A G F L, C E D Q comprehenso.

Accedimus deinceps ad corporis omnium perfectissimi, sphæra videlicet dimensionem; quam totam Archimedis ingenio debemus. Hujus selecta de sphærâ & Cylindro theoremata faciliori methodo demonstrata Elementis Geometriæ subnexui.

PROBLEMA VII.

Datæ sphæræ diametrum metiri.

Fig. 19. 20

Quovis puncto A, in superficie sphæricâ assumpto, eo tanquam polo describe in superficie sphæricâ circumferentiam B E C D; cujus diametrum metire hunc in modum.

In circumferentiâ designa tria puncta utcumque, E, B, D. Tria horum intervalla E B, B D, D E circino accepta transcribe in chartam aut æquam terræ superficiem, ex iisque construe *a* triangulum K I L. Per tria puncta K, I, L describe *b* circulum, ejusque diametrum I M; quam metire. Erit enim circulus K I L M æqualis circulo B E C D, ut patet; adeoque diameter I M, par diametro B C intra sphæram latenti.

a per 22. 1.
b per 5. 4.

Accipiatur deinde circino intervallum A B, distantia nimirum poli à circumferentiâ BECD, atque eo latere fiat suprà jam inventam I M triangulum æquicrure I N M: & per tria puncta I, N, M *c* describe circulum I N M P, ejusque diametrum N P; quam metire. Ea enim sphæræ diametro æqualis erit.

c per eand.

Demonstr. Circuli BECD diameter esto B C, ducanturque AB, AC. Quoniam A polus est circuli BECD, triangulum BAC rectum est circulo BECD. Quare si per illud sphæra secetur, sectio ACFB erit circulus maximus, ejusque diameter erit diameter sphæræ. Atqui circulus N M P I, circulo A C F B æqualis est; triangulum enim I N M cui circulus N M P I est circumscriptus, æquilaterum est triangulo B A C, cui circulus A C F B circumscribitur. Nam I M ostensa est par BC, & per constr. IN, MN, æquales sunt ipsis B A, C A. Ergo etiam diameter circuli N M P I, diametro circuli A C F B, adeoque & sphæræ diametro, æqualis est, una igitur est utriusque dimensio. Quod erat demonstrandum.

Intervalla punctorum in superficie sphæræ accipiuntur circino, cujus crura sunt inflexa, seu incurva, eodemque circuli in sphæricâ superficie describuntur.

PROBLEMA VIII.

Sphæricæ superficiei dimensio.

Metire diametrum sphæræ, ex quâ *a* elice circumferentiam, utriusque semisses per invicem multiplicatæ dabunt *b* aream maximi sphæræ circuli: quæ quater sumpta ipsam sphæræ superficiem dabit.

a per prob. 3. cap. 12.
b per probl. 4 cap. 12.

Nobilissimum quippe Archimedis theorema est, omnis sphæræ superficiem esse quadruplam maximi circuli; cujus demonstrationem reperiet lector in *selectis ex Archim. prop.* 24.

Exempl. Sphæræ diameter reperta sit pedum 3. Ex hac elicitur circumferentia pedum $9\frac{48}{113}$. Diameter 3, & circumferentia $9\frac{48}{113}$ inter se multiplicatæ, efficiunt pedes quadratos $28\frac{31}{113}$. Hujus producti semissis, nimirum pedes quadrati $14\frac{31}{226}$ conficiunt aream maximi circuli. Hæc quater sumpta facit quadratos pedes $65\frac{124}{226}$, quibus sphærica superficies æqualis est.

Ad inveniendam aream maximi circuli quoniam perinde est, sive semisses diametri & circumferentia inter se multiplices; sive totas, modò producti sumas dimidium, ea ex duabus via tenenda, quâ fractiones evitantur. Idem in triangulo, pyramide, cono, aliisque usui venit.

Aliter & facilius.

Multiplica diametrum sphæræ per circumferentiam, productum ipsa erit sphæræ superficies.

Demonst. productum ex diametro & circumferentiâ quadruplum est producti ex semidiametro, & semicircumferentiâ, hoc est maximi sphæræ circuli. Atqui etiam sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli. Ergo productum ex diametro & circumferentiâ, superficiei sphæræ æquale est. Quod erat demonst.

PROBLEMA IX.

Superficiei sphæricæ segmenta, datis segmentis axeos, metiri.

Fig. 21. SEgmenta superficiei sphæricæ parallelis circulis (EHF, BGC) divisæ, eam habent rationem ad totam sphæræ superficiem, quam axis segmenta, hoc est eorum altitudines, ad axem totum. Demonstrationem vide *prop.* 27. *select. ex Archimede.*

Hinc in promptu est segmentorum sphæricæ superficiei dimensio. Oporteat metiri segmentum EHDF, cujus axis P D notus sit in partibus axis totius A D. Metire totam sphæræ *d* superficiem. Deinde fiat ut axis A D, ad segmentum axis P D, ita sphæræ superficies tota ad aliud; erit hoc, ipsum EHDF segmentum quæsitum.

d Præced.

Eodem modo mensurabitur segmentum superficiei inter duos parallelos circulos B G C, E H F interceptæ.

Quod si segmentum B E F C non existeret inter circulos parallelos, tunc metire, ut jam tradidi, tam segmentum B D C, quàm segmentum E D F. Majus aufer à minore. Residuum dabit segmentum quæsitum.

PROBLEMA X.

Dimensio sphæræ.

OMnis sphæra producitur ex superficie sphæricâ ductâ in sextantem diametri, seu trientem semidiametri.

Exemplum. Per *Problema* 8, reperta sit sphæræ superficies pedum quadratorum $452\frac{44}{113}$ ex diametro pedum 12: hujus sextans sunt pedes 2; per quos multiplicata superficies $452\frac{44}{113}$ producit pedes cubicos $904\frac{88}{113}$, pro soliditate sphæræ datæ.

Demonstratio pendet ex nobilissimo Archimedis theoremate, cujus demonstrationem intellectu perfacilem dedi *prop.* 38. *select. ex Archimede.* Est autem tale: omnis sphæra æqualis est cono, cujus basis par est superficiei sphæræ, altitudo autem radius sphæræ. Ex *hoc* igitur *theoremate, & Problemate* 4. res patet.

PROBLEMA XI.

Sectorem *a* sphæræ (ACBD) metiri.

a Vide def. 1. ante selecta ex Archim.

Fig. 22. SEctor sphæræ producitur ex suâ sphæricâ superficie, ductâ in trientem radij sphæræ.

Metire igitur superficiei sphæricæ segmentum CBD, ejusque ex. gr. pedes quadratos duc in trientem radij A B. Provenient pedes cubici, quibus sector æqualis est. Eadem est sectoris A C E D dimensio.

Demonstr. Archimedeum est theorema sphæræ sectorem æquari cono, cujus basis est sphærica sectoris superficies, altitudo autem radius sphæræ: cujus demonstrationem vide in *selectis ex Arch. prop.* 29. Atqui hic conus fit *b* ex triente altitudinis in basim. Ergo & sector &c.

b per probl. 4.

PROBLEMA XII.

Sphæræ segmenta, data eorum altitudine, metiri.

SEcta sit sphæra circulo C Q D in duo segmenta QCBD, QCED, quæ metiri oporteat. *Fig.* 23.

Diameter ad circulum CQD recta, sit BOE, ac proinde segmentorum altitudines sint O B, O E. Quoniam minor sphæricus sector ACBD componitur ex cono CAD, & segmento QCBD, major verò eodem cono exceditur à segmento majore; metire primò *d* sectores, deinde *e* conum: qui ablatus à sectore minori, relinquit segmentum Q C B D; additus verò sectori majori, exhibet segmentum C E D Q.

d per præc. *e per prob.*

Diameter circuli C Q D, ad dimensionem coni Q C A D necessaria, reperitur sub initium *Problematis* 7. Coni autem altitudo O A etiam nota est; quia semidiameter tota B A reperta est *Probl.* 7. & B O datur, ergo & reliqua O A nota est.

Detur deinde segmentum sphæræ inter duos circulos C Q D, F R G (sive paralleli ij sint, sive non) interjectum. Metire segmenta utraque R F B G, Q C B D. Minus aufer à majori. Residuum dabit segmentum R F C Q D G.

Aliter.

Metiri oporteat segmenta QCBD, QCED. Ut O E ad radium A E, ita fiat O B ad aliam B K. Conus ex base CQD, & altitudine OBK, æqualis est *a* segmento QCBD. Hunc igitur conum metire.

a per prop. 31. selectorum nostr. ex Archim.

Pari modo ut O B ad radium, ita fiat O E ad aliam Z. Conus ex basi CQD, & altitudine constante duabus rectis O E, & Z, æquatur *b* segmento Q C E D. Quare hoc per *Probl.* 4, mensurato, habetur segmenti soliditas.

b per eand.

Hæc praxis brevior est præcedenti.

Corollarium.

Ex hoc Problemate habetur dimensio vasorum sphæricorum: ea enim sunt sphæræ segmenta, sed inania.

Esto vas sphæricum Q B D C: ad opus dimensionis ejus nota esse debent diameter orificij B Q C E, altitudo vasis, & diameter sphæræ, cujus vas est segmentum: quæ nota facies hunc in modum.

Bacillo seu funiculo subtende arcum aliquem EBF, & biseca tam arcum, quàm subtensam, in punctis B & G, per quæ extensa recta funiculi ductu vel regulæ, erit diameter *o* circuli ECQB, quam metire.

o patet ex 30. & 1. lib. 3.

Deinde B C diametrum jam inventam biseca in A, & ex A demitte perpendiculum donec fundum basis contingat in D. Erit A D vasis altitudo, quam metire.

Denique fiat ut DA jam nota ad radium AB etiam notum,

notum, ita hic idem ad aliud. Hoc erit notum, & æquale *p* rectæ A H, quæ cum DA diametrum sphæræ constituet. Cùm igitur DA, & AH sint notæ etiam diameter tota erit nota.

p per coroll. 13.6.

His sic inventis, vas ipsum metiere, ut in Problemate præscriptum fuit.

PROBLEMA XIII.

Sphæroidis tam longæ quàm latæ dimensio.

Fig. 25.

SPhæroïs longa est qua fit ab ellipsi circa majorem axem circumactâ: lata sphæroïs est, qua fit ab eâdem ellipsi circa minorem axem revolutâ.

Omnis sphæroideos soliditas producitur à maximo ejus circulo O B D C, ducto in duos trientes illius axis, circa quem producta est sphæroïs.

Metire igitur mechanicè *a* axes A E, B C, & ex B C elice *b* aream circuli maximi OBDC. Hæc ducta in duos trientes axis A E, circa quem sphæroïs producta est, dabit soliditatem sphæroidis quæsitam.

a Vide lem. ante probl. 2. *cap.* 17. *b per probl.* 4. *c.* 12.

Demonstr. Intelligantur duo coni DBAC, DBEC inscripti esse sphæroidi. Demonstravi *lib.* 1. *Cylind. & Annul. prop.* 25, sphæroidem hujus rhombi, seu conici esse *c* duplam. Conus autem BAC fit ex *c* basi OBDC ducta in trientem altitudinis A O, quæ est semissis axeos A E, uterque ergo (sunt enim æquales) totus nempè rhombus, fit ex basi OBDC ductâ in trientes duos semiaxeos, hoc est in trientem unum axis totius A E. Ergo soliditas horum dupla, ipsius nempè sphæroideos, fit ex eodem circulo O B D C ducto in duos trientes axeos AE. Quod erat demonstrandum.

c per probl. 4. *c.* 18.

PROBLEMA XIV.

Fig. 26.

Sphæroideos segmenta (BFACE BDGCE) circulo ad axem (AD) recto secta, metiri.

INtelligantur segmentis inscripti esse coni EBAC, EBDC; axis autem A D bisectus sit in N. Inventis mechanicè altitudinibus QD, QA, & diametro B C, metire *a* conos B A C, B D C. Tum fiat ut Q D ad summam rectarum N D, Q D, ita numerus cuborum coni E B A C ad alium numerum: dabit hic cubos segmenti B F A C E.

a per probl. 4. *c.* 18.

Et sic fiat ut Q A ad summam rectarum NA, QA, ita numerus cuborum coni E B D C ad alium numerum: dabit ille cubos segmenti E B D G C.

Demonstratio patet ex *Archim. lib. de sphæroid. & conoid. prop.* 31, ubi demonstrat conum B A C E esse ad segmentum B F A C E ut Q D ad summam rectarum N D, Q D, & conum B D C E esse ad segmentum B D G C E: ut Q A ad summam rectarum N A, Q A.

PROBLEMA XV.

Fig. 27.

Truncum sphæroideos circulis ad axem rectis (CSF, HVG) utrimque terminatum, metiri.

MEtire axem AD, & diametros CF, HG, nec non trunci axem alterum O P, adeoque ejus semisses O Q, P Q omnia *a* mechanicè. Axem verò alterum I K sphæroidis totius, cujus truncus datur, ita reperies. Centro C intervallo semiaxis dati A Q describe arcum, qui O Q secet in N. Ex C per N ducatur recta occurrens axi A D in M. Erit recta *o* C M par semissi axis quæsiti I K. Hæc verò effici ut possint, rectæ O Q, C O, A Q describendæ prius sunt in æquâ superficie servatis ad O & Q rectis angulis, ac tum quæ jam præscripta sunt, exequenda. Axem I K sic inventum, itidem metire. Quia ergo Q K, Q I axis semisses jam notæ sunt, suprà verò etiam Q P, C O factæ sunt notæ; etiam P K, S I notæ erunt.

a Vide lem. ante probl. 2. *cap.* 17.

o Clavius l. 1. *Astrol. in schol. lem.* 50.

Igitur ex diametro A D, & axe I K, elice soliditatem *b* sphæroideos IABD; & ex diametro H G, ac altitudine P K *c* reperi soliditatem segmenti H K G; & ex diametro C F ac altitudine OI, soliditatem segmenti CIF. Tum aufer cubos segmentorum HKG, CIF, à cubis totius sphæroidis; remanebunt cubi, quibus truncus F S C H V G æqualis est.

b per probl. 13. *c per probl.* 14.

Corollarium.

Ex Problemate habetur dimensio capacitatis eorum doliorum, quæ ad trunci sphæroidici figuram accedunt. Sed in dimensione mechanicâ linearum, crassitudo asserum ab inventis lineis subducenda est.

PROBLEMA XVI.

Conoidis parabolicæ tam obtusæ quàm acutæ dimensio.

Fig. 28.

COnoïs parabolica obtusa est quæ fit à semi-parabola BAD circa axem (AD) revolutâ: acuta verò quæ fit ab eâdem semi-parabolâ circa ordinatim axi applicatam (B D) circumactâ.

Parabolica conoïs obtusa (BACF) producitur ex basi (BFCN) quæ circulus est, ductâ in semissem axis D A.

Conoïs parabolica acuta (ABEG) producitur ex basi (DGAI) quæ etiam circulus est, ductâ in 8 decimas-quintas altitudinis D B.

Demonstratio 1. partis patet ex nostrâ *prop.* 31. *lib.* 1. *Cylind. & Annul.* ubi demonstravi Cylindrum BK conoidi parabolicæ obtusæ B A C F circumscriptum, esse duplum conoidis. Quare cùm *a* Cylindrus B K producatur ex basi B F C N in altitudinem totam D A; ejus semissis, nempè conoïs B A C F, producetur ex base eâdem, in altitudinis ejusdem D A, semissem.

a per prob. 1.

Quod ad 2um partem attinet, non tradidit Archimedes quam proportionem habeat conoïs parabolica acuta ad obtusam, vel ad Cylindrum A L acutæ circumscriptam. Quare ex eo dimensio hujus solidi non habetur. Nos ergo *prop.* 27. *lib.* 5. *Cylind. & Annul.* demonstravimus acutam esse ad obtusam, ut basis, sive ordinatim applicata B D est ad 16 decimasquintas axis D A; eandem verò acutam esse ad Cylindrum A L sibi circumscriptum ut 8 ad 15: ex quo postremo manifesta est secundæ partis demonstratio.

PROBLEMA XVII.

Conoidis hyperbolicæ obtusæ dimensio.

Fig. 29. *Obtusa est quæ gignitur à semihyperbolâ (G F M H) circa axem (F H) revolutâ: acuta verò, quæ gignitur ab eâdem semihyperbolâ circa ordinatim axi applicatam (G H) circumactâ.*

Reperiatur ex conicis hyperbolæ datæ axis transversus, ejusque semissis sit X, quam metire, uti & axem H F, ac diametrum G I.

Demonstratum est ab Archimede in libro de Conoid. & sphæroid. *prop.* 27, conum maximum NGFI conoidi hyperbolicæ obtusæ N G M F I inscriptum esse ad conoidem, ut composita ex axe H F, & duplâ X, ad compositam ex axe H F & triplâ X.

a per prob. 4. Quare si notus fiat a conus N G F I, ac deinde fiat ut composita ex axe H F, & duplâ X, quæ nota est, ad compositam ex axe H F, & triplâ X, quæ etiam nota est; ita conus NGFI, & ipse notus, ad aliud; erit hoc ipsa conois quæsita, in cubis mensuræ assumptæ.

Scholium.

Quam proportionem habeat conoïs hyperbolica acuta (F G K) ad conum sibi inscriptum, & ad conoidem hyperbolicam obtusam (G F I) adhuc latet. Imò, quod admiratione dignum est, inventâ hac proportione haberi quadraturam hyperbolæ ostendi lib. 5. Cylind. & Annul. prop. 45.

PROBLEMA XVIII.

Dimensio corporum & superficierum Annularium.

Annularia corpora, si quæ alia, affectiones habent planè admirabiles. De his atque unà de Cylindricis, quatuor libros vulgavi anno 51: quibus anno deinde 59. quintum adjunxi.

Fig. 41. *Hujusmodi solidorum duas quasi classes, sive genera constituo. Primi generis sunt, quæ fiunt ex quacumque figurâ planâ (C K B F) axem aliquem (K F) habente, circa aliquam lineam (X Z, quæ Axis revolutionis dicitur) hâc lege in orbem ductâ, ut (K F) axis figuræ, revolutionis tempore axi revolutionis (X Z) semper equidistet. Multiplices horum formas expressas, reperiet lector in schematismis* lib. 3 & 4. Cylindr. & Annul. *præsertim in schematismo* 8, *Fig.* 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66.

Secundi generis sunt ea omnia, quæ gignuntur ex revolutione figurarum vel axem nullum habentium, aut certè, dum revolutio fit, non parallelam axi revolutionis. Vide Figuras 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 *&c.* libri 5. Cyl. & Annul.

Quanta sit horum corporum varietas intelligi poterit ex figuris jam citatis, & definitionibus libro tertio Annul. *ac inprimis* quinto *præfixis.*

Quia verò definitionum jam facta est mentio, monendus mihi est lector, ut errorem emendet, qui irrepsit in definitionem 1. lib. 3. Cylind. & Annul. Paginâ 116, versu 1 *hæc leguntur*: Sicut recta A B C in uno feratur plano, & figura dum circumducitur, sibi ipsi maneat parallela, *quæ sic emenda, vel potius supple*: sic ut recta ABC in uno feratur plano ad EK recto, & figura dum circumducitur, E K sibi ipsi maneat parallela.

Solidorum ac superficierum annularium primi generis dimensio.

Soliditas cujuscumque corporis annularis primi generis producitur ex figurâ genitrice (E C K B F) ductâ in peripheriam mediam (E D) cujus radius est distantia axis figuræ (F K) ab revolutionis axe (X Z). Fig. 41.

Exemplum. Figura E C K B F quæ annulum genuit, reperta sit pollicum quadratorum 1000, peripheria verò media E D pollicum 2000. Hæc invicem multiplicantia efficiunt pollices cubicos 2000000, quibus solidum annulare æquale est.

Superficies verò annulares primi generis producuntur ex circumferentiâ (CKBF) figuræ genitricis ductâ in eamdem peripheriam mediam (A D)

Exempl. Peripheria C K B F esto pollicum 100, E D pollicum 30. Hæ ductæ in invicem efficiunt pollices quadratos 3000, quibus annularis superficies proposita æqualis est.

Demonstratio primæ partis deducitur ex prop. nostrâ 5, *lib.* 3. *Annular.* quæ ita habet: Omnis annulus qui à figurâ planâ quacumque, axem habente revolutionis axi perpendicularem, producitur, æqualis est cylindro, cujus basis est figura annulum describens, altitudo autem peripheria media. Geometricam hujus theorematis demonstrationem attuli ibidem. Demonstrationes Cavallerij, & Guldini non concludunt: Guldini quidem quia assumpto indemonstrato nititur, de quo mox infrà. Cavallerij autem quia per superficies concludit de solido, & per lineas de superficie, quæ argumentatio per se est nulla, cùm inter lineas & superficies, atque inter has & solida, proportio non sit. Hunc modum probandi hausit à Kepplero in *Stereometriâ novâ theor.* 2. ubi aliquod istius methodi rudimentum apparet. Cæterùm ratiocinatio à Kepplero isthic allata planè ageometrica & vitiosa est, & à mente Archimedis quam non est assecutus, penitùs aliena.

Demonstratio partis secundæ patet ex *prob.* 6. *lib.* 4. *Annularium*, quæ est ejusmodi: superficies annuli, quem figura plana curvilinea quæcumque genuit, æqualis est curvæ superficiei cylindri recti, cujus basis est genitrix annuli figura, altitudo verò peripheria media. Geometricam hujus theorematis demonstrationem loco jam citato reperies.

Solidorum & superficierum annularium secundi generis dimensio.

Soliditas cujuscumque corporis annularis secundi generis producitur ex figurâ (DECB) quæ annulum genuit, ductâ in circuli circumferentiam, quam in revolutione (Z) centrum gravitatis figuræ (DBCE) descripsit. Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11. l. 5. cyl. & Annul.

Superficies verò annulares secundi generis producuntur ex perimetro figuræ annulum gignentis ductâ in circumferentiam à figuræ gravitatis centro descriptam.

Bimembris ista assertio, seu potiùs regula generalis quævis rotunda solida metiendi à Paulo Guldino nostro absque demonstratione ullâ assumitur *cap.* 8. *lib.* 2. *Centrobarices*: à qua deinde reliqua libri illius secundi pars, tertius verò quartusque integri dependent. Est porrò ea regula longè pulcherrima ac usus propè immensi: veritatis autem tam est arcanæ, tantumque

tumque abest ut absque demonstratione legitimâ assumi possit, ut nudè proposita nullam verisimilitudinem ostendat. Quæ etiam causa me impulit ut in ejus demonstrationem incumberem; quam dedi libro 5 Cyl. & Annul. primâ & secundâ parte ejusdem libri.

CAPUT XIX.

Dimensio liquidorum.

CUm humidum non suo sed alieno termino contineatur, manifestum est ut ejus quantitas cognoscatur, inveniendam esse vasis, quo continetur, quantitatem. Quamvis autem vasis quantitas, seu potius capacitas ijsdem rationibus quibus aliud quodcumque solidum, indagari possit: tamen quia solidum inane spatium varias intra se operationes admittit, quas solida plena excludunt, fit ut liquidorum dimensio etiam methodo perficiatur sibi propriâ, quam hoc capite statui exponere; sed strictim & quàm potero, clarè. Neque enim probare possum quorumdam hoc in genere scribendi rationem, qui in re non admodum difficili eâ prolixitate, & (quod etiam deterius est) obscuritate versantur, ut tyronibus desperationem intelligendi, peritioribus tædium moveant vel risum. Quod tribus verbis si ad figuram referas, exponi potest. longis & obscuris verborum ambagibus intricant magis quàm explicant; soliciti nimirùm ut stylum in Geometrico argumento exerceant, de accuratâ verò schematis descriptione unicè securi, ut subinde vix duæ tresve litteræ textus designatrices cum litteris schemati appictis conveniant. Non eò ista dico, ut (quod agrestis ingenij est) puritatem sermonis contemnam: sed hoc ago ne intempestivâ sermonis curâ brevitas amittatur & claritas, quibus primæ in omni scriptione partes debentur.

Mensura liquidorum.

Pro locorùm varietate sunt variæ. Hoc omnibus commune, unam esse minimam; sive primam, ex quâ cæteræ majores componuntur. Quantitas liquidi minimam mensuram efficiens à repub. determinandâ est: quæ quia offertur plerumque contenta vase irregulari, aut certè non rectangulo, artificio Geometrico ad cubos ex. gr. pollicares (ut infrà tradam) erit reducenda.

Mensuræ liquidorum in plerisque Belgij locis usitatiores sunt hæ,

Chopina			*een uperken*
Pinta	Æ	2	Chopinis
Poculum	Æ	4	Chopinis, 2 pintis.
Stupa	Æ	8	Chopinis, 4 pintis, 2 poculis.
Cadus	Æ	400	Chopinis, 200 pintis, 100 poculis.

Quæ requirantur ad dimensionem liquidi.

Metiri liquidum ex. gr. dolium vini, nihil aliud est, quàm invenire quot contineat mensuras, ex. gr. quot chopinas, vel pintas &c. Ut hoc obtineatur, tria sunt exequenda.

1. Quantitas liquidi, sive capacitas vasis liquidum continentis metienda est cubis pollicaribus (hi enim sunt huic negotio accommodati) hoc est indagare oportet, quot pollices cubicos contineat.

2. Ijsdem cubis pollicaribus metienda est una aliqua liquidi mensura, ex. gr. una chopina, vel una pinta.

3. Ex collatione cuborum totius liquidi, cum cubis mensuræ unius, eliciendus est per regulam proportionum (ut docebo infrà) numerus mensurarum, in dato liquido contentarum.

Hæc tria igitur, quantum erit necesse deinceps exequemur. Porrò quod ad primum attinet, id jam effectum est *cap.* 17. & 18. Non facilè enim vas offeretur liquidum continens, cujus quantitas per isthic tradita in placito genere cuborum non innotescat. Tamen circa perticam, seu regulam mensoriam, cujus formam tradidi *cap.* 5. ad *defin.* 8, observa, necesse esse ut pollices singuli (qui sunt partes decimæ unius pedis) divisi sint in 10 partes æquales; convenire autem ut hæ singulæ rursum in 10 æquales subdividantur, aut in 5 saltem, vel duas. Ubi etiam illud nota, commodius esse, ut numerus pollicum applicatione regulæ inventus accipiatur pro integro, non verò (ut aliàs fieri assolet) numerus pedum ex. gr. hoc numero 38. 6'. 9'' designentur pollices 38, sex decimæ unius pollicis, & novem centesimæ ejusdem. Non verò pedes 38; 6 decimæ unius pedis, & 9 centesimæ.

Cæterùm quia vasa, sive dolia, quibus cerevisia & vinum, solent contineri plerumque constant ex duobus truncis conicis, in hujus solidi dimensione facili & expeditâ præcipua cura versari debet. Geometrica trunci conici dimensio tradita jam est *prob.* 6. *cap.* 18. Sed quia hæc requirit integrationem utriusque trunci ACDB, AEFB, aliam hic novam afferemus, quæ trunci integratione non indigeat. *Fig.* 18.

PROBLEMA I.

Capacitatem vasis ex duobus conicis truncis compositi, aliter quàm prob. 6. cap. 18, reddere notam in cubis pollicaribus.

SEctio vasis per axem FI esto planum GAHKCD: Sectio autem unius trunci sit GACD. GD est diameter minoris circuli, seu baseos trunci, AC diameter baseos majoris, quæ sunt ambæ ad axem rectæ. Intelligatur deinde, ductâ GM parallelâ ad FB, adeoque ad AB rectâ, trapezium FGAB diremptum esse in rectangulum FGMB, & triangulum MGA: quæ si simul utraque circa axem FB circumagantur, producetur à rectangulo FGMB, cylindrus; à triangulo segmentum coni intus cavum, sive tubus conicus; à toto trapezio FGAB truncus ipse, cujus sectio est DGAC; qui proinde ex dicto cylindro & tubo conico compositus est. Itaque ad dimensionum trunci tantùm opus duo illa solida metiri: quod fiet hunc in modum. *Fig.* 30.

Praxis. Regulâ mensoriâ axem FB, & diametros GD, AC fac notas in pollicibus, hoc est, reperi quot pollices contineant, subductâ utrobique asserum crassitie. Tum verò etiam noti erunt radij GF, AB, eorumque differentia AM. His peractis,

Semissem axeos FB, sive GM, duc in differentiam AM: provenient pollices quadrati trianguli n rectanguli AMG. *n per prob.* 4. *c.* 15.

Trientem N M differentiæ A M adde radio minori G F, seu M B, erit tota N B nota: ex quâ tamquam radio elice *a* circumferentiam ipsi debitam. Hanc circumferentiam duc in aream trianguli AMG: producentur *o* cubi pollicares quibus æquatur tubus conicus, à triangulo circa F B rotato genitus.

a Per prob. 3.c.12.
o Per 2. partem prob.18. cap.18.

Axem F B duc in minorem radium F G: productum dabit *p* pollices quadratos rectanguli F G M B. Tum ex F Q semisse minoris radij F G tamquam radio elice *q* circumferentiam: quâ ductâ in aream rectanguli F G M B, provenient cubi pollicares debiti cylindro genito à rectangulo F G M B circa F B rotato.

p per prob. 1.cap.11.
q per prob. 3.c.12.

Denique cubos pollicares tubi conici & cylindri collige in unam summam: hæc dabit pollicares cubos, quibus trunci AGDC inane spatium æquale est.

Quod si truncus alter A H K C priori, ut fit plerumque, similis & æqualis est, duplicata capacitas prioris, dabit capacitatem totius vasis. Sin verò dissimilis est, mensurabitur eâdem methodo, quâ prior.

Demonstratio. Biseca M A in E, & duc rectam G E, cujus triens sit O E. Erit O centrum gravitatis trianguli M G A. Ducatur deinde O P ad axem F B recta, adeoque parallela ad A B. Ut GO ad GE *e* sic O S ad E M. Sed G O est duæ tertiæ ipsius G E. Ergo O S etiam est duæ tertiæ ipsius E M, hoc est una tertia ejus duplæ M A. Ergo O P radius circumferentiæ ab gravitatis centro O circa axem F B descriptæ, componitur ex M B, sive G F, & triente ipsius A M. Benè ergo inventa est circumferentia centri gravitatis O. Atqui soliditas tubi conici geniti à triangulo M G A, circa F B circumacto, producitur *d* à triangulo M G A ducto in circumferentiam centri gravitatis O. Ergo nota est tubi dicti soliditas.

e per coroll. 1.p.4.l.6.
d Per 2. partem prob.18. cap.18.

Rectè etiam fuisse inventam soliditatem cylindri B G, demonstratum est in modo 2. *probl.* 1. *cap.*18.

Totus igitur truncus, cujus sectio A G C D, notus est: quod erat demonstrandum.

Non solùm hac praxis, sed etiam illa quam tradidi cap. 18. probl. 6, ejusque corollario, facilior est ys quæ passim traduntur, cùm neutra egeat dimensione trinum vasis circularium arearum, A G B, C K D, E L F, quas alia requirunt.

PROBLEMA II.

Unam aliquam liquidi mensuram, ex. gr. chopinam vel pintam notam facere in cubis pollicaribus.

HOc opus quàm accuratissimum fit oportet, quia una mensura semel ad cubos reducta ad omnes deinde cujusvis liquidi dimensiones adhibetur. Quoniam igitur, si unam mensuram tantùm semel acceptam tentemus ad cubos reducere; siquis in opere error vel tantillus committatur, is in magni liquidi dimensione toties multiplicatur quoties una mensura in liquido continetur, quamplurimas oportebit mensuras accipere, & quot omnibus simul sumptis pollicares cubi debeantur invenire: tum verò quot uni mensuræ conveniant, per regulam Auream innotescet.

Praxis. Oporteat ex. gr. pintam ad cubos reducere. Paretur vas parallelepipedale rectangulum plurium cadorum capax A F, cui infundantur aliquot pintarum centuriæ quàm accuratissimè dimensæ, ex. gr. 600, quæ efficiunt 3 cados: & pertingat liquidi superficies usque in K L E D. Debet autem vas ita collocari ut planum A B C exactè æquidistet horizonti. Explora deinde quot pollices contineant latera AB, BC, BD (subductâ asserum crassitie) quæ per invicem *a* multiplicata, dabunt cubos pollicares, quibus liquidum A K E C æquale est. Sint ex. gr. pollices cubici 39609. Tum ita ratiocinare; 600 pintæ æquantur cubis pollicaribus 39609: igitur una pinta quot pollicaribus cubis æqualis erit? Per regulam proportionum, quæ hic absolvitur solâ divisione cuborum 39609 liquidi AKEC, per 600 pintas eodem liquido contentas, reperiuntur cubi pollicares debiti pintæ uni 66. 0'. 1''. 5'''.

Fig. 31.
a juxta prob.1.c.17

PROBLEMA III.

Dati liquidi quovis vase contenti dimensio.

VAs liquidum continens si (quod fit plerumque) ex duobus truncis conicis compositum sit, ad cubos pollicares revoca per *probl.* 1. *cap. hujus*, aut per *probl.* 6. *cap.*18: si alterius figuræ existat, reducetur ad cubos per ea, quæ toto *cap.* 17, & 18 sunt tradita. Quoniam igitur scitur liquidum propositum quot cubos pollicares contineat, & per *prob. præced.* notum est etiam quot pollicares cubos contineat una mensura, ex. gr. una pinta; inde quot pintæ in dato liquido contineantur, innotescet hunc in modum. Statuamus repertum esse liquidum datum æquari cubis pollicaribus 60, 000, pintam verò unam cubis pollic. 66. 0'. 1''. 5'''. Tum ita ratiocinare: cubi pollicares 66. 0'. 1''. 5''' efficiunt pintam 1; igitur pollicares cubi 60,000 quot pintas efficiunt? Per regulam proportionum (quæ hic absolvitur solâ divisione cuborum 60, 000 totius liquidi, per cubos 66. 0'. 1''. 5''' unius pintæ) reperiuntur pintæ in dato liquido contentæ 908.

CAPUT XX.

Dimensio corporum Mundanorum.

PROBLEMA I.

Orbis terræ superficiem metiri.

PEr superficiem Terræ semper intelligo superficiem totius globi ex terrâ & aquâ compositi, nisi contrarium indicavero.

Demonstratum est *prob.* 8. *cap.* 18. cujusvis globi superficiem haberi ex diametro globi multiplicata per circumferentiam ejusdem. Capite autem 6. *prob.*44. ostendimus circumferentiam orbis terræ veræ proximam esse milliariorum Bonon. 26010, ex quâ elicitur diameter milliar. Bonon. 8279$\frac{7}{11}$. Quare si milliaria Bonon. 26010 ducantur in milliar. Bonon. 8279, fractione neglectâ, provenient milliaria quadrata Bonon. 215 336,790, constituentia superficiem Terræ proximam veræ.

Si placet ad pedes quadratos revocare, sic operare: Quia milliare Bonon. continet 5000 pedum Bonon. si hæc ducantur in se, provenient 25 000,000 pedum quadratorum pro milliari quadrato Bonon. Quare si quadrata milliaria superficiei Terræ jam inventa ducantur in 2500, 000 pedum quadratorum unius

unius milliaris quadrati, provenient 5,383(419, 750 (000, 000 pedum quadratorum. Bonon. in superficie orbis Terræ contentorum.

Et quia milliare horarium, triplum est Bononiensis, ac proinde milliare horarium quadratum noncuplum est milliaris quadrati Bonon. ut patet ex *prob.6. cap.13.* si numerus quadratorum milliariorum Bonon. jam inventus dividatur per 9, provenient milliaria quadrata horaria superficiei Terræ 23(926, 310.

Quod si hæc ipsa voluerimus reducere ad pedes Rhynlandicos, quorum 18, 000 conficiunt milliare unius horæ; duc 18,000 in se: provenient 324(000, 000 quadrati pedes pro uno quadrato milliari horario: per quæ si multiplices quadrata milliaria jam inventa, 23 (926, 310; provenient pedum quadratorum Rhynland. 7, 752 (124, 440(000,000, quibus Terræ superficies æqualis est.

Superficies Terræ proximè vera continet

Milliaria quadrata Bonon. 215 (336, 790
Milliaria quadrata horaria 23 (926, 310
Pedes quadratos Bonon. 5, 383 (419, 750 (000, 000
Pedes quadratos Rhynl. 7, 752 (124, 440 (000, 000
Mill. quadr. Bonon. continet pedum quadr. Bonon. 25 (000, 000
Milliare quadr. horar. continet pedum quadr. Rhenolandicos. 324 (000, 000

Superficies Terræ omnium hactenus inventarum minima ea est, quæ continet

Milliaria quadrata Bonon. 134 (030, 859
Milliaria quadrata horaria. 14 (890, 680
Pedes quadratos Rhynlandicos 4,824 (580, 320 (000, 000

Hæc Terræ superficies minima, deducta est ex minimà diametro & minimà circumferentiâ, quas vide ad finem *prob. 4. cap. 6.*

PROBLEMA II.

Quantam superficiei Terrenæ partem occupatura sit tota hominum collectio in extremo judicio.

IMperiti Geometriæ universam terræ superficiem vix suffecturam arbitrantur. Quantùm errent ex ijs, quæ hîc subjungam, apparebit.

Quoniam tam mundi duratio, quàm hominum multitudo sunt nobis incognitæ, statuenda erunt quædam, ut certi aliquid liceat de quæstione propositâ definire. Ponantur verò hæc 1. mundum duraturum 10, 000 annorum. 2. Numerum hominum simul viventium semper esse 1, 000 (000,000, id est mille millionum. 3. Singulis 50 annis totum genus humanum innovari adæquatè. 4. Singulis hominibus detur spacium 5 pedum quadratorum Rhynl.

His positis, dico locum à totâ illâ hominum collectione occupandum, minorem fore respectu superficiei terrestris quàm sit, 1 respectu 4824 quod spatium minus est quàm Anglia, & vix quintam æquat partem Hispaniæ.

Demonstratio. Ut propositum conficiatur efficaciùs, assumam terræ superficiem omnium hactenus inventarum minimam, quam satis constat esse verâ minorem; videlicet pedum quadrat. rhynland. 4,824 (580,320 (000,000.

Quia per positionem 1, mundus stabit 10, 000, annorum, & numerus simul viventium semper est mille milliones per posit. 2, & hic numerus per posit. 3, singulis 50 annis totaliter innovatur; manifestum est in totà hominum collectione toties contineri mille milliones, quoties 50 continetur in 10, 000, nimirum ducenties. Quare tota hominum collectio efficiet ducenta millia millionum, 200, 000 (000, 000. Per hunc numerum si dividatur numerus superficiei terrenæ minimæ suprà allatus, proveniet quotiens 24122 [illegible] qui indicabit, quoties hominum tota collectio stare possit in superficie Terræ, singulis unum pedem quadratum Rhynl. occupantibus. Hic quotiens si rursum dividatur per 5; proveniet quotiens novus 4824 [illegible], indicans quoties tota collectio hominum stare possit in superficie terræ, singulis 5 pedes quadratos Rhynl. occupantibus, ac proinde quota ea sit terrenæ superficiei pars, quæ à dictâ hominum collectione occuparetur, dando singulis, ut dixi pedes quadr. 5. Itaque quoniam numerus partem occupatam denominans, est 4824 cum fractione, ac proinde major quàm 4824, liquet partem superficiei terrenæ occupatam minorem esse parte quatermillosimâ octingentesimâ vigesimâ quartâ.

Reliquum est ut ostendam hoc terræ spatium esse minus Angliâ.

Circulus terræ maximus sit B F C H, in quo perpendiculariter se intersecent duæ diametri BC, FH. Ex B in D & E numerentur utrimque duo gradus, ducaturque recta D E, quæ diametro B C occurret perpendiculariter in G. Abscindatur deinde plano ad B C recto superficies D V E B. Hæc erit minor quàm Angliâ: si enim circini crure uno fixo in puncto maximè centrali hujus provinciæ, crus alterum ad duos gradus deductum per superficiem globi Geographici circumduxeris, superficies hoc circuitu comprehensa, erit ipsa DVEB, totaque existet intra limites Angliæ, adhuc exclusâ magnâ ejusdem portione. Experimentum ipse sumpsi in globo, cujus diameter erat pedum ferè trium. Atqui superficies quæ ab hominum collectione suprà dictâ occuparetur, minor est superficie DVEB; quod sic ostendo. Quia arcus B D est grad. 2, erit F D grad. 88. cujus sinus D K, seu G A, est 99939; quo sublato ab A B radio 100000, relinquuntur 61 pro B G: per quæ si dividatur B C diameter 200000, prodit quotiens $3278\frac{42}{61}$ indicans quoties B C contineatur in B C. Quare cùm sit ut BG ad BC, ita [a] superficies DVEB ad totam Sphæræ terr. superficiem, idem quotiens $3278\frac{42}{61}$ etiam indicabit quoties superficies D V E B contineatur in superficie totâ Sphæræ terrestris. Atqui

Fig. 32.

[a] *per p. 27. select. nostrorum ex Archim.*

suprà

ſuprà oſtenſum eſt ſuperficiem à ſupradictâ hominum collectione occupandam contineri pluſquam vicibus 4824 in ſuperficie terrenâ, ac proinde ſæpius quàm portio D V E B, quam jam oſtendi contineri ſolùm vicibus 3278. Ergo ſuperficies ab hominum collectione occupandâ minor eſt quàm D V E B; hoc eſt (ut ſuprà probavimus) minor quàm Anglia.

Nihil eſt igitur, quod vereantur aliqui ne judicandâ hominum multitudini locus deſit. Illud nobis curæ ſit, ita vitam inſtituere, ut in die illâ tremendâ non hæreamus in terrâ damnandi cum impijs, ſed corporibus induti glorioſis, in nubibus obviam Chriſto rapiamur in aëra.

PROBLEMA III.

Quanta orbis Terræ pars ſit aliquod regnum vel provincia, licet tam ejus; quàm Terræ quantitas ignoretur, facili conjecturâ explorare.

Fig. 32. EXemplum ſtatuamus in regno Hiſpaniæ. In globo Geographico intra eam portionem, quæ Hiſpaniam repræſentat, eligatur punctum, quàm maximè fieri poteſt, medium, ſeu centrale, in quo uno circini crure fixo, alterum ita deducito, ut eo per ſuperficiem globi circumducto, ſuperficies eo circuitu incluſa, oculorum judicio ſit quàm proximè æqualis Hiſpaniæ. Tum eam circini aperturam transfer in Æquatorem & vide quot gradus comprehendat. In caſu propoſito reperi contineri gradus 4 min. 20.

Fig. 32. His peractis, circulum Terræ maximum referat B F C H, in quo perpendiculariter ſe interſecent diametri B C, F H, & ex B numerentur in D, & E, utrimque gradus 4. 20'. Deinde per D & E plano ad B C recto abſcindatur ſuperficies D V E B, quæ erit Hiſpaniæ æqualis. Et quoniam arcus B D eſt grad. 4. 20', erit arcus D F grad. 85. 40', cujus ſinus D K, ſeu GA eſt 99714; quo oblato à radio 100000, remanent 286 pro B G: per quæ ſi dividatur diameter B C 200000, fit quotiens 699 $\frac{26}{286}$ indicans quoties B G contineatur in B C. Atqui ut B G ad B C, ita *a* eſt ſuperficies D V E B ad ſuperficiem totam terreſtris globi. Ergo idem quotiens 699 $\frac{26}{286}$ indicat etiam, quot vicibus ſuperficies DVEB, hoc eſt Hiſpania, contineatur in totâ ſuperficie Terræ, nempè plùs quàm 699 vicibus. Hiſpania igitur eſt pars orbis Terræ minor quàm ſexcenteſima nonageſima nona.

a per p. 27. ſelectorum noſtr. ex Archim.

Similis conjectura, eodem artificio de alijs etiam provincijs formabitur.

PROBLEMA IV.

Quæ ſit inter Zonas frigidam, torridam, temperatam magnitudinis proportio, licet tam earum, quàm Terrenæ ſuperficiei quantitas ignoretur, invenire.

Fig. 33. CIrculus Terræ maximus per polos B, C tranſiens, eſto BFCH; axis mundi B C, diameter Æquatoris F H; diametri Tropicorum I L, & P Q; diametri circulorum Polarium D E, & R T.

Polaris circuli à polo diſtantia, nimirum arcus D B eſt grad. 23. 30'. quibus ſubductis à 90, reſtant grad. 66. 30' pro arcu D F; cujus ſinus D K, ſeu G A, 91706 ſi auferatur à radio A B 100000, remanent 8294 pro B G.

Diſtantia Tropici ab Æquatore, arcus nempè I F, eſt grad. 23. 30'. hujus ſinus I X, ſive M A eſt 39874.

Quod ſi M A 39874 auferas ab G A 91706, remanent pro G M 51832. Igitur BG, GM, MA ſunt inter ſe ut hi numeri 8294, 51832, 39874.

Atqui ſegmenta ſuperficiei ſphæricæ, quarum latitudines ſunt arcus B D, D I, I F (hoc eſt zonæ ipſæ, frigida, temperata, torrida) eam inter ſe rationem habent *a* quam partes axis B G, G M, M A. Ergo etiam zonæ frigida, temperata, torrida ſunt inter ſe ut hi numeri 8294, 51832, 39874.

a per p. 27. ſelect. a nobis ex Arch.

Frigida	8294
Temperata	51832
Torrida	39874

Itaque temperata continet frigidam plus quàm ſexies, torridam minus duplo, ut diviſione factâ apparebit: utriſque verò ſimul ſumptis major eſt, quod patebit additione.

Nota: *cùm zona temperata una comparatur cum torridâ, unam ejus ſemiſſem tantum accipi: Æquator enim torridam zonam dividens, duas quaſi torridas zonas utrimque conſtituit.*

PROBLEMA V.

Orbem Terræ metiri.

PRoblemate 10, *cap.* 18, demonſtratum eſt ſoliditatem globi cujuſvis haberi ex ſuperficie globi ductâ in diametri ſextantem. Superficies Terræ proxima veræ *Probl.* 1. reperta eſt in milliarijs quadratis Bonon. in milliarijs quadratis horarijs; in pedibus quadratis Rhynl. Diameter Terræ veræ proxima inventa eſt *cap. 6. Probl.* 4. milliariorum Bonon. 8279, (quorum ſextans eſt 1379); milliariorum verò horariorum 2759, quorum ſextans eſt 459, fractionibus ubique (quod hic ſine detrimento licet) neglectis. Itaque ſi milliaria quadr. Bonon. ſuperficiei Terræ 215(336, 790 ducantur in milliaria Bonon. 1379, ſextantem diametri, proveniunt milliaria cubica Bonon. 296, 949 (433, 410 pro ſoliditate Terræ. Quod ſi milliaria quadrata horaria ſuperficiei Terræ 23 (926, 310 ducantur in milliaria horaria 459 ſextantem diametri, provenient milliaria cubica horaria 10,982 (176,290 pro eâdem ſoliditate Terræ. Denique ut habeatur ſoliditas Terræ in pedibus cubicis Rhynlandicis, prius ſextans diametri, mill. nimirum Rhynlandica 459, reducenda ſunt ad pedes Rhynl. quod fiet ſi 459 ducantur in 18000, tot enim in uno milliari horario Pedes Rhynl. continentur. Productum hujus multiplicationis exhibet 8 (262, 000 Pedes Rhynl. pro ſextante diametri: per quos ſi multiplicentur pedes quadr. Rhynlandici ſuperficiei Terræ 7, 752 (124, 440,000,000, provenient pro ſoliditate Terræ pedes cubici Rhynlan. 64.048(052.123 (280, 000 (000, 000 quæ omnia ſequenti Tabellâ exhibentur.

Soli-

Soliditas Orbis Terræ vera proxima

Continet

Milliaria cubica Bonon.	296, 949 (43[illegible] 410
Milliaria cubica Horar.	10,982 (176, 290
Pedes cubicos Rhynlan.	64,048 (052, 123 (280, 000 (000, 000.

Milliare cubicum Bonon. continet Ped. cub. Bonon. 125, 000 (000, 000. Milliare cubicum Horar. continet Ped. cubic. Rhynlan. 5 (832, 000 (000, 000.

Quod si desideretur soliditas Terræ minima, ad hanc assumenda est minima superficies *præced. Problemate* inventa, diameter item minima quæ *cap. 6. Probl.* 4. reperta fuit milliariorum Bonon. 6531 (quorum sextans est 1088), milliariorum verò horariorum 2177, quorum sextans est 362, fractionibus ubique omissis. Cum his datis operando ut suprà, prodibit Terræ soliditas minima, ut in Tabellâ sequenti cernitur

Orbis Terræ soliditas omnium hactenus inventarum minima

Continet

Milliaria cubica Bonon.	145, 825 (574, 592
Milliaria cubica Horaria	5,390 (426, 160
Pedes cubicos Rhynlandicos	1 (746,498 (075,840 (000, 000

PROBLEMA VI.

Soliditatem Oceani explorare.

Prænosci debent Oceani superficies, & profunditas. Superficies, ut in omnibus sphæris Geographicis cernitur, superficiei terrarum ferè æqualis est, ac proinde dimidia superficiei totius globi terraquei. Tantam ergo hic assumemus. Profunditas quo artificio exploranda sit, dicam in Staticâ. Interim ex nautarum experimentis Oceani ordinaria profunditas non excedit 500 passus. Alicubi profunditatis inscrutabilis est, Ut excessus defectu compensetur, demus æquare eam ubique unum millare Bonon. hoc est trientem milliaris horarij, hoc est 6000 pedum Rhynlandicorum.

His datis, soliditas maris sic innotescet. Terræ diameter continet milliaria Bonon. 8279. ab hac aufer 1. milliare profunditatis Oceani, remanent 8278. Superficies globi cujus diameter est milliaria Bonon. 8278, reperitur per *Probl.* 8. *cap.* 18, milliariorum quadr. Bononiens. 215 (225, 656: quæ ducta in sextantem diametri 8278, nimirùm in 1379, exhibent *b* milliaria cubica Bonon. globi, cujus diameter est 8278, nempè (296, 796 (179, 624: quibus subductis à soliditate sphæræ, cujus diameter est 8279, hoc est à soliditate Terræ constante milliarijs cubicis Bonon. (296, 949 (433, 410, remanent milliaria cubica Bonon. 153 (253, 786 quibus æqualis esset Oceani soliditas, si totam globi terraquei superficiem occuparet. Nunc quando solùm dimidiam partem occupat, numeri postremi semissis 76 (626, 893 exhibet milliaria cubica Bonon. soliditatis Oceani. Per hanc si dividatur Terræ soliditas (296, 949 (433, 410: reperietur in hâc illa contineri plus quàm vicibus 3875. Ex quo apparet quàm ridiculi fuerint nonnulli Philosophi, qui nescio quibus freti conjecturis, elementa decuplam inter se habere proportionem existimarunt.

b Per prob. 1. c. 18.

PROBLEMA VII.

Modus generalis investigandi magnitudinem cujusvis Astri.

Ut inveniatur magnitudo Astri cujuscumque, prænosci debent ejus distantia à Terræ centro vel superficie, & quantitas apparens diametri, sive angulus BFC, sub quo Astrum videtur, is enim metitur quantitatem arcus, adeoque & diametri BC, quæ ab arcu insensibiliter differt. Quo artificio innotescant distantiæ Lunæ ac Solis à Terrâ, exposui *cap.* 8. & 9. Sed accuratiùs ista deduxi Astronomiæ *lib.* 3, ubi etiam traditus est modus observandi diametrum apparentem Solis & Lunæ.

Fig. 34.

His ergo datis, magnitudo Astri ita investigabitur. Centrum terræ esto A; oculus F in superficie Terræ; BFC angulus sub quo videtur Astrum EBDC. Centro F per N Lunæ centrum intelligatur descripta peripheria circuli GCBK. Quoniam *a* angulus BFC notus est, etiam notus est arcus BC, quota nimirùm pars sit peripheriæ totius KBCG. Quare cùm Astri diameter arcum subtendens ab arcu insensibiliter differat, scietur etiam quota pars peripheriæ KBCG sit Astri diameter. Deinde quia FN distantia Astri à Terrâ, nota *b* est in Terræ semidiametris AF, estque FN radius peripheriæ KBCG, etiam ipsa peripheria KBCG in Terræ semidiametris fiet *c* nota. Atqui jam invenimus suprà quota Peripheriæ KBCG pars sit diameter BC. Ergo etiam hæc in Terræ semidiametris aut in partibus semidiametri innotescet; hoc est innotescet proportio diametri ipsius Astri ad diametrum Terræ. Quæ ratio

a Per hyp.

b Per hyp.

c Per prob. 3. c. 12.

Diam. Astri. Diam. Ter. X; Z

si per 4 terminos continuetur, hoc est si fiat ut diameter Astri ad diametrum Terræ, ita hæc ad X, & ita X ad Z; erit Astrum ad Terram, ut diameter Astri ad quartum numerum Z; uti patet ex ultimâ, *lib.* 12.

NOTA *BC diametrum apparentem minorem esse diametro verâ, sed insensibiliter, ut ostendi in* Astron. lib. 4. *Quare BC tum hic tam* Probl. 7 *&* 8 *assume pro verâ, sic enim Lunæ & Solis magnitudo colligetur (quod intendo) verâ minor.*

Corollarium.

Quò diſtantia Aſtri à Terrâ, & diameter ejuſdem apparens aſſumuntur minora, eò minor [illegible]oveniet Aſtri moles, & è converſo. Patet ex diſcurſu toto Problematis.

PROBLEMA VIII.

Inquiritur magnitudo Lunæ.

Fig. 34.

SOlem eſſe Terrâ majorem, Lunam Terrâ minorem, manifeſtum eſt ex eclipſe Lunari. Sed quantò hæc minor, ille major, deinceps inveſtigabitur.

Terræ centrum eſto A; in ſuperficie Terræ oculus F; angulus ſub quo Luna ſpectatur, B F C; peripheria centro F per Lunæ centrum deſcripta, ſit K N G. Demonſtravi *Probl. 1. cap.* 8. E N diſtantiam Lunæ Perigeæ à Terrâ in quadraturis eſſe majorem 50 ſemidiametris Terræ. Deinde ex obſervatione omnium Aſtronomorum conſtat diametrum *f* apparentem Lunæ Perigeæ, ſive angulum BFC majorem eſſe minutis 30. Aſſumam tamen diſtantiam E N ſemid. Terræ 50, & apparentem diametrum 30 minutorum: ſic enim certò conſtabit molem Lunæ ex ijs deductam, fore verâ minorem.

f vide Ricciolum pag. 233. n. 1.

Quoniam F N radius peripheriæ K B C G eſt ſemid. Terræ 50, ac proinde diameter tota continet ſemidiametros Terræ 100. Ex eâ per *Prob. 3. cap.* 12. elicitur peripheria K N G ſemid. Terræ $314\frac{11}{113}$, ſive 314. 1'. 5''. 9'''. 2''''. Eſt autem angulus B F C, adeoque & arcus B C 30. min. Si ergo peripheria tota, hoc eſt gradus 360 efficiunt ſemid. Terræ 314. 1'. 5''. 9'''. 2'''': 30 minuta, ſive ½ gradus unius quot efficiet ſemidiametros? Per regulam proport. proveniunt 0. 4'. 3''. 6'''. 3''''. 3'''''. 2''''''. unius ſemidiametri Terræ pro arcu B C, hoc eſt pro diametro Lunæ, quæ ab arcu B C quoad ſenſum non differt. Quæ quidem quantitas Lunaris diametri vera minor eſt, cùm deducta ſit ex diſtantiâ, & apparente diametro quæ minores ſunt veris. Sed demus Lunæ diametrum eſſe 0. 4'. 3''. 6'''. 3''''. 3'''''. 2''''''. quarum Terræ ſemidiameter eſt 1. ac proinde tota Terræ diameter eſt 2; imò demus ſolum eſſe 0. 4'. 3''. 6''': & continuetur ratio 0. 4'. 3''. 6'''. ad 2 per quatuor terminos

Diam. Lunæ	Diam. Ter.		
0.4'.3''.6'''	2	9.1'.7''.5'''.	42.0'.9''.1'''.

erit ut primus 0. 4'. 3''. 6''' ad quartum 42.0'.9''. 1''', ita Luna *d* ad Terram. Diviſo autem quarto per primum, quotiens prodit 96 cum fractione?

d Per 18. 12.

Itaque certum eſt Lunam eſſe majorem parte 97ma Terræ.

Nota, terminis tertio & quarto, loco fractionum ipſis adhærentium, adjectam eſſe unitatem; unde evaſerunt juſto majores, ex quo etiam capite, præter cætera, prodijt Lunæ quantitas verâ minor.

Corollarium.

Semidiameter Lunæ certò major eſt millarijs Bonon. 711.

Nam ſemid. Terræ eſt ad ſemid. Lunæ in minori ratione, quàm 2 ad 0. 4'. 3''. 6'''. Semidiameter autem Terræ minima hactenùs inventarum continet mill. Bonon. 3265. unde per *reg. prop.* elicitur Lunæ ſemid. major milliarijs Bonon. 711.

Scholium.

Si data aſſumamus cum Ricciolo veris ſimiliora, nimirum diſtantiam mediocrem Lunæ a Terræ centro ſemid. Terræ 59, & diametrum apparentem min. 30'. 30''. reperiemus diametrum Lunæ veram eſſe ad diametrum Terræ ut $26\frac{2}{3}$ ad 100; atque inde Lunam eſſe ad Terram ut 1 ad 55. Quæ magnitudo ad veram propiùs accedit.

PROBLEMA IX.

Inquiritur magnitudo Solis.

ASſumatur ſchema *Problematis præced.*

Ex obſervatione omnium Aſtronomorum conſtat diametrum Solis apparentem, ſive angulum B F C majorem eſſe minutis 29: & *cap. 9. Probl.* 1. demonſtravi F N diſtantiam Solis à Terrâ majorem eſſe 949 ſemidiametris Terræ. Sed aſſumamus utrumque juſto minus, diametrum videlicet apparentem minutorum 29, & diſtantiam F N ſemid. Terræ 949: ſic enim certò conſtabit molem Solis inde deductam adhuc eſſe verâ minorem.

Ex oculo F tanquam centro per centrum Solis N deſcripta intelligatur peripheria K N G. Quoniam radius F N eſt 949 ſemid. Terræ, ex hoc elicietur *a* circumferentiæ K N G ſemiſſis $2981\frac{41}{113}$. Sed omittamu fractionem: ſic enim adhuc minor evadet Sol. Cùm igitur ſemiſſis circumferentiæ, hoc eſt minuta 10800, efficiant ſemidiametros Terræ 2981; minuta 20 quot ſemid. Terræ efficient? Per *reg. prop.* proveniunt ſemid. Terræ $8\frac{41}{[illegible]}$ pro arcu B C, ſive diametro Solis minutorum 29. Verùm ut adhuc minor evadat Sol, aſſumamus pro Solis diametro tantùm ſemidiametros Terræ 8, ſive diametros 4, ſic ut diameter Terræ ſit ad diametrum Solis, ut 1 ad 4. Hæc ratio ſi per quatuor terminos continuetur

a Per prob. 3. cap. 12.

Diam. Terræ.	Diam. Sol.		
1	4	16	64

erit ut primus terminus nempè, 1, ad quartum 64, ita *b* Terra ad Solem.

b Per 18. 12.

Certum eſt igitur Solem plus quàm quater & ſexagies eſſe Terrâ majorem.

Atque hoc quidem omninò certum. Cæterùm ſatis etiam exploratum eſt Solem continere Terram amplius quàm 1727 vicibus. Nam *cap. 9. Probl.* 2, oſtendi diſtantiam Solis à Terrâ continere plus quàm 2850 Terræ ſemidiametros: & ſatis etiam certò conſtat diametrum Solis apparentem majorem eſſe minutis 30. Ex quibus datis per diſcurſum *præced.* elicitur Solis diameter major 12 ſemidiametris Terræ. Atque inde ratione 1 ad 12 per quatuor terminos continuatâ (1. 12. 144. 1728.) habetur ratio Terræ ad Solem minor eâ, quæ eſt 1 ad 1727.

Imò verò cùm ex accuratiſſimis Lunæ dichotomæ obſervationibus Ricciolus invenerit Solis à Terra diſtantiam *x* continere ſemidiametros Terræ plures quàm 7000, ut dixi in *Scholio Probl. 2. cap. 9.* reperietur inde Sol Terrâ major plus quam vicies ſepties millies. Quam ſaltem magnitudinem Soli tribuendam confirmatur ex ſcrutinio Vendelini, qui ex ſuis Lunæ dichotomæ obſervationibus deduxit Solis à Terrâ diſtantiam æquare ſemidiametroos Terræ ſaltem 13740; ex quâ moles Solis reperitur major Terrâ plus quàm ducentis millies. Igitur

x vide hæc accuratiùs deducta Aſtron. noſtræ lib. 3. n. 19.

Summa

Summa eorum, quæ de Solis distantiâ & magnitudine hactenus demonstravimus,

Hæc est.

Certum est *a* distantiam Solis à Terra excedere semidiametros Terræ 950, hoc est milliariorum Italicorum Bonon. tres milliones.

Imò satis certum *b* est excedere milliariorum Bonon. milliones novem.

Valdè probabile est *c* excedere milliarium Bonon. milliones 43.

Certum est Solem *d* esse Terrâ majorem plus quàm sexagesies & quater.

Ferè certum est *e* Solem esse Terrâ majorem plus quàm millies septingenties.

Valdè probabile est Solem *f* esse majorem Terrâ plus quàm vigesies septies millies.

a Per prob. 1.c.9. *b per prob. 2.c.9.* *c per dicta ibid. prob. 2 ejusque Scholio.* *d per probl. 8. hic.* *e Schol.* *f ibid.*

PROBLEMA X.

Inquiritur amplitudo Orbis Magni.

ORbis magnus est cælum Solis, vel potiùs ea sphæra, cujus radius est distantia Solis à centro Terræ, ita dictus ab Astronomis passim, comparatione orbis longè minoris, quem Luna percurrit.

Semidiameter Orbis Magni (ut dixi) est distantia Solis à centro Terræ; quam *cap. 9. Probl. 1.* demonstravi majorem esse 950 semidiametris Terræ. Quare si ratio 1 ad 950 per quatuor terminos continuetur,

1 950 902500 857375000

erit *a* ut primus nempè 1, ad quartum 857375000, ita Terra ad Orbem Magnum. Cùm igitur secundus terminus 950 assumptus sit vero minor, etiam quartus erit vero minor.

a Per 18. 12.

Quare certum est Orbem Magnum continere terram sæpiùs, quam 857375000 unitatem.

Imò cùm ex accuratissimis Lunaris diehotomiæ observationibus *a* satis constet distantiam Solis à centro Terræ nunquam minorem esse 7000 semidiametrorum Terr. si ratio 1, ad 7000 per quatuor terminos continuetur, 1 7000, 49000000, 343000000000, erit Terra minor ad Orbem Magnum quàm 1, ad 343000000000.

a Vide Astron. lib. 3.n.19.

CAPUT XXI.

Solidorum auctio & diminutio, transformatio, comparatio.

AUgere corpora & diminuere in ratione datâ, seu (quod idem est) dato corpore aliud exhibere juxta rationem datam majus minùsve, si corpora non requirantur similia, facilè erit Geometriæ studioso elementum Euclidis undecimum ac duodecimum non ignoranti. Pyramides enim, Coni, Prismata, Cylindri, cùm ea quæ ejusdem sunt generis, comparantur; si bases habeant æquales, sunt inter se ut altitudines; si easdem altitudines, inter se sunt ut bases; si neque basi, neque altitudine conveniant, rationem habent inter se ex basium & altitudinum rationibus compositam. Ex quibus horum corporum auctio ac diminutio juxta rationem datam in promptu est vel tyronibus ipsis, quorum exercitationi proinde hoc argumentum relinquo.

At si duo corpora similia, ex. gr. duo cubi, duæ sphæræ, duo similes coni &c. desiderentur quæ datam inter se habeant proportionem, ardua res petitur, quæ non nisi duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas inventione possit absolvi. Atque hoc est celeberrimum illud Problema, quod Deliacum veteres appellarunt, in cujus solutionem Platonis hortatu omnes Græciæ Geometræ summo conatu incubuerunt. Modi ac viæ ad duas medias reperiendas subtilitate mirabili à Platone, Architâ, Menechmo, Eratosthene, Philone Bysantio, Herone, Apollonio Pergæo, Nicomede, Diocle, Sporo, Pappo excogitati, ab Eutocio in commentario ad 2 Archimedis librum de Sphærâ & Cylindro recensentur. Antiquorum inventis sua recentiores addidêre Ubernerus, Villalpandus, Gregorius à S. Vincentio, Cartesius. Verùm quia tanta constructionum varietas dispendio potius, quàm adjumento foret esse tyronibus, ex omnibus tres potissimùm modos, quorum tam constructio, quàm demonstratio est cæteris visa facilior, selegi, breviterque exposui ac demonstravi in *Scholio prop. 13. libri 6. nostrorum elementorum*, ad quem locum studiosos remitto.

Restant quædam à tyronibus notanda.

1. Corpora similia definiri *defin. 9. lib. 11. & defin. 4. lib. 12.*

2. Inter similia corpora censeri sphæras, quemadmodum circuli censentur inter similia plana.

3. Corpora similia esse inter se in triplicatâ ratione laterum homologorum. Demonstratum id est de parallelepipedis *p. 33. lib. 11*: de omni Prismate *corol. 2. p. 9. lib. 12.* de Pyramidibus *p. 8. lib. 12*: de Conis & Cylindris *p. 12. lib. 12.* de Sphæris *p. 18. lib. 12.*

4. Latera homologa definiri *defin. 11. lib. 5.* In sphæris latera homologa censentur ipsæ diametri; in Conis & Cylindris diametri basium.

5. Omnes Sphæras esse necessariò similes: similiter omnes Cubos necessariò similes esse, ut patet ex *defin. 9. lib. 11.* omnes enim cubi continentur 6 quadratis, quæ sunt plana similia. Hoc ipsum ad reliqua corpora regularia extende.

PROBLEMA I.

Dato solido aliud simile juxta datam rationem majus vel minus exhibere.

DEtur primò Sphæra, cujus diameter A, & ratio data sit A ad B. Oporteat exhibere Sphæram novam ejusmodi, ut sphæra data sit ad novam, ut A est ad B.

Fig. 35, 36.

Inter A & B terminos rationis datæ inveniantur duæ mediæ *b* proportionales, X, Z, sic ut A sit ad X, sicut X est ad Z, & X sit ad Z, sicut Z ad B. Sphæra diametri X est quæsita.

b per schol. p. 13. lib. 6.

Demonst. Nam cùm per constr. A, X, Z, B sint quatuor continuè proportionales, erit ratio primæ A ad quartam B triplicata *c* rationis, quam prima A habet ad secundam X. Atqui ratio sphæræ cujus diameter A, ad sphæram cujus diameter X, est etiam triplicata rationis A ad X per 18. 12. Ergo ratio sphæræ cujus diameter A, ad sphæram diametri X, æqualis est rationi A ad B. Quod erat demonstr.

c per defin. 10. lib. 5.

Datus dêinde sit Cylindrus vel Conus, cui alius petatur similis in ratione datâ.

Diameter basis sit A, ratio data A ad B: inter A &

& B inveniantur duæ mediæ X, Z. Erit X diameter baseos Coni aut Cylindri quæsiti. Quare si circa X describatur circulus, & suprà cum fiat Conus vel Cylindrus similis dato, is erit qui quæritur.

Demonstratio eadem, sed per 12. 12.

Detur tandem Cubus, vel Prisma quodvis, vel Pyramis, cujus latus sit A: ratio autem data sit A ad B. Rursum inter A & B inveniantur mediæ X & Z: solidum quod super X tanquam latere ipsi A homologo extruetur simile dato, est ipsum quod quæritur.

Demonstratio eadem, sed per 33. *lib.* 11. vel per *coroll.* 2. *p.* 19. *lib.* 12. vel per 8. *lib.* 12.

Quod si ratio data numeris exprimatur, tunc inter duos datos numeros inveniendi sunt duo medij proportionales, si id erit possibile, ut docui *lib.* 5. *Arith. cap.* 7. *Probl.* 2. Sin verò id impossibile est, reperientur duæ mediæ proportionales Geometricè. Exemplum esto in duplicatione cubi. Termini rationis datæ sunt 2 & 1: inter hos *a* nulli possunt reperiri medij proportionales numeri seu integri, seu fracti. Quare ut Problema absolvi possit ad Geometriam oportebit refugere. Latus ergo cubi dati esto A, cujus dupla sit B. Inter A, & B inveniantur duæ rectæ mediæ prop. X, Z. Erit X latus cubi qui dati duplus est.

a per theor. 2. c. 7. l. 5. Arith. nostræ.
Fig. 36.

PROBLEMA II.

Prismati Pyramidem, Cylindro Conum, Sphæræ Cylindrum exhibere æqualem, & contrà.

Super basi Prismatis fiat Pyramis triplo altior Prismate, & super basi Cylindri fiat Conus triplo altior Cylindro: erit Pyramis *d* Prismati, & Conus *e* Cylindro æqualis.

d Per 7. 12.
e Per 10. 12.

Contra si Pyramidi Prisma, vel Cono Cylindrus petatur æqualis, sumantur altitudines subtriplæ, tentisque iisdem basibus, erit Prisma Pyramidi triplo se altiori, & Cylindrus Cono etiam triplo altiori æqualis.

Ut datæ Sphæræ P V Cylindrum æqualem exhibeas, sume F O duas tertias diametri F N pro altitudine Cylindri, & maximum Sphæræ circulum pro basi. Patet ex *prop.* 32 *selectorum nostr. ex Archimede*, Cylindrum GIKH altitudinis F O, æquari Sphæræ.

Fig. 38.

Hu perceptis quis non pariter credat in promptu esse Cylindro æqualem exhibere sphæram? Atqui hoc non nisi per duas medias obtinebitur, pro quo sit

PROBLEMA III.

Dato Cylindro (A B) sphæram æqualem invenire.

Fig. 37. 38.

Ex diametro A E basis Cylindri sume A S duas tertias, atque inter latus Cylindri A L, & A S inveni duas medias X A, Z A, ut sint 4 proportionales continuè LA, XA, ZA, AS. Harum proportionalium tertiæ Z A parem accipe F O, quam auge dimidiâ sui parte O N, sic ut F O sit duæ tertiæ totius F N. Sphæra P V, cujus diameter est F N, Cylindro dato A L æqualis erit.

Demonstr. Sphæræ Cylindrum H Q circumscribe, à quo per O abscinde Cylindrum G K, qui per præced. Sphæræ F P N æqualis est. Sumptâ deinde ex Cylindri A B latere A L rectâ A C, pari A S, duabus tertijs baseos A E, per C abscinde Cylindrum A M. Quoniam G H diameter baseos Cylindri G K est par sphæræ diametro F N, quæ *a* est sesquialtera ipsius F O, sive G I; etiam G H erit sesquialtera ipsius G I. Sed etiam A E est sesquialtera *b* ipsius A C. Ergo G H est ad G I, ut A E ad A C; & permut. G H est ad A E, ut G I ad A C. Ergo Cylindri G K, A M *c* similes sunt, ac proinde eorum ratio triplicata *d* est rationis quæ est inter basium diametros G H, A E, seu inter altitudines G I, C A. Atqui G I, seu F O est par rectæ Z A, adeoque ratio G I ad C A est ratio Z A ad C A. Ergo ratio Cylindrorum G K, A M est triplicata rationis Z A, ad C A, hoc est (quia *e* continuè proportionales sunt L A, X A, Z A, C A) rationis L A ad X A. Atqui etiam ratio Cylindri A L ad Cylindrum A M est triplicata rationis L A ad X A, nam Cyl. A L, est ad Cyl. A M, ut *f* L A ad C A, ratio autem L A ad C A est triplicata *g* rationis L A ad X A. Ergo ratio Cylindri A B ad Cylindrum A M par est rationi Cylindri G K ad eundem A M. Ergo Cylindrus G K, hoc est sphæra F P N, æqualis est Cylindro A L. Quod erat demonstrandum.

a per const.
b per const.
c per defin. 4. 12.
d per 12. 12.
e per const.
f per 13. 12.
g per defin. 10. 5.

PROBLEMA IV.

Superficies Cylindricam, Conicam, Sphæricam ad Circulum reducere.

1. Inter latus Cylindri recti & basis diametrum inveni *a* mediam proportionalem: hæc est radius circuli, qui curvæ superficiei Cylindricæ æqualis est. Demonstrationem *vide in selectis nostris ex Archimede prop.* 11.

a Per 13. 6.

2. Inter latus coni recti, & radium basis inveni mediam prop. Hæc est radius circuli, qui conicæ superficiei curvæ æqualis est. Demonstrationem habes *in selectis ex Arch. prop.* 13.

3. Circulus cujus radius est sphæræ diameter, æquatur superficiei sphæricæ. Demonstrationem vide *in selectis ex Arch. prop.* 24. *ejusque corollario.*

PROBLEMA V.

Dato parallelepipedo cubum æqualem invenire.

Si datum parallelepipedum non habeat basim quadratam, ad eam reducatur, quod fiet si basi parallelogrammæ fiat æquale *a* quadratum A M, superque illo statuatur in eâdem altitudine parallelepipedum A R; erit hoc *b* dato æquale.

Fig. 39. 40.
a Per 16. 2.
b Per 31. 11.

Sit jam factum, quod quæritur, & cubus F K æqualis esto parallelepipedo A R. Igitur *c* B A altitudo est ad altitudinem F N, sive F G, ut basis F Q ad basim A M, hoc est ut quadratum ex F G ad quadratum ex A C. Oportet igitur, datis duabus rectis B A, AC, invenire aliam F G, talem, ut sit quemadmodum B A ad F G, ita quadratum F G ad quadratum A C: quod non nisi per duas medias perficitur hunc in modum.

c Per 34. 11.

Inter B A & A C *d* inveniantur duæ mediæ X A, Z A, ut sint 4 continuè proportionales BA, XA, ZA, AC. Tertia Z A est quæsita. Unde si ipsi Z A sumatur æqualis F G; cubus rectæ F G est parallelepipedo A R æqualis.

d per Schol. p. 13. 6.

Demonstr. Quoniam B A, X A, Z A, A C sunt conti-

continuè proportionales, ratio B A ad Z A est duplicata *e* rationis B A ad X A, hoc *f* est rationis Z A ad A C, hoc est *g* rationis F G ad A C. Sed etiam ratio quadrati F G ad quadr. A C duplicata *i* est rationis F G ad A C. Ergo ratio B A ad F G, sive F N, æqualis est rationi quadrati F G ad quadratum A C, hoc est baseos A Q ad basim A M. Ergo *k* parallelepipedum AR & cubus F K æquales sunt: quod petebatur.

e per defin. 10. 5.
f per const.
g per const.
i per 20. 6.
k per 34. 11.

PROBLEMA VI.

Dato cylindro parallelepipedum, sive aliud prisma, vel dato cono pyramidem proximè æqualem exhibere.

Circulo, qui cylindri vel coni basis est, inveniatur æqualis figura *o* rectilinea, qualis desideratur. Super eâ statuatur prisma ejusdem altitudinis, cum cylindro, vel pyramis ejusdem altitudinis cum cono: æquale erit prisma cylindro; pyramis cono.

o Per prob. 7. c. 12.

Demonst. Cùm cylindrus & prisma æquè alta, sint inter se *a* ut bases; bases autem æquales sint; etiam ipsa erunt æqualia. Eadem est ratio coni & pyramidis.

a Per 11. 12. ejusque Coroll.

PROBLEMA VII.

Datæ sphæræ cubum proximè æqualem invenire.

Sphæræ æqualis *b* reperiatur cylindrus; cylindro *c* æquale parallelepipedum; parallelepipedo *d* æqualis cubus: erit is sphæræ datæ æqualis.

b Per prob. 2.
c Per prob. 6.
d Per prob. 5.

Igitur ad sphæræ cubaturam opus est quadraturâ circuli, atque insuper duabus medijs.

PROBLEMA VIII.

Dato annulo circulari cylindrum vel sphæram proximè æqualem invenire.

Fig. 41.

Si hoc problema Geometricè solvatur, habebitur linea recta circulari æqualis.

Circumferentiæ E D à centro E genitoris circuli CKBF circa A descriptæ, reperiatur *a* quàm proximè æqualis recta. Cylindrus, cujus basis est circulus annuli genitoris CKBF, altitudo autem recta peripheriæ E D æqualis, ipsi annulo æquatur; & cylindrica ejusdem superficies superficiei annuli etiam æqualis est. Demonstravi *prop. 5. lib. 3. Cylind. & Annul. & prop. 6. lib. 4.*

a Per prob. 5. c. 12.

Invento cylindro æquali, habetur & sphæra per *prob. 3.*

PROBLEMA IX.

Dati annuli circularis superficiem ad circulum reducere quàm proximè.

Fig. 41.

Inter C B genitoris circuli CKBF diametrum, & peripheriam E D à genitoris circuli centro E descriptam circa A, reperiatur media proportionalis. Hæc erit radius circuli, qui superficiei annulari æqualis est.

Demonstravi *lib. 4 Cyl. & Annul. prop. 24.* Porrò ad constructionem jam traditam necesse est, ut prius circumferentia ED reducatur ad lineam rectam; quod fiet quàm proximè per *prob. 5. cap. 12.* Quare etiam ab hujus solutione problematis pendet circuli quadratura.

PROBLEMA X.

Quodvis annulare solidum in rectum extendere.

Ut statum quæstionis intelligas, vide quæ dixi sub initium *prob. 18. c. 18.* & inprimis lege definitionem primam *lib. 5. Cyl. & Annul.*

Solutio problematis habetur, si figura quæ solidum annulare genuit, ducatur in longitudinem parem ei circumferentiæ, quam figuræ centrum gravitatis circa revolutionis axem descripsit: atque ita corporis annularis non tantùm soliditas, sed etiam superficies in rectam æqualem, & soliditatem & superficiem erit extensa.

Demonstratio pendet à theoremate, quod demonstravi *lib. 5. Cyl. & Annul. totâ parte 1 & 2.*

PROBLEMA XI.

Annulo parabolico obtuso circularem cylindrum vel sphæram absolutè æqualem exhibere.

Fig. 42.

Duæ æquales & similes parabolæ BDC, BGC ita sint dispositæ, ut axes DF, GF habeant indirectum & parallelos axi revolutionis XZ, basim verò BC communem & tam ad DFG quàm XZ perpendicularem. Hæ parabolæ circa XZ circumactæ annulum producunt parabolicum, quem obtusum voco.

Oporteat igitur huic annulo cylindrum absolutè æqualem reperire.

Constr. Divide semibasim F C in 8 æquales partes, & fiat ut tres octavæ ipsius F C ad F A, ita G D ad aliam, quam vocemus Y. Dico cylindrum cujus altitudo est Y, basis verò circulus diametri B C, seu R Q, æqualem esse dato parabolico annulo.

Demonstr. Conois parabolica duplicata, genita à parabolis BDC, BGC circa DG rotatis, est ad annulum genitum ab ijsdem rotatis circa X Z, *a* ut tres decimæ sextæ ipsius F C ad F A. Atqui cylindrus QP conoidi parabolicæ circumscriptus, conoideos *b* duplus est. Ergo cylindrus QP est ad annulum parabolicum, ut 6 decimæsextæ ipsius F C ad FA, hoc est ut tres octavæ ipsius F C ad F A. Atqui cylindrus QP est ad cylindrum ejusdem secum basis, sed altitudinis Y, ut G D est ad Y, hoc est *c* ut tres octavæ ipsius F C ad F A. Ergo cylindrus QP ad cylindrum altitudinis Y, & basis ejusdem, eamdem rationem habet, quam ad annulum parabolicum. Quare cylindrus ille annulo dicto æqualis est. Quod erat propositum.

a demonstravi l. 3. Cyl. & Annul. prop. 47.
b Ibidem per prop. 31. lib. 1.
c Per const.

PROBLEMA XII.

Annulo parabolico acuto cylindrum vel sphæram absolutè æqualem exhibere.

Fig. 43.

Duæ æquales & similes parabolæ BDC, BGC, ita sint dispositæ, ut axes FD, FG habeant positos indirectum & perpendiculariter ad revolutionis axem XZ, basim verò communem BC perpendicularem ad BFC, & revolutionis axi XZ parallelam. Hæ parabolæ circa XZ rotatæ producunt annulum, quem voco Parabolicum acutum.

Pari modo solidum, quod fit à parabolâ BDC

circa basim BC revolutâ, Conoidem parabolicam acutam appello.

Constructio. Fiat ut quinta pars axis FG ad FA revolutionis radium, ita CB basis ad aliam, quam vocemus S. Ex hac sume octo decimasquintas. Dico cylindrum cujus basis est circulus diametri DG, altitudo autem octo decimæquintæ ipsius S, æqualem esse annulo dato.

Demonstr. Conoidi acutæ parabolicæ circumscriptus sit cylindrus QN: cylindro autem altitudinis S suprà basim ejus inscripta intelligatur parabolica conois acuta. Cylindrus QN est ad acutam conoïdem parab. DBGC, ut *a* 15 ad 8. Pari modo cylindrus altitudinis S ad sibi inscriptam, est ut 15 ad 8. Igitur permutando ut cylindrus QN est ad cylindrum altitudinis S, ita conois acuta parabolica DBGC est ad illam alteram. Atqui cylindrus QN est ad cylindrum altitudinis S, ut *b* altitudo CB ad altitudinem S, hoc est *c* ut quinta pars axis FC ad FA. Ergo etiam conois acuta parabolica BDGC est ad illam alteram conoidem acutam parab. cylindro altitudinis S inscriptam, ut quinta pars axis FG ad FA. Atqui etiam conois acuta parab. DBGC est ad datum annulum acutum parabolicum, ut *d* quinta pars axis FG ad FA. Ergo conois DBGC ad annulum datum & ad conoïdem dictam cylindro altitudinis S inscriptam, eamdem rationem habet, ac proinde dicta conois acuta annulo dato æqualis est. Atqui cylindrus cujus basis est circulus diametri DG, seu QP, altitudo verò octo decimæ-quintæ rectæ S, conoidi dictæ æqualis est (nam cylindrus cujus basis est circulus diametri DG, altitudo S, ad cylindrum cujus eadem basis, altitudo autem 8 decimæ-quintæ ipsius S, est *o* ut 15 ad 8; & idem ille cylindrus altitudinis S, est ad dictam conoidem acutam parab. sibi inscriptam ut *e* 15 ad 8). Ergo cylindrus cujus basis est circulus diametri DG, altitudo autem 8 decimæquintæ rectæ S, dato annulo acuto parabolico æqualis est. Quod erat demonst.

a Demonstravi l. 5. Cyl. & Annul. in Coroll. prop. 20.
b *Per 13. 12.*
c *Per const.*
d *demonstravi l. 5. Cyl. & Annul. prop. 25.*
o *Per 13. 12.*
e *Per Cor. p. 20. lib. 5. Cyl. & Annul.*

Scholium.

Quis primo aspectu non putet annulo parabolico cylindrum parabolicum æqualem exhibere facilius esse, quàm circularem? Atqui hunc quidem problemate hoc & præcedenti ex nostris Annularibus, favente Deo, jam in lucem protulimus: alterum nemo dabit, quin unà circuli quadraturam exhibeat.

PROBLEMA XIII.

Solido annulari hyperbolico Sphæram absolutè æqualem exhibere.

Fig. 44.

Esto hyperbola BGC, cujus axis FG; centrum A; basis ad axem recta BC; axis revolutionis XZ ad FGA rectus.

Oporteat solido annulari, genito ab hyperbolâ BGC circa XZ in orbem ductâ sphæram absolutè æqualem exhibere.

Constr. Si latus rectum hyperbolæ axi debitum, transverso axi (nimirùm ipsi GA bis sumptæ) æqualis est, erit sphæra cujus diameter est ipsa hyperbolæ basis BC dato annulari solido hyperbolico æqualis. Quod si latus rectum transverso axi est inæquale, fiat ut latus rectum ad axem transversum, ita sphæra diametri BC ad aliam sphæram: erit hæc dato hyperbolico annulari solido æqualis.

Demonstr. habetur ex *prop. 42. lib. nostri 5. Cyl. & Annul.* quæ una ex istius libri præcipuis est.

Equidem fateor me hoc invento lætatum fuisse, adeoq; venisse in spem fore ut alterum quoque annulare solidum, quod fit ab hyperbolâ BDC circa eumdem axem XA, ad sphæram reducerem. Quo obtento, haberi quadraturam hyperbolæ demonstravi ibidem prop. 43. At me quidem hactenùs spes ista fefellit.

PROBLEMA XIV.

Similium corporum proportionem cognoscere.

Fig. 45.

Dentur ex. gr. duæ sphæræ FG, KL quarum diametri sint A, B. Quæritur quanto sphæra FG major sit sphærâ KL.

Ratio diametri A ad diametrum B continuetur *a* per 4 terminos, hoc est fiat ut A ad B, ita B ad C, & C ad D. Erit sphæra FG ad sphæram KL, ut recta prima A ad quartam rectam D.

a per 13. 6. vel potius per prob. Scholij.

Nam sphæra est ad sphæram in triplicatâ ratione diametrorum per 18. 12; hoc est per defin. 10. 5, ut A prima proportionalium ad D quartam.

Exemplum addamus numericum. Diameter sphæræ minoris esto unius pedis, diameter sphæræ majoris 10. Quæritur sphærarum proportio.

Continuetur ratio diametrorum quæ est 1 ad 10, per quatuor terminos.

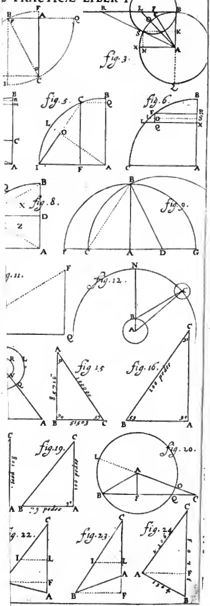
1 —— 10 —— 100 —— 1000

Erit sphæra minor ad majorem ut primus terminus, nempè 1, ad quartum 1000, ac proinde major sphæra minorem continet millies, licèt diameter major minorem solùm decies contineat. Pari modo si diameter sit ad diametrum ut 1 ad 3, continuetur ratio 1 ad 3 per quatuor terminos 1. 3. 9. 27. Erit sphæra minor ad majorem ut 1 ad 27.

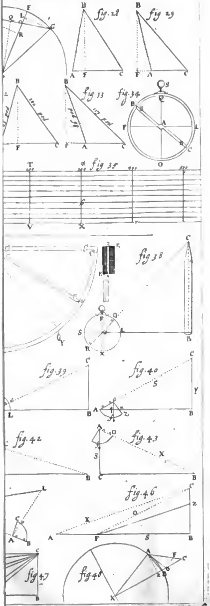
Quæ de sphæris tradidimus ad omnia similia corpora extende. Ex quibus sanè manifestò apparet homines Geometriæ imperitos quàm graviter falli necesse sit in æstimandâ magnitudine corporum, inter quæ versantur assiduè, & quæ quocumque se verterint, in eorum manus atque oculos incurrunt.

FINIS.

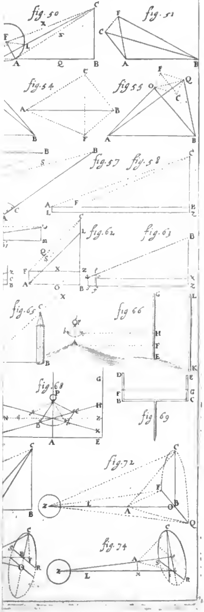
AN-


fig. 3.
fig. 5.
fig. 6.
fig. 8.
fig. 9.
fig. 12.
fig 15
fig. 16.
100 pedes
fig. 19.
79 pedes
fig. 20.
fig. 22.
fig. 23.
fig. 24

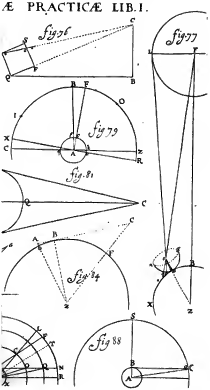
ÆPRACTICÆ LIB. I



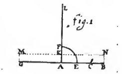


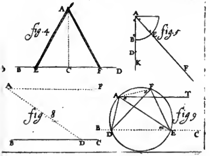


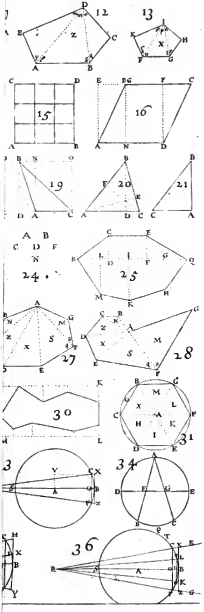
Æ PRACTICÆ LIB.I.

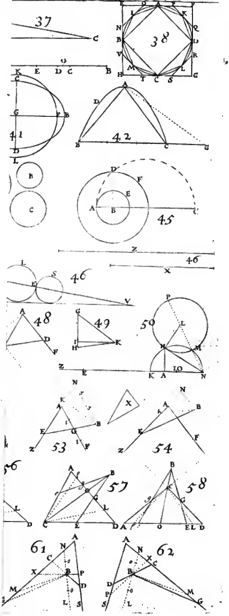


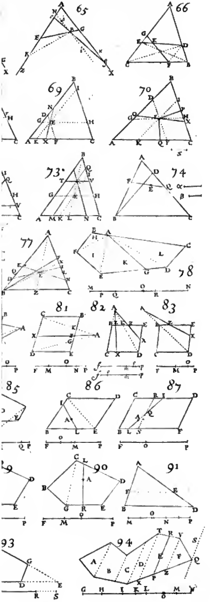
ΞOMETRIÆ
'RACTICÆ
LIBER.2.

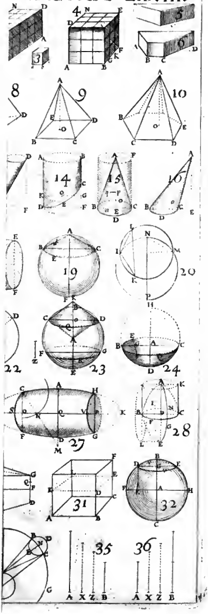


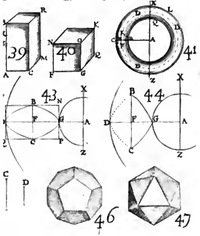



12
13
15
16
19
20
21
24
25
27
28
30
31
34
36


37
38
41
42
45
46
46
48
49
50
53
54
56
57
58
61
62


65
66
69
70
73
74
77
78
81
82
83
85
86
87
90
91
93
94


4
5
6
3
8
9
10
14
15
16
19
20
22
23
24
27
28
31
32
35
36


39
40
41
43
44
46
47

ANDREÆ TACQUET
E SOCIETATE JESU
OPTICÆ
LIBER PRIMUS.
DE APPARENTIIS RERUM SIMPLICIBUS AC DIRECTIS.

APparentias rerum ſimplices ac directaş voco, quæ reflexioni, & refractioni non ſunt obnoxiæ. Eas hoc primo libro ita proſequar, ut, rejectis futilibus, quæ congeri plurima hîc ſolent, ea ſolùm afferam quæ aut nova ſint, aut cæteris meliora.

HYPOTHESES.

1. RES omnes aſpectabiles ſui ſpecies,ſeu imagines quaquaverſùm diffundunt, quæ intra oculum receptæ, viſionis ſenſum determinant.

Conſtat illuſtri experimento, quod veteres ignorarunt; jam neſcit nemo.* De quo plura in Dioptricà.

2. Propagatio ſpecierum & luminis fit viâ rectâ, ſive per lineas rectas, quas Radios appellamus.

Definitiones.

1. *Objectum* voco, quidquid aſpectabile eſt.

Fig. 1. 2. *Triangulum Opticum* eſt, quo ſpecies lineæ (B C) ad oculum allabitur. Illius vertex (A) in oculo eſt, baſis eſt ipſa linea (B C), quæ cernitur.

Fig. 2. 3. *Pyramis Optica*, eſt via, ſeu figura quà corporum ſpecies ad oculum propagantur. Vertex illius (A) eſt in oculo, baſis eſt corporis viſi ſuperficies (B E F C G) oculo obverſa.

4. *Angulus viſorius*, ſive *Opticus*, eſt Optici trianguli vel Opticæ Pyramidis acumen ipſum ad oculum pertingens. Atque hic eſt angulus ille, ſub quo res videri dicuntur,contineturque ſub radijs ab extremitatibus objecti ad oculum emiſſis. Quia verò objectorum magnitudines penes rectas lineas, ſeu diametros plerumque æſtimamus, potiùs ad angulum viſualem planum, quàm ad ſolidum ſolent Optici attendere.

Quæ porrò de angulo viſuali jam definivi, nemo velim ita accipiat, quaſi nihil ultra dicendum de illo quærendùmve ſuperſit. Veterum ſit error ille, qui ſtructuram oculi ignorarunt. Nunc quando illa penitùs perſpecta eſt, longè aliter ſentiendum. Oculi humani tres ſunt partes præcipuæ ad viſionem concurrentes, foramen rotundum quod pupillam dicimus; humor cryſtallinus figurâ convexus; tunica, quam retinam dicunt, in oculi fundo expanſa. Per pupillam radij ſpecierum ingrediuntur, quos humor criſtallinus excipit & refringendo ordinat, atque ita ordinatos ad tunicam retinam tranſmittit; quà excepti, diſtinctas in eâ objectorum imagines depingunt; pro quarum magnitudine vel parvitate, diſtinctione vel confuſione, res magnæ vel parvæ, diſtinctæ vel confuſæ apparent. Quæ omnia in Dioptricâ, cùm de viſionis artificio tractabitur, accuratè exponentur. Jam quia totum objectum ad ſingula cryſtalli puncta radios emittit, manifeſtum eſt ab objecto non unam tantùm Pyramidem Opticam profluere, ſed plurimas, quarum vertices, ſive apices ad diverſa cryſtalli puncta terminentur, baſis verò ſit objectum ipſum, ac proinde viſualem angulum ſuprà definitum non unum, ſed multiplicem eſſe. Nunc tamen, quando de ſimplicibus ac directis objectorum apparentijs agimus, ex omnibus iſtis Pyramidibus anguliſque Opticis ſatis erit unum illum expendere, cujus vertex ad medium cryſtallinæ ſuperficiei punctum terminatur, ibidemque refractis decuſſatiſque lateribus versùs retinam tunicam denuò expanditur; pro magnitudine ſiquidem vel parvitate hujus anguli ut in Dioptricâ oſtendam, objecti imago magna vel parva in oculi fundo depingitur: atque etiam harum imaginum conſideratione ſeclusâ, experimentis a conſtat apparentes rerum magnitudines ad hujus anguli magnitudinem proportionari.

a *Vide prop.* 3.

PROPOSITIO I.

Quantitatem distantiæ secundùm se, visus non percipit.

Constat experimentis quotidianis. Luna vel Sol aliquâ sui parte post tectum latens, apparet tecto contiguus, quamvis sciamus immensùm distare. Pari modo cælum apparet horizonti incumbere, licet non ignoremus abesse longissimè, & turris suprà ædificium humilius, atque oculo propinquius eminens videtur ipsi adhærere, ut si distare à se mutuò aliunde nescias, & alia indicia *prop. sequenti* adferenda desint, id dijudicare nullâ ratione possis. Neque hoc solùm in objectis remotioribus, sed etiam in vicinis contingere, experientiâ quotidianâ reprehendimus. Liquet igitur magnitudinem distantiæ ratione sui à visu non percipi. Ratio est, quia distantiæ objectorum sunt lineæ rectæ per oculum ad objecta ductæ; quæ necessariò apparent ut puncta; hoc est non apparent.

PROPOSITIO II.

Quomodo distantiam visus percipiat.

Distantiam visu percipimus potissimùm ex corporibus interjectis, vel infrà oculum, ut terræ superficie, vel lateraliter, ut muro aut serie domorum, vel suprà, ut tabulato. Percipitur etiam distantia ex intensione vel debilitate coloris, & distinctione vel confusione quâ res cernitur. Ita fit ut tenebris ingruentibus, quæ propè sunt, remota appareant, & turres ac montes per nebulam visa longiùs, quàm cælo sereno distare videantur.

Putavit Aguilonius *b* cum alijs Opticis minores distantias à visu semper etiam percipi ex axium Opticorum longitudine hunc in modum. Oculorum centra sint A, B, eaque connectens recta AB; axes optici AI, BP. Sunt autem axes optici rectæ lineæ ab oculorum centris eductæ. Objectum existat in C, ad quod collineent uterque oculus A, B. Assumit igitur Aguilonius utrumque axem semper dirigi in punctum C, id enim sibi visus erat demonstrasse *prop. 12. lib. 2.* Quo posito, affirmat ab oculo A percipi longitudinem axis BC ex angulo CAB, longitudinem verò axis AC colligi ab oculo B ex quantitate anguli CBA.

b Prop. 4. & 5. lib. 3. optic.

Fig. 3.

Verùm hæc demonstratio, quòd falsò nitatur fundamento, est nulla. Neque enim quod primus Gassendus animadvertit, dum quidpiam utroque oculo intuemur, oculi utriusque axem eò dirigimus, sed solùm unius plerumque, altero quodammodo feriante. Sint enim oculorum centra in A, B, & ex adverso murus IL, in medio objectum quodpiam C. Clauso oculo sinistro B, conspiciens dextro A, objectum C, notavi in pariete punctum illi respondens E. Deinde clauso dextro A, intuens sinistro B eundem apicem C notavi rursum in pariete punctum illi respondens D, quod semper aliud est à priori. Aperto tandem oculo utroque eundem apicem C conspicatus, semper observavi idem illi respondere punctum D, quod tum respondebat cùm oculo sinistro B solo aspicerem. Manifestum est igitur cùm oculo utroque conspicerem punctum C, non fuisse utriusque oculi axem directum in C, sed oculi sinistri tantùm. Si enim directus fuisset uterque, debebat C apparere non potiùs in D, quàm in E, ac proinde nec in D nec in E, sed in puncto quodam intermedio O. Quare destructo fundamento corruere Aguilonij ratiocinium necesse est.

Fig. 4.

PROPOSITIO III.

Quæ sub æquali angulo videntur, apparent æqualia; quæ sub majori, majora; minora sub minori; & qualis est angulorum opticorum, talis est & magnitudinum apparentium proportio.

Id veteres optici ad unum omnes axiomatis loco habuêre, constatque experimentis manifestis & quotidianis. Sol quippe & Luna spectantur à nobis sub angulo quoad sensum æquali, 30 videlicet minutorum quàm proximè, sive gradus dimidij, & apparent æquales, quamvis hanc illo sciamus plus quàm centies esse minorem. Rursum inter binas arborum series BD, CE constituti, dum per earum terminos D, E cæli portionem FG intuemur, hæc æqualis apparet arborum intercapedini DE, utpote sub eodem conspecta angulo FAG. Similiter objecta foris existentia, aut etiam cæli portio per fenestræ patentis margines visa, latitudini fenestræ æqualia apparent, modò intuitu uno & latitudinem fenestræ, & objecta ultrà eam posita comprehendas. Infinitum fit, experimenta omnia recensere quibus eadem veritas explorari quotidie & à quocumque potest. Deinde quis ignorat delineationes scenographicas, quas vulgò perspectivas appellant, nobis apparere ut objecta ipsa quæ repræsentant? Atqui illæ sub ijsdem radijs angulisque, quibus objecta ipsa, spectantur. Postremò, ut alia omnia prætermittam, cùm anguli optici sunt æquales, etiam species, seu imagines objectorum in oculi fundo pinguntur æquales, & crescente angulo, crescunt illæ, decrescente decrescunt. Atqui jam est opticis peritioribus exploratum, prout species in oculo sunt æquales, majores vel minores, objecta inter se apparere æqualia, majora vel minora. Idem ergo pro variâ angulorum opticorum magnitudine continget.

Fig. 5.

Immeritò igitur nonnulli recentiores, nescio quibus ducti præjudicijs, angulos prædictos, ut fallaces, & ineptos ad apparentes rerum magnitudines determinandas rejiciunt. Dicent, eredo, objecta non apparere æqualia, quamvis eodem vel æquali angulo conspiciantur, quando visus inæquales distantias percipit. Quæro igitur, an Sol propè horizontem positus major appareat, cùm terræ superficies illum inter atque oculum interjecta cernitur, quàm dum manu vel pileo terræ conspectu impedito spectatur solus? quisquis voluerit experiri, æqualem utroque casu deprehendet. Pari modo suprà montis altissimi verticem conspectus Sol nequaquam apparet major, quàm dum nullo corpore interjecto conspicitur; & tamen primo casu montis interpositio facit ut distantia longè videatur major quàm altero. Quare falsum est distantiam majorem sensu præceptam apparentes rerum magnitudines semper augere. Non affirmo tamen id nunquam accidere: imò assero manente eodem angulo visuali, eâdemque specie in oculi fundo, objectum modò majus, modò minus apparere posse, tum videlicet, quando cum objectis alijs atque alijs componitur. Sic spatium inter binas domorum

rum vel arborum series apparet longissimum, quia cum illius exiguâ latitudine comparatur, quæ simul eodem tempore visui objicitur. Quod si arbores longiùs distent, jam longitudo spatij apparebit minor, quia cum latitudine majori componitur; multoque adhuc minor videbitur, si arboribus sublatis, cælo undique patente ac libero cernatur. Simili de causâ si fuerint binæ turres ducentos pedes altæ, quarum una gracilis sit, crassa altera; quæ gracilior est, apparebit altior. Verùm hæc contra species perindè militant, ac contra angulos: quas uti propterea nemo rejicit, ita neque anguli erunt rejiciendi.

Maneat igitur firmum ac stabile illud Opticæ pronunciatum: *quæ sub æqualibus angulis spectantur, apparent æqualia, nisi quidpiam, quod rarò accidit, apparentia æqualitatem elidat.*

PROPOSITIO IV.

Amplitudo tota angulorum, sub quibus distantiæ & altitudines spectari possunt, intra limites recti anguli continetur.

Fig. 6. DAta sit distantia seu altitudo infinita B Z, incipiens à perpendiculari A B, quæ ab oculo A in ipsam cadit, ducaturque ipsi parallela A F. Erit igitur angulus B A F rectus. Sumatur deinde ex B Z portio quantumvis magna B E, & ducatur A E quæ cadet infra parallelam A F. Spectatur ergo B E quantumvis magna sub angulo B A E, qui minor est recto B A F. Liquet igitur amplitudinem totam angulorum, quibus distantiæ ab oculo & altitudines videntur, recto angulo contineri.

PROPOSITIO V.

Longitudo æqualis distantiæ visûs ab ipsâ, sub majori spectatur angulo, quàm reliqua longitudo tota in infinitum extensa.

Fig. 6. ESto longitudo infinita (hoc est indefinita) B Z, oculus in A, à quo ducta sit perpendicularis A B ipsius distantiam determinans. Sumatur B C æqualis distantiæ A B oculi. Dico C B videri sub angulo majori, quàm totam reliquam longitudinem C Z quantumcumque protensam. Sumatur enim quantumvis magna C E, ducanturque A C, A E, & A F parallela ad B Z. Quia per hyp. æquales sunt A B, B C, erit angulus B A C *a* æqualis angulo B C A, hoc est *b* angulo F A C. Ergo B A C sub quo videtur B C, major est angulo C A E sub quo videtur C E.

a per 5.1.
b per 27.1.

Ducatur deinde ab oculo A ad longitudinis B Z punctum quodvis O recta A O, eique par sumatur O D. Dico rursum O D videri sub angulo majori, quàm totam reliquam D Z quantumlibet prolongatam. Demonstratio eadem.

PROPOSITIO VI.

Longitudines distantiæ ab oculo spectatoris, non nisi parvas & mediocres, visus comprehendit, ingentes minimè.

Fig. 6. DEtur longitudo infinita B Z, & oculus in A, cujus distantia à B Z sit A B. Sumatur B D æqualis 57 distantijs oculi A B. Dico B D ab oculo A spectari sub angulo graduum 89. Ducantur enim A D, & A F parallela ad B Z. Supponamus tantisper angulum B A D, sub quo videtur B D, esse grad. 89. In trigono igitur rectangulo A B D *c* sinus totus est A B, B D verò tangens anguli B A D grad. 89. Quare ex tabulâ sinuum quarum partium A B est 100000, earum B D reperitur esse 5728996: quibus divisis per 100000, quotiens prodibit $57\frac{28996}{100000}$, ac proinde B D subtendens angulum grad. 89, continet 57 A B. Igitur si hypothesi conversâ, B D sit æqualis 57 distantijs A B, erit angulus BAD, sub quo spectatur B D, graduum 89.

c defin. 9. cap. 9 Geo. pract.

Cùm igitur longitudo tantilla B D (quæ, si A B sit pedum 10, non excedet pedes 570) ab oculo in A posito spectetur sub angulo B A D grad. 89, pro totâ longitudine reliquâ D Z in infinitum extensâ, restabit solummodo angulus D A F unius gradus, qui cum B A D grad. 89, componit angulum rectum F A B.

Sumatur deinde B E æqualis 3437 distantijs A B. Dico B E spectari ab oculo A sub angulo BAE grad. 89. & min. 89. Nam supponendo rursus B A E esse grad. 89. min. 89, ejus tangens B E erit partium 343774667, quarum A B sinus totus est 100000. Igitur divisione factâ patebit B E continere 3437 distantias A B. Quare hypothesim convertendo si B E ponatur æqualis 3437 distantijs A B, erit angulus, sub quo videtur B E, grad. 89, & min. 89. Ergo restat angulus visualis E A F unius tantùm minuti pro totâ reliquâ longitudine E Z, quam proinde visus nequit percipere. Quare ex infinitâ longitudine B Z ad summum visu comprehendimus portionem B E, quæ distantijs oculi 3437 æqualis est, cùm ea totam visualis anguli amplitudinem, quæ recto *d* angulo definitur, unico minuto dempto, exhauriat. Liquet igitur ingentes longitudines distantiæ ab oculo spectatoris, visu non comprehendi: quod erat demonstrandum.

d Per prop. 4.

Corollarium.

Ex demonstratis jam patet cur ingentium distantiarum vel altitudinum differentiæ, quantumvis magnæ sint, visum effugiant.

PROPOSITIO VII.

Nullius objecti dimensiones apparent eâ partium proportione, quâ sunt.

Fig. 7. 8. COrporum dimensiones sunt tres, longitudo, latitudo, profunditas seu altitudo. Sit ergo corporis alicujus longitudo M N, cujus partes quæcumque sint B C, C D, D E, E M. Oculus autem existat in A, à quo ducantur rectæ A B, A C, A D, A E. Centro A per C describatur arcus I C F, oc-

currens rectis AB, AD in F & I. Quoniam sector AFC major est triangulo ABC, sector autem ACI minor triangulo ACD, major erit proportio sectoris AFC ad sectorem ACI, quàm proportio trianguli ABC ad triangulum ACD, hoc est quàm *a* rectæ BC ad rectam CD. Atqui proportio angulorum FAC, CAD eadem *b* est, quæ sectorum. Ergo etiam major est proportio anguli FAC, seu BAC, sub quo videtur BC, ad angulum CAD sub quo CD, quàm ipsius BC ad CD. Ergo proportio ipsius BC ad CD apparet *c* major, quàm sit. Eodem modo ostendam proportionem rectæ CD ad DE apparere majorem quàm sit. Idemque de cæteris omnibus longitudinis datæ NM portionibus demonstrabitur. Liquet ergo propositum.

a Per 1. 6.
b Per 33. 6.
c Per p. 3. hujus.

PROPOSITIO VIII.

Circumferentia circuli eâ partium proportione apparet, quâ est, cùm visus in centro, vel quovis circumferentiæ puncto existit.

Fig. 9.

Circumferentiæ partes quæcumque sint CD, DE, EF, FG, GH; oculus sit in centro A, à quo ducantur radij AC, AD, AE, AF, AH. Angulorum CAD, DAE &c. sub quibus videntur arcus CD, DE, &c. eadem est proportio, *b* quæ arcuum CD, DE &c. Ergo arcus prædicti eâdem inter se proportione *c* apparent oculo in A, quam revera habent. Ponatur deinde oculus in peripheriæ puncto quovis B, ducanturque rectæ BC, BD, &c. Cùm rursus eadem sit proportio angulorum CBD, DBE &c. *d* quæ arcuum CD, DE &c. etiam oculo posito in B apparebunt arcus CD, DE &c. *i* eâ proportione quâ sunt. Liquet ergo propositum.

b Per 33. 6
c Per p. 3. hujus.
d Per 33. 6
i Per p. 3.

PROPOSITIO IX.

In parvis distantijs minori proportione decrescunt apparentes rerum magnitudines, quàm distantiæ.

Fig. 10.

Sit objecti longitudo seu latitudo AB; nam penes dimensiones in longum vel latum solemus rerum magnitudines æstimare. Ex E puncto medio ipsius AB ducatur perpendicularis infinita, in quâ sumatur distantia modica EF. Describatur circulus per tria *o* puncta B, A, F perpendicularem secans in O, itemque alius centro F per A & B, secans perpendicularem infinitam in G. Igitur angulus AGB ad circumferentiam dimidius *a* est anguli AFB ad centrum. Quare oculo posito in G apparebit AB duplo *n* minor quàm in F. Jam quia FE minor est quàm FO, seu FG, sumatur FQ æqualis FE, eritque QE dupla ipsius FE, angulus autem AQB *b* major angulo AGB: qui cùm ostensus sit esse dimidius anguli AFB. erit AQB plus quàm dimidius ipsius AFB. Ergo AB, oculo posito in Q, nondum apparet duplo minor, quàm in F, licet distantia AQ dupla jam sit distantiæ FE; sed ut appareat duplo minor, adhuc removeri debet oculus intervallo QG æquali ipsi EO, quod in parvâ oculi distantiâ omninò sensibile est, ut ex ipso schemate conspectu patet. Quare in modicis distantiis minori proportione decrescunt apparentes rerum magnitudines, quàm distantiæ. Quod erat demonstrandum.

o Per 5. 4.
a Per 20. 3
n Per p. 3.
b Per 21. 1

PROPOSITIO X.

In distantijs majoribus proportio decrementi apparentium magnitudinum non differt sensibiliter à proportione incrementi distantiæ.

Fig. 11.

Iisdem positis quæ propos. præcedenti, sumatur in perpendiculari infinitâ distantia major aliqua EF, & per tria puncta describatur rursum circulus occurrens perpendiculari in O. Centro deinde F per A & B alius describatur circulus occurrens perpendiculari in G. Quia iterum angulus AGB duplo minor est angulo AFB, apparebit AB duplo minor in G, quàm in F. Distantia quoque GE quoad sensum est dupla distantiæ FE; quamvis enim in rigore Geometrico GF (hoc est FO) sit major quàm FE, adeoque GE major duplâ FE, differentia tamen OE permodica est, auctâque distantiâ quodammodo evanescit, quod vel ipsâ schematis inspectione liquet. In distantiis igitur majoribus absque differentiâ perceptibili objectum apparet minus eâdem proportione, quâ augetur distantia: quod erat demonstrandum.

In demonstratione egi tantùm de proportione duplâ; sed ex illâ facilè erit de alijs judicium.

PROPOSITIO XI.

Oculo positione dato, reperire altitudinem, ex quâ data longitudo appareat æqualis minori longitudini datæ.

Fig. 12. & 13.

Structuræ alicujus altitudinem repræsentet BR, & data Problematis sint hæc:

Distantia oculi pedum 12.
Altitudo colossi alicujus pedum 18.
Quantitas, quâ apparere debet, pedum 6.

Quæritur in quâ altitudine collocandus sit colossus, ut ex datâ oculi distantiâ appareat pedum 6.

Constructio. Ex scalâ pedum, cujus constructionem & usum vide in *Geometria Practica cap.* 4. accipe pedes 12 pro distantiâ oculi, quos ex B in A perpendiculariter constitue ad altitudinem BR, eritque oculus in A positione datus. Tum pedes 6 ex scalâ acceptos transfer ex B in C, ducaturque CA, erit CAB angulus sub quo longitudo pedum 6 ab oculo in A spectatur de plano. Accipiatur deinde ex eâdem scalâ longitudo colossi FE pedum 18, supraque eam circuli construatur *a* segmentum EFX capiens angulum N æqualem angulo CAB, & ex centro D ducatur DO perpendicularis ad FE. Intervallo DO duc SQ parallelam ad RB, & centro A intervallo radij DZ describe arcum occurrentem parallelæ SQ in M. Rursus centro M per A describe circulum QPS, qui æqualis erit ipsi EFX. Hic abscindet ex BR longitudinem KP partem datæ EF, quæ visa ex A in altitudine BP apparebit æqualis datæ BC pedum 6. Scies autem quot pedum sit altitudo BP, si acceptam circino scalæ applicaveris.

a Per 33. 3

Demonstr. Ducatur recta AM, & ex M recta MI perpendicularis ad BR, quæ par erit ipsi DO, cùm parallela SQ per constr. distet ab RB intervallo

vallo D O. Quoniam igitur radius M A, hoc est per constr. radius D Z, major est quàm D O, hoc est quàm M I, patet circulum centro M per A descriptum, secare ipsam B R, ex eâque auferre (ut dixi) rectam P K. Deinde quia perpendiculares è centris MI, DO æquales sunt in circulis æqualibus, ex 14. 3. patet K P æqualem esse colossi datæ longitudini EP, & ex 26. 3, æquales esse arcus K P, F E. Ergo angulus K A P, æqualis est angulo N, hoc est per const. angulo CAB. Ergo P K longitudo colossi visa ex A in altitudine B P apparet *b* æqualis ipsi B C pedum 6. Factum est igitur, quod petebatur.

b Per p. 3.

PROPOSITIO XII.

Oculo positione dato altitudinem reperire, ex qua latitudo data appareat æqualis minori datæ latitudini.

Fig. 14.

DAta sint
Distantia oculi pedum 10,
Latitudo pedum 14.
Latitudo minor pedum 6.

Quæritur quantâ altitudine opus sit, ut latitudo pedum 14 appareat ex dato oculi situ pedum 6.

Constructio. Ex scalâ pedum sume rectam B D pedum 6, ex cujus puncto quovis C duc perpendicularem CA pedum 10 pro oculi distantiâ, ducanturque rectæ AB, AD. Ex scalâ deinde sume longitudinem X, pedum 14, quæ posita in sublimi ad horizontem parallela apparere debet æqualis BD pedum 6. Inter productas deinde A B, D A, aptetur recta E G æqualis ipsi X & parallela ad B D, cui A C producta occurrat in F. Tum centro A per F describe circulum, qui secet D B productam in M. Erecta deinde ad horizontem perpendiculari infinita C Z, ex eâ sume C I æqualem C M. Hæc est altitudo quæsita. Si enim per I duxeris H K parallelam ad B D & æqualem E G, sive X, sic ut I H sit æqualis F E, & I K æqualis F G; Dico H K (hoc est X) visam ex A apparere æqualem rectæ B D pedum 6. Scies autem quot pedum sit altitudo reperta C I, si eam scalæ applicaveris.

Demonstr. Ducantur rectæ AH, AI, AK, AM. In triangulis AMC, AIC, quia latera AC, CM *a* æquantur lateribus AC, CI, & anguli *b* ACM, *c* ACI, sunt recti, etiam bases *d* AM, AI æquales erunt. Sed æquales sunt A F, A M, utpotè ex centro ad circumferentiam. Ergo etiam AF ipsi AI æqualis est. Rursum, quia rectus est angulus *i* B C A, nec non *o* BCI erit B C plano *r* IAC recta. Ergo cùm H I sit *s* parallela ad B C, etiam HI *t* recta est plano IAC. Ergo rectus *u* est angulus HIA. Deinde, quia EF *x* est parallela ad B C, angulusque BCA rectus, etiam EFA *n* rectus erit. In triangulis igitur IAH, FAE cum latera AI, AF suprà ostenderim æqualia esse, latera verò IH, FE æqualia sint per constr. angulique HIA, EFA ostensi sint recti, etiam angulus HAI angulo EAF, seu BAC *m* æqualis erit. Eodem modo ostendam æquales esse K A I, D A C. Toti ergo K AH, B A D æquales erunt. Igitur H K, hoc est X, visa ex A in altitudine C I æqualis apparet *p* longitudini B D pedum 6. Fecimus ergo quod petebatur.

a per const.
b per const.
c per const. & def. 3. 11
d per 4. 1.
i per const.
o per const. & def. 3 11
r per 4. 11.
s per const.
t per 8. 11.
u per defin. 3. 11.
x per const.
n per 27. 1.
m per 4. 1.
p per. p. 3.

PROPOSITIO XIII.

Oculo positione dato, reperire longitudinem quæ ex datâ altitudine appareat parvitatis datæ.

Fig. 15.

DAta sint
Distantia oculi pedum 30.
Altitudo pedum 50.
Parvitas data pedum 6.

Quæritur quanta requiratur longitudo statuæ, quæ ex altitudine 50 appareat pedum 6.

Constr. Duc infinitam B X; tum accipe ex scalâ pedes 6, quos transfer ex B in C; item pedes 50, quos transfer ex B in D pro altitudine datâ. Ex B verò perpendicularem excita B A æqualem 30 pedibus scalæ, quæ referat oculi distantiam. Ductis deinde rectis AC, AD, centro A quadrantem describe F P secantem rectas AC, AD in G & M. Arcui demùm F G æqualem sume M N, & ex A per N ducta recta occurrat ipsi B X in E. Dico D E visam ex A in altitudine datâ B D apparere pedum 6. Quanta porrò sit D E scies ubi scalæ applicaveris.

Demonstr. est manifesta, cùm enim arcus MN, GF æquales sint, etiam *a* anguli D A E, B A C æquales erunt. Ergo oculo in A posito D E æqualis *b* apparet ipsi B C, quæ per constr. est pedum 6.

a per 29. 3.
b per p. 3.

PROPOSITIO XIV.

Oculo positione dato latitudinem reperire, quæ ex altitudine datâ appareat datæ parvitatis.

Fig. 14.

DAta sint
Distantia oculi pedum 30.
Altitudo pedum 50.
Parvitas data pedum $2\frac{1}{3}$.

Quæritur quanta sit oportet latitudo statuæ, quæ istis datis appareat pedum $2\frac{1}{3}$.

Constructio. Ex scalâ pedum accipe rectam B D pedum $2\frac{1}{3}$, ex cujus puncto quovis C duc perpendicularem C A *a* æqualem partibus scalæ 30, pro distantiâ oculi, ducanturque ex A per B & D rectæ infinitæ A E, A G. Erigatur ex C perpendicularis ad horizontem infinita C Z, in quam transfer ex C in I partes scalæ 50 pro altitudine datâ. Ex CB productâ sume C M æqualem ipsi C I. Centro A per M describe arcum qui secet A C productam in F. Per F ducatur E G parallela ad B C. Hæc est latitudo statuæ quæsita. Si enim per I ducatur H K parallela ad B C. sic ut HI, EF, item KI, GF æquales sint: Dico H K visam ex A in altitudine datâ C I apparere æqualem ipsi B D pedum $2\frac{1}{3}$.

a In schemate incommodum fuisset proportiones datas exprimere.

Demonstratio eadem quæ *prop.* 12.

Lemmata ad sequentia.

Lemma. 1. Si inæqualium circulorum segmenta ADB, ACB eamdem habeant subtensam; quod majoris est circuli, minorem capit angulum. *Intellige segmentum majoris circuli majus, & quod eo concluditur ex circulo minori.*

Fig. 16.

Angulus enim ADB minor *a* est interno ACB.

a Per 32. 1.

Lemma. 2. Data sint parallelæ BM, CN, quarum inter-

Fig. 17.

intervallum fit P O, quod est utrique perpendiculare. Hoc fecet bifariam in Q perpendicularis L X. Extra parallelas autem detur punctum A. Dico circuli per tria puncta P, O, A transeuntis centrum esse in rectâ L S.

Ducatur enim O A, quam bifariam in Z fecet pendicularis Z S occurrens rectæ L X in S, ducanturque rectæ SA, SO, SP. Ex. 4.1. patet æquales esse S A, S O, item SO, SP. Tres igitur S A, S O, S P æquales sunt. Circulus igitur centro S, quod est in L X rectâ, transit per puncta P, O, A.

Lemma. 3. Iisdem positis, oporteat centrum ipsum reperire in rectâ L S. Id verò jam habetur ex demonstratione lemmatis 2.

PROPOSITIO XV.

Parallelorum intervallorum non semper, quod remotius est apparet minùs.

Fig. 18. Videtur hoc primo aspectu paradoxum, cùm enim parallela intervalla (hoc est perpendiculares BC, DE &c. inter binas parallelas BH, CI constitutæ) omnia inter se æqualia sint, videntur debere ea quæ longiùs distant, minora apparere. Id quidem ita se habere, quando oculus existit in A inter utramque parallelarum, vel in earum alterutrâ, manifestum est, cùm angulus (DAE) intervalli remotioris semper minor fit angulo (B A C) intervalli vicinioris.

Fig. 19. At cùm oculus extra parallelas, sed in eodem plano, ponitur, putà in A, longè aliter se res habet. Intervallum quippe B C, quod productum transit per oculum A, apparet instar puncti. Inde per aliquod spatium intervalla remotiora apparent majora vicinioribus, donec veniatur ad intervallum ex.gr. EF, quod omnium apparet maximum. Inde verò in infinitum procedendo versùs M N, intervallorum apparentiæ perpetuò decrescunt. Speculatio igitur non injucunda offertur, quam aliquot propositionibus prosequemur.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 19. Datæ sint parallelæ B N, C N, & oculus in A extra eas, sed in eodem plano. Oporteat invenire intervallum, quod ex omnibus parallelis intervallis maximum appareat.

A B oculo A duc A C B perpendicularem ad parallelas, & B C bisectâ in D, centro D per A circulus describatur occurrens ipsi C N in F. Per F ducatur perpendicularis F E. Dico hanc apparere omnium maximam.

Ducatur inter B C (quæ instar puncti apparet) & E F, quævis alia perpendicularis P O. Deinde per D punctum bisectionis intervalli B C duc perpendicularem infinitam Z S. Circuli per tria puncta P, O, A, transeuntis centrum est in perpendiculari Z S, puta in S, per lemma 2. & ex eodem lemmate colligitur circulum centro D per A & F jam antea descriptum transire per intervalli F E extremitatem alteram E. Jam quia angulus ADS rectus *b* est, erit D A *c* minor quàm S A, ac proinde circulus AFE centro D descriptus per A, minor est circulo qui descriptus est centro S per A. Quare cùm æquales sint subtensæ EF, PO, erit angulus EAF major *d* angulo PAO. Sumatur deinde ad partem alteram intervallum aliud quodcumque Q R. Centrum circuli per puncta Q, R, A transeuntis rursum *e* erit in perpendiculari S Z, puta in I. Quia verò rectus est *f* angulus A D I, iterum erit D A minor *m* quàm I A, adeoque DEFA circulus centro D descriptus per A, minor est circulo I Q R A qui centro I describitur per A. Cùm igitur æquales sint subtensæ E F, Q R, rursum *n* angulus E A F major erit angulo Q A R. Igitur E F spectatur ex A sub angulo majori, quàm aliud quodlibet intervallum ad utramlibet ipsius partem designabile. Ergo E F apparet omnium *o* maximum. Quod erat demonstrandum.

b per const. *c per 19.1.* *d per lem. 1.* *e per lem. 2* *f per constr.* *m per 19. 1.* *n per lem. 1* *o per p. 3.*

PROPOSITIO XVII.

Iisdem positis & constructis quæ in præcedenti, intervallum, quod apparet maximum fit E F; detur autem versùs Z aliud Q R quantumvis remotum ab E F. Oporteat ad partem alteram reperire intervallum, quod ipsi Q R æquale appareat. *Fig.* 19.

Per tria puncta Q, R, oculi locum A, circulum describe, cujus centrum in perpendiculari ZDS intervalla parallela bisecante existet per 2 lemma, idque in eodem lemmate exhibetur, puta in I. Accipe D S æqualem D I. Centro S per A circulum describe, occurrentem ipsi C N in O. Dico intervallum O P transiens per O, apparere dato ad partem alteram Q R æquale.

In triangulis enim IAD, SAD, cum anguli ad *a* D sint recti, & DA, DI æquales ipsis D A, D S; etiam IA, SA *b* æquales erunt. Quare circulus SAO (qui transit *c* etiam per P) centro S descriptus, æquatur circulo IARQ descripto ex centro I. Cùm igitur æquales sint subtensæ P O, Q R, etiam anguli *o* PAO, Q A R æquales erunt. Intervalla igitur P O, Q R visa ex A apparent *r* æqualia. Quod erat propositum.

a Vide constr. præc. *b per 4. 1.* *c per lem. 2* *o per 26. & 29. 3.* *r per p. 3.*

Notatu dignum hic est varietatem omnem apparentiarum, quæ contingit in spatio infinito E M N F, exhiberi posse in spatio finito E F C B.

PROPOSITIO XVIII.

Iisdem positis, & constructis, quæ propos. 16. parallelæ S Q, T R ad utramque partem oculi A producantur infinitè. *Fig.* 20.

Dico. 1. Intervallum parallelarum duobus locis, in EF, & XZ, apparere maximum.

Patet ex *prop.* 16. circulus enim centro D per A descriptus parallelas intersecat duobus locis, nimirùm in E F, & X Z.

Dico. 2. Dato cuivis intervallo QR diverso ab EF, & XZ, tria illi intervalla alia (PO, IK, ST) apparere æqualia.

Nam dato Q R, inter EF, BC per *prop.* 17. apparet aliud æquale P O. Ipsi verò P O æquale apparet I K, quod à B C distat æqualiter. Rursum ipsi Q R apparet æquale S T quod æqualiter remotum est à B C.

PROPOSITIO XIX.

Fieri potest ut objecto ab oculo recedente, vel accedente, apparentia unius partis assiduè crescat, alterius verò decrescat. Rursum fieri potest ut quamvis objecti totius apparentia assiduè decrescat, partis tamen longè maximæ apparentia assiduè crescat.

Fig. 21. Sit objecti longitudo B A, in cujus termino A, statuatur oculus. Ex B A sume partem B C quantam placuerit, ducantur perpendiculares parallelæ BM, CN, AS. Tum B C bisectâ in D, centro D per A circulum describe occurrentem rectæ C N in P. Per P duc F P G parallelam ad BCA. His positis si recta B C A inter parallelas B M, A S feratur motu sibi ipsi parallelo versùs M, N, pars B C manebit semper inter parallelas BM, CN; pars autem CA inter parallelas CN, AS. Jam quia oculus A est in unâ parallelarum CN, AS, nempè in AS, apparentia partis CA perpetuò *a* minuetur, sic ut minor sit in P F, quàm in Q I: quia verò oculus est extra parallelas CN, BM, apparentia alterius partis B C eodem tempore assiduè augebitur usque dum BA pervenerit in GF, ubi BC, hoc est GP, apparebit maxima, ut *prop.* 16 demonstravimus. Quod erat primum; ex quo etiam patet secundum: quamvis enim apparentia totius B A assiduè decrescat (nam B A minor *b* apparet in G F quàm in K I,) tamen eodem tempore apparentia partis longè maximæ B C (ut jam ostendi) assiduè crescit.

a Per p. 15. b Per p. 15.

PROPOSITIO XX.

Data sit objecti cujuspiam longitudo A B, & parallela ipsi linea infinita X Z. Oporteat invenire punctum in XZ, in quo AB appareat maxima.

Fig. 22. Seca bifariam A B in C, ex C perpendicularem ducito C F, occurrentem ipsi X Z in F. Dico A B cerni maximam in F.

Sumatur enim quodvis punctum aliud N, & per tria puncta A, F, B circulus describatur quem patet tangere rectam Z X in F; ducanturque rectæ A N, BON, AO. Anguli *a* BFA, BOA æquales sunt. Atqui BOA major est *b* quàm BNA. Ergo etiam BFA major est quàm BNA. Ergo A B major *c* apparet in F, quàm in N puncto alio quocumque.

a Per 21. 3. b Per 32. 1. c Per p. 3.

PROPOSITIO XXI.

Data sit objecti alicujus longitudo A B, extraque eam linea infinita non parallela Z X. Quæritur in quo hujus rectæ puncto maxima appareat A B.

Fig. 23. Quoniam B A, Z X non *d* sunt parallelæ, B A producta occurret ipsi Z X, puta in C. Inter B C, A C mediam *i* reperi proportionalem, quam pone ex C in D, ad partes videlicet anguli BCX qui est minor aut non major angulo BCZ. Dico B A apparere maximam in D.

d hyp. i Per 13. 6.

Sumatur enim ad partem alterutram puncti D aliud quodcumque F, ducanturque rectæ A F, B F. Quia *m* proportionales sunt BC, DC, AC, erit rectangulum B C A *n* æquale quadrato D C. Quare si per tria puncta B, A, D, describatur circulus, tanget ille *o* rectam C X in D, ac proinde secabit necessariò rectam B F in O. Junge igitur A D. Anguli ergo BDA, BOA *r* æquales sunt. Atqui BOA major est quàm BFA. Ergo & BDA major est quàm BFA. Ergo B A in D apparet *u* major alio quocumque puncto F. Eodem modo demonstratio procedet si aliud sumatur punctum quodcumque G, ad partem alteram.

m Per constr. n Per 17. 6 o Per 37. 3 r Per 21. 3. Per 32. 1. u Per p. 3.

Corollarium.

Si media proportionalis inter BC, AC ponatur ex C in Q, apparebit A B in Q major quàm in quovis alio puncto rectæ infinitæ C Z: minor tamen quam in D.

PROPOSITIO. XXII.

Iisdem positis, dato puncto G quantumvis remotò à maximæ apparentiæ loco D, reperire ad partem alteram punctum in quo A B apparet æquè magna ac in G.

Fig. 23. Per tria puncta A, B, G *a* circulus describatur, qui secabit rectam X C inter D & C, puta in F. Dico B A in F & G apparere æqualem.

a per 5. 4

Ductis enim rectis AF, BF, AG, BG, erunt anguli BFA, BGA in eodem circuli segmento *b* æquales. Ergo B A in F & G æquè *c* magna apparet.

b per 21. 3. c per p. 3.

Notatu dignum est, varietatem omnem apparentiæ quæ contingit in lineâ infinitâ D X, reperiri in lineâ finitâ D C.

PROPOSITIO XXIII.

Iisdem positis & constructis quæ in duabus præcedentibus, si B A sit perpendicularis ad X Z.

Fig. 24. Dico. 1. B A in duobus locis apparere maximam. Si enim accipiatur C Q æqualis C D, patet A B æquè magnam apparere in Q ac in D. Sed in D apparet *d* maxima. Ergo & in Q.

Dico. 2. Si in infinitâ F X detur punctum quodvis G, in tribus alijs locis apparere A B æquè magnam ac in G. Apparebit enim æquè magna in puncto *i* aliquo F inter D & C. Quod si fiat C O æqualis C F, apparebit A B æquè magna in O ac in F, hoc est quàm in G. Rursum si fiat CN æqualis C G, apparebit A B æquè magna in N quàm in G, hoc est æquè magna quàm F & O. In tribus igitur locis N, O, F, apparet A B æquè magna, quàm in dato loco G.

d per p. 21. i per prop.

PROPOSITIO XXIV.

Cur parallelæ longitudines oculo inter illas posito, sensim coire videantur.

Fig. 25. Sint longitudines parallelæ CH, BN, interque illas oculus in A, per quem recta intelligatur ducta AZ ipsis CH, BN, parallela. Inter parallelas ducantur perpendiculares DMK, FPL, HZN, item radij AD, AF, AH, AK, AL, AN. Quia angulus FAP minor est angulo DAM, intervallum E P minus apparet, quàm D M intervallum. Ergo punctum F apparet propinquiùs parallelæ A Z per oculum transeunti, cujus apparentia invariabilis est, quàm punctum D. Eodem modo punctum H rectæ A Z apparet viciniùs quàm punctum F: & sic deinceps.

Ergo linea C H quò longiùs producitur, eò apparet accedere magis ad rectam A Z. Quare cùm idem eodem modo probetur de lineâ BN, habetur ratio cur C H, B N sensim coire videantur.

PROPOSITIO XXV.

Plana horizontalia infrà oculum posita videntur in fine attolli, posita suprà oculum deprimi: & terminus elevationis ac depressionis est recta linea per oculum horizonti parallela.

Fig. 25. Sit oculus in A, & duo plana horizonti parallela, vel potiùs eorum longitudines, B N infrà oculum, C H suprà. Linea deinde per oculum horizonti parallela sit A Z. Jam ostensum est in præcedenti, lineas CH, BN, quò longiùs producuntur, eò videri propiùs accedere ad A Z, cujus apparentia invariabilis est; quod fieri non potest, quin B N appareat ascendere, C H descendere: cujus apparentis ascensus descensusque terminus est linea A Z.

Idem aliter sic ostenditur. Partes remotiores longitudinis B N positæ infrà oculum, altioribus radijs suas species ad oculum emittunt: nam radius V A altior est radio K A, & L A quàm V A, & sic deinceps. Contrà longitudinis C H suprà oculum constitutæ partes remotiores ad oculum penetrant radijs demissioribus; est enim T A demissior quàm D A, & F A quàm T A & sic deinceps. Ergo &c.

Rursum aliter: si species longitudinum infinitarum KN, DH excipi, seu intercipi concipiamus lineâ DK, puncta V, L, N projiciuntur in puncta S, G, I, remotiora in altiora, sic ut numquam perveniatur ad M. Contrà D, F, H puncta projeciuntur in puncta R, Q, O, remotiora nimirum in demissiora, sic ut numquam descendatur usque ad M. Ergo &c.

Corollarium.

Mare apparet gibbosum, non quia sphæricum est, sed ob causam in propositione jam datam. Pars siquidem globi ex terrâ & aquâ compositi, quæ sub aspectum cadit, tam est exigua ut sensibiliter curva non sit. Vide Geom. Pract. *cap. 6. probl. 5.* Deinde licet esset sensibiliter rotunda, vi rotunditatis deberent ejus extrema potiùs apparere demissiora.

PROPOSITIO XXV.

Templorum frontispicia ac turres ad perpendiculum exstructæ propè aspectanti videntur antrorsum inclinare.

Fig. 26. Sit altitudo B D, & propè eam oculus in A; per quam agatur recta AZ altitudini parallela. *Propos.* 24. jam ostendi partes remotiores ipsius B D videri propiùs accedere ad lineam A Z, quàm viciniores; quod fieri non potest, quin altitudo B D videatur versùs intuentem inclinari. Ita subinde accidit, ut Opticis imperiti, structuræ vitio falsò imputent, quod naturæ visionis erat tribuendum.

PROPOSITIO XXVI.

Subtensa in circulo per totum segmenti arcum, diameter verò per totam circuli circumferentiam æqualis apparet.

Eximia circuli proprietas est, quòd omnes anguli in eodem segmento sint æquales, & omnes anguli in semicirculo recti; quæ *prop.* 21. & 31. *lib.* 3. elementorum demonstrantur. Ex his propositi jam theorematis veritas patet. Sit enim segmenti ADEB subtensa A B. Quoniam anguli omnes ACB, ADB, AEB &c. *a* sunt æquales, etiam A B semper eâdem *b* magnitudine apparebit oculo per totum segmenti arcum ACDEB circumducto. Fig. 27. *a per* 21. 3. *b per p.* 3.

Sit deinde circuli diameter A B. Quoniam omnes anguli BCA, BDA, BEA, BFA *d* sunt recti, ideoque æquales, liquet rursum, oculo per totam peripheriam circumlato, A B diametrum semper æqualem videri. Fig. 28. *d per* 31. 3.

Hinc patet nullam obliquitatem in circulo posse apparentem magnitudinem diminuere.

PROPOSITIO XXVII.

Recta circulo inscripta per totam peripheriam circumducta semper æquè magna apparet oculo in aliquo peripheriæ puncto persistenti.

Persistat oculus in peripheriæ puncto A, & diameter quovis respectu oculi ponatur situ, in FG, BC, DE, quantumcumque etiam obliquo. Cùm anguli FAG, BAC, DAE omnes sint recti per 31. 3, liquet *e* diametrum quovis situ apparere æquè magnam oculi existenti in A. Fig. 29. *e per p.* 3.

Deinde subtensa quæcumque quamvis in circulo respectu oculi in A positionem obtineat in BC, CD &c. Quoniam eadem semper recta est quæ transfertur, arcus omnes BC, CD &c. *a* æquales erunt. Ergo *b* & anguli BAC, CAD &c. erunt æquales. Ergo & subtensa omnibus illis locis æquè magna apparebit oculo perstanti in A. Fig. 30. *a per* 26. 3. *b per* 28. 3.

Hinc rursum liquet nullam obliquitatem in circulo tollere apparentiæ æqualitatem.

Corollarium.

Latera polygoni regularis oculo in A angulorum uno existenti apparent æqualia. Patet ex jam demonstratis.

PROPOSITIO XXVIII.

Forma theatris aptissima est circuli segmentum, in quo arcus spectatoribus, subtensa spectaculis tribuitur.

Spectatoribus enim per totum arcum ACB distributis longitudo theatri A B sub æqualibus *e* angulis, adeoque æquè omnibus magna spectabitur, ut *prop.* 26 jam diximus. Accedit quod hæc forma sit capacissima spectatorum: item quod singuli totum ambitum concessus intueri possit, cùm ex. gr. ad locum quemvis C rectæ QC, PC, OC, RC &c. à singulis punctis ambitus BCA emissæ, omnes intra circulum cadant. Fig. 31. *e per* 21. 3.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Fieri potest, ut ad objectum per spatium longissimum accedas, vel recedas, & tamen æquè magnum semper appareat.

Fig. 27. SIt A B longitudo alicujus urbis, sive muri, vel etiam duorum montium turriumve intervallum. Per extrema hujus puncta A, B, descriptus intelligatur circulus quantumvis magnus, cujus diameter ex. gr. milliare unum alterumve adæquet. Oculo per totam B O D A peripheriam incedenti sub æqualibus semper spectabitur angulis A O B, A E B, A D B, A C B intervallum datum A B. Quantumvis igitur per dictum arcum accedas recedásve ad A B, eàdem hæc semper magnitudine apparebit.

Ex theorematis jam allatis, (quod etiam in sequentibus usu venit) quamvis nonnulla, demonstratione conveniant, differunt tamen applicatione ad res diversas; quam, quod non injucunda fortasse lectoribus futura esset, minime prætermittendum judicavi.

PROPOSITIO XXX.

Quivis arcus maximi in cælo circuli duplo major apparet in terrâ, quàm in cælo.

Fig. 32. ESto maximus in cælo circulus BFD, cjusque arcus B C, tellus autem in centro A, quæ ad cælum est puncti instar. Sumatur deinde in circulo punctum D quantumvis vicinum arcui B C, vel quantumvis remotum, ducanturque radij BA, CA, BD, CD. Per 20. 3. angulus ad centrum A duplo major est angulo D ad circumferentiam. Ergo arcus B C duplo major apparet in terrâ, quàm in cæli puncto D, quantumvis arcui propinquo.

PROPOSITIO XXXI.

Datur locus quem videri totum est impossibile.

Fig. 33. TAlis est, qui duobus semicirculis ac binis tangentibus A B, C D continetur. Supponitur autem ejus ambitum visui pervium non esse.

Intra hunc locum ponatur oculus in quovis puncto X, ex quo ducatur ad contactum A, recta X A. a per 16. 3. Hæc secabit a peripheriam in N. Ergo si ex X ducatur tangens, illa non pertinget in A, sed occurret ipsi B A in P, tangetque semicirculum in O puncto citeriori quàm A. Quoniam igitur per hypothesim loci ambitus visui pervius non est, manifestum est triangulum mixtilineum APO conspici non posse ab oculo in X. Pari modo ductis tangentibus XIQ, XVS, XMR, liquet trilinea IQB, NSC, MRD videri ab oculo in X constituto non posse. Atque istud semper eveniet ubicumque oculum intra locum dictum collocaveris. Dedimus ergo locum, quem videri totum sit impossibile.

PROPOSITIO XXXII.

Diameter sphæræ per totam sphæræ superficiem æqualis cernitur.

Fig. 34. ESto sphæræ diameter D E, oculus in superficiei sphæricæ puncto quocumque A, F, X, Z. Si per diametrum D E, & punctum A sphæra plano secetur, sectio erit maximus circulus, cujus diameter est ipsa D E. Junctis igitur rectis A D, A E, angulus DAE in semicirculo a rectus est, sub quo spectatur a per 31. 3. D E. Item ob eamdem causam junctis XE, XD, angulus EXD rectus erit, uti etiam anguli EFD, EZD. Cùm igitur D E ab oculo posito in A vel F, vel X, vel Z puncto denique quocumque superficiei sphæricæ spectetur sub angulo semper recto, liquet eam per totam sphæræ superficiem eàdem b magnitudine b per p. 3. apparere.

Corollarium.

Intervallum igitur quo stellæ diametraliter oppositæ, aut Sol & Luna in oppositionibus distant à se invicem, quàcumque cæli parte constiterit oculus, semper æquè magnum apparet: Syderum enim oppositorum distantia est sphæræ diameter.

PROPOSITIO XXXIII.

Maximus sphæræ circulus per totam sphæræ superficiem æqualis apparet.

Fig. 35. ESto maximus sphæræ circulus QDACB, & oculus in quocumque superficiei sphæricæ puncto O, qui maximum circulum intuebitur sub angulo conico, cujus basis sit ipse circulus, vertex in O. Hunc conicum angulum ostendam esse rectum. Sphæram & Conum per O & centrum Q seca plano, quod in cono producet angulum A O B, in sphærâ circulum maximum, qui cùm à dato maximo circulo DACB bifariam a dividatur, liquet ANOB semicirculum esse, cui angulus AOB inscriptus est. Igitur a l. 1. p. sph. Theod. per 31. 3. angulus AOB, quo conus visualis per axem dividitur, rectus est. Quod si alio rursum plano sphæram & conum secueris per O, & centrum Q, producetur in sphærâ semicirculus iterum maximus DOPC, in cono autem angulus DOC semicirculo inscriptus, ac proinde rectus. Atque istud semper eveniet quomodocumque conum per O & Q, hoc est per axem secuerimus. Cùm igitur sectiones omnes per O Q axem coni rectos angulos exhibeant, liquet solidum coni angulum, sub quo maximus circulus QDACB spectatur ab oculo in O, esse rectum. Atqui eodem modo demonstrabimus, si in quovis alio superficiei sphæricæ puncto oculus statuatur, eumdem circulum spectatum iri sub angulo conico recto. Ergo cùm anguli conici recti omnes æquales sint, idem maximus circulus per totam sphæræ superficiem sub solido angulo semper æquali, ac proinde eàdem b semper magnitudine apparebit. Quod erat demonstrandum. b per p. 5.

Corollarium.

Ex demonstratis patet, quemadmodum plani anguli in semicirculo omnes recti sunt, ita & solidos sive conicos omnes in hemisphærio rectos existere.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

Circuli quantumvis obliquè visi omnes diametri æquales apparent ex distantia à centro, quæ semidiametro sit æqualis. Non tamen circulus eo casu apparet ut circulus directè spectatus.

Fig. 35.

DEmonstratur 1. *Pars.* Esto circulus DACB, cui ad centrum Q insistat recta semidiametro æqualis QO quantumvis obliquè. Dico nihilominùs circuli dati diametros visas ex O apparere æquales: quod sic ostendo. Ducatur in circulo diameter DQC. Quoniam QO æqualis est semidiametro circuli QDACB, erit punctum O in superficie ejus sphæræ, quæ producitur à circulo dicto. Hanc sphæram seca plano per rectas DC, QO: patet sectionem fore maximum circulum, cujus diameter DC. Ductis igitur rectis DO, CO, angulus DOC, sub quo ex O spectatur diameter DC, rectus *a* est, utpote existens in semicirculo DOPC. Eodem modo demonstrabimus diametrum AB, & quascumque alias spectari ex O sub recto angulo. Ergo diametri omnes circuli DACB visæ ex O, apparent æquales. Quod erat primum.

a per 31. 3.

Demonst. 2. *Pars.* Ut circulus obliquè visus appareat instar circuli directè spectati, deberent non solùm omnes diametri, sed etiam omnes semidiametri æquales apparere. Atqui apparent inæquales. Nam cùm ex hypothesi QO semidiameter obliquè insistat circulo QDACB, inæquales erunt anguli DQO, CQO, uno casu excepto, quo recti sunt. Quare cùm rectæ QD, QC æquales sint, patet angulos DOQ, COQ, inæquales existere. Semidiametri igitur QD, QC ex O visæ, apparent inæquales, quod ipsum de cæteris eodem modo demonstrabitur. Neque illæ solùm quæ sibi mutuo sunt indirectum, sed etiam aliæ, AQ, QD &c. inæquales apparent, quia anguli quoque AOQ, DOQ sunt inæquales, ut *b* ab aliis est demonstratum. Circulus igitur QDACB non apparet hic ut circulus directè spectatus. Quod erat alterum.

b Eucl. Vitell. Aguilonio.

Corollaria.

1. *Nullo casu circulus obliquè visus apparere instar directè spectati circuli potest.*

Nam si id fieri unquam posset, tum certè contingeret, quando oculus à centro abest intervallo semidiametri. At ne tum quidem istud accidere parte secundà *prop. præcedentis* jam demonstravimus. Ergo nunquam.

Euclides Perspect. *prop.* 41. & Aguilonius *lib.* 4. *prop.* 66. in ipsâ determinatione propositionis, & imprimis pag. 289. paulò ante consectarium & in consectario ipso, putaverunt circulum obliquè visum ex distantiâ à centro quæ sit æqualis semidiametro, apparere ut circulum: quod ad sensum propositionis nostræ verum non est.

2. *Circulus in casu propositionis neque ut circulus apparet, neque ut ellipsis directè spectata.*

a parte 2. propos.

Non ut circulus, quia, ut jam *a* ostensum est, semidiametri apparent inæquales. Non ut ellipsis, quia æquales apparent diametri, ut ostensum est *parte* 1. *prop.* Ergo nec ut circulus, nec ut ellipsis.

3. *Circulus maximus oculo per sphæræ superficiem circumducto sibi ipsi dissimilis, & tamen semper æqualis apparet.*

Quod semper æqualis appareat, ostensum est *prop.* 33. Quod tamen sibi ipsi dissimilis videatur, sic ostendo. Si oculus ponatur in polo maximi circuli, is apparebit ut circulus, quia non solùm diametri, sed etiam semidiametri æquales apparebunt: si verò oculus statuatur extra polum in alio quocumque puncto superficiei sphæricæ, tunc maximus circulus spectabitur obliquè ex distantiâ pari semidiametro, ac proinde per *coroll.* 2. nec ut circulus apparebit nec ut ellipsis, & infinitas subibit quoad semidiametros apparentiarum varietates. Ergo &c.

PROPOSITIO XXXV.

Circulus obliquè visus ex distantia à centro majore vel minore quàm semidiameter, apparet altera parte longior: non tamen ut ellipsis directè spectata.

Fig. 36. 37.

CIrculus ZBECD spectetur obliquè ex A sub cono scaleno BEACD. Ex A ad planum in quo circulus datur, perpendicularis demittatur AF. Ex F per centrum circuli Z ducatur FCB, atque ad hanc perpendicularis per centrum EZD. Si AZ distantia oculi à centro Z sit major semidiametro ZC, inter omnes dati circuli diametros maxima apparet ED, minima BC; ac proinde circulus apparet longior ad ED, contractior ad BC: si distantia AZ est semidiametro minor, maxima apparet BC, minima ED, adeoque circulus longior apparet ad BC, contractior autem ad ED. Quod erat primum assertionis membrum. Demonstrationem vide apud Vitellonem *lib.* 4. *prop.* 55, & 56. vel Aguilonium *lib.* 4. *prop.* 65 & 66.

Neque diametri solùm, sed etiam (quod ab iisdem Authoribus ostensum est) semidiametri omnes apparent inæquales tam eæ quæ sibi mutuo sunt indirectum ut BZ, CZ, quàm quæ angulum efficiunt, ut BZ, NZ. Atque inde veritas etiam secundæ partis innotescet, quâ asseritur circulum in hypothesi datâ, quamvis oblongus videatur, non tamen apparere ut ellipsim, directo scilicet visu conspectam. Nam ellipseos directè visæ inæquales quidem apparent primò diametri, deinde & semidiametri, quæ angulum efficiunt; at semidiametri quæ sibi mutuo sunt indirectum, omnes inter se æquales videntur, quæ omnia facilè lector per se ostendet. Cùm igitur circulo obliquè visi etiam semidiametri quæ indirectum sunt inæquales appareant, patet eum licet obliquè, & sub eodem cono quo ellipsis OP, aspiciatur, non posse in casu assertionis instar ellipseos apparere.

Corollarium.

Ex hac propositione & *corollario* 2 *præcedentis* patet circulum obliquè visum nullo casu posse instar ellipseos apparere.

Rursum igitur dissentio à Vitellone & Aguilonio, qui oppositum asseruere, hic quidem *lib.* 4. *prop.* 66 & *sequentibus*, ille *lib.* 4. *prop.* 55. & 56. Fateor circulum dum obliquè cernitur, alterâ parte longiorem videri posse: sed hoc non sufficit ut instar ellipseos directè spectatæ, appareat.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Quemadmodum circulus, quantumvis obliquè visus, nunquam apparet ut ellipsis; ita neque ellipsis, quantumlibet spectetur obliquè, apparebit unquam, ut circulus directè spectatus.

Fig. 38. PUtavi aliquando me oppositum demonstrasse hunc in modum. Suprà circulum DBEC conus existat rectus BFC, axem videlicet F A habens rectum ad basim. Secetur conus plano ad axem obliquo. Sectio *a* ellipsis erit QGPM, cui axis occurrat in puncto O. Liquet hoc diversum esse à centro ellipsis K. Per O ducantur rectæ quotcumque GOM, QOP. &c.

a Per 9 & 13. lib. 1. conic.

Dico visui posito in F coni vertice æquales apparere tam rectas omnes GOM, QOP, quàm omnes OQ, OG, OP, OM.

Conus enim planis secetur per axem FOA, & rectas GOM, QOP transeuntibus, quæ in circulo DBEC producent diametros BAC, DAE. Quoniam circulus DBEC ex puncto F, spectatur directè, manifestum est æquales videri tam omnes diametros BAC, DAE, quàm omnes semidiametros AD, AB, AE, AC. Atqui GOM, QOP spectantur sub iisdem angulis, sub quibus BAC, DAE; similiter & OQ, OG, OP, OM sub iisdem spectantur angulis, sub quibus AD, AB, AE, AC. Ergo etiam æquales inter se apparent tam GOM, QOP, quàm OQ, OG, OP, OM. Atque hoc non solùm in ellipsi QGPM, sed etiam in quavis aliâ, imò & in parabolâ ac hyperbolâ continget.

Cùm igitur omnes lineæ GM per O utrimque ad peripheriam terminatæ, item omnes OQ, quæ ex O ad peripheriam educuntur, æquales appareant; videtur ellipsis apparere instar circuli, ejusque centrum apparens esse O.

Respondeo nihilominùs hoc argumento non concludi propositum, cùm clarum sit ut ellipsis instar circuli appareat, non sufficere quòd omnes lineæ per aliquod punctum ductæ æquales appareant, sed requiri, ut punctum illud sit ipsum ellipseos centrum verum; ac proinde requiri, ut omnes veræ tam diametri, quàm semidiametri æquales appareant. Quod cùm fieri non possit, nequit unquam ellipsis apparere ut circulus.

Ex his patet etiam hîc falli Aguilonium, qui *lib. 4. prop. 72. & 73.* oppositum affirmat. Equidem non diffiteor longitudinem majorem ellipseos contrahi ex aspectus obliquitate: at nego istud sufficere, ut tanquam circulus directè spectatus appareat.

PROPOSITIO XXXVII.

Quo longiùs abes à sphæra, eò majorem partem conspicies; eò minorem, quò propiùs. Sed quò pars conspecta fuerit major, eò apparebit minor; quò minor, eò major apparebit.

Fig. 40. SIt oculus primùm in C, deinde in B. Vel ex ipso schematis conspectu patet rectas sphæram tangentes ex puncto remotiori B, includere sphæræ portionem IOP majorem portione SPQ, quam includunt tangentes ex C puncto viciniori. Quare cùm id solùm ex sphærâ videatur, quod à tangentibus ab oculo ductis includitur, pars major videbitur ab oculo cùm remotior est. Verùm illa ipsa apparebit minor, quia angulus O B I minor est *a* angulo N C R, hoc est Q C S.

a Per 21. 1

PROPOSITIO XXXVIII.

Sphæræ pupilla minoris dimidium videri nequit oculo uno: videbitur autem dimidium si pupillæ æqualis fuerit, & plusquam dimidium, si major.

Fig. 40. DIstet oculus à sphærâ quantumlibet in B, à quo tangentes ducantur BI, BO. Ex centro autem rectas emitte A O, A I, A B. Quoniam in triangulis ABO, ABI, anguli BOA, BIA ad contactus *c* recti sunt; erunt OAB, IAB singuli rectò *d* minores, ac proinde ambo simul minores duobus rectis. Igitur lineæ OA, IA, non sunt *i* in directum, sed angulum efficiunt versùs oculum B inclinatæ. Ducatur ergo per A centrum recta DAE. Erit sphæræ portio DPE major portione OPI à tangentibus BO, BI comprehensâ, quæ sola spectari potest ex B. Atqui portio DPE hemisphærium est. Ergo O P I portio visa ex B hemisphærio minor est.

c Per 18. 3
d Per 32. 1
i Per 14. 1.

Idem breviter sic ostendes. Cùm portio major videri nequeat eâ, quam tangentes sphæram & pupillam intrare valentes comprehendant, ad videndum hemisphærium DPE pupillâ majus, opus esset ut radij DX, EZ, qui sphæram tangunt ad diametri extremitates D, E, versùs oculum concurrerent, aliàs enim intromitti in oculum per pupillam non possent. Atqui tangentes DX, EZ, nequeunt concurrere; cùm enim anguli ADX, AEZ sint *m* recti, DX, EZ *n* æquidistant. Ergo nunquam potest videri integrum hemisphærium pupillâ majus. Atque inde jam patet etiam pars 2 & 3. Si enim sphæra sit pupillæ æqualis, poterunt radij tangentes DX, EZ hemisphærium includentes per pupillam intromitti: & si sphæra sit pupillâ minor, intrare pupillam poterunt etiam tangentes quæ portionem versùs oculum hemisphærio majorem comprehendunt.

m Per 18. 3.
n Per 29. 1.

Nota. *Cum sphæra corpus sit, pupilla verò non aliud quàm foramen circulare, non potest hæc illi æqualis esse, aut major minórve. Quando igitur brevitatis causâ æquales dixi aut minores, majorésve, hæc dicta de diametris intellige.*

Corollarium.

Cùm sphæra ab oculo valdè distat, ut Luna, Sol, Planetæ ac stellæ, pars visa hemisphærio insensibiliter minor est.

PROPOSITIO XXXIX.

Cùm sphæræ diameter major est utriusque oculi intervallo, nequidem utroque oculo hemisphærium integrum videri potest: potest autem, si sphæræ diameter sit intervallo oculorum par, & plusquam hemisphærium, si minor.

Vide demonstrationem secundam præcedentis, quæ huic facilè applicabitur.

PROPOSITIO XL.

Sol plus illuminat quàm dimidium Terræ, Luna minus dimidio.

Fieri potest, ut Lunæ numquam minor portio illuminetur, quàm dum nobis apparet plena.

Sol numquam minorem terræ partem illuminat quàm æstate media; numquam majorem, quàm media hyeme.

Horum veritas vel ex solâ schematum inspectione intelligetur, hoc uno observato; portionem obscuri corporis nonnisi eam illuminari, quam radij tam obscurum quàm lucidum tangentes, ex obscuro versùs lucidum comprehendunt.

Fig. 41. Sit enim Sol A, terra B. Quia Sol major est terrâ, radij utrumque tangentes CE, DF, portionem Terræ versùs Solem comprehendunt EGF majorem hemisphærio. Atqui portio EGF ea est quam Sol illuminat. Ergo Sol illuminat plus quàm Terræ *a* hemisphærium. Sit jam Luna B, Terra A. Cùm Luna sit Terrâ minor, radij utramque tangentes EC, FD ex Terrâ versùs Lunam includunt portionem CND minorem hemisphærio. Ergo Luna minùs illuminat quàm hemisphærium Terræ. Quod erat primum.

a vide Astron. l. 4. num. 18.

Fig. 42. Sit deinde Sol A; Luna primùm in B, deinde in C. Manifestum est portionem QSP à tangentibus ex Lunâ propinquiore in B comprehensam, esse majorem portione NXO quæ à tangentibus comprehenditur ex Lunâ remotiore in C; ac proinde quò remotior est à Sole Luna, eò minorem ejus partem illuminari. Atqui remotissima subinde est cùm nobis plena apparet, quando nimirùm Soli apogeo opponitur. Fieri ergo potest ut Lunæ numquam minor portio illuminetur à Sole quàm dum plena est. Quod erat secundum.

Fig. 42. Postremò sphærulæ B, C jam Terram repræsentent, Solem (ut priùs) A. Portio Terræ illuminata NXO, cùm Sol abest longiùs, minor est portione illuminatâ QSP, cùm ab eâ Sol abest propiùs, ut patet ex dictis suprà. Atqui æstate mediâ Sol est in Apogeo Eccentrici, hoc est remotissimus à terrâ, in hyeme est in Perigeo, adeoque vicinissimus. Ergo Sol numquam minorem Terræ partem illuminat, quàm æstate mediâ, numquam majorem quàm mediâ hyeme. Quod erat tertium.

Facilè ista demonstrabit Geometricè lector elementis utcumque tinctus.

PROPOSITIO XLI.

Cylindro & oculo positione datis, portionem Cylindri uno oculo visam exhibere.

Datus sit Cylindrus BG, & oculus in A. Per oculum A planum agatur basibus Cylindri parallelum, quod in Cylindro producet circulum *a* MKPN: hunc ex A *b* tangant in N & K rectæ AN, AK. Per NK ducatur planum axi SQ parallelum, quod producet in Cylindri superficie *c* rectas OND, HKE.

Fig. 43. a Per 5. Sereni. b Per 17. 3. c Patet ex seren. p. 3. lib. 1.

Dico portionem OFHEBD videri ab oculo in A constituto, & non ampliùs.

Ducatur enim planum per tangentem AN & rectam OND; item aliud per tangentem AK & rectam HKE. Manifestum est hæc plana Cylindrum tangere in rectis OND, HKE. Manifestum quoque est omnes radios qui ab oculo A prodeuntes Cylindrum tangunt, in dictis planis tangentibus existere & Cylindrum tangere in punctis rectarum OND, HKE, in quibus Cylindrum tangunt ipsa plana. Patet igitur ab oculo A videri portionem HFODBE & solam.

Corollarium.

Portio Cylindri uno oculo conspecta est minor Cylindri dimidio. Si nimirum latitudo Cylindri sit major diametro pupillæ. Eodem modo propositio 37 Cylindro applicabitur.

PROPOSITIO XLII.

Detur conus BHC, & oppositus illi KHG, infinitus uterque. Dico, si oculus ponatur in quovis puncto superficiei coni oppositi, vel quovis puncto intra eam, spectari totum conum BHC.

Fig. 46.

Existat oculus in quovis oppositæ superficiei puncto M, & in superficie coni BHC detur punctum quodvis O. Secetur uterque conus plano per axem & per M producente triangula BHC, KHG. Deinde per M & O planum agatur rectum ad triangula, producens in earum plano rectam MZT, in superficie autem coni BHC lineam curvam LOZV; quæ erit *a* hyperbola, latus habens transversum ZM; quo bisecto in R erit R centrum hyperbolæ. Cùm igitur tangentes hyperbolam concurrant omnes cum diametris inter *b* centrum R & verticem Z, patet hyperbolam LOZV totam, adeoque & punctum O, videri in R, ac proinde etiam in M, & ultra M intra conum KHG. Cùm igitur O sit punctum quodcumque superficiei conicæ BHC, liquet eam videri totam in M puncto quovis superficiei coni oppositi. Eadem erit demonstratio si oculus ponatur ubivis intra superficiem KHG.

a Per 12. 1. conic. b Per 31. 1. conic.

PROPOSITIO XLIII.

Cono atque oculo positione datis portionem coni uno oculo visam exhibere.

Datus sit conus BHC. Per coni verticem ducatur *a* HN basi BDC *a* parallela.

Fig. 44.

CA-

CASUS 1.

Sit primò oculo infrà parallelam H N in A. Seca conum plano ad basim parallelo. Sectio erit *d* circulus ZOFS, quem ex A *i* tangant rectæ ASV, AOY, in S & O. Secetur deinde conus alio plano per verticem H & contactuum puncta S, O: sectio erit *m* triangulum DHω, cujus latera H D, H ω erunt in coni superficie. Dico videri ab oculo in A portionem BHDω, quæ minor est coni dimidio.

d Per 4.1. conic.
i Per 17.3.
m Per 3.1. conic.

Concipiatur enim per rectam, HSω, & tangentem ASV planum infinitum, itemque aliud per rectam HOD & tangentem AOY. Hæc plana conum tangunt in rectis HSω, HOD, eorumque sectio communis est recta AHX, in quâ oculus. Omnes ergo radij, qui profecti ab oculo A conum contingunt, in planis dictis existunt, & conum tangunt in punctis rectarum Hω, HD, in quibus eumdem tangunt plana ipsa. Ergo oculus in A constitutus videt portionem DBHω; quam patet esse coni dimidio minorem.

CASUS 2.

Sit deinde oculus suprà parallelam ωHN, sed extra conum oppositum ↓H ζ, ex. gr. in X. Per X & verticem coni due rectam XHβ. Sumptoque in Hβ puncto quovis A per id seca conum plano basi parallelo. Sectio rursum erit circulus ZOFS; quem ex A tangant ASV, AOY, in punctis O, S: ductoque plano per O, S, H, producatur in cono triangulum DHω.

Dico videri ab oculo in X portionem HDωCH, quæ major est coni dimidio.

Concipiantur enim rursus per trianguli latera HSω, HOD, & tangentes ASV, ADY plana infinita. Hæc se mutuo intersecabunt rectâ AHX, & conum contingent in rectis HSω, HOD. Cùm ergo oculus X sit in communi planorum sectione, liquet radios omnes, qui ab oculo prodeuntes conum contingunt, existere in dictis planis, conumque contingere in punctis rectarum HSω, HOD, in quibus plana ipsa conum contingunt. Ex quo patet oculum in X suprà parallelam NHω constitutum, cernere portionem HDωCH, quæ major est coni dimidio, cùm basis ejus DCω sit major semicirculo.

CASUS 3.

Fig. 45.

Sit oculus postremò in ipsâ parallelâ ωHN extra verticem coni H.

Dico videri coni dimidium.

Per rectam H N & coni axem H E ducatur planum secans basim coni diametro BEC, quæ erit parallela ad H N, cùm ipsa H N per hypothesim sit basi coni parallela. Ducatur deinde diameter D E ω perpendicularis ad B C, & conum tangant in D & ω rectæ P D, O ω, quas patet esse parallelas ad B C, adeoque etiam ad N H. Cono tandem secto per axem H E, & diametrum D ω triangulum existat DHω, cujus latera H ω, H D sunt in coni superficie. Jam quia Oω, N H sunt parallelæ, adeoque in uno plano, etiam H ω in uno *n* cum ipsis plano erit. Per tres igitur rectas HN, Hω, Oω extendi planum potest, quod cùm transeat per tangentem O ω, conum in rectâ H ω continget. Eodem modo per rectas PD, DH, HN transit planum quod tangat conum in rectâ HD. Cùm igitur oculus existat in rectâ HN sectione communi planorum dictorum, patet omnes radios, qui ab illo profecti conum tangunt, existere in planis prædictis & conum tangere in punctis rectarum Hω, HD, ac proinde videri portionem HDBω, quæ per constr. est coni dimidium.

n Per 7.11

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 44.

Per coni verticem H ducatur recta XHM utrimque infinita, basi BDCω noo æquidistans, oculus incedens per infinitam H M eamdem semper portionem coni intuebitur: incedens verò per infinitam HX, spectabit semper portionem quæ complementum est prioris.

Secetur conus circulo quocumque ZOFS, cujus planum occurrat infinitæ XHM in A. Ex A circulum tangant AOY, ASV. Per contactus O, S, & verticem secetur conus triangulo DHω. Plana infinita per tangentes ASV, AOY & trianguli latera Hω, HOD conum tangent in rectis Hω, HD, & eorum sectio communis erit ipsa recta infinita, XHA. Patet igitur oculo perambulante rectam HMA quantumcumque productam semper conspici portionem HDBω planis tangentibus inclusam; oculo autem incedente per rectam HX etiam quantumlibet protractam perpetuò cerni portionem alteram HDCω ab ijsdem planis versùs Y X inclusam.

Quod si oculus incedat per rectam NHω basi parallelam, spectabit semper coni dimidium, quantumcumque, seu versùs ω, seu versus N à cono elongetur.

Patet ex casu 3 præcedentis.

PROPOSITIO XLV.

Fig. 44.

Si oculus fuerit infrà lineam ωHN, quæ per coni verticem H ducitur basi parallela, quò radius (MH) ab oculo ad coni verticem emissus, majorem cum axe H P angulum effecerit (MHP), cò plus de cono intuebitur. Si autem fuerit suprà parallelam ωHN & extra conum oppositum ↓H ζ: quò radius ab oculo ductus ad verticem cum axe H S producto, majorem fecerit angulum (Q H S), cò spectabit de cono minus.

Sit oculus infrà parallelam in G & per G ac verticem H ducatur recta GHL. Tum per G ducto plano ad basim parallelo producatur in conò circulus ZOFS: hunc ex G tangant rectæ GQ, GR. Conspiciet oculus in G portionem HQΦTRH planis tangentibus infinitis GHR, GHQ inclusam ut patet ex casu 1. *prop.* 43. Quod si oculus statuatur suprà NHω in puncto quopiam θ rectæ GHL, quæ communis est sectio planorum tangentium, conspiciet portionem HQΦCTRH, ut patet ex *casu* 2. *prop.* 43.

Ponatur deinde oculus in M, à quo per coni verticem ducta M H X efficiat cum axe H P angulum MHP majorem præcedenti GHP. Occurrat autem planum circuli FOZS ipsi XHM in A, & ex A circulum tangant rectæ AO, AS. Includent illæ portionem circuli OZF majorem portione QZR, adeoque & plano

plana tangentia infinita AHS, AHO includent coni portionem HODB ♃ SH, majorem portione HQ ♄ TRH. Atqui oculus in A videt portionem HODB ♃ SH. Ergo oculus, cùm major est angulus MHP, plus de cono intuetur. Quod si oculus statuatur suprà NH ♄ in Q puncto aliquo rectæ AHX, quæ planorum tangentium est sectio communis, conspiciet *n* portionem HODC♃SH minorem portione HQ♄CTRH, quam videbat existens in ϑ ubi recta ab eo ad verticem coni emissa angulum cum axe PH producto faciebat ϑHS minorem angulo QHS.

n Per cas. 2. p. 43.

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 44. **Oculus à cono (BHC) recedens per lineam (ZA) basi parallelam infrà verticem (H), quò recedit longiùs, eò plus de cono intuebitur, eò autem minùs, quo recedet longiùs per basi parallelam suprà verticem.**

Sit oculus primò in ipsius ZA puncto G, & ex G ad verticem ducatur recta GH: sit autem coni axis HP. Procedat deinde ex G in A, ducaturque recta AH. Erit angulus AHP, major angulo GHP. Ergo per *præced.* plus de cono spectatur in A puncto remotiori parallelæ ZA, quàm in G viciniori. Quod erat primum.

Sit deinde oculus suprà verticem H, in rectæ π ϑ basi parallelæ puncto λ, ducaturque λH. Inde verò procedat in Q, jungaturque QH. Angulus igitur QHS quem constituit QH cum PH axe producto in S, major est angulo λHS. Ergo per *præced.* oculus in Q remotior minus de cono intuebitur, quàm in λ vicinior: quod erat alterum.

PROPOSITIO XLVII.

Fig. 46. **Oculus à cono dato (BHC) versùs conum sibi oppositum (KHG) ascendens, quò ascenderit altiùs, eò plus de cono dato intuebitur.**

Ducatur recta utrique cono occurrens CX, & sit oculus primùm in puncto A, ex quo ad verticem H ducatur recta AH, per verticem verò ipsum st NHQ basi parallela. Ex A deinde procedat oculus in E, ducaturque recta EH. Axis autem coni esto PH♃. Quoniam angulus EHP major est angulo AHP, plus de cono videbitur in *a* E, quàm in A. Ubi verò perventum fuerit in I ad parallelam NHQ, spectabitur coni *b* dimidium, adeoque plus quàm in quovis puncto infrà I, cùm id quod de cono spectetur infra I, sit *c* minus semper coni dimidio. Ascendat deinde oculus ex I in F, & inde in S, ac tandem pertingat ad conum oppositum in X, ducanturque rectæ FH, SH. Quia in F spectatur plus quàm *d* coni dimidium, in I verò dimidium; plus de cono videbitur in F quàm in I. Quia verò angulus SH♃ minor est angulo FH♃, plus de cono spectabitur *i* in S, quàm in F. Atque ita pars visa coni perpetuò adaugebitur, donec tandem in X totus videatur conus BHC.

a Per p. 45. b Per casum 3. p. 43. c Per cas. 1 ibid. d Per cas. 2 ibid. i Per p. 45.

PROPOSITIO XLVIII.

Datæ sint hyperbolæ oppositæ QZ, BS, quarum axis transversus BQ, & centrum X, ex quo perpendiculariter sit erecta XA potens quartam partem figuræ. Fig. 47.

Dico hyperbolas quantumcumque productas atque ab invicem divaricatas, si conspiciantur ex A, æquidistantes apparere.

Ex centro X ducatur infinita XO perpendicularis ad BQ, atque inter hyperbolas quotvis ponantur rectæ SZ ad XO perpendiculares SZ hyperbolarum intervalla semper crescentia exhibentes. Ea verò manifestum est ita crescere, ut quævis longitudine datâ evadant majora. Demonstrandum igitur est hæc intervalla omnia ex A conspecta inter se æqualia apparere.

Fac MF æqualem BQ, quâ bisectâ in C, ex C duc CA perpendicularem ad MF & æqualem ipsi AX. Ex A per F due infinitam AV, & ex A infinitam AR perpendicularem ad CA, adeoque & parallelam ad MF. Circa AR tanquam axem in orbem acta AV describat conum rectum, qui sectus plano ad AR axem recto, exhibeat circulum QHP, sectus autem per axem AR & parallelam axi MF, plano alio triangulum exhibeat QAP, cujus basi QP ipsa MF occurrat in I, & ex I ducatur IH perpendicularis ad QP. Tum denuò conus secetur plano per rectas MFI, IH, quâ sectione producatur in coni superficie curva linea FGH. Fig. 48. 47.

Latus coni PA productum occurrat rectæ IFC in Y. Quoniam CFI, AR æquidistant, erit angulus CFA æqualis sibi alterno FAR: sed hunc, quia conus rectus est, liquet æqualem esse angulo RAP. Ergo CFA ipsi RAP æqualis est. Atqui ob parallelas *a* IFCY, AR, etiam angulus IYP æquatur ipsi RAP. Ergo CFA, & IYP, seu CYA, æquales sunt. Anguli autem YCA, FCA per constr. recti sunt. Cùm igitur in triangulis YAC, FAC duo anguli dicti sint æquales & latus CA commune; etiam YC, FC æquales erunt. Atqui per const. etiam MC ipsi FC æqualis est, æquantur igitur YC, MC. Quare punctum Y, in quo latus coni PA occurrit ipsi IFC, idem est cum puncto M. Linea igitur *b* FGH hyperbola est, cujus diameter transversa est MF, centrum C, ordinatim applicata HI. Neque solùm MF diameter est, sed etiam axis; cùm enim AR sit recta plano *c* QGH, etiam MFI parallela *d* ad AR, est eidem *i* plano recta; ac proinde angulus MIH, quem HI ordinatim applicata facit cum diametro, rectus *m* est. Præterea *n* ab alijs est demonstratum rectam AC posse quartam partem figuræ quæ fit ad axem hyperbolæ FGH. Cùm igitur transversus axis MF sit æqualis dato axi transverso BQ, & AC potens quartam figuræ partem hyperbolæ FGH æqualis sit rectæ AX potenti quartam figuræ partem hyperbolæ QZ, liquet hyperbolam FGH eandem esse cum datâ QZ. Præterea quia jam ostendi MFI esse plano QPH rectam, recti *o* erunt anguli MIP, MIH. Ergo RI ad planum hyperbolæ FGHI recta est per 4. 11. Atqui AC est parallela ad RI, cùm ACI per constr. rectus sit, & RIC, seu MIP ex paulò ante demonstratis.

a Per constr. b Per 12. 1. conic. c Per constr. d Per constr. i Per 8. 11. m Per def. 3. 11. n Per eand. o Per 8. 11. n Bettinus apiario 3. pag. 26.

Ergo

Ergo etiam A C ad hyperbolæ planum *o* recta est. Quare cùm A C etiam par sit ipsi A X si oculus ponatur in vertice coni A, eundem habebit situm ad hyperbolam FGH, qui datur respectu hyperbolæ QZ. Postremò in hyperbolæ plano ducatur ex centro C infinita C D perpendicularis ad axem F M, interque eam & hyperbolam rectæ quotvis EG, EG perpendicularis ad C D. Liquet C D fore X O, & EG, EG fore ZO; ZO. Quare cùm in cono habeantur conditiones omnes theorematis dati, si ostendero intervalla omnia CF, EG, EG visa ex altitudine CA inter se apparere æqualia, ostensum pariter erit, intervalla XQ, OZ, OZ visa ex altitudine C A, inter se apparere æqualia, ostensum pariter erit, intervalla XQ, OZ, visa ex altitudine YA, inter se æqualia apparere. Id porrò hunc in modum præstabitur.

Ducantur rectæ AE, AE, & AG, AG, quæ erunt in coni superficie. Quoniam recti sunt *q* anguli DCI, ACI, erit I C recta plano *r* DCA. Ergo axis RA ipsi I C per constr. æquidistans, eidem plano *s* DCA rectus est. Quare anguli CAR, EAR omnes sunt recti, & æquales. Deinde quia tam F C quàm E G sunt perpendiculares ad C D, erunt CF, EG *u* parallelæ. Sed etiam parallelæ erant *x* CF, AR. Ergo & EG, AR sunt parallelæ, adeoque in uno plano existunt. Quare etiam A G illas connectens cum ipsis AE, AR *z* in uno plano existet. Angulus igitur FAR pars est recti anguli EAR. Cùm autem ex constr. in uno plano sint CA, FA, AR, etiam angulus FAR pars est recti anguli CAR. Jam quia conus per constr. rectus est, liquet omnes angulos FAR, GAR, æquales existere. Atqui ostendi suprà æquales esse omnes CAR, EAR. Ergo si ab his æqualibus demas æquales, FAR, GAR, reliqui CAF, EAG æquales erunt. Intervalla igitur CF, EG, visa ex altitudine C A, hoc est (ut ostendi suprà) intervalla X Q, O Z visa ex altitudine X A, inter se æqualia apparebunt. Ergo etiam intervalla BX, SO, adeoque & intervalla tota BQ, SZ, SZ visa ex altitudine A X, quæ possit quartam partem figuræ, apparebunt æqualia; hoc est hyperbolæ B S, B Z æquidistantes apparebunt. Quod erat demonstrandum.

q per constr. r per 4. 11. s per 8. 11. u per 6. 11. x per constr. z per 7. 11.

PROPOSITIO XLIX.

Phases Lunæ exponere.

Rem omnem aliquot assertionibus quasi punctis complectar.

1. Quamvis id quod de Lunâ cernimus, sit hemisphærio minus, tamen quia ob ingentem distantiam *a* insensibiliter differt ab hemisphærio, potest assumi pro hemisphærio, & circulus partem visam à non visâ discriminans, pro maximo Lunæ circulo haberi.

a per corol. p. 38.

2. Pari modo quamvis portio Lunæ à Sole illuminata sit major hemisphærio, quia tamen ob ingentem à Sole distantiam insensibiliter ab hemisphærio differt, assumi etiam potest pro hemisphærio, & circulus partem illuminatam ab obscurâ separans, pro circulo maximo.

3. Ex his sequitur, quod de hemisphærio illuminato à nobis conspicitur extra plenilunium, id duobus maximis semicirculis comprehendi, quorum unus ACB est medietas maximi circuli ACBD qui hemisphærium visum à non viso distinguit, alter AIB est medietas maximi circuli, qui hemisphærium lucidum separat ab obscuro. *Fig. 49. 50. 51. 52.*

His positis, per Oculum & Lunæ centrum Z planum agatur rectum circulo CBDA hemisphærium visum à non viso separanti, idque repræsentet recta A Z B. *Fig. 49.*

4. Itaque si hemisphærium lucidum Lunæ ita à nobis sit aversum, ut (quod in Luminarium conjunctionibus accidit) semicirculus A I B congruat semicirculo A C B, nihil de hemisphærio lucido conspiciemus.

5. Postquam verò Luna cœperit à Sole elongari, & semicirculus AIB suprà circulum ACBD nonnihil attolli, pars ACBIA de lucido hemisphærio à nobis visa acutissimè corniculata apparebit ob semicirculorum eam comprehendentium vicinitatem, & acumen angulorum A ac B. *Fig. 50.*

6. Post longiorem à Sole recessum, quia semicirculi ACB, AIB majores jam angulos A, B comprehendunt, pars lucida, quæ videtur, corniculata quidem, sed minus acuta minusque cava apparet. *Fig. 51.*

7. Paulò ante quadraturam primam, cùm semicirculus AIB coincidit cum plano AZB pars lucida apparet instar semicirculi & cavitas omnis evanescit, quia arcus AIB directè aspicitur. *Fig. 52.*

8. Quando hemisphærium illuminatum ita nobis obvertitur, ut semicirculus AIB incipiat cadere ultra planum AB versùs D, quod post quadraturam primam contingit, portio lucida nobis conspicua ACBIA apparet gibbosa.

9. Tandem lucido hemisphærio (quod in oppositione Luminarium contingit) ita ad nos converso, ut semicirculi AIB, ADB coincidant, totum lucidum hemisphærium nobis conspicuum redditur.

FINIS LIBRI PRIMI.

OPTICÆ
LIBER SECUNDUS
DE PERSPECTIVA
SIVE
PROJECTIONIS SCENOGRAPHICÆ
THEORIA ET PRAXI.
CAPUT PRIMUM.

Definitiones & hypotheſes ponuntur & explicantur.

Definitiones.

1 R*Adius opticus*, eſt via, quâ ſpecies puncti ad Oculum allabitur.

In *Fig.* 1. linea R B eſt radius opticus puncti R. Et SB, puncti S. &c.

2 *Triangulum opticum*, eſt via, quâ ſpecies lineæ ad Oculum penetrat. Ejus baſis eſt ipſa linea, vertex in Oculo eſt.

In *Fig.* 1. BQL eſt triangulum opticum lineæ QL, quia ejus ſpecies per hoc triangulare ſpatium penetrat ad oculum B. BLE eſt triangulum opticum lineæ LE.

3 *Pyramis optica*, eſt via quâ ſpecies plani vel ſolidi ad Oculum propagatur. Ejus baſis eſt ipſum objectum, vertex in Oculo eſt.

In *Fig.* 1. ſpecies plani quadrilateri QFEL ad Oculum propagatur per ſpatium pyramidale QFELB, cujus baſis eſt ipſum objectum QFEL; vertex autem in Oculo B. Pari modo ſpecies plani SQLR ad oculum penetrat per pyramidem SQLRB.

4 *Projectio Scenographica*, eſt magnitudinis datæ in planum quod ſecat pyramidem opticum, tranſcriptio.

Ad projectionem requiruntur tria; objectum, planum, Oculus. Objectum eſt projectionis principium à quo radij ſpecifici ad Oculum profunduntur. Hos planum inter objectum & oculum exiſtens dum intercipit & ſecat: in ipſo illo plano quædam objecti imago efficitur, objectumque ipſum in planum quaſi tranſcribitur. Atque hæc objecti in planum tranſcriptio & transfuſio appellatur *Projectio*: quæ omnia clariùs ex ſequentibus definitionibus intelligentur.

5 Planum horizonti rectum, in quod objecti ſpecies projicitur, *Diaphanum*, ſive *Vitrum* deinceps appellabimus ob rationem infrà dandam, eritque ſemper horizonti rectum. In *Fig.* 1. planum illud eſt TXEF.

6 *Lineam Sectionis*, ſive *Sectionem* voco eam rectam, ſecundùm quam Vitrum ſecat, ſeu tangit planum quod projiciendum eſt. In *Fig.* 1. Sectio eſt FE, recta ſecundùm quam Vitrum TXEF ſecat vel tangit planum projiciendum SFER infrà Oculum exiſtens. Pari modo ſectio erit tam recta TF, quàm XE ſecundum quas plana projicienda, lateralia TFS2, XER3 ſecantur à Vitro. Similiter TX eſt Sectio, quia ſecundùm hanc Vitrum ſecat planum projiciendum 3XT2 ſuprà Oculum exiſtens.

7 *Punctum projici* dicitur in illud punctum in quo radius opticus Vitrum ſecat. In *Fig.* 1. punctum R dicitur projici in punctum M, in quo radius opticus RB ſecat Vitrum TXEF: & punctum M dicitur projectio, ſeu imago, ſeu apparentia puncti R.

8 *Linea recta projici* dicitur in eam lineam in quâ triangulum opticum & Vitrum ſe mutuo interſecant. In *Fig.* 1. lineæ LE triangulum opticum eſt LBE. Vitrum autem & triangulum LBE ſe mutuo interſecant in aliquâ rectâ, quæ ſit EK. Dicetur linea LE projici in lineam Vitri EK. Pari modo linea QL projicitur in rectam NK ſecundùm quam Vitrum & triangulum Opticum QLB ſe mutuo ſecant &c. Vocabitur autem NK imago, ſeu projectio, ſeu apparentia rectæ LQ. Et ſic de alijs.

9 *Planum*, ſeu *ſuperficies projicitur* in id planum, in quo pyramis Optica ſecatur à Vitro. In *Fig.* 1. ſuperficies FELQ projicitur in planum FNKE, quod eſt communis interſectio pyramidis opticæ BQLEF & Vitri: diciturque FNKE *Imago* plani QFEL.

In gratiam eorum qui planorum interſectionem minus capiunt, duas poſtremas definitiones aliter ſic expono.

10 *Linea recta projicitur* in eam Vitri lineam quæ connectit imagines extremitatum lineæ projiciendæ.

Radius opticus LB occurrat Vitro in puncto K, ac proinde per *defin.* 7. punctum L ſit projectum in punctum K. Recta EK in Vitro puncta E, K jungens erit projectio, ſeu imago rectæ EL. Pari modo ſi puncta R & L projecta ſint in Vitri puncta M & K: dicetur recta RL projici in rectam KM, puncta K & M connectentem. Denique ſi puncta Q & L projecta ſint in puncta Vitri N & K, dicetur recta QL projici in rectam NK, puncta N & K conjungentem.

11 *Figurata qualibet ſuperficies projicitur* in eam Vitri partem, quæ continetur ab imagine circumferentiæ

ferentiæ ipsius superficiei. Sic quadrilateri F L circumferentia, hoc est 4 latera ambientia, QF, FE, EL, LQ sint projecta in 4 lineas Vitri FN, NK, KE, EF, dicetur superficies F L, projici in Vitri partem KFNE. Pari modo si 4 latera QS, SR, RL, LQ, projecta sint in 4 Vitri lineas NP, PM, MK, KN, dicetur quadrilaterum QRLS projici in Vitri partem PKMN. Eritque hæc imago ipsius plani QRLS.

12 *Lineæ directæ* vocantur quæ cum Sectione concurrunt aut possunt concurrere. Sic in plano inferiori lineæ directæ sunt SF, 10D, RE, quia concurrunt cum sectione F E. In plano laterali supra horiz. erecto, directæ lineæ sunt 8ꝭ, 7G, 6α &c. utpote concurrentes cum sectione T F. In plano superiori directæ sunt 2T, 94, 3x quia concurrunt cum sectione Tx.

13 *Lineæ directæ perpendiculares* sunt, quæ Sectioni ad angulos rectos occurrunt: *obliquæ* quæ ad angulos non rectos.

14 *Lineæ transversæ*, sunt, quæ Sectioni æquidistant. Sic Q L, & S R sunt transversæ in plano horiz. quia æquidistant sectioni F E: recta 23 in plano superiori: recta 2S in plano laterali.

15 Angulus (RLD) quem directæ faciunt cùm sectione, vocatur *Situs directarum*.

16 *Situs objecti projiciendi rectus*, dicitur cùm directæ sunt perpendiculares: *Situs* verò *obliquus*, est cùm directæ sunt obliquæ.

17 *Altitudo Oculi*, est recta perpendicularis B C ab Oculo B ad horizontale planum demissa.

18 Punctum C, *punctum distantiæ*, vocabitur, & quæ ab eo ducitur ad F E sectionem perpendicularis C D, dicatur *Oculi distantia*.

19 Si ab oculo B ducta fuerit recta B A directis lineis æquidistans & Vitro occurrens in A: Punctum A dicetur *Punctum Oculi, Punctum concursus, Centrum projectionis*, quòd ad istud omnium directarum ipsi B A æquidistantium imagines EM, DV, FP, ꝭR, G M. αβ, T ω. 4 Z, X π, &c. confluant, in eoque si producantur, concurrant. Ut demonstrabitur *prop.* 1.

20 Recta quæ per centrum projectionis A ducitur ad horizontem parallela *Horizontalis*, sive *Finitrix* dicatur. Est hæc ejusdem cum Oculo altitudinis, ut patet ex *defin. præced.*

21 Rectæ, quæ à punctis, in quibus directæ sectionibus occurrunt, ducuntur ad A centrum projectionis, nimirùm EA, DA, FA, ꝭA &c. vocentur *Radiales*.

22 Rectæ quæ ab Oculo ad aliquod rei projiciendæ punctum ducuntur, ut BS, BR, BQ &c. *diamentales* appellentur, vel *radij optici*. Hæ secant radiales.

23 *Rectus Oculi situs*, seu *medius*, est cùm perpendicularis è puncto distantiæ C ducta ad sectionem F E, bisecat sectionem, *obliquus*, cùm non bisecat.

24 Porrò tres projectionum differentiæ sunt *Stereographica*, in quæ Oculus rem projiciendam tangit; *Ortographica*, quæ fit per radios opticos parallelos, ac proinde infinitam Oculi distantiam supponit: *Schenographica*, quæ fit ad justam Oculi distantiam. Hanc postremam, missis cæteris, hoc libro exponemus.

HYPOTHESES.

Quæ sub æquali, sive eodem videntur angulo, æqualia & similia apparent: quamvis inæqualia & dissimilia sint. Sic in *Fig.* 1. Rectæ Q L, N K Oculo B apparent æquales, quia sub eodem spectantur angulo: item planum FNKE æquale ac simile apparet plano QFEL, quia sub eodem spectatur angulo solido, sive pyramidali.

Quæ sub majori spectantur angulo, apparent majora, quæ sub minori, minora.

Hæc principia quando Euclides, Alhazenus, Vitellio atque Optici hactenus omnes assumpserunt, nos iisdem pari jure etiam utemur.

CAPUT II.

Projectionis Schenographicæ Theoria.

PROPOSITIO I.

Rei projectio, sive imago in Vitro expressa eodem modo apparet quo res ipsa.

Fig. 1.

Demonstratur assertio ex hyp. 1. Sit Oculus in B elevatus suprà terram ad altitudinem CB: data quoque sit recta Q L; inter Oculum verò B & rectam Q L, positum sit Vitrum T X E F ad terram perpendiculare. Dum igitur recta Q L speciem suam per spatium trianguli optici Q B L propagat ad Oculum B, necesse est ut species per triangulare spatium opticum Q B L profusa, pertranseat Vitrum, illudque secet secundùm rectam N K. Hæc recta N K est projectio, sive imago ipsius lineæ Q L, (per *defin.* 8) ab ejus specie per Vitrum transeunte in Vitro relicta. Atqui N K sub eodem videtur angulo Q B L, quo ipsa linea Q L. Ergo per hyp. 1. N K imago rectæ Q L, eodem apparet modo quo ipsa recta Q L.

Pari modo quadrilaterum QFEL ut sui speciem transmittat ad Oculum, necesse ut species per opticam pyramidem QFELB profusa, pertranseat ac secet Vitrum TXEF, quâ sectione & transitu relinquitur in Vitro quoddam quasi vestigium & imago ipsius QFEL, figura nempe FNKE. Atqui hæc (nimirùm FNKE) sub iisdem radiis opticis, eodemque angulo pyramidali spectatur ab Oculo B, ac res ipsa QFEL. Ergo per hyp. 1. FNKE imago ipsius QFEL eodem modo apparet, quo ipsum QFEL.

Eâdem ratione ostenditur figuram NPMK, quæ est imago, seu projectio plani SQLR eodem modo apparere quo planum ipsum SQLR. Atque hoc ipsum de aliis quibuslibet projectionibus eundem in modum demonstrabitur.

Consectarium.

Ex propositione colliges scopum ac finem perspectivæ; qui alius non est, quàm in dato plano, sive tabulâ eam figuram describere, quam objectum depingendum, dum sui speciem transmittit ad Oculum, in Vitro Oculum inter ac rem posito exprimeret.

PRO-

PROPOSITIO II.

Omnium directarum linearum inter se parallelarum, sive infrà Oculum, sive suprà existentium imagines concurrunt in eo Vitri puncto, in quo linea ab Oculo directis ipsis æquidistans Vitrum secat.

DEmonstr. Sit Oculus in B: altitudo Oculi B C: Vitrum ante oculum positum sit TXEF, in plano horizontali SFER sint directæ S F, 10D, RE: in plano laterali suprà horiz. erecto 2TSF sint directæ 88, 7G, 6α. in plano superiori 2TX3 directæ sint 2T, 94, 3X. Sint autem directæ omnes inter se parallelæ. Ab Oculo demùm B ducatur B A directis datis æquidistans, quæ Vitro occurrat in A. *Ostendendum est* omnium directarum harum imagines concurrere in A.

Sumatur in plano horizontali directa S F occurrens sectioni F E in F. Ab F ad A ducatur in Vitro rectam F A. Quoniam lineæ BA, FS ex hyp. sunt parallelæ, in eodem erunt plano, quas cùm secent tam recta F A, quàm radius opticus S B, etiam F A, SB per 7. 11, in eodem cum ipsis (nempè cum AB, SF) plano erunt. Ergo radius opticus necessariò secat rectam F A in Vitro ductam, puta in P. Ergo punctum S projicitur in P punctum rectæ F A. Ergo per *defin.* 10. recta F S projicitur in rectam F P, quæ proinde ipsius imago est. Sed F P producta incidit in A. Imago igitur directæ FS producta incidit in A. Eodem prorsus discursu ostendam imagines reliquarum directarum esse partes rectarum radialium EA, DA, 8A, GA, & αA, TA, 4A, XA &c. quæ nimirum à punctis in quo directæ sectionibus FE, TF, XT occurrunt, ducuntur ad A. Ergo directarum æquidistantium omnium imagines sive suprà &c.

Ex propositione sequentia deduco consectaria.

Consectarium I.

Quantumvis directæ lineæ extendantur in infinitum, earum projectiones accedunt quidem semper, nunquam pertingunt ad centrum A, ac proinde earum, imagines semper sunt radialibus minores. Extendatur enim directa F S quantum placuerit ex. gr. usque in 13: radius opticus ex puncto 13 ad Oculum B tendens, radialem F A secabit quidem suprà P, sed tamen necessariò infrà punctum A, quòd B A, 13F sint parallelæ, unde projectio sive imago directæ F S quantumvis productæ semper erit minor radiali F A. Pari modo in plano laterali 2TFS, quoniam BA, 88 sint parallelæ, radius opticus ab extremitate 8 8 quantumvis productæ ad Oculum B emissus, necessariò secabit radialem 8 A infrà A. Idemque accidet in plano superiori. Quare &c.

Consectarium II.

Directarum ut ER, FS. 88, &c. infrà Oculum existentium imagines, EM, FP, 8R &c. in Vitro ascendunt, existentium verò suprà Oculum ut α6, T2, 49, &c. imagines αβ, Tα. 4Z &c. descendunt. Ipsius autem G7 quæ ejusdem cum Oculo altitudinis est, imago (Gμ) incidit in ipsam finitricem GAH,

Consectarium III.

Si aliæ fuerint directæ F O, D Z, E K &c. (*vide Fig.* 2) sive infrà Oculum, sive suprà, inter se quidem parallelæ, sed non prioribus FS, D10, ER &c. æquidistantes tamen plano horizontali; coibunt illarum imagines in alio Vitri puncto N; eo nimirùm, in quo linea B N ab Oculo B ad directas novas parallela, Vitrum secat. Hoc autem N centrum secundarium, omniaque secundaria reliqua, erunt in lineâ finitrice G H quæ per centrum primarium A ducta fuit ad horiz. parallela.

Consectarium IV.

Quod directæ aliæ fuerint neque prioribus parallelæ, neque eidem plano æquidistantes, cui priores, earum centrum non erit in lineâ horizontali.

PROPOSITIO III.

Si à puncto distantiæ C ducatur in plano horizontali recta ED (vide *Fig.* 1) directis FS, RE &c. parallela, occurrens sectioni FE in D: ex D autem in Vitro ducatur perpendicularis ad F E, & æqualis altitudini Oculi C B; extremum ejus punctum erit in A centro projectionis.

DEmonst. Quoniam B C ex hyp. est ad horizontem recta, etiam planum ABCD 18. 11 per ipsam ductum, erit horizonti rectum. Sed per hyp. etiam Vitrum TXEF est ad horiz. rectum. Ergo communis eorum sectio, ipsa nimirùm recta D A, ex D ad A centrum ducta, erit 19, 11, horizonti recta. Patet igitur ex *defin.* 3, 11, D A esse perpendicularem ad F E. Est autem extremitas D A in centro ipso A. Ergo &c.

PROPOSITIO IV.

Directarum perpendicularium imagines ad reliquas radialium partes eam habent proportionem, quàm directæ ipsæ ad distantiam oculi.

DEmonstr. In pavimento sit directa perpendicularis aliqua S F, projecta in F P partem radialis F A. A puncto distantiæ C duc C D perpendicularem. Erit hæc oculi distantia & par ipsi B A, quæ ab oculo ad Vitrum ducta, est directis lineis parallela. Ostendendum igitur est F P esse ad P A, ut S F ad C D, sive B A.

Quoniam radius Opticus S B secat radialem F A in P, inter duas parallelas BA, SF: ex elem. F P est ad PA, ut SF ad BA, sive CD.

Idipsum eodem discursu ostendam de directis quæ sunt in muris & tabulato, sit enim in muro 2TFS directa quæpiam 88 projecta in 8R. Igitur radius Opticus ab 8 emissus ad oculum B, secat radialem 8A in A, inter duas parallelas BA, 88, quare rursum 8R est ad R A, ut 88 ad BA, hoc est C D.

PROPOSITIO V.

Directarum obliquarum tam suprà quàm infrà oculum existentium imagines ita se habent ad reliquas radialium partes, ut distantia extremi puncti directæ à Vitro ad distantiam Oculi à Vitro.

Fig. 1. DEmonstr. in plano inferiori directa quævis obliqua SF, projecta sit in FP partem radialis FA, ducantur ad sectionem FE productam ex S & C perpendiculares S16 & C15: Ostendendum est FP imaginem directæ FS esse ad reliquam radialis partem PA, ut est S16 distantia puncti S ab Vitro, ad C15 distantiam Oculi à Vitro.

Cùm enim positis & constructis ijsdem quæ in præcedentibus CD10 sit parallela FS, erit angulus 16FS par angulo FD10, hoc est angulo ad verticem opposito CD15. Anguli quoque S16F, C15D, utpote recti æquantur: quare cùm in triangulis SF16, CD15 bini anguli æquales sint, etiam reliqui 16SF, 15CD æquales erunt. Ergo per 4. 6. Eucl. S16 est ad SF, ut C15 ad CD: & permutatim S16 est ad C15, ut SF ad CD, hoc est ad BA.

Deinde quia radius opticus SB secat radialem FA in P inter duas parallelas BA, SF, triangula SFP, BAP æquiangula sunt, ac proinde per 4. 6. FP est ad PA ut SF est ad BA. Sed jam ostensum est S16 esse ad C15, ut SF est ad BA. Ergo FP est ad PA ut S16 ad C15.

Hoc ipsum de directis quæ sunt in plano erecto 2TFS, & in superiori 2TX3 eodem discursu demonstrabimus. Sit enim directa 8δ projecta in δR partem radialis δA. Sumatur in plano horiz. directa quæpiam SF par directæ datæ 8δ. Ostendam ut suprà δR esse ad RA ut δ8, hoc est FS ad BA. Sed etiam per sup. demonstrata S16 est ad C15 ut FS ad BA. Ergo δR est ad RA ut S16 est ad C15. Idem discursus valebit in reliquis directis omnibus. Liquet ergo propositum.

Ad duas præced. propositiones deduco sequentia Consectaria.

Consectarium 1.

Si directæ inter se parallelæ omnes fuerint æquales, ex projectione unius, reliquarum projectiones facillimè in Vitro reperientur hunc in modum.

Directa RE projecta sit in EM. Ex M duc in Vitro MP parallelam ad FE occurrentem radialibus DA, FA in V & P. Ex P duc in Vitro Pφ, parallelam sectioni FT, occurrentem radialibus in λ, μ, β, ω: rursum ex ω duc ωϖ parallelam sectione TX, seu FE, occurrentem radialibus in ω, Z, ϖ.

Dico parallelas MP, Pω, ωϖ terminare, seu ex radialibus abscindere projectiones omnium directarum ipsi RE æqualium.

Quoniam ex hyp. EM est imago directæ ER, erit per *prop.* 4. ut RE ad CD, vel per 5 ut S16 ad C15, ita EM ad MA, sed quia PM est per const. parallela FE, erit ut EM ad MA sic FP ad PA. Ergo ut RE ad CD, vel ut S16 ad C15, ita FP ad PA. Ergo per 4 vel 5 FP ad parallelam MP terminata, est imago directæ SF. Rursum jam ostendi esse ut S16 ad C15, vel, ut RE ad CD, ita FP ad PA. Sed ut FP ad PA, sic δR ad RA. Ergo ut RE ad CD, vel ut S16 ad C15, ita δR ad RA. Ergo per 4 aut 5, δR ad parallelam Pω terminata, est imago directæ 8δ. Eodem modo demonstrabitur de reliquis.

Consectarium 2.

Transversarum imagines sunt lineæ in Vitro sectionibus parallelæ.

In plano inferiori sit transversa SR inter binas directas parallelas FS, ER posita. Quoniam ex hyp. SR est transversa, erit per *defin.* 14. parallela sectioni FE. Sunt & FS, ER parallelæ ex hyp. Ergo SFER parallelogrammum est. Ergo SF, ER æquantur. Sit jam ER projecta in EM, & ducatur MP parallela EF occurrens radiali FA in P. Ergo per *consect.* 1. FP erit imago directæ FS, ac proinde punctorum R, S, imagines erunt puncta M, P. Quare per *definit.* 10, transversæ SR imago est recta PM, quæ per const. parallela est sectioni FE. Pari discursu ostendam transversam 2S in plano erecto positam, projici in ωP parallelam sectioni TF, & transversæ 23 in plano superiori positæ imaginem esse ωϖ, sectioni TX parallelam.

Consectarium 3.

Habitâ projectione directarum & transversarum, habetur projectio parallelogrammi dati. Sic quia EM, FP sunt imagines directarum ER, FS, & FE, PM imagines transversarum FE, SR, erit *defin.* 12 FPME imago, sive projectio parallelogrammi, seu pavimenti FSRE. Sic quoque PNKM erit imago parallelogrammi QSRL. Pari modo TωPF & XϖME erit imago planorum erectorum, sive murorum 2TFS, X3RE. Demum TωϖX erit imago plani superioris, seu tabulati 2TX3: quæ omnia patent ex *definit.* 12.

Consectarium 4.

Ex projectione FPME plani horiz. seu pavimenti SFER, facillimè reperientur in Vitro projectiones lateralium planorum erectorum, sive murorum 2TFS, 3XER, item plani superioris seu tabulati, modò sint ejusdem cum inferiori SFER longitudinis. Nam si ducantur radiales TA, XA, & Pω parallela FT sectioni; ωϖ parallela TX, erit ϖM parallela XE: eritque TωPF projectio, seu imago muri plani 2TFS, & XϖME imago muri plani 3XRE, & TωϖX, imago tabulati 2TX3. Patet ex *consect.* 1, & 2, & *def.* 12.

Consectarium 5.

Imago plani inferioris pavimenti quantumcumque illud protendatur in infinitum, semper manet minor triangulo FAE, & quamvis semper ad A centrum accedat, nunquam tamen pertingit. Pari modo projectio tabulati 2TX3 quantumvis protensi, semper fiet intra triangulum TAX; & projectio murorum 2TFS, 3XER quantumcumque prolongatorum, perpetuò fiet intra triangula TAF, XAE. Itaque si quatuor dicta plana, pavimentum nempè, tabulatum, & duo utrimque muri sine fine longiùs atque longiùs extenderentur, crescent quidem eorum in Vitro projectiones, atque undique & suprà & infrà & lateraliter utrimque intra sua quæque triangula accedent propiùs semper ac propiùs ad centrum A: numquam tamen pervenient. Patet ex *Consect.* 1, *prop.* 2.

Consectarium 6.

Planum ipsi Vitro oppositum 2SR3 projicitur in PωϖM. Nam 4 ejus latera, quæ nimirùm transversæ sunt, projiciuntur in PM, Mϖ, ϖω, ωP. Ergo per definit. &c.

PROPOSITIO VI.

Altitudo (S8 seu Fδ) vera est ad apparentem (PR) ut distantia ejusdem à sectione cum distantiâ Oculi, ad distantiam Oculi.

Demonstr. Nam EP est ad PA ut SF ad BA, hoc est ut 10D ad DC. Ergo comp. ut 10C ad DC, sic FA ad PA, hoc est Fδ ad PR. Quod erat demonst.

CAPUT III.

Projectionum Schenographicarum praxis.

Ad praxim Perspectivæ aptissima porticus alicujus projectio est, quòd in hujus constitutione Theoria omnis priori capite exposita redigatur ad opus. Sex igitur propositionibus sequentibus, porticum scenographicè delineabimus hisce datis:

Erit porticus longitudo	100 pedum
Latitudo	15
Altitudo	23
10 Intercolumnia	
Singula	10 ped.
Situs rectus	
Oculi altitudo	6 ped.
Oculi distantia	30
Oculi situs rectus.	

His inquam datis, porticum projiciemus; hoc est talem in dato plano (quod hic erit charta) figuram describemus, qualem porticus jam dictis dimensionibus constans, per Vitrum transparens, in Vitro exprimeret, dum spectaretur ab Oculo pedes 6 alto, distante pedes 30, & situm habente rectum.

PROPOSITIO VII.

Pavimenti projectio.

Fig. 3.

1. Ex scalâ sume rectam DK 15 pedum pro latitudine porticus, adeoque & pavimenti; erit hæc Sectio.

2. Quia situs Oculi rectus datur, DK biseca in Z: & ex Z erige perpendicularem ZA, 6 pedum scalæ, parem nempè altitudini Oculi: Tum per A duc VS parallelam KD. Eritque A centrum projectionis, & VS horizontalis.

3. Ex K & D duc rectas KA, DA, erunt hæ radiales.

4. Ex horiz. abscinde rectam AB 30 pedum scalæ, parem nempè distantiæ Oculi, ex DK productâ reseca lineam DT 100 pedum scalæ, parem nempè longitudini porticus: ducaturque BT secans radialem AD in E; & ex E duc EC parallelam KD. *Erit KCED projectio porticus data ad positionem Oculi datam.*

Quod si tabulæ non patiantur angustiæ tam longas esse lineas AB, DT, sumantur aliæ βA, Dϑ, quantumvis parvæ, sed ipsis AC, DT proportionales. Juncta βϑ secabit AD in eodem puncto in quo BT.

Demonstr. Quoniam AD, BT se intersecant in E inter parallelas AB, DT, patet triangula BAE, DET æquiangula esse. Quare erit AB ad AE, ut DT ad ED, & permut. ut AB distantia Oculi ad DT longitudinem, sive latus porticus datæ, sic AE ad ED. Concipiatur deinde pavimentum datum, KDωλ descriptum esse suprà rectam KD: planum verò VSDK cum triangulo KAD erigi perpendiculariter super KD, quod jam repræsentabit Vitrum TXEF figuræ 1. Oculus demùm intelligatur post planum VSDK, sic ut planum sit medium inter pavimentum KDωλ & Oculum. His ita constitutis,

Quoniam situs Oculi datur medius; ergo def. 24, recta à puncto distantiæ ducta ad sectionem KD occurret ipsi KD in puncto bisectionis. Ergo cùm ex Z ducta sit ZA in plano, seu Vitro VSDK, par altitudini Oculi, ejus extremum punctum A, erit a centrum projectionis, ad quod proinde ductæ DA, ZA KA, erunt *def. 22*, radiales. Cùm igitur ante ostenderim DE esse ad EA, ut longitudo porticus DT, sive Dω ad distantiam Oculi patet b DE projectionem esse ipsius Dω. Est autem ex constr. EC parallela ad DK. Ergo c latus transversum extremum porticus projectum est in EC. Item quia EC est parallela DK, ex radialibus abscindit d projectiones omnium directarum reliquarum, ac proinde KC est projectio lateris Kλ. Ergo e pavimentum datum KDωλ projectum est in KCED, ad datam Oculi positionem. Quod erat faciendum.

a *per prop. 3.*
b *prop. 4.*
c *conf. 2. prop. 5.*
d *conf. 1. prop. 4.*
e *def. 11.*

PROPOSITIO VIII.

Planorum lateraliter erectorum & tabulati projectio.

Fig. 4.

1. Ex K & D erige perpendiculares KG, DR 23 pedum scalæ, pro altitudine porticus, & junge GR.

2. Ex G & R ad centrum à duc radiales GA, RA. Ex C & E erige CO, EN parallelas ad KG, DR, occurrentes GA, RA radialibus in O & N, & junge ON. Erunt KGOC, RNED projectiones murorum, seu planorum pavimento insistentium, & CONR projectio tabulati, seu plani superioris.

Demonstratio patet ex *consectario 4. prop. 5.*

Consectarium.

Hinc collige quomodo describi debeat projectio muri solitariè sumpti, item quâ methodo projiciatur una series vel plures parallelæ series domuum, arborum &c.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Directarum longitudinum projectio.

Fig. 4. Directas longitudines quæ sunt in planis lateralibus (nam de transversis agetur 10 & 11 *prop.*) cujusmodi constituunt fenestræ, capitella & bases columnarum longâ serie dispositæ, ita projicies altitudinem basium ex scalâ desumptam abscinde ex KG, & sit KT. Et positâ regulâ super T, & à centro duc rectam usque ad parallelam CO. Inter hanc & KC consistent omnium columnarum bases. *Deinde scapum columnæ* ex scalâ desumptum, abscinde ex TG & sit Tδ: positâque regulâ suprà T & A, duc rectam ex T usque ad parallelam CO. Inter has 2 lineas ex T & δ eductas, constituentur omnes columnæ, capitella, ac cætera omnia pari ratione constituentur. *Quod si fenestras* desideras; altitudinem fenestrarum ex scalâ sumptam abscinde ex KG, & sit KF. Tum fenestrarum longitudinem itidem ex scalâ sumptam abscinde ex FG, & sit FX. Deinde ex F & X duc rectas binas usque ad parallelam CO, coituras in A. Inter has fenestrarum series tota continebitur. Ad eundem modum directæ longitudines in plano inferiori & superiori projicientur.

Horum omnium demonstrat. patet ex consectario 1.*prop*.5.

PROPOSITIO X.

Intervallorum transversis lineis contentorum projectio.

Ejusmodi sunt intervalla columnarum in pavimento & planis lateralibus, intervalla trabium in tabulato transversim positarum &c.

Oporteat columnarum intervalla 10 superius data projicere.

Fig. 3. 1. Quoniam intervalla singula dantur suprà, 10 pedum, ex lineâ DK productâ abscinde 10 partes D2; 23, &c. singulas 10 pedum scalæ: quæ simul sumptæ conficient 100 ped. ipsam portieus datæ longitudinem DT.

Fig. 4. 2. Sumptam ex scalâ distantiam Oculi, quæ 30 pedum erat data, transfer ex A in B. Ex B ad puncta 2,3,4 &c. duc rectas, quæ BC intersecabunt in punctis G,H &c. *Dabunt hæ columnarum intervalla* DG, GH &c. Quod si ex punctis G,H &c. usque ad rectam RN, erexeris lineas ipsi DR æquidistantes projeceris columnas ipsas vel potius axes columnarum. Tandem si duxeris parallelas GM, HP, &c. inventa erunt columnaria intervalla in latere opposito.

Fig. 3. Demonstr. Quoniam triangula AGB, 2GD æquiangula sunt inter se, erit ut 2D ad DG, sic BA, ad AG. Ergo permut. ut 2D ad BA, sic DG ad AG reliquam partem radialis. Ergo per 4, erit 2D projecta in DG. Rursum, quoniam æquiangula inter se triangula sunt 3HD, AHB, erit ut 3D ad DH, sic BA ad AH. Ergo perm. ut 3D ad BA, sic DH, ad HA. Ergo per 4, erit 3D projecta in DH. Cùm igitur D2 sit projecta in DG; &, D3 in DH, erit per def. 10, 2, 3 projecta in GH. Eodem discursu ostendam 3, 4 projici in Hϖ. Et sic de cæteris. Quod erat propositum.

Quod autem columnæ ipsæ projectæ sint in parallelas ex punctis G, H &c. erectas, patet ex *consect.* 2. *prop*.5.

Denique quod parallelæ GM, HP &c. determinent intervalla eorum, in latere altero, patet ex *conf.* 1. & 2. *prop*. 5.

Consectarium.

Intervallis transversis in planis inferioribus & lateralibus inventis, eadem quoque habentur in superiori.

PROPOSITIO XI.

Intervalla transversis lineis contenta aliter projicere.

Fig. 3. 1. Ex DK abscinde D2, 10 pedum scalæ pro uno intercolumnio, & duc A2; sitque AB 30. ped. scalæ Oculi distantia (vel loco AB, & D2 sumantur duæ aliæ adhuc minores ipsis AB & D2 proportionales).

2. Ex B ad 2 duc rectam B2 secantem DA in G. *Erit DG projectio intercolumnij primi D2*, ut ostendi in 10.

3. Ex G duc GM parallelam ad DK, quæ secet rectam 2A in L, & ex B ad L duc rectam BL, secantem GA in H: *Erit GH projectio 2 intercolumnij*.

4. Pari modo ex H ad DK duc parallelam HP, secantem 2A in Q; & junge BQ secantem HA in ϖ. *Erit Hϖ projectio intervalli* 3. Atque hunc in modum reliqua intervalla projicientur.

Demonstr. produc BL donec occurrat DK in 3. Quoniam in triangulo 2AD est LG parallela ad 2D, erit ut 2A ad LA, sic 2D ad LG. Item quia in triangulo 3B2, LG est parallela ad 23, erit ut 3B ad LB, ita 32 ad LG: sed ut 2L ad LA, sic 3L ad LB; & componendo ut 2A ad LA, sic 3B ad LB. Ergo 2D est ad LG, ut 32 ad LG. Æquantur ergo 32 & 2D. Quare cùm 2D sit intercolumnium primum, erit 32 secundum. Sed 32 projectum est in GH, ut patet ex 10. Ergo BL abscindit GH projectionem 2 intercolumnij. Produc deinde BQ in 4. Eodem discursu probabo 43 ac D2 eamdem habere rationem ad QH, ac proinde æquari. Quare 43 erit intercolumnium 3. Sed hoc projectum est in Hϖ. Ergo BQ abscindit Hϖ projectionem 3 intercolumnii.

Tertius modus habetur ex *prop sequenti*.

PROPOSITIO XII.

Projectio lapidum pavimenti.

Fig. 5. Poterat res perfici methodo præcedenti, sed aliam habet praxim sibi propriam magisque expeditam, quæ est hujusmodi.

KCED est projectio pavimenti *prop*. 7 delineata. A centrum horizontalis RS, distantia Oculi AB.

1. KD latitudinem pavimenti seca in tot æquas partes, quot in eâ sunt positi lapides Figura exhibet tantùm 4 lapides per latitudinem KD dispositos, ne multitudo linearum figuram perturbet. Ex divisionum punctis ad centrum A duc radiales HA, GA, FA.

2. Ex B ad K duc rectam BK radiales omnes DA, FA, GA, HA intersecantem, in NI, L, X. Et per intersectionum puncta duc parallelas ad DK; quarum postrema erit NZ. Intra spacium KZND habebitur projectio omnium lapidum, qui continen-

tur in quadratâ pavimenti portione, cujus longitudo est DK.

3. Ex B per Z duc rectam BEZ radiales omnes intersecantem in 2, 3 &c. & per intersectionum puncta duc parallelas ad DK, quarum ultima erit EC. Habebitur sic projectio lapidum alterâ pavimenti quadratâ portione contentorum.

4. Si plures supersint lapides projiciendi, eâdem operatione continuatâ projectio reliquorum perficietur.

Demonstr. Quoniam DF, KH æquantur, erit DE ad AB, ut KH ad AB; hoc est (quoniam similia sunt triangula BXA, KXH) ut HX ad XA; hoc est ut DQ ad QA. Ergo à primo ad ultimum, ut DF est ad AB, sic DQ est ad QA. Ergo per 4 DF projecta est in DQ. *Pari modo* quoniam pares sunt DG, KG, erit DG ad AB, ut KG ad AB, hoc est ob similitudinem triangulorum ALB, KLG, ut GL ad LA; hoc est ut DP ad PA. Ergo à primo ad ultimum ut DG ad AB, sic DP ad PA. Ergo per 4 DG projicitur in DP. *Eodem discursu* erit DH projecta in Do: DK verò patet esse projectam in DN.

Producatur deinde BZ donec ipsi DK occurrat in T. Quia ZN est parallela ad TK, erit TK ad ZN, ut TB ad ZB, hoc est ut KA ad ZA, hoc est ut KD ad eamdem illam ZN. Æquantur ergo TK, KD. Poterit igitur TK secari in partes totidem, in quot secta fuit KD, sic ut his illæ sint æquales. Sint divisionum puncta in 4, 5, 6. Igitur D4 par est ipsi TH, adeoque erit D4 ad AB ut TH ad AB; hoc est ob triangulorum B2A, T2H similitudinem, ut H2 ad 2A; hoc est ut DM ad MA. A primo igitur ad ultimum ut D4 est ad AB sic DM ad MA. Ergo per 4, D4 projicitur in DM. Eodem modo ostendam D5, projici in D7, & D6 in D8. DT verò patet projici in DE.

Quoniam igitur DT longitudo cum intervallis lapidum in EA dispositorum projecta sit in DE, ejusque puncta Q, P, O &c. Ex *consf.* 2. 5, liquet omnes lapidum transversas projici in parallelas QX 9, PL 10 &c. Sunt autem & directæ lapidum lineæ projectæ in partes radialium, per 2. Quare cùm lapides ipsi à directis ac transversis se intersecantibus contineantur, liquet ritè peractam esse lapidum projectionem.

Potest hic modus transferri etiam (ut dixi suprà) ad projectiones intercolumniorum, de quibus actum *p.* 10. & 11.

Consectarium I.

Igitur ex propositionibus 6 præcedentibus habetur projectio porticus datæ ad positionem Oculi datam. Quamvis enim hactenùs situm Oculi rectum posuerimus, facillimum tamen erit eadem omnia ad obliquum Oculi situm præstare.

Fig. 6. 7. Sit DK latitudo porticus. Ex distantiæ puncto, seu base Oculi X ducatur XZ directis datis æquidistans, occurrens ipsi DK (productæ si opus est) in Z. Sit autem DZ tot partium scalæ, quot pedum aut passuum est à parte rei. Ex Z erige perpendicularem ZA parem altitudini Oculi ex scalâ desumptæ. Tum cætera omnia præstantur, quæ *prop.* 7, 8, 9, 10, 11. 12 præscribantur. Prodibit porticus datæ projectio ad datum obliquum Oculi aspectum.

Consectarium II.

Fig. 6. Objectorum aliorum projectio ex eâdem Oculi positione spectatorum, quâ porticus hactenùs delineata quorum directæ lineæ non sunt directis datæ porticus parallelæ; hunc in modum peragetur. Ex base Oculi X, ducatur XP directis lineis objectorum aliorum parallela occurrens sectioni DK in P. Ex P, ad horizontalem VB duc perpendicularem PQ. Erit Q centrum projectionis novum pro aliis illis objectis patet ex 2. Cætera ad horum projectionem spectantia facilè colliges ex 5, & hactenùs dictis in delineatione porticus.

PROPOSITIO XIII.

Porticum nullis datis schenographicè delineare in tabulâ aut plano dato.

Differt hæc projectio à præcedentibus, quod nullis adstringatur datis, sed omnia pro voluntate determinentur.

Fig. 4. Datum sit planum DKGR, quod projectione aliquâ depingi totum debeat.

1. Duc in plano lineam VS pro horizontali parallelam KD basi tabulæ, quam licebit pro arbitrio propinquiorem ducere ipsi KD, aut remotiorem prout ad majorem minorémve altitudinem Oculi projectionem factam desideras.

2. In horizontali VS, determina punctum quodcumque *a* pro centro. Si rectus Oculi situs placet, centrum bifariam secet VS; si obliquum, inæqualiter.

3. Ex 4 plani angulis ad centrum ducantur lineæ D*a*, K*a*, G*a*, R*a*. Item *c*E, EN, NO, parallelas ad KD, DR, RG, & junge *oc*. habebis projectionem pavimenti, planorum pavimento insistentium & tabulati. Quò porticus longioris projectionem desideras, eò parallelogrammum *co*N minus facito.

4. Projectio directarum longitudinum cæterarum, columnarum, item & pavimenti, fiet ut in *prop.* 9, 10, 11, 12: iisdem, quæ isthic, datis, aut aliis pro arbitratu. Si isthic data teneantur, Oculo grata evadet projectio.

Scholium.

Situm objectorum projiciendum infinities variari posse patet ex defin. 15 *&* 16. *cùm angulus sub quo directa longitudines sectioni occurrunt alius semper atque alius esse possit. Iam quæri potest an mutato situ objecti, non mutetur semper & projectio? Id sanè videtur omninò fieri oportere. Sed longè aliter se res habet. Fieri enim potest ut infinita porticus diversa & diversum singula habentes situm, eamdem nihilominus projectionem semper retineant. Quod sic demonstro,*

Fig. 6. *Ponatur Fig. 6 porticus situm rectum habentis exhibere projectionem respectu Oculi positi in x. Concipiatur super basi KD extendi obliquum parallelogrammum inter easdem parallelas inter quas existit pavimentum porticus jam delineata: per x duc xh parallelam infinitam ad KD: & ex Z rectam Zh parallelam directis lateribus parallelogrammi novi, occurrentem ipsi xh in h. Manifestum est ex* [a] *præced. Parallelogrammi novi projectionem esse figuram, eamdem KcED, pro oculo posito in h.* [a] 11. & 5. *Pari modo si super KD & inter easdem parallelas cum priori adhuc obliquiora constituantur parallelogramma quotquot placuerit, horum omnium eadem demonstrabitur*

tur esse projectio KCED, ac proinde & figura KDRGONEc erit projectio omnium porticuum eamdem habentium altitudinem KG, qua super parallelogrammis illis omnibus ut pavimentis eriguntur.

Hæc satis de porticu: ad alia objecta transeamus.

PROPOSITIO XIV.

Cujusvis planæ superficiei perspectivam describere.

Fig. 8. Datum sit ex. gr. pentagonum ABCDE.

1. Ducantur parallelæ qR, SG, quarum qR referat sectionem, SG horizontalem. In horizontali determina punctum F pro centro, & punctum G, pro puncto distantiæ. Utrumque pro arbitrio.

2. Ex pentagoni angulo B demittatur Bb perpendicularis ad sectionem qR, eique occurrens in b. Et ex b duc ad centrum F rectam bF. Perpendicularem Bb transfer in h3, centro b, intervallo bB ducendo arcum b3. Ex 3 ad G duc 3G secantem bF in B. Erit B projectio puncti B.

Pari modo invenietur c projectio puncti C. & d projectio puncti D; & e puncti E, & a puncti A.

3. Puncta B, c, d, e, a, rectis lineis conjungantur. Quæ exiſtet figura dabit perspectivam pentagoni dati.

Demonstr. quoniam inter duas parallelas Fg, qR se interfecant rectæ bF, 3G. Similia erunt Triangula 3Bb & GBF; ac proinde bB est ad reliquam radialis partem BF, ut h3, hoc est per conſt. ut directa ipsa bB, est ad distantiam Oculi FG. Ergo per 4. B est projectio puncti B. *Eadem erit* reliquorum demonſtratio.

Consectarium.

Hac methodo describes perspectivæ quamcumque figuram planam, ut iehnographiam, ſive plantam ædificii, templi, munimenti &c.

Scholium.

Si projectionem desideras data positioni tum Oculi tum objecti adstrictam, sic operare.

1. Mensurentur distantia à sectione tum Oculi, tum angulorum pentagoni (vh) hoc est perpendiculares quæ ab Oculo & singulis pentagoni punctis duci possunt ad sectionem. Item mensurentur harum perpend. intervalla in sectione.

2. Ducatur infinita qR pro sectione in quâ ponantur intervalla perpendicularium ex scalâ quâpiam desumpta, hi, IK, KN, NP, item intervallum hK quod inter perpend. ab Oculo ductam, & perpendicularem ductam ab angulorum aliquo, putâ B interjicitur.

3. Ex punctis, h, I, K, N, P ducantur perpendiculares ex scalâ desumpta veris proportionales, hB, Ic, Ka, ND, PE. Si harum extrema puncta B, c, d, e, a conjungantur, patet figuram constitui, data similem similiterq; positam.

4. Ex puncto K in quo perpendicularis ab Oculo ducta occurrit sectioni, erige normalem KF parem altitudini Oculi ex scalâ desumptam. Per F duc SG horizontalem in quâ præsidio item scala ponatur FG distantia Oculi.

Cætera fac ut in *prop.* Hoc Scholium ad sequentem *prop. 15.* extende.

PROPOSITIO XV.

Cujuscumque solidi Perspectivam delineare.

Sedis Perspectivam exhibere.

1. Describatur basis, ſive iehnographia ſedis, quæ Fig. 9. ſit ABCD. Scalæ præsidio hujus perspectiva iuxta methodum *prop.* 14. delineata, erit *abcd*.

2. Ex angulo aliquo b præsidio ſcalæ erige perpendicularem bq parem altitudini ſedis: ſumptoque in ſectione puncto aliquo, & in horizontali puncto quovis R, duc rectam ER & ex b duc bk parallelam ſectioni. Ex k erige kF parem bq; ducaturque RFX infinita.

3. Ex punctis c, d, a, duc parallelas ſectioni cl, dG, al. Ex punctis, l, G, I, erige normales lZ, GM, IX uſque ad rectam RX. Ex punctis X, M, Z, duc ſectioni parallelas infinitas, xo, Mp, Zu. Ex punctis a, d, c erige perpendiculares, ao, dp, cu quæ prioribus parallelis occurrant in o, p, u. Junge rectas qo, op, pu, uq.

4. In præsidio ſcalæ fac qS æqualem altitudini reclinatorii ſedis: ponaturque indirectum cum bq. Producaturque KF in h, ut Fh par ſit qS. Ex R per h duc infinitam Rhβ: & lZ produc in a. Ex a due aT parallelam ſectioni, cui cu protracta occurrat in T.

His peractis habetur proiectio ſedis quoad lineamenta primaria.

Aliter & Melius.

1. Ichnographia ſedis ſit ABCD, ſcalæ præsidio Fig. 9. delineata. Huius projectio per *præced.* delineetur & ſit *abcd*.

2. Sumpto in ſectione puncto E, & in horizontali puncto R, duc rectam ER. Ex E erige perpendicularem infinitam E D, in quam ſcalæ præsidio transfer omnes altitudines ſedis proiiciendæ E6: 6, 11: 11, N: N, 17: 17, 27: 20, D: & per ſingula puncta 6, 11, N, 17, 20, D, ex R rectæ emittantur.

3. Ex punctis a, b, c, d, ad rectam RE duc al, dG, bk, cl parallelas ſectioni. Ex punctis I, G, erige ipsi ED parallelas Ix, GM uſque ad rectam RN. Item ex k, l, erige ipſi ED parallelas kb, la uſque ad rectam RD, Rectæ ex punctis I, G, K, l iam erectæ ſecabuntur à lineis ex R emiſſis in punctis, quæ adſcripti numeri oſtendunt.

4. Rectam Ix cum punctis in ea notatis 7, 13, transfer in rectam ao ex a perpendiculariter erectam: GM cum ſuis punctis in dp: kb cum ſuis punctis in bS, la cum punctis ſuis cT.

5. Rectis lineis connecte puncta 9, 7, 8, 10, item puncta 13, 15, 16, 14: item puncta q, o, p, u: item puncta 18, 19, item puncta 21, 22.

His peractis, habetur adæquata ſedis datæ projectio.

Demonstr. Per centrum N, & a, duc rectam N44, quoniam per conſt. A proiicitur in a, & punctum 4 eſt commune, patet ex *defin.* 10, 4A perpendicularem projici in rectam 4a. Ergo per 4. 4A ad NA distantiam Oculi, ut 4a ad aN, hoc eſt ut E I ad IR. Ergo compon. 4A, cum distantiâ Oculi, eſt ad distantiam Oculi ut ER ad IR, hoc eſt ut E6 ad I, 7. Sed I7 per conſt. eſt par a7. Ergo E6 eſt ad a7 ut 4A perpend. directa cum distantia Oculi eſt ad ſolam

Oculi distantiam. Igitur Altitudo A6, sive E6, puncto A insistens, projicitur in a7. Pari modo ostendam altitudines D6, B6, C6, ipsi A6 æquales projici in d8, b9, c10. Eademque erit reliquorum omnium demonstratio.

Projectio suppedanei cum tribus gradibus.

Fig. 10. 1. Sectio sit φω, & huic parallela δλ horizontalis. Ichnographia suppedanei cum gradibus scalæ præsidio describatur, & sint parallelogramma Ass, oTT, PVV, qDD. Ichnographiæ projectio per 13, delineetur, & sint parallelogramma co, SP, Tq, VB.

2. Sumptis in sectione & horizontali punctis E, R, due ER. Ex E erige infinitam perpend. Eδ. In hanc scalæ præsidio transfer singulorum graduum altitudines E2, E3, E4, & EF, ipsius suppedanei. Per singula puncta 2, 3, 4, F ex R rectæ emittantur. Tc, quæ est ad sectionem parallela, protracta occurrat RE in G. Ex G erige normalem occurrentem rectis ex R emissis in 5, 6, 7, h.

3. EF perpendiculariter transferatur in Aλ, & oi, & junge λi: E4 in O4, P4, & junge, 1, 4; 4, 4: E3 in P3, q3, & junge 4, 3; 3, 3: E2 in q2, b2, & junge 2, 3: 2, 2: 2B, Bd: gh in cZ sa. & junge λz, za: g7 in s7, T7 & junge a7, 7. 4; 7, 7: g6 in T6, V6 & junge 76, 63, 66: g5 in V5, d5 & junge 65, 52, 55, 5d.

His peractis, habetur projectio suppedanei dati cum gradibus tribus.

Projectio Octaëdri.

Fig. 11. 1. Sit φω sectio & horizontalis δλ, sectioni parallela. Quoniam ichnographia octaëdri quadrata est; describatur quadratum AA, BB, CC, DD, EE cujus centrum sit EE. Pro Ichnographiâ dati octaëdri Y. Et per *prop.* 14 reperiatur Ichnographiæ Perspectiva, quæ sit AbcdE.

2. Sumptis in sectione puncto F quovis, & in horizontali puncto R, junge FR. Ex F erige perpendicularem infinitam Fδ, in quam scalæ præsidio transfer omnium octaëdri dati punctorum altitudines. Et quidem altitudines NT, MV, PZ, IS, quoniam inter se æquales sunt, transferantur in F2: hq verò in F4. Deinde ex R per puncta 2, 4, emittantur rectæ R2, R4.

3. Ex punctis bdE, D, due sectioni parallelas bG, dG, EG quæ per accidens hic coincidunt, item ex puncto c parallelam ck. Ex G erige perpendicularem secantem rectas ex R emissas in 5 & 3. Item ex k perpendicularem erige occurrentem R2 in 6.

4. Rectam F2 perpendiculariter transfer in punctum AA, & sit AA2: G5 in d5, & b5. G3 in E3. k6 in c6. Connectantur puncta 5, 6, 5, 2. & à punctis 3, e, ad eadem quatuor puncta 5, 6, 5, 2 ducantur rectæ.

Vel utere primâ methodo propositionis 14 ducendo 3, 3; 6, 6; 5, 5; &c. parallelas sectioni, concurrentes cum perpendicularibus b5, C6, E3 &c.

His peractis, habetur projectio octaëdri dati.

Scholion.

Ex his tribus projectionibus facilè intelligetur quomodo sit in reliqua solida procedendum. Res enim tota ad hujusmodi Problema revocatur; Dati puncti existentis in sublimi projectionem invenire. Hoc autem quemodo præstari debeat, satis ex propositione intelligetur.

PROPOSITIO XVI.

Datæ projectionis centrum invenire.

Duos quoslibet in Perspectivâ datâ directos ductus ut DE, KC, vel DE, RN regulæ beneficio protrahe, & nota punctum in quo concurrent. Ipsum erit centrum perspectivæ datæ. Fig. 4.

Cùm enim omnes directi ductus in uno puncto concurrant, si producatur per *prop.* 2 necessariò concurrent in eo puncto in quo duo ex ipsis concurrunt, ac proinde punctum illud erit centrum.

PROPOSITIO XVII.

Ex datâ oculi distantiâ à sectione rei projectæ longitudinem invenire.

Per præced. inveni A centrum projectionis & præsidio scalæ sive pantometri inquire proportionem directi in perspectivâ ductus DE. Ad ejus à centro distantiam AE. Deinde fiat ut AE ad ED, sic distantia Oculi à sectione quæ per hyp. datur, ad aliud. Dabit hoc longitudinem rei projectæ, in partibus distantiæ Oculi. Fig. 6.

Est enim per *theor.* 4 & 5 ut AE ad ED, sic distantia Oculi ad longitudinem lineæ cuiusvis directæ, hoc autem est ipsa proiectionis longitudo.

PROPOSITIO XVIII.

Ex datâ longitudine rei projectæ distantiam Oculi à sectione invenire.

Reperto projectionis centro per 16, notifica proportionem DE, ad EA: & fiat ut DE ad EA, sic longitudo rei projectæ ad quartum. Dabit hoc distantiam Oculi in partibus rei projectæ. Patet ex 4 & 5 *hujus*. Fig. 6.

Consectarium.

Ex datâ rei proiectæ longitudine & distantiâ Oculi, eiusdem altitudinem invenies; si fiat ut distantia Oculi cum longitudine rei proiectæ ad longitudinem rei projectæ, ita altitudo apparens ad aliud. Patet ex *corol.* 7. *prop.* 5.

Scholium.

In multorum objectorum projectionibus situs Oculi aut objecti nequit reperiri, quacumque deutur. In Scholio enim prop. 13. *ostensum est infinitas porticus quarum singula & figurâ ac situ differant, & ab Oculo diversimode posito spectentur, eamdem sortiri posse projectionem.*

PROPOSITIO XIX.

Efficere ut data porticus duplo, imò decuplo appareat longior quàm sit.

Constr. In muro porticum datam terminante, delinea perspectivam porticus duplo, aut quantum placuerit datâ longioris ad distantiam Oculi, parem longitudini porticus datæ. Sint autem latitudo

&c

& altitudo perſpectivæ eadem quæ porticus datæ. Stanti in altero porticus extremo apparebit porticus duplo aut decuplo (ſi ita placuerit delineare) longior quàm ſit.

Demonſtr. Projectio enim quæ in muro oppoſito eſt delineata, eodem modo apparebit ac ſi porticus data reverà fuiſſet continua poſt murum.

Quod ſi perſpectiva in muro facta, ſit ad diſtantiam Oculi minorem longitudine porticus datæ, v.g. parem longitudini ejus dimidiæ, ut debitus apparentiæ effectus conſequatur, ſtandum erit in medio datæ porticus &c.

PROPOSITIO XX.

Projectio ſcenographica in planum ſuprà Oculum Horizonti parallelum.

HOc projectionum genus inter ſcenographicas difficillimum cenſeri ſolet. Aliter ſe rem habere ex paucis illis quæ ſubiicio apparebit.

Objectum horizontali plano ſupra Oculum perpendiculariter inſiſtens, concipiatur eàdem ſervatâ Oculi diſtantiâ ita cum plano ſuo horizontali circumagi, ut planum fiat horizonti rectum, objectum verò horizonti parallelum & quaſi jacens. Manifeſtum eſt eamdem in plano optico projecturam fore objecti in hoc ſitu quæ in priori. Quare ut res inſiſtens plano parallelo ſuprà Oculum poſita v.g. à tabulato in tabulatum proiiciatur, rem illam ut inclinatam ſive jacentem per *prop.* 7. aut ſequ. projice in planum opticum ad horizontem rectum ad diſtantiam Oculi parem ei quæ eſt Oculi à tabulato. Hæc projectura tabulato applicata dabit propoſitum.

Corollarium.

Hoc genere projectionis fieri poteſt ut ſtructura appareat altior quàm ſit, ſi nimirùm ea ſtructuræ pars quæ ultra tabulatum promineret, in tabulatum proiiciatur. Hic obſerva ut obiecta non valde alta, cuiuſmodi eſſent ſublimes columnarum ordines, ſed humilia potiùs ac ſubmiſſa in tabulato depingas, ut podia, pilas breviores, pergulas aliaque ſimilia. Cùm enim rerum ad horizontem rectarum proiecturæ hic coëant in centro proiectionis, ſi eæ forent longæ, non apparerent extra viſus punctum conſtitutis rectæ ut debent, ſed inflexæ ac ſinuoſæ, quo fieret ut tota ſtructura, inſuavis Oculo, & ingrata redderetur.

CAPUT IV.

De projectionibus monſtroſis.

TEmpus eſt ut planum proiectionis cui hactenùs medium rem inter ac Oculum dedimus locum, extremo iam collocemus, quod ad exhibendas proiectiones ſcenographicas monſtroſas, ſeu deformatarias quas deinceps brevibus tractaturi ſumus, fieri ſolet.

PROPOSITIO XXI.

Data ſi recta CD in partes quotcumque & qualeſcumque ſecta, & ad planum ſubjectum projectionis recta. Punctum diſtantiæ ſit B, altitudo Oculi BA. Ex B per C duc infinitum BH. Quoniam autem CD, BA æquidiſtant, utpote eidem plano rectæ, erunt AB, BCH, CD in eodem plano 7. 11. Ergo radij qui ab Oculo A per D, E, F, G ducentur, occurrent ipſi BH in punctis aliquibus H, I, K, N. *Fig.* 12.

Dico DC cum ſuis partibus projici in H, I, K, N, C.

DEmonſtratio patet ex *defin.* Cùm enim HC, ſit communis ſectio plani AHC per Oculum & lineam proiiciendam DC ducti cum plano dato projectionis; liquet ex *def.* DC projici in CH. Eodem modo oſtendam DE projici in HI, & EF in IK &c.

Vel ſic: Puncta D, E, F, G projiciuntur per *def.* in puncta H, I, K, N. Projicitur ergo DE in HI; EF in IK; FG in KN; GC in NC; & tota DC in totam HC.

PROPOSITIO XXII.

Datum ſit parallelogrammum rectangulum CF, FC dato plano DCCD rectum, in minora ſectum parallelogramma ſive cancellatum. Altitudo Oculi ſit BA. Per omnia puncta C, C, S, C, ex B ducantur infinitæ BCD, BCD, BSD. Ab Oculo deinde A per lateris erecti unius puncta F, I, K, C, ducantur rectæ, quæ, ut mox oſtendam, occurrent BND, in punctis aliquibus D, G, E. Demùm ex punctis D, G, E duc rectas DDDD, GGGG, EEEE parallelas ad CC.

Fig. 13. *Figuram dum inſpicis, ita teneto ut recta DB ſit parallela horizonti, & aB ad horizontem perpendicularis; litteræ aliter quam debent, ſunt inclinatæ.*

Dico parallelogrammum CFFC cum parallelogrammis minoribus projectum eſſe in planum datum.

DEmonſtr. Quoniam parallelogrammum datur rectangulum, recta FQC normalis eſt ad CC. Quare cum parallelogrammum ſubjecto plano ſit rectum, per *def.* 4. 11 FQC ſubjecto plano recta eſt. Ergo, ut oſtenſum in *præced.* AF, AI, AK occurrent ipſi BND in punctis ex. gr. E, G, D, & latus FQC cum partibus ſuis projicietur in DGEC. Ducatur iam altera AF occurrens BCM in X (occurret autem cùm FOC recta ſit plano ſubiecto eodem diſcurſu quo FQC) per *præc.* FOC projicietur in CX. Sed BX eſt ad CX ut AB ad FOC, hoc eſt ut AB ad FQC, hoc eſt ut BND ad CND, hoc eſt quoniam CC, DD ex datis æquidiſtant, ut BMD ad CMD. Dividendo igitur BC eſt ad CX ut BC ad CMD. Quare X & D unum eſt idemque punctum. Igitur FOC projicitur in CMD. Eodem modo probabitur IOC projici in CG: & KOC, in CE, neceſſe eſt igitur

igitur FF projici in DD, & II in GG, & KK in EE. Ulteriùs ab A ducatur recta per punctum R occurrens DD in Z. Cùm igitur punctum R projiciatur in Z patet RS projici in SZ. Quoniam verò DD, FRF, ambæ sunt parallelæ ad CC, erunt & inter se. Ergo DD in Z secta est à radio AZ, ut ab eodem FF in R, hoc est ut CC dividitur in S per rectam RS. At quia DD, CC æquidistant, etiam DZD divisa est in D per rectam BSD ut CC in S. Ergo DZD in D & Z punctis est similiter secta. Unum igitur idemque punctum est Z & D. Ergo RS projicitur in SD. Similiter ostendam rectam F β C projici in rectam CϽD. Cùm igitur omnes FOC, FβC, RS, FQC projiciantur in rectas CMD, CϽD, SD, CND, & FF, II, KK, in DD, OG, EE, necesse est intersectionum puncta media II, KK projici etiam in puncta intersectionum media EE, GG. Totum igitur parallelogrammum datum cum suis partibus in planum datum projicitur. Quod erat demonstr.

Corollarium I.

Quo altitudo Oculi BA fuerit minor, eò latior erit longiorque projectio. Item servatâ Oculi eâdem altitudine quantò longiùs ab objecto abest Oculus, tantò projectio longior erit.

Corollarium II.

Quantò Oculus longiùs à re proiicienda absuerit, tantò projecturæ latera CMD, CND minus divaricabuntur, poteritque nihilominus longitudo projecturæ haberi quantam volueris, si altitudinem Oculi imminuas.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 14. **Datam lineam CD utcumque sectam, ex datâ distantiâ BC in datam longitudinem CP cum suis partibus projicere.**

Constr. Ex puncto C normaliter erige datam rectam CD. Tum ex P per D ducatur infinita PD cui occurrat BA normalis ad BCP. Demùm ex A per O & N ducantur AO, AN secantes CP in I, L.

Dico Datam DC projectam esse cum suis partibus in datam lineam CILP.

Demonstr. Patet ex 21 hujus, si manente lineâ BP, triangulum BAP cum omnibus lineis in ipso ductis statuatur rectum plano subjecto.

Quomodo operandum sit si loco distantiæ, detur Oculi altitudo, ex constructione jam positâ facilè colligetur.

PROPOSITIO XXIV.

Datum parallelogrammum rectangulum DCK in quovis rectangula, sive quadrata sectum, ex datâ distantiâ & situ in figuram datæ longitudinis projicere.

Fig. 14. *Constr.* Designa punctum B dato situ & distantiâ remotum à latere CK parallelogrammi dati. Ex B per C ducatur infinita linea BP & abscinde CP æqualem longitudini datæ. Tum ex B per puncta E, F, G, H, K, duc itidem infinitas. Deinde latus CD constitue normaliter ad BP, ducaturque PD, cui in A occurrat BA normalis ad BP. Tum ex A per N, O rectas ducito AN, AO, secantes CP in L, I. Erit ergo per *praced.* DC cum suis partibus projecta in CILP. Ducantur demùm PRR, LQQ, IMM parallelæ ad CK.

Dico parallelogrammum datum cum suis partibus in figuram CPRK datæ longitudinis CP esse projectum.

Demonstr. Patet ex 22 si manente BP, triangulum BAP cum omnibus lineis in eo ductis statuatur subjecto plano rectum.

Quod si loco distantiæ, data fuerit Oculi altitudo, qui sit instituenda constructio, ex his facilè colliges.

PROPOSITIO XXV.

Monstrosam in dato plano figuram delineare quæ certo spectata loco, formosæ instar imaginis appareat.

Constr. Sume quadrilaterum aliquod rectangulum KCD, in quo depicta sit imago quæpiam v. g. vultus hominis, & distingue in quadrata minora quæ quò plura fuerint, eò res erit accuratior. Tabulam ita cancellatam proiice per 24 in figuram quam volueris longam CPRK, & nota distantiam BG Oculique altitudinem BA. Deinde quæ in cancellis singulis imaginis KCD sunt depicta, depinge in iis cancellis figuræ in quos projecti sunt cancelli tabulæ, efformabitur imago in figurâ CPRK informis & monstrosa. Fig. 14.

Dico tamen si spectetur ex puncto A apparere similem imagini in tabulâ KCD depictæ.

Demonstr. Imago figuræ CPRK est projectura imaginis in tabulâ KCD pictæ. Ergo in A projectionis principio & tota & partes eius singulæ sub iisdem spectantur angulis, sub quibus imago tabulæ ejusque partes videntur. Eidem ergo similis apparet. Factum igitur quod petebatur.

Distantia & altitudo Oculi in promptu ut sint, alliga projecturæ bacillum æqualem altitudini Oculi, filo quod distantiæ vicissim est æquale.

Scholium.

Satis est si habeatur unius parallelogrammi cujuscumque projectio ut in eo imagines quacumque deformentur, modo sint parallelogrammo projecto similes; quod ipsum in reliquis propositionibus observa.

PROPOSITIO XXVI.

Datam imaginem in dati coni convexâ superficie deformare & reformare.

Datus sit conus ARC, & imago ADCB quæ per radios circulosque concentricos, prout præscribetur propositione sequenti, cancelletur. Fig. 15. & 16.

1. Describatur triangulum rectangulum $\alpha\delta\pi$, sitque $\alpha\delta$ par AO semidiametro basis coni, & $\delta\pi$ par axi OR. Erit quoque $\alpha\pi$ par lateri AR. Et in quot æquas partes sectus est radius imaginis OA, in tot secetur $\alpha\delta$ in punctis β, γ. Fig. 17.

2. In $\delta\pi$ producta sume punctum quodvis ϕ pro Oculi distantiâ, iunganturque $\beta\phi$, $\gamma\phi$ secantes $\alpha\pi$ in ζ, θ.

3. Trans-

3. Transfer sectiones $\pi\vartheta$, $\pi\zeta$ in latus coni, sintque RX, RT, & per X & T describe circulos basi parallelos XY, TV.

4. Basim coni in tot seca æquales arcus AE, EF, FB &c. in quot sectus est circulus ADCB. Ducanturque in coni superficie rectæ ER, FR &c. His peractis tota coni superficies in tot erit secta cancellos, in quot imago.

Quare si cancelli imaginis transferantur in cancellos coni, habebitur imaginis deformatio: reformatur autem si ex producto axe abscindas RS parem $\pi\varphi$ Oculusque in S collocetur.

Demonstratio. Ducantur SX, ST, SY, SV occurrentes AC in M, N, P, Q. Patet AO similiter esse sectam ac $a\delta$. Sed hæc secta est in æquales, ergo & AO, ac proinde & CO. Per puncta ergo M, N, P, Q ducantur concentrici & ex O centro, radij OA, OE, OF &c. Erit basis coni in tot cancellos divisa, in quot coni superficies. Et in quot imago OADCB: singulique cancelli basis Oculo posito in S projecti sunt in singulos cancellos superficiei conicæ. Ac proinde si in basi coni depicta esset imago similis datæ, esset hæc in coni superficiem projecta, ac proinde Oculus in S informem in superficie coni depictam figuram videbit similem imagini quæ est in basi, hoc est similem imagini datæ.

Corollarium.

Cùm tota coni superficies cerni possit ab Oculo ubicumque intra coni oppositi superficiem constituto, licebit Oculum etiam extra axem collocare in quovis latere coni producto. Sed tum circuli circa imaginem descripti, se mutuo omnes in eodem puncto tangunt.

PROPOSITIO XXVII.

Imaginem datam in convexa superficie conica aliter ita deformare, ut ex certo puncto reformata appareat.

Fig. 17. 1. CIrca datam imaginem circulum describe, quem seca in arcus æquales v. g. octo per radios *abc*, *ad* &c. Atque unum ex radiis seca in partes æquales v. g. etiam octo, perque divisionum puncta totidem describe concentricos circulos.

Fig. 18. & 17. 2. Si vis deformatam in cono figuram datæ imagini non solùm similem, sed etiam æqualem apparere, sume rectam *Aq* duplam *kF* diametri circuli, eâque ut radio describe *q*SX quadrantem, cujus peripheriam in totidem æquales arcus seca radiis *Aq*, AR &c. in quot secta fuit peripheria circuli.

3. *Aq* ponatur ipsi AX indirectum & æqualis, eâque ut radio describe quadrantem LAM. Ducaturque L*q*: secabit hæc arcum AM bifariam in N. Arcum AN in tot seca arcus pares, in quot secuisti *q*X, perque sectionum puncta ex L duc radios occurrentes *Aq* in O, P, Z &c. per quæ demùm centro A duc arcus OT, PV &c. Possunt quoque sectiones lateris *Aq* inveniri ex tabulâ tangentium, cùm *Aq*, AO, AP sint tangentes arcuum notorum AN, AG, A*b*.

4. In hoc cancellato quadrante depingatur imago sic ut cancelli cancellis respondeant juxta numeros singulis inscriptos.

Quibus peractis, si quadrans *Aq*X conicæ superficiei applicetur, Oculusque statuatur in eo axis puncto quod tantùm distat a coni vertice, quantùm hic à basi, informis species in coni superficiem projecta, apparebit datæ imagini æqualis & similis.

Scholium.

Cancellatus quadrans hunc in modum semel descriptus inserviet cuivis imagini deformandæ, si tot concentricis conscribatur imago, quot arcus ducti sunt in quadrante.

PROPOSITIO XXVIII.

Datam imaginem in concava coni superficie deformare & reformare.

Fig. 19. OPerare ut in præcedenti, tantùm in numero 3 & 4 hæc immuta. In numero quidem 3 inverte LAM quadrantem ut monstrat 19 figura: In *num.* 4. Ut reformes, imaginem constitue in eo axis ultra basim prolongati puncto, quod tantùm distet à basi, quantùm hæc à vertice.

Corollarium.

Fig. 20. Quomodo imago data in pyramidis convexa & cavâ superficie deformetur ac reformetur, intellectis duabus præcedentibus, satis colligitur ex figurâ oppositâ.

Scholium.

Circa projectiones hæc observa.

Fig. 14. *1. Projectio valde longa parallelogrammi cancellati, indeque & imaginis in eo picta in planum quodvis v.g. murum facillimè peragetur hoc modo. In pariete qui enim, in quo fit projectio, ad rectos contingit angulos, duc rectam BA, quæ terminetur in januâ & distet ab horizonte ad staturam hominis. In ejus extremo A quod in ipsâ debet esse januâ, ut statui in eo possit oculus, filum affige. Tum in fine muri designentur puncta P, R pro latitudine projectionis ad quæ ex B funium adminiculo ducantur rectæ BP, BR. Deinde sumptâ ad libitum rectâ PC pro longitudine projectionis duc CK horizonti rectam, quam seca in tot partes æquales in quot secta est altitudo imaginis projicienda. Eligatur autem pertica quæpiam in quâ designentur tot partes CD, ON, ND ipsis CE, EF, FG &c. æquales, in quot secta est imaginis latitudo CD, & ex uno punctorum C, E, F &c. in pariete erigatur & firmetur perpendiculariter. Filo denique quod in A alligatum fuit ad sectiones D, N, D applicato & extenso, figuentur in muro puncta I, L, P quæ erunt ad unam rectarum ex B per C, E &c. ductarum. Si jam ex P, L, I ducantur rectæ horizonti perpendiculares PR, LQ, IM, peracta erit parallelogrammi cancellati projectio & deformatio, quæ tantò longior erit, quantò BA Oculi distantia à muro fuerit minor. Reformata apparebit oculo in januâ ingressu in A constituto.*

Aliquantò operosiùs, at longè exactiùs fit deformatio absque reticulato parallelogrammo si iconis punctis singulis quæ præcipua lineamenta determinant, applicetur gemmula circa filum sursum deorsumque mobilis (quod ipsum filum etiam mobile per perticam, seu regulam terræ parallelam ex quâ pendet) ac deinde amotâ icone, ex

Oculo per gemmulam eductum filum parieti occurrens designabit in eo projectionem puncti dati cujuscumque: porrò icon ad parietem circa cardines volvi debet, ut projectionis longitudinem liceat pro libitu determinare.

2. *Cujusvis rei projectio & deformatio in dato plano imò in datâ superficie facillimè sic peragetur. Objectum supra planum normaliter statue, & retrò candelam accensam statue, ut objecti umbra in planum datum cadat, quæ tantò erit major & deformior quantò candela fuerit propinquior & minùs elevata suprà planum projectionis. Si umbræ lineamenta notes & coloribus inducas, habebitur objecti deformatio, quod reformatum apparebit Oculo in loco faculæ posito.*

3. *Perficietne quoque projectio imaginis data non solùm in plano dato, sed quacumque etiam superficie ut cylindricâ, conicâ &c. hunc in modum. Lineamenta præcipua acu pertunde: Si lumen retrò apponas, projicientur in datam superficiem per radios luminosos lineamenta illa pertusa: quæ si notentur ac deinde coloribus inducantur, Oculo in loco luminis posito, reformatam exhibebunt imaginem. Posset etiam luce Solari peragi projectio imaginis, sed reformari non posset, cùm radij Solares non coeant in punctum in quo statuendus Oculus esset.*

4. *In loco patenti existat Oculus reformatam cernens imaginem, projectionis longitudo ea assumi debet, ut ejus pars citima & remotissima non appareant sensibiliter habere differentiam distantiæ. Ad quod etiam conducet si viciniora tenuiùs, remotiora intensiùs ac vivaciùs pingantur. Item si parti citimæ aliud quidpiam intenso colore appingatur, remotissimæ verò campi aperti &c. colore diluto. His enim omnibus tolletur obliquitas projectionis.*

5. *Distinctiùs apparet imago reformata si per foramen aut tubulum conspiciatur. Quod si tubum Opticum adhibeas, adhuc longè distinctior evadet reformatio.*

6. *Longè admirabilior erit projectio, magisq; latebit artificium, si inversa sit, ac deinde ex loco debito eam conspicias tubo duobus vitris convexis instructo: reformata enim & erecta apparebit.*

7. *Plus admirationis habent projectiones illæ quæ non tantùm ex certo puncto obliquè spectata distinctam imaginem exhibent, sed etiam directo visæ intuitu res planè diversas repræsentant. Modum artificij ostendo in exemplo.*

Projectus sit in murum aliquem S. Ioannes Evang. veste indutus viridi, chlamide purpureâ &c. In projecturâ vestis pinge campos, sylvas, nemora, hortos, bestiolas, aves, sinuosos marium anfractus, ripas, naves &c. In zona candida projecturâ labentes fluminis aut fontis aquas, in candidis libri aperti folijs ingentem lacum in eoq; portus, littora, piscatores &c. Sed in his omnibus hæc potissimùm observa.

Primò ut ea pingantur quorum colores cum projecturæ coloribus maximè conveniant.

Secundò ut sint modicæ quantitatis, quæ nimirùm in puncto reformationis non appareant.

8. *Tandem imago quævis in quamcumque superficiem, duorum stylorum adminiculo alicui tabulæ perpendiculariter affixorum facillimè projicitur, si nimirùm tabulam ita vertas & moveas, ut umbra unius styli per præcipua imaginis lineamenta feratur: eodem enim tempore umbra styli alterius describet in eodem quidem plano, in quo imago est, figuram omninò similem imagini prototypæ; in plano verò diverso aut superficie quâvis aliâ dissimilem, quæ tamen ex styli vertice spectata similis appareat.*

Demonstratio ex elementis facilè colligitur.

FINIS LIBRI SECUNDI.

OPTICÆ
LIBER TERTIUS
DE
PROJECTIONE
ASTRONOMICA.

PRojectionem Astronomicam voco, quâ sphæra cum suis punctis ac circulis in planum transcribitur, organumque conficitur cætera omnia longissimè antecellens, quod Planisphærium, sive Astrolabium appellamus. Duas illa species complectitur. Prima est quæ in superficie ipsâ sphæræ constituit Oculum, à quo radij per singula sphæræ puncta emissi, & plano ad Oculum perpendiculariter opposito excepti, projecturam sphæræ designant. Ex hac duplex Astrolabium enascitur, Polare & Æquinoctiale, hoc quidem Oculo in principio ♈ vel ♎ posito; illud verò Oculo ad polum alterutrum translato. Altera, quam Orthographicam dicimus, Oculum requirit à sphærâ infinitè distantem, ac proinde radijs parallelis sphæram in planum oppositum transcribit. Atque ex illâ tertium Astrolabij genus promanat, quod Orthographicum appellabimus. Quamvis porrò projectionis hujusce usus ad Astronomiam pertineat, ipsa tamen æquè ac scenographica, ad Opticam tota spectat. Quare illius artificium omne atque unà triplicis Astrolabij structuram adjunctis ubique demonstrationibus, hoc libro accuratè & breviter à fundamentis exponam. Quâ in re aliquod fortasse pretium operæ tulisse illis videbimur, qui ingens Christophori Clavij de solo polari Astrolabio conscriptum volumen aliquando viderint, cujus ea est prolixitas, schemata verò tam implexa ac intricata, ut à nullo mortalium hactenus perlectum fuisse totum existimem.

CAPUT PRIMUM.

Exponitur ac demonstratur artificium generale projectionis Astronomicæ, Oculo in sphæræ superficie constituto.

Definitiones.

1. PLanum projectionis voco, quod per sphæræ centrum transiens Oculo in superficie sphæræ constituto perpendiculariter opponitur.

Statuatur Oculus in superficiei sphæræ puncto quovis A, quo per sphæræ centrum B ducatur diameter ABS: ad hanc perpendiculare ducatur planum infinitum per centrum B sphæram secans maximo circulo BCLEω. Hoc planum vocabimus planum projectionis. (*Fig. 1.*)

Hinc patet *primò* punctum A, ubi Oculus est, esse polum a circuli maximi BCLEω in projectionis plano constituti.

a *Per 8. 1. sph. Theod.*

Patet *secundò* circulos maximos per Oculum A transeuntes, cujusmodi sunt ACSE, ALSω, ad planum projectionis rectos b existere; omnes siquidem transeunt per diametrum A B S, quæ dicto plano est recta.

b *per 10.11.*

2. Punctum projicitur in punctum, quo radius ab Oculo per punctum projiciendum emissus, plano projectionis occurrit.

Esto in sphærâ punctum V, per quod ab Oculo A radius evibretur projectionis plano occurrens in X, puncti V projectura est punctum X.

3. Linea recta per Oculum non transiens projicitur in rectam lineam quâ planum per Oculum & lineam projiciendam transiens, intersecat planum projectionis.

Detur in sphærâ recta NP, per quam & oculum A ducatur planum NAP secans projectionis planum rectâ GK. Hæc est projectura rectæ NP.

4. Quivis sphæræ circulus projicitur in eam portionem plani projectionis, quâ illud intersecat conum, cujus vertex est Oculus, basis verò circulus proiiciendus.

Detur in sphærâ circulus NSP: conus sub quo is spectatur ab Oculo A, est NAPZ: illius sectio communis cum plano projectionis esto GφKϑ. Projectura circuli NZP est superficies GφKϑ. Pari modo PXTβ est projectura circuli DVF. Porrò circulos sphæræ quoslibet, sive plano projectionis æquidistent, sive non, ab Oculo in superficie sphæræ constituto proiici in circulos, demonstrabitur *prop.* 5. & 7.

5. Circulum primitivum voco eum ipsum, qui proiiciendus proponitur. Idem de lineis intellige.

Definitiones circulorum sphæræ & si quæ occurrent aliæ, petantur ex lib. 1. num. 1. Astronomiæ.

PROPOSITIO I.

Hemisphærij Oculo oppositi CLSEω projectura, est maximus sphæræ circulus BCZEω, in projectionis plano existens; circa hunc verò undequaque in infinitum extenditur projectura hemisphærij ACLEω Oculum continentis.

Fig. 1.

DEmonst. 1. *Pars.* Si ab Oculo A ad puncta quælibet hemispherii CLSEω radii emittantur, manifestum est omnes secare maximum circulum BCLEω. Ergo per *defin.* 2 puncta quælibet hemispherii dicti proiiciuntur in totidem puncta maximi circuli CLSEω. Et quoniam hemisphærium & maximus circulus ab Oculo A spectantur sub eodem cono, cujus basis sit ipse maximus circulus, vertex autem in Oculo A, liquet hemisphærii projecturam circulo maximo adæquari præcisè.

Demonst. 2. *Pars.* Per quodvis hemisphærii ACLEω punctum D emittatur radius ab Oculo A: is plano projectionis occurret extra maximum circulum, putà in R. Ex quo patet projecturam huius hemisphærii totam extra maximum circulum existere, eumque ambire, sic ut incipiat à peripheriâ CLEω, cum hæc hemisphærio ac projectionis plano sit communis. Sumatur deinde in plano projectionis punctum quantumvis remotum Q, ad quod ab Oculo A radius ducatur AQ, & in plano AQB sphæram tangat recta AY: quæ erit parallela ad planum projectionis, cùm tam ipsa per 16. 3, quàm planum projectionis per *def.* 1. ad lineam AB sint recta. Manifestum est igitur ex 16. 3. radium QA, occurrere superficiei sphæræ infrà contactum A, putà in M. Liquet igitur ex *defin.* 2. punctum M projici in Q, ac proinde hemisphærii ACLEω projecturam protendi in infinitum.

PROPOSITIO II.

Fig. 1.

Linea recta per Oculum transiens, projicitur in punctum, in quo occurrit plano projectionis.

PAtet ex hypothesi ipsâ & definitione secundâ. Sic recta ADR proiicitur in punctum R, & recta AS in punctum B.

PROPOSITIO III.

Circuli maximi per Oculum (A) transeuntis (BACSE) medietas Oculo opposita (CSE) projicitur in suam & sphæræ diametrum (CE), medietas verò altera CAE, in rectas ad utramque diametri partem infinitè extensas.

Fig. 1.

SIgnentur in semicirculo CSE quævis & quotvis puncta O. Quoniam diameter CE est communis sectio circuli BACSE cum plano projectionis, liquet radios ab Oculo A ad puncta O emissos, secare diametrum CE in totidem punctis I, ac proinde puncta O *a* proiici in puncta I. Ex quo patet totum semicirculum proiici in totam diametrum CE: quod erat primum. Eodem modo ostendes semicirculum CAE proiici in diametrum CE utrinque protractam. Quod autem huius projecturæ non sit terminus, sic probatur. Sumatur in diametro CE producta, punctum quantumvis remotum Q, à quo ad Oculum A radius ducatur QA; tangat autem circulum recta YA in A, quæ erit parallela ad BEQ parallela, cùm ambæ YA, BEQ sint ad AB perpendiculares, YA quidem per 16. 3; BEQ verò per *defin.* 1. Patet igitur ex 16. 3. radium QA secare peripheriam infrà contactum A, in M. Ergo punctum M projicitur ab Oculo A in Q. Ex quo liquet semicirculi EAC projecturam protendi in infinitum.

a per def. 2.

Corollarium.

Ex his patet 1. Si Oculus sit in A polo mundi, omnes meridianos ACSE, ALSω &c. projiei in diametros Æquatoris CBE, LBω, quibus ipsi Æquatorem intersecant; polum verò A projici in Æquatoris centrum B.

Patet 2. Diametros Æquatoris per singulos eius gradus ductas, esse projecturas Meridianorum per singulos Æquatoris gradus transeuntium.

PROPOSITIO IV.

Circuli maximi per Oculum transeuntis & graduum ejus projecturas describere.

Fig. 1.

TRanseat per Oculum A maximus circulus BACSE sectus in quotvis æquales arcus CO, OO, OO: huius projectura *b* est diameter CBE. Oporteat in hanc transcribere projecturas arcuum CO, OO.

b per prop. 3.

Circa CBE diametrum in plano projectionis dato describe CLEω circulum dato ACSE æqualem, quem partire in arcus Cπ, ππ æquales arcubus CO, OO. Ductâ deinde ad diametrum CBE, perpendiculari diametri LBω, ex puncto ω, per divisiones π, π radii emittantur ωπ, ωπ, occurrentes ipsi CBE in I, I. Erunt CI, II, projecturæ arcuum CO, OO.

Demonst. Quoniam circuli CLEω, ACSE æquales sunt, similiterque divisi in O, O; π, π, & anguli CBA, CBω recti, si circa immotam diametrum CBE planum circuli CLEω unà cum inscriptis sibi lineis ωIπ, ωIπ convertatur donec rectum insistat plano projectionis, manifestum est circulum CLEω, tunc congruere

congruere circulo ACSE; & puncta *a*, L punctis A, S; & arcus E*a*, *aa* arcubus CO, OO, & radios *ala*, *ala*, radiis AO, AO, sic ut radii *ala* toto tempore conversionis dictæ secare pergant ipsam C E in punctis semper iisdem I. Ex quo patet puncto O,O, proijci in puncta I,I, ac proinde rectas CI, II, esse projecturas arcuum CO, OO.

PROPOSITIO V.

Fig. 2. 3. Circuli (DMGQ) projectionis plano paralleli projectura circulus est, cujus centrum idem est cum centro sphæræ, in quod primitivi circuli centrum proijcitur, & partes projecturæ sunt primitivi circuli partibus proportionales.

Coni DMGQA sub quo spectatur ab Oculo A circulus DMGQ, cum plano projectionis sectio communis esto BKNL. Hæc per *defin.* 4. est projectura circuli DMGQ; quæ cùm ex hyp. circulo DMGQ æquidistet, per 4.1. *Conic.* circulus erit: quod erat primum.

Ducatur deinde ab Oculo A ad centrum sphæræ B radius A B, occurrens plano circuli MGQ in D. Per *defin.* 1. erit A B perpendicularis plano projectionis. Quare cùm huic æquidistet *b* circulus DMGQ, erit quoque AB perpendicularis ad circulum DMGQ. Quare A D axis est coni DMGQA. Cùm ergo B sit centrum circuli KNL, etiam D erit centrum circuli MGQ. Quare cùm D, B centra circuli & projecturæ eius existant utraque in radio ADB, liquet D centrum circuli proiici *d* in B centrum projecturæ ejus: quod erat alterum.

b *Per hyp.*
c *Patet ex* 14.11.
d *per def.* 2.

Postremò circulus primitivus utcumque sectus sit in M, F, G, & ab Oculo emittantur radii A M K, AFO, AGN, ducanturque ad centra D, B, radii MD, FD, GD, & KB, OB, NB. Quoniam plana per hyp. parallela DMGQ, BKNL secantur plano OAB, erunt sectiones *l* FD, OB parallelæ. Ob eandem causam parallelæ erunt GD, NB, item MD, KB. Igitur anguli ad centra MDF, KBO, item FDG, OBN æquales *m* sunt. Arcus *n* ergo MF, KO, itemque FG, OV similes sunt. Atqui arcus MF, FG proiiciuntur in arcus KO, ON, nam puncta M, F, G, proiiciuntur *o* in puncta K, O, N. Igitur KO, ON partes projecturæ KNL, similes sunt primitivi circuli MGQ partibus MF, FG. Quod erat tertium.

l *per* 16.11.
m *per* 10. 11.
n *per* 33.
o *per def.* 2.

PROPOSITIO VI.

Dati in sphæra circuli (DMGQ) projectionis plano paralleli, & in partes, seu gradus secti projecturam describere.

Maximus in sphærâ circulus ACSE unà cum diametris ad invicem rectis AS, CE describatur in plano, ut factum vides in *figurâ* 5; & quot graduum est arcus A M, seu A Q, distantia circuli ab Oculo A, totidem numera gradus ex *a* in *m* & ex *a* in *q*; ducaturque recta *mq*: ea referet diametrum circuli proiiciendi DMGQ. Ducatur tandem ex *a* per *m* recta *amk* occurrens ipsi *ce* in *k*, vel ex *a* per *q* recta *aql* occurrens *ce* in *l*. Tum centro *b* per *k*, *l* describe circulum *knlx*. Hic est projectura dati in sphærâ circuli DMGQ.

Demonstratio ex *præc. prop.* manifesta erit, si circulus *caes* unà cum rectis *abs*, *cbe*, *amk*, *aql* circa lineam *kbl* immotam converti intelligatur, usque dum perpendiculariter insistat plano projecturæ *bknlx*, uti vides in fig. 3. vel 4.

Seca deinde projecturam in *k*, *o*, *n* eâdem proportione, quâ sectus in sphærâ ponitur circulus MFGQ, in M, F, G. Erunt arcus *ko*, *on* projecturæ arcuum MF, FG, circuli primitivi, ut patet ex 3 parte propositionis præc.

PROPOSITIO VII.

Circuli ad projectionis planum non paralleli projectura etiam circulus est, cujus centrum diversum à puncto, in quod primitivi circuli centrum projicitur.

Esto quivis in sphærâ circulus OFZGR obliquus ad projectionis planum. Conus FZGA, sub quo ab Oculo A spectatur circulus OFZG, produci intelligatur usque ad planum projectionis efficiens in illo sectionem KHQIX. Ex *defin.* 4. KHQIX est proiectura circuli OFZGR demonstrandum est hanc circulum esse. *Fig.* 6.7.8.

Secetur sphæra per Oculum A & centrum B plano ad circulum OFZG recto. Transibit hoc etiam per *a* O circuli centrum, eiusque polos V, T, producetque in circulo sectionem diametralem FOG, in sphærâ autem maximum circulum ACSE, in quo ducantur rectæ ABS, FS, AF, AG & AO. quæ erit axis coni FZGA. Deinde planum ABCFVGT secans prædictum, in quo (ut iam exposui) existunt circulus maximus ACSE, cum rectis ABS, FS, AF, AG, AO, efficiat in plano proiectionis rectam HBIE. Liquet igitur rectas AF, AG occurrere plano projectionis in duobus punctis ipsius HBE, purà in H & I, ac proinde H I est proiectura diametri FOG.

a *per* 13.1. *Isp. Theod.*

His ita constitutis, quia A B recta est *b* plano proiectionis, etiam recta est ad *c* ipsam H I in projectionis plano existentem. Cùm igitur rectus sit angulus ABH, is æqualis erit angulo AFS, qui & ipse rectus *e* est, utpote in semicirculo ACS. Quare in triangulis H BA, SF A cùm æquales sint anguli ABH, AFS, & HAB, seu FAS communis, etiam reliqui *i* H & S æquales erunt. Atqui S angulus æquatur angulo *m* AGF, quia ambo sunt in eodem segmento FSGA. Ergo etiam angulus H ipsi AGF æqualis est. Conus igitur verticem habens in A, subcontrariè sectus est sectione HQIX, quæ proinde est *n* circulus diametrum habens H I.

b *per def.* 1.
c *def.* 3 11.
e *per* 31.3.
i 32 1.
m *per* 21.3.
n *per* 5.1. *conic.*

Deinde quia radius AO ductus ab Oculo A ad circuli FZG centrum O, & recta HBIE sunt (ut ostendi suprà) in eodem plano quod per A Oculum, ac B sphæræ centrum transit, patet radium AO occurrere ipsi HBIE in puncto aliquo P, quod proinde est proiectura centri O. Punctum verò P non bisecare diametrum H I proiecturæ HQIX, ac proinde diversum esse ab eius centro K, nimis est quàm manifestum.

*In fig.*8. *circulus OFZG est parallelus axi projectionis ABS, & tunc ejus poli V, T, ac centrum O sunt in ipso plano projectionis.*

Corollaria.

1. Punctum P in quod projicitur obliqui circuli centrum O, est in projecturæ HQIX diametro HI, quæ est communis sectio plani BHFAVGT ad circulum obliquum recti cum plano projectionis. Patet ex demonstratis.

2. Inter projecturas diametrorum obliqui circuli FZG maxima est HI projectura diametri FOG, quam in obliquo circulo producit planū BHFAVGT ipsi rectum. Cùm enim centrum O projiciatur in ipsius HI punctum P diversum à projecturæ HQIX centro K, patet diametros reliquas circuli OFZGR diversas ab FG projici ab Oculo A in lineas projecturæ HQIX inscriptas, & sese mutuo intersecantes in P. Inter has porrò omnium maximam esse constat HI, quæ per K centrum projecturæ HQIX & punctum P incedit, estque projectura diametri FOG.

3. Iisdem positis, poli V, T, obliqui in sphærâ circuli OFZG projiciuntur in eandem illam diametrum HI, quæ inter projecturas diametrorum obliqui circuli est maxima. Cùm enim planum circulo OFZG rectum transiens per AB, quod in projectionis plano produxit ipsam HI, etiam transeat per polos T, V circuli OFZG, manifestum est radium ab Oculo A eductum ad polum T, occurrere ipsi HI in puncto aliquo N; quod proinde projectura *o* est poli T. Eodem modo radius ab Oculo A emissus per polum alterum V occurret alicubi diametro HI quantùm opus erit productæ.

o per def. 2.

PROPOSITIO VIII.

Situm obliqui in sphæra circuli determinare.

Fig. 6. 7. 8

Detur in sphærâ circulus OFZGR obliquus ad Oculum A, & ad projectionis planum. Per oculum A & sphæræ centrum B agatur planum circulo OFZGR rectum. Transibit hoc per O circuli *o* centrum, eiusque polos T, V; producetque maximum in sphærâ circulum AFTGV, & in obliquo circulo diametrum FG.

o per 13. 1. sph. Theod.

Dico notis arcubus AF, AG, notum esse situm obliqui circuli in sphærâ. Si obliquus circulus est *c* maximus, aut non maximus, sed ad projectionis *d* planum rectus, sufficit arcus alteruter: si nec *e* maximus nec rectus projectionis plano, uterque requiritur.

c Fig. 6. d Fig. 8. e Fig. 7.

Idcirco autem ab his arcubus desumitur determinatio positionis obliqui in sphærâ circuli, quòd inter omnia FZG circumferentiæ puncta ab Oculo A distent F minimè, G maximè. Si enim sphæra secetur quovis alio maximo circulo non recto ad circulum OFZG, occurrens circulo ex. gr. in Z, erit arcus AZ maior arcu AF, & minor arcu AG, quod facilè lector demonstrabit.

Porrò circuli in sphærâ situs, quem per distantiam ab Oculo determinavimus, æquè determinabitur per notam eius ab Æquatore distantiam FC, vel GE; quod facilè, jam dicta qui expenderit, intelliget.

PROPOSITIO IX.

Dati in sphæra circuli ad planum projectionis non paralleli, (OFZGR) ejusque centri ac polorum projecturam describere.

Secta sit sphæra per centrum suum B ac Oculum A maximo circulo BAFSG recto ad circulum obliquum OFZGR. Transibit hic *a* etiam per O centrum eiusdem, & per polos V, T; producetque in eo diametrum FG; arcusque AF, AG eiusdem in sphærâ *o* situm determinabunt. Circulus porrò BAFSG, rectus etiam erit plano *r* projectionis, secabitque illud diametro CBE, ad quam diameter altera ABS per oculum ducta, perpendicularis est, ut patet ex *p. 1. hujus & def. 3. 11.*

Ad litteras majusculas inspice figi 6.7.8; ad minusculas vero, fig. 9. 10. 11. a per 13. 1. sph. Theod. o per prae. r per prop. 1.

Constr. Describe igitur in plano dato circulum, & per centrum *b* diametros *as*, *ce* perpendiculariter sese intersecantes. Tum gradus arcuum AF, AG (supponuntur enim esse dati), numera ex *a* in *f* & *g*, ducaturque recta FG. Hæc diametrum repræsentat circuli projiciendi. Deinde *fg* bisecta in *o*, per *o* & centrum *b* recta ducatur *ut*, occurrens circulo in punctis *u* & *t*. Hæc referent polos V, T circuli projiciendi. His peractis ex *a* per *f* & *g* rectæ emittantur *af*, *ag* occurrentes ipsi *ce* in *h* & *i*. Recta *hi* erit diameter projecturæ. Quare si *hi* bisecta in *k*, centro *k* per *h* & *i* circulus describatur *hqix*, hic erit projectura obliqui in sphærâ circuli. Ducatur deinde ex *a* per *o* recta *ao* occurrens ipsi *ce* in puncto *p*. Hoc est projectura centri obliqui circuli. Rursum ex *a* per *t* recta ducatur *at* occurrens ipsi *ce* in puncto *n*. Hoc est projectura poli *t*. Postremò ducta ex *a* per *u* recta *au* donec concurrat cum *ce*, dabit projecturam poli alterius *u*.

Demonstr. Planum circuli *bacse* unà cum rectis *afh*, *aig*, *fg*, *ao*, *ubt*, *ant*, circa rectam *hie* immotam converti intelligatur usque dum perpendiculariter insistat plano circuli *hqix*, uti exhibetur in *fig. 6. 7. 8*, in quibus circulus HQIX existens in plano projectionis per sphæræ centrum B ducto, est circulus *hqix*, & circulus BACSE est circulus *abcse*; & puncta H, K, N, P, I sunt puncta *h*, *k*, *n*, *p*, *i*; & puncta A, F, G, V, T respondent punctis *a*, *f*, *g*, *u*, *t*, & rectæ FOG, AFH, AIG, TV, ANT, AOP rectis *fog*, *afh*, *aig*, *tu*, *ant*, *aop*. Quoniam igitur per *def. 2.* ab Oculo A puncta F, G projiciuntur in H, & I, liquet obliqui circuli diametrum FG projici in rectam HI. Quare cùm per *prop. 7* obliqui circuli projectura circulus sit, patet circulum HQIX circa diametrum HI descriptum, hoc est circulum *hqix*, esse projecturam obliqui circuli FZGR. Rursum ex *def. 2* patet punctum P esse projecturam centri O. Atqui P est *p*. Ergo etiam *p* est projectura centri O. Postremò quia N est *e* projectura poli T; N verò idem est cum *n*, etiam *n* erit projectura poli T. Quare facta sunt, quæ petebantur.

e def. 2.

Corollarium.

Quando obliquus in sphærâ circulus secat planum projectionis ex. gr. secundùm rectam *i* DY, portio ab Oculo remotior DGY projicitur in minorem projecturæ portionem DIY, seu *diy*, quæ tota comprehenditur intra circulum sphæræ maximum CYED; portio autem FYD ab Oculo remotior in maiorem DHY, seu *dhy*, quæ extra maximum circulum CYED protenditur.

i Fig. 6. 8. 9. 11.

PO-

PORISMA.

Fig. 12, 13

Dentur in sphærâ duo æquales circuli CME, FZG, sive maximi illi sint, sive non maximi, & polus unius sit A, alterius verò (sed priori oppositus) sit T. Ducantur per polos A, T, circuli quotcumque ACFT, ASVT, AMZT. Dico arcus CS, FV, & SM, VZ, ac deinceps æquales esse.

Demonstr. Unus circulorum per polos transeuntium simul etiam transeat per B centrum sphæræ, sitque ille ACFE: transibit is etiam *a* per O, Q centra circulorum CME, FZG, quorum proinde diametri CE, FG, uti & rectæ TB, AB à polis ad sphæræ centrum emissæ, nec non recta TA polos connectens, sunt in plano maximi circuli ACFE, rectaque TA occurret diametris CE, FG, putà in punctis N & R; à quibus ducantur rectæ NM, RZ, & à centris O, Q, radii OM, QZ. Jam quia TB, AB ductæ sunt à polis T, A, ad sphæræ centrum B, transibunt illæ *b* per Q, O centra circulorum FZG, CME, ac proinde ad plana eorumdem *c* circulorum sunt perpendiculares. Quare etiam ad rectas CE, MO; FG, ZQ in ipsis ductas perpendiculares *d* erunt, adeoque recti sunt anguli AON, TQR, item AOM, TQZ. Deinde quia æquales sunt circuli CME, FZG, polorum à centris distantiæ AO, TQ *i* æquales erunt. In triangulis igitur MAO, STQ, cùm æqualia sint latera AO, TQ, itemque OM, QZ, utpote radii æqualium circulorum, & anguli insuper AOM, TQZ utpote recti; etiam bases *o* AM, TZ, adeoque & arcus *x* AM, TZ erunt æquales. Quia verò triangulum ABT Isosceles est cùm latera AOB, TQB sint radii sphæræ, anguli NAO, RTQ *m* æquales erunt. Quoniam ergo in triangulis ANO, TRQ æquales sunt anguli AON, TQR, utpote recti, itemque anguli NAO, RTQ, & latera AO, TQ, *s* æqualia etiam latera, NO, RQ, nec non AN, TR æqualia *n* erunt. Ulteriùs quia æquales ostendi suprà arcus AM, TZ, si his addatur in *Fig.* 12, dematur autem in *Fig.* 13 communis arcus MZ, erunt arcus AZ, TM æquales. Quare *p* anguli ZTA, MAT, sive ZTR, MAN, æqualibus arcubus insistentes, erunt æquales. In triangulis igitur NAM, RTZ cùm æqualia suprà ostenderim latera AM, TZ, item AN, TR, nec non angulos MAN, ZTR, etiam bases MN, ZR æquales *r* erunt. Postremò in trigonis NMO, RZQ, cùm æquentur latera MN, ZR, & suprà ostenderim æquari etiam NO, RQ, itemque æquales sint OM, QZ æqualium circulorum radii, liquet angulos MON, ZQR, hoc est MOC, ZQF, æquales *t* esse. Unde etiam arcus CM, FZ *u* æquales erunt. Eodem ratiocinio æquari ostendes arcus CS, FV. Demptis ergo æqualibus CS, FV ab æqualibus CM, FZ, etiam reliqui SM, VZ æquales erunt. Liquet ergo propositum.

a per 13.1. sph. Theod.
b colligitur ex 10.1. sph. Theod.
c per 8. ibid.
d per def. 3. 12.
e per hyp.
i per 6.1. sph. Theod.
o per 4.1.
x per 26.3.
m per 5.1.
s jam ostendi.
n per 24.1.
p per 21.3.
r per 4.1.
t per 8.1.
u per 28.3.

PROPOSITIO X.

Projecturas graduum maximi in sphæra circuli ad projectionis planum non paralleli, describere.

Ad majusculas inspice Fig. 14. ad minusculas verò Fig. 15.

Esto maximus in sphærâ circulus obliquus DFZG sectus in arcus quotcumque FZ, ZZ, ZZ. Oporteat horum projecturas invenire. Per Oculum A & sphæræ centrum B planum ducatur rectum circulo DFZG: erit hoc etiam *a* rectum plano projectionis DCYE, transibitque *b* per T, V polos circuli DFZG: producet autem in sphærâ maximum circulum AFCTSGEV rectum (ut dixi) circulo utriq; DFZG & DCYE; in circulo verò DFZG diametrum producet FBG; in plano demùm projectionis rectam HCBIE, eritque HCI diameter *e* projecturæ dati circuli DFZG. His positis,

a Per prop. 1.
b Per 13.1. sph. Theod.
e vide dem. prop. 7.

Constructio erit ejusmodi. Describatur in plano circulus *adfctyse* maximo sphæræ circulo æqualis; qui repræsentabit duos maximos in sphærâ circulos, nempè circulum DCYE in ipso projectionis plano existentem, & alterum AFCTSGEV rectum tam ipsi DFZG quàm plano projectionis DCYE, sed reclinatum suprà projectionis planum. Reperiatur deinde per *prop.* 9. circuli obliqui dati DFZG projectura *xhqi*, cuius diameter erit *hcbi*. Reperiatur item per *prop.* 9. poli ab Oculo remotioris T proiectura *n*, quæ per *corol.* 3 *p.* 7 erit in diametro *hcbi*. Circumferentiam verò *dcye* partire in arcus *co, oo, oo*, æquales arcubus circuli dati FZ, ZZ, ZZ. Ex puncto *n* proiecturâ poli *t*, sive T, per *o, o, o*, emissæ rectæ determinabunt arcus *hq, qq, qq*, proiecturas arcuum dati circuli FZ, ZZ, ZZ.

Demonstr. Circulus *dcye* cum suis divisionibus *o, o, o*, ac diametro *cbe* concipiatur in plano projectionis, sic ut *b* centrum sit in sphæræ centro B, & peripheria *docoyoe* in DOCYOE, & *cbe* in CBE. Ibidem concipiatur projectura *xhqi*, cum suis divisionibus *q, q, q*, ac diametro *hcnbi*, sic ut peripheria *xhqi* sit in XHQI, diameter *hcnbi* in HCNBI, *n* projectura poli T in N, recta *noq* proxima ipsi *nb* in NOQ, arcusque *co, hq*, in CO, HQ. Intelligatur deinde circulus *afctsge* unà cum inscriptis sibi lineis *abt, fbg, afb, aig, ant* quarum ope per *prop.* 9. reperta fuit projectura *xhqi*, circa rectam *hcnbiq* converti, donec situm suum priorem AFCTSGE in sphærâ recuperet rectum videlicet tam plano projectionis DCYE quàm circulo dato DFZG. His ita constitutis, liquet ab Oculo A punctum F projici in H, & circulum BAFCSGE transire * per T polum circuli DFZG, itemque per Oculum A polum * circuli DCOYE. Per eosdem polos T, A, & punctum Z aliud ducatur planum AZTA, efficiens in superficie sphæricâ arcum AZT occurrentem peripheriæ DCOYE in *ω*. Quoniam igitur peripheriæ AFCT, AZωT transeunt per circulorum DFZG, DCOYE polos oppositos A & T, intercipient per *Porisma* æquales arcus FZ, Cω. Atqui arcus CO est idem cum arcu *co* qui per constructionem etiam æqualis est arcui FZ. Ergo etiam arcus Cω, & CO æquales sunt, eademque sunt puncta O & ω. Quare cùm ex constr. planum AZTA occurrat circulo DCOYE in ω, occurret eidem etiam in O, ac proinde O est in plano AZTA. Sed etiam recta AT adeoque & punctum N projectura poli T est in plano AZTA. Ergo recta NOQ etiam est in dicto plano AZTA. Ducatur iam in eodem illo plano AZTA per Z ab Oculo A radius AZ, qui productus necessariò occurret peripheriæ XHQI, cùm ipsa per hyp. sit projectura peripheriæ DFZG. Occurrat in ϖ. Igitur ϖ est proiectura ipsius Z. Est verò (ut ostendi suprà) H projectura ipsius F. Ergo arcus Hϖ est proiectura arcus FZ. Ulteriùs, quia iam ostendi rectas AZ, NO esse in uno plano AZTA, cùm sint ad invicem inclinatæ, hæc illi necessariò alicubi occurret. Quare cùm NO, tota sit in plano projectionis, altera verò AZ projectionis plano in unico tantùm

** Per 13.1. sph. Theod.*
** vide def. 1.*

puncto

punĉto occurrat, nimirum * in peripheriæ XHQI punĉto ϖ, liquet NO occurrere ipsi A Z in peripheriæ XHQI punĉto ϖ. Atqui N O per constr. eidem peripheriæ occurrebat in punĉto Q. Ergo eadem sunt punĉta ϖ ac Q, & æquales sunt arcus Hϖ, HQ. Quare cùm arcus Hϖ ostensus suprà sit esse projectura arcus F Z, etiam H Q (hoc est *bq*) projectura erit arcus F Z. Simili discursu probabimus arcus reliquos *qq*, esse projecturas arcuum ZZ. Quæ erant demonstranda.

* Ostendi sup.

PROPOSITIO XI.

Projecturas graduum non maximi in sphæra circuli & ad projectionis planum non paralleli describere.

Allitteras majusculas inspice Fig. 16 ad minusculas Fig. 17.

DEtur obliquus in sphærà circulus FZG↓ non maximus, sectus in quotvis arcus FZ, ZZ, ZZ, quorum oporteat projecturas exhibere. Per Oculum A & sphæræ centrum B, planum agatur rectum circulo dato FZG↓. Hoc erit etiam rectum * plano projectionis, transibitque per circuli FZG centrum ↓ ac polum T: producet autem in sphærà maximum circulum ACSE rectum (ut dixi) tam circulo FZG↓, quàm plano projectionis; in circulo verò FZG↓ efficiet diametrum F↓G; ac demùm in projectionis plano diametrum CBE, in quam proinde incidet projectura diametri FG circuli dati. Diameter porrò ABS per Oculum ducta perpendicularis est ad ipsam CBE, uti patet ex *defin.* 1. *hujus* & *def.* 3. 11. Concipiatur insuper circulus in sphærà RYV♮ projectionis plano parallelus & æqualis dato FZG↓, ac proinde æqualiter distans à sphæræ centro B. His præmissis,

* per prop. 1.

Constructio erit ejusmodi. Describe in plano circulum *bacse* æqualem ipsi BACSE, ductisque ad rectos angulos diametris *abs*, *cbe*, sume arcus *af*, *ag* pares arcubus AF, AG, & junge *fg*: ea erit diameter circuli projiciendi. Ductis igitur rectis *af*, *ag* secantibus ipsam *ce* in *b*, & *i*, circa *bi* describe circulum *bqi*: hic per *prop.* 9. est projectura circuli dati FZG↓. Bisecta deinde *fg* in ↓, per *b* centrum ac ↓ ducta recta dabit punctum *t*, repræsentans circuli dati polum T. Quare si ducatur recta *at* occurrens ipsi *ce* in puncto *n*; hoc per *prop.* 9 erit projectura poli *t*, sive T. Accipiatur deinde *bt* æqualis ipsi *b*↓, & per *t* ducatur *rtu* parallela ad *cbe*: hæc erit diameter circuli RYV♮ paralleli ad planum projectionis, & æqualis dato FZG↓; cùm enim ↓*b*, *tb* distantiæ à centro æquales sint, etiam diametri *fg*, *ru* æquales erunt. Ex *a* per *r* duc rectam *ar* occurrentem ipsi *ce* in *p*: centro *b* per *p* descriptus circulus *pom* per *prop.* 6. erit projectura circuli RYV♮. Circulum *pom* divide in arcus *po*, *oo*, *oo* similes arcubus FZ, ZZ, ZZ, atque ex *n* projecturâ poli *t*, seu T, ad puncta *o*, *o*, rectæ emittantur *no*, *no*, secantes circulum *bqi* in punctis, *q*, *q*. Arcus *bq*, *qq*, *qq*, sunt projecturæ arcuum FZ, ZZ, ZZ.

Demonstr. Circulus *arcfstge* circa rectam *pcbnbtm* converti intelligatur, donec unà cum inscriptis sibi lineis *abs*, *f*↓*g*, *abf*, *aig*, *rtu*, *arp* rectus insistat plano projecturarum *pom*, *bqi*: quod totum expressum cernitur in *Fig.* 16; in quà majusculæ singulæ, singulis minusculis respondent. Ab Oculo A ad punctum O proximum ipsi P radius emittatur A O. Cùm peripheria POM sit projectura peripheriæ RYV, patet radium AO secare peripheriam R Y, putà in Y. Quia igitur Y projicitur in O, & R in P, liquet arcum RY projici in arcum PO. Cùm igitur circulus RYV♮ sit plano projectionis parallelus, arcus R Y, PO similes erunt. Quare cùm PO * similis sit ipsi FZ, etiam RY, FZ similes erunt. Atqui per hypoth. æquales sunt circuli RYV♮, FZG↓. Æquales sunt igitur arcus RY, FZ. Jam quia Oculus A * polus est circuli cujus diameter CBE, huic autem æquidistat RYV♮, erit per 1. 2. *sph. Theod.* etiam A polus ipsius RYV♮. Polus autem circuli FZG↓, est T, ut ostensum suprà. Per polos igitur A, T & punctum Y, planum agatur AYTA occurrens peripheriæ FZG in ω, producens in superficie sphæræ circumferentiam AYωT. Quoniam igitur per circulorum æqualium RYV, FZG polos adversos A, T, transeunt circuli ARFTE, AYωT, arcus * intercipient æquales RY, Fω. Atqui ostendi suprà arcum R Y etiam ipsi F Z esse æqualem. Igitur Fω & FZ æquales sunt, eademque proinde sunt puncta ω & Z. Quare cùm circulus AYT occurrat circulo FZG in ω, occurret eidem quoque in Z, adeoque Z est in plano AYTA. Quia igitur etiam A est in plano AYTA, patet recta A Z ab Oculo A ducta ad Z, esse in plano A Y T A. Jam cùm ex constr. peripheria HQI sit projectura peripheriæ FZG, recta AZ alicubi occurret peripheriæ HQI, putà in ϖ. Deinde in eodem plano AYTA cùm sint tam recta A T adeoque & punctum N projectura poli T, quàm recta AYO, patet rectam quoque NO esse in plano AYTA. Cùm ergo rectæ NO, AZ sint ambæ in plano AYTA, & non parallelæ, necessariò occurrent sibi mutuo. Atqui per constr. NO tota existit in plano projectionis. AZ verò illud secat in unico tantùm puncto, nimirùm in peripheriæ puncto ϖ. Ergo NO occurrit ipsi AZ in peripheriæ HQI puncto ϖ, hoc est NO transit per peripheriæ HQI punctum ϖ. Atqui ex constr. NO peripheriam HQI secabat in Q. Eadem igitur sunt puncta ϖ & Q, iidemque arcus Hϖ, HQ. Sed arcus Hϖ est projectura arcus dati FZ, (H quippe projicitur in F, ϖ verò projicitur in Z, cùm suprà ostensum sit radium AZ peripheriam HI secare in ϖ). Ergo etiam arcus HQ, sive *bq*, est projectura arcus dati FZ. Simili discursu ostendam arcus *qq*, *qq*, esse projecturas arcuum ZZ, ZZ. Quæ erant demonstranda.

* per constr.
* vide def. 1.
* Per porism. ante p. 10.

Atque ita propositionibus undecim theoriam omnem ac praxim ejus projectionis, quæ ab Oculo in sphæræ superficie constituto promanat, complexi sumus. Reliquum est ut doceamus, quo pacto ex his constructio planisphærij, quò omnis hæc contemplatio potissimùm spectat, deducatur.

CAPUT II.

Projectio sphæræ in planum Æquatoris, Oculo in alterutro polorum constituto; sive descriptio Astrolabij Polaris ad datam altitudinem poli.

P*Lanisphæriorum, quæ vulgò Astrolabia dicuntur, duo sunt genera. Primum describitur in plano Æquatoris ab Oculo in alterutro polorum constituto, quod quamvis universale non sit, sed ad datam solummodo poli altitudinem accommodatum, usus tamen habet propè innumeros ac prorsus admirandos, totamq́;*

Mobilis

Mobilis doctrinam uno conspectu repraesentat. Alterum ab Oculo in sectione horizontis cum Æquatore in opposito meridiani plano designatur. Hujus author est Gemma Frisius, estq; universale, hoc est ad quanvis poli altitudinem accommodatum. Illud excogitavit Ptolomaeus, praxes ad constructionem aptas dedit Ioannes Stoflerinus, sed absque demonstrationibus uterque: Clavius noster utrumq; pererudité complexus est. Verùm ille quia prolixitate suâ & figuris admodum implicatis lectores absterret, tradam ego hoc capite constructionem quàm brevissimè, cujus demonstratio habebitur ex capite praecedenti; usum cap.3. adjungam. Acturus demùm de catholico Gemmae capite 4. Esto igitur

Fig. 18. Sphaerae caelestis centrum B, polus boreus T, austrinus A; Æquator BCDEF; Tropici GH, PL: horizon obliquus aliquis BMDNF intersecans Æquatorem diametro F B D; per quam eandem & polos T, A, circulus ducatur maximus BDTFA: is erit unus ex horizontibus rectis pro degentibus sub Æquatore, Meridianus ad horizontem BMDNF perpendicularis (qui & Meridianus loci appellatur) sit BTCAE, intersecans horizontem diametro MBN, Æquatorem diametro CBE, Tropicos diametris GH, PL. Postremò ductus per rectas FBD, GBL maximus circulus BGDLF Eclipticam exhibeat. His ita constitutis,

Manifestum est *primò*, Meridianum BTCAE, qui per hypothesim rectus ad horizontem obliquum BMDNF, etiam esse tam horizonti recto BDTFA, quàm Eclipticae BGDFL. Cùm enim Æquator BCDEF, & horizon obliquus BMDNF ambo recti sint Meridiano BACTE, etiam DBF communis ipsorum sectio ad Meridianum a recta erit. Ergo etiam rectus horizon BADTF & Ecliptica per lineam DBF, transeuntes ad eundem BACTE Meridianum b recti existunt. Hinc

a Per 19. 11.

b Per 18. 11.

Manifestum est *secundò* horizontem rectum BADTF etiam esse circulum horae sextae respectu obliqui horizontis BMDNF.

Manifestum est *tertiò* diametrum DBF esse rectam ad diametros CE, MN, GL. Cùm enim DBF sit communis sectio circulorum Meridiano BACTE, rectè insistentium, etiam recta c erit ad diametros CE, MN, GL, in Meridiani dicti plano existentium. Hinc

c Per def. 3.11.

Manifestum est *quartò* DBF esse lineam veri ortus & occasus, cùm perpendicularis ea sit ad lineas meridianas CE, MN quae sunt communes sectiones Meridiani BACTE cum Æquatore & horizonte obliquo. Liquet indidem, si in F statuatur principium Arietis, in D fore principium Librae, Cancri in G, Capricorni in L.

Manifestum est *quintò* horizontem rectum, sive circulum horae sextae BDTFA projici in lineam rectam quae perpendicularis sit ad eam lineam, in quam projicitur Meridianus loci BCTEA. Hic enim per *prop.3.* projicitur in CBE, ille in DBF, quae ad CBE per *manifest. tertium* perpendicularis est.

Manifestum est *sextò* projecturas tam obliqui horizontis BMDNF, quàm Eclipticae BFLDG transire per puncta F, D, in quibus Æquatorem secat recta DBF in quam projicitur rectus horizon, sive circulus horae sextae BDTFA.

His praemissis.

Fig. 18. Oporteat Oculo in polo australi A constituto, loci seu obliqui horizontis dati Meridianum, horizontem rectum, & Meridianos alios per singulos Æquatoris gradus transeuntis, Tropicos item & Eclipticam cum signis ac gradibus, horizontem obliquum cum gradibus suis, circulos item altitudinum horizonti parallelos PQ (quos Almincantarath appellant) cum circulo crepusculino; postremò Verticales, in planum Æquatoris projicere. His enim omnibus descriptio Planisphaerij, quae projectionis Astronomicae fructus ac scopus praecipuus est, continetur. Statuitur porrò Oculus in polo australi potius quàm boreali, quod sic borealis hemisphaerij projectio tota possit describi, utpote a circumferentiam Æquatoris non excedens; id quod secùs contingeret si Oculus in polo boreo constituatur: tunc enim hemisphaerij borealis projectura evadit infinita, ut *prop.* 1 ostensum fuit.

a Per p. 1.

PROPOSITIO XII.

Meridianum loci, caeterosque Meridianos & horarios circulos in planum projicere.

DEscribatur circulus a CAFETD, qui repraesentabit duos sphaerae circulos, nempe Æquatorem b CFED, & Meridianum loci CAET, sed reclinatum suprà Æquatorem; id quod etiam pro sequentibus usui fuerit adnotasse, ut projectionum demonstratio primis 11 propositionibus tradita, hisce faciliùs applicetur. Descriptum jam circulum ad angulos rectos intersecent diametri c CE, FD. Erit CE utrimque producta projectura Meridiani loci, & DF utrimque etiam producta, projectura horizontis recti, sive circuli horae sextae.

a Fig. 19.

b Fig. 18.

c Fig. 19.

Patet ex *propos.* 3, ejusque corollario, & manifesto quinto.

Reliquos Meridianos per singulos Æquatoris gradus transeuntes projicies, si diametri ducantur per gradus singulos circuli CAFETD, vel ipsi paralleli; quarum satis est extremitates describere, ut factum vides in limbo *Figura* 24.

A Meridianis non differunt horarij circuli; sunt enim Meridiani etiam ipsi quindenis gradibus distantes.

PROPOSITIO XIII.

Æquatorem, Tropicos, & Eclipticam ejusque polos projicere.

SUppositis ijs quae *prop. praec.* constructa sunt, numerentur ex E in L gradus 23.30′, & totidem ex C in G, ductisque per L & G ex A rectis AG, AZ, secantibus ipsam CE in Z & Y, centro B per Z & Y describe circulos Zωl, YθN Æquatori concentricos, erit θY projectura Tropici Cancri, Zω verò Tropici Capricorni, Patet ex *prop.6.*

Fig. 19. Sed simul inspice Fig 18. quod etiam in sequentibus observa.

Deinde circa IN diametrum describe circulum IAND: qui erit projectura Eclipticae, ut patet ex *prop.9*, transibitque per puncta F, T, in quibus projectura horizontis recti Æquatorem d intersecat. Et quidem arcus minor AND est projectura semicirculi Eclipticae borealis, major verò AID projectura est semicirculi australis, uti patet ex *corol. prop.* 9.

d Per manif. 6.

Postremò per centrum B ducatur Bβ perpendicularis ad GBL, & ex A ad β recta Aβ occurrens ipsi CE in puncto φ: hoc erit projectura poli Eclipticae borei, uti patet ex *prop.9.*

PROPOSITIO XIV.

Horizontem obliquum datum cum suo polo sive Zenith, & circulos altitudinum horizonti parallelos projicere.

Fig. 20. & 18.

SUppositâ constructione, hucusque factâ, ex puncto T repræsentante polum boreum numera usque in N gradus altitudinis poli supra horizontem datum ex. grat. gradus 51, ductâque ex N per centrum B diametro NM, ex A per N & M rectæ emittantur occurrentes projecturæ Meridiani in ♃ & R, circulus ♃FRD, circa ♃R diametrum descriptus, erit projectura horizontis obliqui dati, ut patet ex *prop.* 9. Et quidem arcus minor F♃D projectura est semicirculi vergentis ad polum borealem, arcus verò major FRD est projectura semicirculi vergentis ad australem. Patet ex *corol. prop.* 9.

Ducatur deinde ex centro B recta BV perpendicularis ad MN, & ex A ad V recta AV occurrens ipsi R♃ in puncto S: hoc erit projectura Zenith, sive poli horizontis. Patet ex *prop.* 9.

Circulos Almincantarath projicies hunc in modum. Numera ex M in P gradus ex. gr. 10, & totidem ex N in Q. Ex A per P & Q emissæ rectæ, occurrant ipsi R♃ in ☿ & X. Circulus ☿♃X circa ☿X diametrum descriptus, est projectura *a* Almincantarathi per decimum gradum altitudinis supra horizontem transeuntis. Eodem modo reliquos Almincantarath projicies ad singulos altitudinis gradus, quod in magnis Astrolabijs fieri assolet; in minoribus solùm per binos quusque gradus, vel etiam per ternos aut quaternos describuntur.

a Patet ex p. 9.

Totum igitur boreale hemisphærium *b* MVN horizonti dato FMDN insistens cum suis altitudinum circulis projectum est in planum circuli *c* ♃FRD. Verticales, qui adhuc desunt, projicientur *prop.* 16.

b Fig. 18.

c Fig. 20.

PROPOSITIO XV.

Gradus tam obliqui Horizontis dati, quàm Eclipticæ projicere.

Fig. 21. d vide manif. 5. & 6. i Per prop. 14.

SUppositis ijs quæ hactenùs sunt constructa, quadrantes quatuor, in quos circulum CAFETD dividunt *d* rectæ CE, FT, projecturæ Meridiani & recti horizontis, seu circuli horæ sextæ singulos partire in Gradus 90. Deinde ex puncto S projecturâ *i* poli borei horizontis per singula partitionum puncta rectæ emittantur: hæ secando peripheriam horizontis projecti RF♃T graduum projecturas exhibebunt. Patet ex *prop.* 10. Gradibus numeri eo ordine adscribuntur quem vides in figurâ; sed in eâ solùm quindeni quique gradus exprimuntur.

o Per prop. 13.

Pari modo rectæ ex puncto ⊕ projecturâ poli *o* borealis Eclipticæ emissæ per singula partitionum puncta circuli CAFETD graduum singulorum projecturas in Eclipticâ projecta YFZT designabunt: quod rursùm ex *prop.* 10. patet. Ordinem Signorum ac graduum utcumque exhibet figura 25, quam inspice.

PROPOSITIO XVI.

Circulos Azimutales seu Verticales projicere.

Fig. 21. m Per prop. 14. a Per manif. 6. b Per manif. 4.

SUppositâ constructione hactenùs institutâ, in quâ projectura Zenith, sive borealis poli Horizontis est *m* punctum S, puncta verò, in quibus *a* Horizon obliquus, Ecliptica, Horizon rectus, seu circulus horæ sextæ Æquatorem intersecant, sunt T & F; per quæ transit linea *b* Orientis & Occidentis TF. His inquam suppositis,

Describe arcum circuli per tria puncta T, S, F: erit hic projectura ejus semicirculi verticalis primarij, qui supra Horizontem extat.

Numera deinde in Horizonte projecto gradus ex. gr. 15 à T versus R usque in N, & totidem ab F versus ♃ usque in P. Per tria puncta N, S, P. descriptus circuli arcus est projectura semicirculi Verticalis 15 gradibus à Verticali primario declinantis. Pari modo quot placuerit Verticalium semicirculos projicies. Solent porrò in Astrolabijs Verticales per denos tantùm gradus describi. In *Fig.* 24 per tricenos quosque gradus descripti exhibentur.

Projectionem ritè institutam sic ostendes. Verticalis primarius transit per Zenith & puncta veri ortus & occasus; in quibus Horizon & Æquator se intersecant. Quare cùm punctum S sit projectura ipsius Zenith, & puncta T, F, sint projecturæ intersectionum Horizontis & Æquatoris, liquet projecturam Verticalis primarij transire per tria puncta T, S, F. Cùm igitur quivis sphæræ circulus projiciatur *e* in circulum, patet Verticalis primarij semicirculum qui supra Horizontem extat, projici in arcum circuli per puncta T, S, F descriptum: quod erat primum. Deinde cùm Verticales cæteri transeant per Zenith, & puncta Horizontis bina diametraliter opposita, puncta autem N, P sint projecturæ *i* punctorum Horizontis diametraliter oppositorum, gradibus 15 utrimque à primario Verticali distantium, manifestum est projecturam semicirculi Verticalis gradibus 15 declinantis transire per tria puncta N, S, P, ac proinde *d* esse circuli arcum per eadem puncta descriptum: quod erat alterum.

e Per prop. 7. & 5.

i Per p. 15.

d Per p. 7.

PROPOSITIO XVII.

Circulum Crepusculinum projicere.

Fig. 22.

CRepusculi circulus est Horizonti parallelus infrà eum gradibus 18 depressus.

Continuanda est constructio *propositionis* 14, quâ obliqui Horizontis projectura describitur. Ex punctis igitur M, & N, quibus recta MN Horizontis diameter secat circulum ACDE, numera gradus 18 usque in I & Q. Tum ex A per I & Q emittantur rectæ secantes ipsam CE in X & P. Circulus circa XP diametrum descriptus, est projectura circuli Crepusculini. Patet ex *prop.* 9.

PROPOSITIO XVIII.

Stellas Fixas projicere.

DUo requiruntur præcognita, stellæ declinatio ab Æquatore, ejusque Ascensio recta. Utrumque passim in tabulis Astronomorum reperies. Artificium

ſtium ipſum inventionis expoſui Aſtronomiæ *lib.* 5. *cap.* 1.

Fig. 23.

Si ſtella declinet ab Æquatore ad Boream, declinationem ejus numera in circulo CAFETD ex C in I, ductâque ex A ad I rectâ A I, ſecante ipſam C E in N, centro B per N deſcribe circulum: hic erit projectura *a* Paralleli per datam ſtellam tranſeuntis, ac proinde projectura ſtellæ in aliquod circuli incidet punctum, quod ſic invenies. Numeretur in Æquatore Aſcenſio recta ſtellæ ſecundùm ordinem Signorum ex T in M. Tum ex B centro ad M ducatur recta B M, occurrens Parallelo ſtellæ jam projecto in P. Dico ſtellam datam projici in P: quod ſic oſtendo.

a Per p. 6.

Ex *prop.* 3. ejuſque *Corollario* liquet Meridianum per terminum rectæ Aſcenſionis ſtellæ datæ projici in rectam BM. Quare cùm Meridianus *b* ille tranſeat per ſtellam, patet etiam ipſam projici in aliquod punctum rectæ B M. Atqui ſuprà oſtendi ſtellam projici etiam in aliquod punctum paralleli N O. Ergo ſtella projicitur in communem utriuſque ſectionem P.

b Per def. Aſcenſionis rectæ, quam vide Aſtron. lib. 1. *n.* 1. *def.* 39.

Si ſtella declinat in Auſtrum, declinationem ejus numera ex C in G, ductaque recta A G occurrat ipſi EC in K. Centro B per K deſcriptus circulus eſt projectura paralleli per ſtellam tranſeuntis. Numeretur deinde Aſcenſio Recta ſtellæ ex D in S, ductaque ex B per S recta occurrat parallelo projecto K Q in puncto R: hoc eſt projectura ſtellæ datæ.

PROPOSITIO XIX.

Planiſphærium ſive Aſtrolabium Polare ad datam poli altitudinem conſtruere.*

Schematiſmo 18. *Fig.* 24. & 25.
b *Fig.* 24.
c *Fig.* 25.
d *Fig.* 24.

HOc inſtrumentum, quod cætera omnia antecellit, duobus conſtat orbibus æqualibus ſibi mutuo impoſitis. Inferiorem repræſentat circulus *b* BCREK qui Facies Aſtrolabij dicitur, ſuperiorem circulus *c* BOFIH, qui Rete nuncupatur. Superiorem limbus *d* ambit juſtæ latitudinis & ſuprà planum BCREK elevatus, ut eo contineri poſſit tam facies ipſa, quàm Rete faciei impoſitum, ac ſuprà faciem ipſam circumagi.

e per p 12.
i per eand.
k per p. 13.
m per p. 14. & 15.
n per eand
o per p. 16.
p per p. 17.

In faciem igitur Aſtrolabij projiciuntur hi circuli; Meridianus *e* ſive circulus horæ 12, Horizon *i* rectus ſive circulus horæ ſextæ, *k* Æquator, duo Tropici, Horizon *m* obliquus cum ſuis gradibus ad datam poli altitudinem graduum ex. gr. 51, circuli *n* Altitudinum ſeu Almincantarath, circuli Verticales *o* ſive Azimutales, & circulus *p* Crepuſculinus. Solent etiam paſſim inſcribi circuli Domorum, & horarum inæqualium, quorum uſus mihi non fuit tanti, ut eorum deſcriptione Planiſphærij faciem ſat multis alioquin lineis impeditam, adhuc ampliùs intricarem. Limbus faciei radijs ex B centro eductis in gradus 360 dividitur: qui, quòd limbus ipſe ſit Æquatori concentricus, ipſius Æquatoris gradus repræſentant; ipſæ verò radiorum è centro emiſſorum partes, quæ gradus diſtinguunt, Meridianorum per ſingulos Æquatoris gradus tranſeuntium projecturas deſignant; è quibus illi, qui gradibus quindenis diſtant, projecturæ ſunt circulorum horas Aſtronomicas à Meridie & mediâ nocte commonſtrantium.

Fig. 25.

Orbis alter BOFIH, quem Rete appellavimus, faciei BCREK præciſè æqualis ſit oportet, ita ut dum faciei impoſitus intra limbum circumagitur, centrum ejus cum faciei centro ſemper congruat. Reti inſcribenda eſt *r* projectura Zodiaci, ejuſque *s* Signorum ac graduum, quàm poterit exquiſitiſſimè. Projicienda item loca *t* ſtellarum primæ magnitudinis & præcipuarum aliquot ſecundæ. Adhæc per initia ♈ & ♎ deſcribenda linea O I, quæ Colurum Æquinoctiorum, per initia verò ♋ & ♑ linea HF, quæ Colurum Solſtitiorum repræſentet. Tum limbus Retis in gradus 360 diſtribuetur, initio facto à puncto O quod ♈ initio reſpondet; & numeri graduum ſecundùm ordinem Signorum procedent. Limbus porrò Retis in gradus ſic diſtributus repræſentabit gradus Æquatoris prout ille unà cum Zodiaco motu Diurno circumagitur, uſumque habebit inſignem Aſcenſionibus tam rectis quàm obliquis Solis & ſtellarum commonſtrandis. Gradus verò limbi alterius faciem *u* BCREK ambientis, repræſentant gradus Æquatoris concepti ut immobilis. Poſtremò Retis *x* BOFIH ſuperficies ita erit exſcindenda, ut ſola remaneant limbus, Zodiacus, & ſtellæ cùm areolis quibuſdam, quibus nomina ſtellarum inſcribi poſſint, quæque efficiant ut limbus, Zodiacus & ſtellæ cohæreant. Sic enim fiet ut Reti ſuprà faciem conſtituto, circuli in facie deſcripti tranſpareant. Rete ſic conſtructum faciei CERK ſuperimpone, ſic ut intra faciei limbum contineatur. Adjungatur & regula binis dioptris inſtructa & volubilis circa centrum commune B. Quod ſi Rete ſuper faciem ex C per R in E circumagatur, univerſa Primi Mobilis theoria inſigni cum voluptate oculis ſubjicietur. Mutatâ porrò altitudine poli, ea ſolùm in conſtructione jam expoſita mutanda erunt quæ à poli altitudine dependent, nimirùm Horizon obliquus, Almincantarath, Verticales, Crepuſculi circulus: cætera in facie deſcripta, & Rete totum eadem perſeverant.

r per p. 13.
s per p. 15.
t per p. 18.
u *Fig.* 24.
x *Fig.* 25.

Hæc nobiliſſimi inſtrumenti conſtructio eſt; cujus multiplices atque admirandos uſus deinceps exponam.

CAPUT III.

Uſus Aſtrolabii Polaris ad datam poli altitudinem constructi.

COnſtructio Aſtrolabij ad Opticam pertinet, uſus ad Aſtronomiam; quem tamen, quod ab illâ dependeat hoc loco potius quam alio exponendum putavi.

PROPOSITIO XX.

Stellæ & puncta graduum Eclipticæ, licet diurno motu circumferantur, in Retis proportionaliter ad diurnum cæli motum circumacti puncta ſemper eadem projiciuntur.

Schemat. 18. *Fig.* 24. & 25.

STatuatur Rete eo ſitu quo facta eſt ejuſdem projectio ut nempè initium Capricorni Z conſiſtat ſuprà Meridianum K R verſus R. Moveatur deinde initium Capricorni Z, ex. gr. 20 aut 30 gradibus versùs Occidentem E, & ſimilis in cælo factus eſſe motus intelligatur.

Dico tunc ſtellas & ſigna ac gradus Eclipticæ projici in eadem Retis puncta, in quæ primo caſu fuere projecta, idque ſemper in quavis motus diurni parte contingere. Cùm enim motus diurnus fiat circa polos mundi ſive lineam per eos ductam, quæ axis dicitur, Oculus autem ſtatuatur in uno polorum,

manifestum est dum ab Oriente in Occidentem cælum movetur, stellas & puncta graduum Zodiaci eundem semper situm retinere tam respectu Oculi projicientis, quàm plani Æquatoris, in quod ab Oculo projiciuntur. Stellarum igitur ac graduum Zodiaci projecturæ quoad situm quem inter se illa habent, per motum diurnum non variantur, sed simul omnes transferuntur, quam translationem Retis circumactio ad proportionem diurni motus facta repræsentat. Ergo Reti proportionaliter ad cælum moto stellæ & puncta singula Eclipticæ, in eadem semper Retis puncta projiciuntur. Quod erat propositum.

USUS I. PROPOS. XXI.

Si Rete Astrolabij ab Ortu (C) per Meridiem (R) in Occidentem (E) circumagatur, motus diurnus cæli & omnium Astrorum repræsentabitur.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

UT clariùs, quod proposui, intelligatur, observa, licet Æquator propria sit mensura diurni motus; id tamen præstari etiam à quovis circulo ad Æquatorem parallelo, quòd arcus Parallelorum & Æquatoris inter Meridianos intercepti, semper proportionales existant. Artifices igitur non Æquatorem in Astròlabij facie describunt; sed, quia id commodius erat atque concinnius, limbum Æquatori concentricum ac parallelum in gradus & tempora distribuunt, qui proinde gradus & tempora Æquatoris repræsentant. Istud etiam tum hic, tum in sequentibus observasse proderit plurimùm, latus regulæ per centrum transiens projecturam esse Meridiani vel horarij circuli per gradum Æquatoris, cui regula applicatur, transeuntis; ut patet ex *prop.* 3. ejusque *corollario.*

His prænotatis, cùm stellæ & puncta Zodiaci, licet motu diurno agitentur, in puncta projiciantur semper *b* eadem Retis proportionaliter ad motum diurnum circumacti, poli autem & axis mundi circa quem diurnus motus peragitur, ab Oculo in uno polorum posito projiciantur *c* in B centrum Æquatoris, manifestum est Reti ab Ortu in Occasum circa B centrum revoluto motum diurnum cæli & Astrorum evidenter repræsentari. Quantum porrò unaquæque Retis stella aut Zodiaci gradus à Meridiano in Occidentem, vel ultra processerit, regulæ latus datæ stellæ vel dato Eclipticæ puncto applicatum ostendet: arcus enim limbi à Meridiano R usque ad regulam dabit quæsitum, ut ex suprà prænotatis patet. Hæc verò solummodo sint in antecessum dicta: quæ quidem etsi rudia sint & pauca præ ijs, quæ deinceps exponenda restant, si probè fuerint intellecta, lucis permultum ad usuum reliquorum rationes percipiendas conferent.

b per præc.

c Per p. 2.

NOTA.

Omnes usus sequentes Astrolabij intelligendos esse respectu horizontis, ad quem constructum est Astrolabium.

USUS II. PROPOS. XXII.

Quâ horâ Sol oriatur & occidat, item diei ac noctis quantitatem quotidie invenire.

Schematismo 18. Fig. 24. 25.

EX ephimeride quæ in dorso Astrolabij describi solet, vel aliundè notum habeto locum Solis in Zodiaco eumque quære in Zodiaco Retis. Tum Reti circumacto locum Solis statue suprà horizontem obliquum ad Orientem. Regula per illum extensa designabit in limbo extimo Astrolabij horam, quâ eo die Sol oritur, si desit regula, filum per centrum B & locum Solis extensum, dabit eodem modo quæsitum. Deinde locum Solis statue suprà horizontem obliquum ad Occidentem: & regula per Solis locum extensa ostendet in limbo horam quâ Sol eo die occidit. Sinister limbi semicirculus KCR continet horas à mediâ nocte ad meridiem, dexter verò REK horas à meridie ad noctem mediam. Ex noto porrò tempore Ortus & Occasus Solis habetur diei & noctis quantitas, ut patet.

Exemplo praxis illustrabitur. Constructum sit Astrolabium (quod in omnibus deinceps exemplis supponam) ad poli altitudinem grad. 51; & velim scire 22 Febr. quâ horâ Sol oriatur. Quia 22 Febr. Sol attingit ♓ gradum tertium, hunc in Retis Zodiaco quære, & statue suprà horizontem obliquum ad Orientem: applicata illi regula ostendet eo die oriri Solem horis 6, minutis 53 post mediam noctem, hoc est horâ 7, minuto 7. Inde ad meridiem sunt horæ 6, 53', quæ duplicatæ exhibent quantitatem diei 22 Febr. horarum 13. 46'.

Demonst. Quoniam motus diurnus *i* non variat projecturas in Reti factas, & horizon in Astrolabij facie descriptus, est projectura horizontis dati, liquet Solis orientis centrum projici in illud punctum Astrolabij, in quo gradus 3 ♓, quem eo die Sol obtinet, horizontem in Astrolabio descriptum secat, ac proinde latus regulæ per B centrum transiens, esse projecturam *m* Meridiani, sive horarij circuli per Solis orientis centrum transeuntis. Quare cùm Meridiani horas in Æquatore designent, liquet latus regulæ horam, quâ eo die Sol oritur; in limbo Astrolabij Æquatorem *n* repræsentantis, ostendere.

i Per prop. 20.

m Per prop. 3. & corol. ejus.

n vide dicta prop. præc.

Ex his, quæ hic & duabus præcedentibus ostensa sunt, & ex demonstrationibus projectionum primo capite allatis, facilè lector per se colliget rationes usuum sequentium, quos proinde absque demonstrationibus plerumq́ proponam.

USUS III. PROPOS. XXIII.

Quantitatem diei longissimi ac brevissimi invenire.

INitium Cancri in Zodiaco Retis notatum statue suprà horizontem obliquum ad Orientem: regula illi applicata in limbo Astrolabij ostendet horam quâ Sol oritur die Anni longissimo. Statue deinde Cancri initium in horizonte ad Occidentem: regula per illud extensa ostendet horam quâ Sol occumbit die longissimo.

Pari modo initio Capricorni suprà horizontem constituto, regulaque per id extensa cognosces horam Ortus & Occasus Solis die brevissimo.

Ex noto tempore Ortus & Occasus diei longissimi ac brevissimi quantitas innotescet.

USUS IV. PROPOS. XXIV.

Reperire Anni diem, quâ Sol dato tempore oriatur vel occidat.

TEmpus datum sit oportet inter Ortus dierum longissimi atque brevissimi.

Oporteat invenire diem quâ Sol oriatur horâ quintâ.

quintâ. Statue regulam suprà horam quintam in sinistro limbi semicirculo. Tum Rete eousque versa, donec gradus aliquis Zodiaci pertranseat Horizontis punctum illud in quo regula Zodiacum secat. Erit is in præsenti casu gradus 30 ♌, sive initium ♍, quem locum Sol attingit 24 Aug. Igitur in locis ubi polus elevatur grad. 51, Sol oritur horâ 5, die 24. Augusti.

USUS V. PROPOS. XXV.

Quâ plagâ Horizontis Sol oriatur & occidat quotidie, invenire.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

GRadum Zodiaci, quem die dato Sol obtinet, statue suprà Horizontem obliquum, sive ad Ortum sive ad Occasum. Tum gradus Horizonti adscriptos numera ab Ortu T, vel Occasu F usque ad locum Solis: numerationis terminus ostendet quot gradibus, eo die Sol extra Orientem, vel Occidentem versùs Septemtrionem vel Austrum, oriatur vel occidat.

USUS VI. PROPOS. XXVI.

Ortum & Occasum Solis Borealissimum & Australissimum invenire.

SOl oritur & occidit borealissimè in Cancri initio, australissimè in initio Capricorni. Igitur Cancri initium statue suprà Horizontem primò ad Orientem, deinde ad Occidentem. Ita Solem reperies in his regionibus gradibus ferè 40 versùs Boream extra Orientem oriri, cùm borealissimè oritur; extra Occidentem occumbere, cùm borealissimè occumbit.

Similiter initio Capricorni ad Horizontem ducto cognosces Ortum & Occasum Solis australissimum esse graduum circiter 40.

USUS VII. PROPOS. XXVII.

Diem anni repetire, qua Sol in data Horizontis plaga oriatur vel occidat.

DEbet autem plaga data Ortum vel Occasum borealissimum vel australissimum non excedere.

Oporteat reperire diem, quâ Sol oriatur extra Orientem T gradibus 200 versùs Septemtrionem. Reti in orbem acto vide quis Zodiaci gradus transeat per punctum Horizontis datum. Is erit in his regionibus Tauri gradus quintus. In eo Sol versatur die Aprilis 25. Sol igitur 25 Aprilis oritur extra Orientem Verum gradibus 20 ad Septemtrionem.

USUS VIII. PROPOS. XXVIII.

Quâ horâ quotidie crepuscula incipiant manè, vesperi finiantur, durationem quoque atque omnem earum varietatem, cognoscere.

CRepuscula manè incipiunt, vesperi finiunt, ubi Sol attigerit circulum Horizonti parallelum infrà Horizontem 18 gradibus depressum, qui idcirco circulus Crepusculinus dicitur.

Gradum, seu locum Zodiaci, quem die dato Sol obtinet, duc ad lineam crepusculinam, primò versùs Ortum, deinde versùs Occasum. Regula per Solis locum utrobique extensa horam ostendet, quâ crepuscula manè incipiunt, & vesperi desinunt. Quod si horam *a* quæsieris, quâ eodem die Sol oritur, & occidit, habebitur duratio tota crepusculi tam matutini quàm vespertini.

a Per prop. 22.

Hunc in modum cognosces brevissima esse crepuscula in Æquinoctijs, eaque in his regionibus horas circiter duas durare; in æstate verò esse longissima, & in Solstitijs per noctem totam extendi. Si enim Cancri initium duxeris ad Meridianum RK infrà obliquum Horizontem, videbis illud circulum crepusculinum non attingere, ac proinde Solem in æstivo Solstitio ne quidem horâ noctis 12 infrà horizontem 18 gradibus descendere.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

Quod si placuerit cognoscere quotâ Æstatis parte crepuscula durent per totam noctem, Reti secundum ordinem litterarum CREK circumacto, adverte quis Zodiaci gradus Meridianum RK infrà obliquum Horizontem primus transeat in eo puncto, quo illum intersecat circulus Crepusculinus. In Astrolabio ad poli altitudinem grad. 51 constructo, comperies id accidere initio Geminorum. Sole igitur ibidem posito, hoc est 21 Maij crepuscula incipiunt durare nocte totâ. Reti deinde ulteriùs circumacto, conspicies totum Signum ♊ & ♋ Meridianum pertransire suprà lineam Crepusculinam, initium verò ♌ Meridianum attingere in ipso puncto, quo illum crepusculi circulus intersecat, gradus autem sequentes infrà illud. Quare toto eo tempore, quo Sol signa ♊ & ♋ perambulat, hoc est à 21 Maij usque ad 23 Julij, numquam 18 gradibus infrà Horizontem deprimitur, ac proinde crepuscula totam noctem adæquant.

USUS IX. PROPOS. XXIX.

Ascensionem rectam dati Eclipticæ puncti, sive gradum Æquatoris qui cum dato Eclipticæ puncto Horizontem rectum (CE) & Meridianum (RK) attingit, invenire.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

PRæter limbum extimum Astrolabij in gradus & horas divisum, aliud præterea est OHIF limbus Retis in gradus etiam suos distributus, qui Reti suprà Astrolabij faciem collocato, intra limbum priorem præcisè continetur. Gradus porrò limbi Retis incipiunt à puncto O quod initio Arietis X respondet, in quo Colurus æquinoctiorum projectus IPBXO limbum intersecat, & graduum ordo secundùm ordinem Signorum procedit ex O in H, I. Quia verò limbus etiam ille est Æquatori concentricus & parallelus, atque unà cum Reti cui adhæret circumagitur, idem præstant gradus ejus, quod Æquator unà cum Zodiaco diurno motu circumactus, efficeret gradibus suis, si in eos fuisset distributus. Numerantur autem gradus Æquatoris secundùm ordinem Signorum à Sectione verâ Æquatoris & Eclipticæ, sive initio ♈.

Hoc præmisso oporteat ex. gr. invenire cum quo gradu Æquatoris Horizontem rectum CE, adeoque & Meridianum RK attingat finis gradus 10 ♊.

Gradum 10 ♊ (hoc est finem gradus 10) Reti circumacto duc ad rectum Horizontem EBC versùs Ortum C. Tum vide quis gradus limbi Retis ad eamdem

eamdem partem Horizontem rectum attingat. Indicabit ille gradum Æquatoris, qui cum gradu 10 ♊ ad Horizontem rectum B C, & Meridianum B R appellit.

Ratio est, quia gradu 10 ♊ posito suprà Horizontem rectum, Arietis initium X erit ex. gr. in G, & limbi Retis punctum O Arietis initio X respondens, stabit in Q, Colurus verò Æquinoctiorum BXO in rectâ BGQ. Arcus igitur GXT, est Ascensio a rectà gradus decimi ♊, & cum eo Horizontem rectum BC ascendit gradus, seu punctum Æquatoris T; quod quantùm distet à Sectione vernâ X G secundum ordinem Signorum numerando, indicabit arcus limbi Retis QOC, eò quòd similis ille sit arcui GXT.

a vide def. 38 & 39. Astron. l. 1. num. 1.

USUS X. PROPOS. XXX.

Obliquam dati Eclipticæ puncti Ascensionem & Descensionem, sive quis gradus Æquatoris cum dato Eclipticæ puncto suprà Horizontem obliquum ascendat & descendat, invenire.

Oporteat reperire obliquam Ascensionem ac Descensionem 15 gradus Cancri.

Gradum prædictum duc ad Horizontem obliquum versùs Orientem C. Tum vide quis gradus limbi Retis in Horizontis recti B C puncto C existat. Indicabit ille gradum Æquatoris, qui cum gradu 15 Cancri Horizontem obliquum ascendit. Ducatur deinde gradus 15 Cancri ad horizontem obliquum versùs Occidentem E, & vide rursum quis limbi Retis gradus in Horizontis recti B E puncto E consistat. Indicabit ille gradum Æquatoris, qui cum gradu 15 Cancri infrà obliquum Horizontem descendit.

Res patet si probè intelligatur definitio Obliquæ Ascensionis & Descensionis: quam vide *Astron. lib. 1. num. 1. def.* 38. Gradu siquidem 15 Cancri posito in Horizonte obliquo, initium Arietis X stabit ex. gr. in G, illique respondens limbi punctum O erit in Q, & Æquinoctiorum Colurus B X O in rectâ BGQ. Arcus igitur Æquatoris GXT à G usque ad obliqui Horizontis ac Æquatoris communem sectionem T juxta Signorum ordinem porrectus, est b Ascensio obliqua 15 gradus Cancri, cumque illo Horizontem obliquum ascendit Æquatoris punctum T. Jam quia Horizon rectus EBC transit c per T sectionem obliqui Horizontis cum Æquatore, liquet arcum limbi Retis QOC similem esse arcui Æquatoris GXT, ergo limbi Retis gradus in C existens per numerum sibi adscriptum indicabit quantus sit arcus Æquatoris GXT, ac proinde quotus sit Æquatoris gradus T, qui cum 15 gradu Cancri Horizontem obliquum ascendit.

b defin. 38. num. 1. lib. 1. Astron.

c vide mox 6 ante prop. 12.

USUS XI. PROPOS. XXXI.

Ascensionem rectam Solis, sive cum quo gradu Æquatoris Sol ad Horizontem rectum, ac Meridianum appellat, quolibet anni die reperire.

Per *prop.* 29. inquire Ascensionem rectam gradus Eclipticæ quem eo die Sol occupat; ea erit & Solis.

USUS XII. PROPOS. XXXII.

Obliquam Ascensionem ac Descensionem Solis quolibet anni die inquirere.

Per *prop.* 30. reperi Ascensionem ac Descensionem obliquas gradus Eclipticæ, quem die dato Sol obtinet: dabunt illæ quæsitum.

USUS XIII. PROPOS. XXXIII.

Ascensionum ac Descensionum proprietates per Astrolabium explorare.

Exemplum dabo in unâ alteràve.

Prima sit, *Qualibet artificiali die, seu nocte, sive longa ea sit, sive brevis, sex Signa oriri & totidem occidere.* Hujus veritatem per Astrolabium sic cognosces. Dies data sit Aprilis 20, quâ Sol Taurum ingreditur. Initium Tauri in Zodiaco Retis inventum statue suprà Horizontem obliquum ad Orientem, videbisque tum initium Scorpii signi Tauro oppositi contingere Horizontem in Occidente. Verso deinde Reti, Tauri initium due ad Horizontem versùs Occidentem, & conspicies in Horizonte Orientali initium Scorpij. Liquet igitur 20 Aprilis ab Ortu Solis usque ad Occasum sex Signa fuisse orta, sex alia occidisse. Idem eodem modo quàvis die aliâ comperies.

Altera sit, *In omni sphærâ Ascensionem cujusvis Signi Æqualem esse Descensioni Signi oppositi.*

Per *prop.* 30. Inveni gradum Æquatoris cum quo ex. gr. oritur initium Tauri, gradum item cum quo oritur Tauri finis. Inventorum graduum intervallum dabit arcum Æquatoris cum quo toto Signum Tauri Horizontem ascendit. Inquiratur deinde gradus Æquatoris quicum occidit initium Signi oppositi, nempè Scorpii, item gradus quicum occidit Scorpij finis. Graduum repertorum intervallum dabit arcum Æquatoris, qui cum toto Scorpij Signo infrà Horizontem descendit: quem priori æqualem esse comperies. Pari modo reliquas Ascensionum proprietates explorabimus. Earum præcipuas vide recensitas *Astron. lib. 7. num.* 43.

USUS XIV. PROPOS. XXXIV.

Altitudinem Solis Meridianam ejusque Declinationem ab Æquatore, quolibet anni die invenire.

Detur ex. gr. dies 20 Febr. quâ Sol ingreditur Pisces. Initium Piscium statue suprà meridianum R K versùs meridiem; videbisque illud contingere Almincantarath Altitudinis graduum 27. Tanta igitur eo die est altitudo Solis Meridiana.

Notam deinde habeto altitudinem Æquatoris CD, quæ est complementum altitudinis poli BX, & sit ex. gr. graduum 39, quæ quia major est altitudine Meridianâ Solis CO jam repertâ gr. 27: hæc ab illâ subtracta relinquet D O Declinationem Solis Australem ab Æquatore die 20 Febr. Si altitudo Solis Meridiana reperiatur C P major altitudine Æquatoris C D, hæc illi subtracta relinquet D P declinationem Solis Borealem.

Fig. 26.

USUS

USUS XV. PROPOS. XXXV.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

Ascensionem rectam cujusvis stellæ in Astrolabio descriptæ, sive cum quo Æquatoris gradu illa ad Horizontem rectum (CE) & Meridianum (RK) appellat, invenire.

Stellam datam duc ad rectum Horizontem C E versùs Orientem, & vide quis gradus limbi Retis eundem tunc Horizontem contingat. Indicabit ille gradum Æquatoris, cum quo stella data ad Horizontem rectum appellit. Quod si stellam datam ad Meridianum duxeris B R, videbis eumdem gradum limbi Retis cum eâ ad Meridianum appellere. Demonstratio eadem est quæ *prop.* 29.

USUS XVI. PROPOS. XXXVI.

Cujusvis stellæ in Astrolabio descriptæ Ascensionem ac Descensionem obliquam, sive cum quo Æquatoris puncto suprà Horizontem obliquum ascendat, ac descendat, invenire.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

Stellâ datâ suprà Horizontem obliquum constitutâ ad Orientem, vide quis gradus limbi tunc existat in puncto C Horizontis recti. Indicabit ille gradum Æquatoris, qui cum datâ stellâ suprà obliquum Horizontem ascendit. Ducatur deinde stella data ad obliquum Horizontem versùs Occidentem, gradus limbi Retis tunc consistens in E, indicabit gradum Æquatoris, qui cum stellâ infrà obliquum Horizontem descendit. Demonstratio eadem est quæ *prop.* 30.

USUS XVII. PROPOS. XXXVII.

Stellæ cujuslibet Astrolabio descriptæ altitudinem Meridianum & declinationem invenire.

Stellam datam duc ad meridianum B R, & cætera perage ut *prop.* 34. in Sole. Hæc Sola est differentia quod altitudo Meridiana & declinatio Solis mutentur quotidie, stellarum verò eædem permaneant quoad sensum.

USUS XVIII. PROPOS. XXXVIII.

Qua hora stella quælibet in Astrolabio signata, dato anni die oriatur, culminet, occidat.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

Quæritur ex. gr. quâ horâ suprà Horizontem ascendat *Sirius*, sive *Canis major* die 20 Iulij. Ducatur *Sirius* ad Horizontem obliquum versùs Orientem. Die Iulij 20 Sol peragravit gradum Cancri 27. Igitur regula per finem gradus illius extensa ostendet horam 6 matutinam, quâ *Sirius* eo die oritur.

Pari modo *Sirio* ad Meridianum B R adducto regula per locum Solis extensa indicabit horam, quâ eo die *Sirius* Meridianum pertransit.

Sirio demùm suprà Horizontem obliquum versùs Occidentem constituto, regula Solis loco applicata designabit horam, quâ *Sirius* die illo occidit.

Hunc in modum evidenter cognosces diebus singulis Ortus, Culminationes, & Occasus Fixarum versùs horarum initia prorepere, hoc est citiùs quotidie ac citiùs contingere, atque anni unius spatio illam anticipationis periodum absolvi.

USUS XIX. PROPOS. XXXIX.

Quâ horizontis plagâ stellæ in Astrolabio notatæ oriantur & occidant.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

Stellam datam statue in Horizonte obliquo ad Orientem primò, deinde ad Occidentem. Ex gradibus Horizonti adscriptis addisces, quàm longè versùs Aquilonem vel Austrum, extra Orientem T stella oriatur, extra Occidentem F occumbat.

USUS XX. PROPOS. XL.

Cum quo gradu Zodiaci stellæ oriantur, culminent, occidant, reperire.

Ducatur stella data ad Horizontem obliquum versùs Ortum, & vide quis tum gradus Zodiaci Horizontem eumdem tangat: is est cum quo stella oritur. Pari modo si ducatur stella ad Meridianum, vel ad obliquum Horizontem versùs Occasum, cernes illicò eum quo gradu Zodiaci Meridianum attingat, vel occidat.

USUS XXI. PROPOS. XLI.

Quo anni die stellæ in Astrolabio descriptæ cosmicè oriantur & occidant, invenire.

Stella oritur cosmicè, quando Sole oriente oritur; cosmicè occidit, quando Sole oriente occidit.

Per *præced.* inveni gradum Zodiaci, cum quo stella oritur. Quo die Sol illum Zodiaci gradum attinget, stella cosmicè orietur. Reperi deinde gradum Zodiaci cum quo stella occidit. Quo die Sol erit in gradu huic opposito, stella cosmicè occidet. Gradus oppositus reperitur in margine Orientali Horizontis, ubi stellam posueris in margine Occidentali.

USUS XXII. PROPOS. XLII.

Quo anni die stellæ in Astrolabio notatæ acronicè oriantur & occidant, invenire.

Stella acronicè oritur, quando oritur Sole occidente; acronicè occidit, quando Sole occidente occidit.

Per *prop.* 40. reperi gradum Zodiaci cum quo stella oritur. Quo die Sol erit in gradu huic opposito, stella orietur acronicè. Reperi deinde Zodiaci gradum cum quo stella occidit. Quo die Sol eum gradum obtinebit, stella acronicè occidet.

USUS XXIII. PROPOS. XLIII.

Quo anni die stellæ in Astrolabio signatæ heliacè oriantur & occidant, reperire.

Stella oritur heliacè, quando oritur unâ circiter horâ ante Solem; tunc enim è Solis radijs emergens, manè suprà Horizontem Orientalem incipit apparere. Heliacè Occidit, quando unâ circiter horâ occumbit

occumbit post Solem; exinde enim sub Solis nimium vicini radijs occultata apparere vesperi desinit.

Schemat. 18. *Fig.* 24. 25. Exemplum statuemus in *Aquilâ*. Ducatur *Aquila* ad Horizontem obliquum versùs Ortum perque eam regulâ extensâ, à gradu quem regula in Astrolabij limbo designat, versùs Meridianum R numera gradus 15, hoc est unius horæ intervallum: transfer deinde ad finem dicti intervalli latus regulæ, eique verso Reti *Aquilam* suppone. Tum vide quis tum Zodiaci gradus Horizontem ascendat: is erit ♐ gradus 28. Manifestum proinde est ♐ gradum 28 oriri unâ horâ post ortum *Aquilæ*. Ubi igitur Sol eum gradum attigerit, quod 28 Nov. contingit, orietur is unâ horâ post *Aquilam*, sive *Aquila* unâ horâ ante Solem, hoc est heliacè orietur.

Statuatur deinde *Aquila* in obliqui Horizontis margine Occidentali & à gradu quem in limbo regula designat, numera versùs Meridianum R gradus 15: regulæ deinde suprà finem gradus 15 collocatæ *Aquilam* suppone, & nota quis tum Zodiaci gradus infrà Horizontem descendat. Erit ille ♒ gradus 9 quem proinde liquet unâ horâ ante occasum *Aquilæ* occidere. Quando igitur Sol gradum 8 ♒ ingreditur, quod accidit 8 Ianuarij, occumbit is unâ horâ ante *Aquilam*, sive illa unâ horâ post Solem, hoc est heliacè occidet.

Eodem modo cujusvis stellæ in Astrolabio notatæ, heliacos ortus occasusque reperies.

USUS XXIV. PROPOS. XLIV.

Quæ stellæ numquam occidant, quæ per Zenith quotidie pertranseant, quæ præcisè ad Horizontem usque ascendant, ex Astrolabio cognoscere.

Schemat. 18. *Fig.* 24. 25. HÆc omnia Reti semel per integrum circulum circumacto, licebit uno intuitu conspicere, pro ijs videlicet regionibus ad quas descriptum est Astrolabium.

Stellæ siquidem quæ Reti circumacto intra obliquum Horizontem in Astrolabio descriptum, semper remanent, numquam occidunt: quæ transeunt per punctum S, semel quotidie Zenith pertranseunt: quæ Septemtrionalem Horizontis cardinem N pertranseunt, præcisè ad Horizontem usque descendunt, non ultra, & talis in altitudine poli grad. 51 est *Gorgon*, seu *Caput Medusæ*.

USUS XXV. PROPOS. XLV.

Quovis momento Astrolabium cælo conformare.

OPorteat situm totius cæli, quem habet ex. gr. 23 Ianuarij horâ post meridiem septimâ, in Astrolabio repræsentare. Applica regulam horæ septimæ pomeridianæ in Astrolabij limbo notatæ; & quia Sol 23 Ianuarij versatur in gradu quarto ♒, Rete ita circumage ut gradus ♒ quartus regulæ subsit. Talis eo tempore erit in cælo Zodiaci & omnium stellarum situs, qualis in Astrolabio exhibetur,

USUS XXVI. PROPOS. XLVI.

Astrolabio ad cælum conformato quàm multa simul conspectui exhibeantur.

COnspectu uno videntur sequentia.

1. Diei hora & Zodiaci gradus in quo Sol versatur, quamquam ea propriè habentur ex hypothesi.

2. Si tempus diurnum est, Altitudo Solis suprà horizontem: eam quippe ostendit circulus Almincantarath, per Solis locum transiens.

3. Cæli plaga, quâ Sol existit, hoc est quantùm ab Ortu vel Occasu ad Septemtrionem vel Austrum declinet: id designat azimuth, seu Verticales per Solem transiens.

4. Quis Zodiaci gradus suprà Horizontem ascendat, quis item infrà Horizontem descendat. Gradus porrò Zodiaci suprà Horizontem ascendens, simpliciter dicitur Ascendens, & simpliciter Descendens, qui descendit infrà horizontem.

5. Quâ plagâ Horizontis Ascendens & Descendens existant.

6. Quis gradus Æquatoris cum Ascendente orìatur, & cum Descendente occidat: Gradus enim limbi Retis in Horizonte recto tunc existentes, erunt quæsiti.

7. Quis gradus Zodiaci sit in Meridiano tam suprà, quàm infrà Horizontem.

8. Item quis Æquatoris gradus in Meridiano tam suprà quàm infrà Horizontem existat.

9. Ex stellis in Astrolabio signatis, quæ suprà Horizontem, quæ infrà existant.

10. Altitudines stellarum suprà Horizontem existentium: exhibebunt illam Almincantarath per singulas transeuntes.

11. Quâ cæli plagâ stellæ singulæ suprà Horizontem positæ existant: ostendent illam Verticales quos singulæ tangunt.

12. Gradus Zodiaci & gradus Æquatoris, cum quibus unaquæque stella in Astrolabio notata, Meridianum pertransit & in Sphærâ rectâ oritur atque occidit.

Hæc omnia in Astrolabio ad cælum conformato simul conspicienda exhibentur: ex quo illius præ alijs instrumentis excellentia satis perspicitur.

USUS XXVII. PROPOS. XLVII.

Horam interdiu ex Sole cognoscere.

AStrolabio liberè suspenso & regulâ in Solem directâ metire Solis altitudinem suprà Horizontem: quod etiam Quadrantis ope licebit obtinere. Reperta sit ex. gr. altitudo graduum 48. Zodiaci gradum, quem Sol eo die obtinet, duc ad circulum Almincantarath altitudinis graduum 48. Tum regula per gradum, seu locum Solis extensa horam in limbo Astrolabij ostendet.

USUS XXVIII. PROPOS. XLVIII.

Horam noctu ex stellis cognoscere.

ALicujus stellæ in Astrolabio descriptæ altitudinem suprà Horizontem explora, quæ sit ex. gr. graduum 38. Tum ita versa Rete ut ea stella contingat Almincantarath graduum 38, eoque Retis situ

situ retento regulam extende per gradum Zodiaci quem eo die Sol percurrit: ostendet illa horam quæsitam.

Idem aliter assequeris hunc in modum: Observa utrùm è stellis in Astrolabio notatis aliqua oriatur vel occidat. Siquam oriri deprehenderis, eam ducito ad marginem Orientalem Horizontis obliqui in Astrolabio descripti; si occidere, ad Occidentalem. Tum regula per locum Solis extensa horam ostendet.

USUS XXIX. PROPOS. XLIX.

Altitudines Solis suprà Horizontem ad singulas horas & momenta quolibet anni die reperire.

Scire velim ex. gr. 22 Aprilis horâ 8 matutinâ quæ futura sit altitudo Solis. Eo die Sol percurrit ♉ gradum secundum. Regulæ suprà horam datam collocatæ gradum 2, ♉ supone. Circulus Almincantarath per gradum dictum incedens, indicabit Solis altitudinem graduum 24.

Usus insignis est hujus praxeos in describendis Horologijs, quæ per Altitudines Solis horas monstrant.

USUS XXX. PROPOS. L.

Quantùm murus ab Ortu vel Occasu versùs Austrum vel Aquilonem declinet cognoscere.

Schemat. 17. Fig. 27. 28.

Linea Orientis & Occidentis sit CD, Aquilonis & Austri AB, basis muri declinantis EF, ad quam perpendicularis esto GZ: hæc erit communis sectio Horizontis & Verticalis ad murum recti. Porrò muri declinatio est angulus EZC, sive FZD, cujus quantitas ostendit quantùm murus ab Oriente & Occidente ad Septemtrionem vel Austrum declinet.

Designa in muro ope perpendiculi lineam Horizonti perpendicularem, quam Verticalem vocabimus, eique stylum insige muro rectum. Liquet tam Verticalem lineam quàm stylum esse in plano circuli Verticalis ad murum recti. Observa deinde quando styli umbra lineæ verticali congruat; atque eo momento metire Altitudinem Solis suprà Horizontem. Tum verò Zodiaci gradum quem Sol eo die percurrit, duc ad Almincantarath Altitudinis inventæ; & vide quis Verticalis sive Azimuth transeat per locum Solis: quot gradibus ille ab Oriente vel Occidente declinat, tot graduum est angulus GZC: quo dempto à grad. 90 recti anguli GZE, notus remanet angulus CZE, quo murus declinat ab Oriente vel Occidente.

Demonst. Quando umbra styli lineæ Verticali congruit, constat Solem tunc esse in plano circuli Verticalis ad murum recti. Quare cùm locus Solis per operationem præscriptam sit in Astrolabio legitimè determinatus, etiam Verticalis per locum Solis in Astrolabio transiens, referet Verticalem muro rectum, ac proinde declinatio ejus ab Ortu vel Occasu in Astrolabio reperta, dabit angulum GZC: quo dempto ab angulo recto GZE remanet angulus CZE muri quæsita declinatio ab Ortu vel Occasu.

USUS XXXI. PROPOS. LI.

Horologium Solare debito situ collocare, quamvis linea Meridiana non habeatur.

Schemat. 17. Fig. 29.

Elige diem & horam, quâ velis Horologio descripto situm justum tribuere, ex. gr. diem 20 Maij, & horam 7 matutinam. Inquire per *prop.* 49. quæ futura sit altitudo Solis suprà Horizontem die Maij 20, horâ 7 matutinâ. Paulò deinde ante septimam ita quadrantem statue ut perpendiculum abscindat arcum BC æqualem altitudini Solis inventæ. Tum instrumento in eo situ relicto observa quando Solis radius per utramque lateris AD dioptram transeat; tunc enim erit hora 7. Quare si momento eodem ita collocetur Horologium ut umbra styli incidat in lineam horæ 7 matutinæ, debitum illi situm assignaveris.

Expedit autem tempus æstivum eligere, & horam diei 7 aut 8 matut. vel 4 aut 5 pomeridianam: tunc enim intra breve tempus Solis altitudines varientur, & parùm aut nihil officiet Refractio.

Hactenus de usu nobilissimi instrumenti, quem insigni auctario concludo.

PROPOSITIO LII.

Astrolabium particulare hactenùs explicatum quoad plerosque usus Catholicum efficere.

Schemat. 18. Fig. 24.

In dorso Orbis BCREK quem Faciem Astrolabij appellavimus, sive in orbe alio huic æquali, præter Meridianum RK, Horizontem rectum CE, Æquatorem ac Tropicos, describe Horizontes obliquos 89 ad singulos videlicet gradus altitudinis poli, eâdem prorsus methodo, quâ ad datam unam altitudinem poli hunc descripsimus *prop.* 14. Si novum orbem illum sive faciem Reti subjeceris, Astrolabium ex particulari catholicum efficies quoad omnes usus hucusque recensitos, modò eos excipias qui à circulis Verticalibus & Almincantarath dependent; qui pro singulis Horizontibus ob nimiam multitudinem describi non possunt.

CAPUT IV.

Projectio sphæræ in planum Coluri Solstitiorum, Oculo in principio Arietis vel Libræ constituto.

Hoc situ Oculi sphæra projecta exhibet Astrolabium universale cujus usum Gemma Frisius exposuit, quem consule. Modum hujus projectionis dum expono, universim.

NOTA.

1. Horizontis speciem non variari mutatâ Longitudine, sed Latitudine, seu Altitudine poli. Degentibus enim sub eodem Parallelo omnia cæli phœnomena eodem modo apparent, cum eâ tantùm differentiâ, quòd magis Orientalibus appareant citiùs. Quare si per initia ♈ ac ♎, hoc est per Æquatoris & Eclipticæ sectiones, ad singulos Coluri Solstitiorum gradus circuli maximi descripti intelligantur, illi omnes Horizontium species repræsentabunt.

2. Quando igitur Oculum statuimus in principio ♈ vel ♎, intelligere oportet constitui illum in communi intersectione Horizontis, Æquatoris & Eclipticæ; quod meminisse in sequentibus propositionibus lector debebit.

3. Quando Oculus ponebatur in alterutro mundi polo, projecimus aspectu uno in planum Æquatoris non solùm hemisphærium Oculo oppositum, sed ejus etiam, in quo erat Oculus, partem tantam, quantam capere plani dati amplitudo potuit. Verùm Oculo in principio ♈ vel ♎ constituto, commodiùs erit, si in planum Coluri Solstitiorum aspectu uno illud tantùm hemisphærium projiciatur, quod Oculo oppositum est.

4. Oculo igitur posito in principio ♎, hemisphærium Arietis cum semissibus Eclipticæ, Horizontis, Æquatoris, Parallelorum, Meridianorum, in ipso existentibus in planum Coluri projicitur, estque projectura ipsi Coluro æqualis, ut patet ex *prop.* 1. Quod si Oculum ad ♈ initium transtuleris, in Colurum projicietur hemisphærium ♎ cum suis semicirculis; eritque rursum projectura non solùm Coluro æqualis, sed etiam planè similis projecturæ hemisphærij prioris, ac proinde factâ projecturâ unius, habetur & alterius.

His prænotatis, sit

PROPOSITIO LIII.

Colurum Æquinoctiorum, Æquatorum, Parallelos, ac Meridianos projicere.

Schemat. 18. *Fig.* 30.

DEscribatur circulus ADBEC referens Colurum Solstitiorum, qui reliquorum circulorum projecturas excipiat: sit B polus Borealis, C Australis.

1. Principia ♈ & ♎ projiciuntur in A centrum Coluri Solstitiorum. Cùm enim principia ♈ & ♎ sint poli ipsius Coluri, manifestum est si Oculus statuatur in principio ♎, ab eoque radius emittatur ad principium ♈, hunc Coluro, qui jam est planum projectionis, occurrere in ipso centro A, ac proinde in hoc *b* projici ♈ principium. Pari modo si Oculus existat in principio ♈, principium ♎ in centrum A projicietur.

b Per def. 2.

2. Colurus Æquinoctiorum projicitur in axem mundi BC. Cùm enim is transeat per initia ♈ & ♎, adeoque per Oculum, liquet *c* eum projici in rectam lineam, & quia transit per mundi polos, liquet projici in axem BC. Verùm tum hic, tum in sequentibus memento notationis quartæ.

c Per. p. 3.

3. Æquator projicitur in Solst. Coluri diametrum DE, quæ axem BC rectè intersecat. Nam quia Æquator transit per initia ♈ & ♎, hoc est per Oculum, etiam is projicitur *d* in lineam rectam, diametrum nempè Coluri Solstitiorum: & quia à polis B, C, æqualiter distat, patet eum projici in diametrum DE axi BC perpendicularem.

d Per eand.

4. Semicirculum DCE partire in gradus 180. Ex B per singula partitionum puncta emissi radij projecturam Æquatoris DE *d* in gradus suos distribuent in punctis P. Quare si per mundi polos B, C, & singula puncta P describantur *e* arcus circulorum BCP, erunt hi projecturæ Meridianorum per singulos Æquatoris gradus transeuntium.

Fig. 30. & 31. *d Per p.* 4. *e Per f.* 4.

Cùm enim gradus Æquatoris projecti sint in P, P, liquet Meridianorum projecturas transire per P, P. Transeunt autem & per polos B, C. Cùm igitur Meridianorum projecturæ sint *f* circuli, liquet eas esse circulorum arcus per puncta B, P, C descriptos.

f Per p. 7.

5. Quadrantes EB, EC divide singulos in gradus 90. Radij ex D per singula divisionum puncta emissi BC projecturam Coluri Æquinoctiorum in gradus suos distribuent in punctis, O, O. Quare si per gradus Coluri Solstitiorum F, K æqualiter ab Æquatore DE distantes, & per puncta O describantur *m* circulorum arcus, erunt hi projecturæ Parallelorum per singulos Latitudinis gradus transeuntium.

Fig. 30. & 31. *m per f.* 4.

Talis Meridianorum & Parallelorum projectio aptissima est ad describendas mappas Geographicas, ut dicetur pluribus in Geographiâ.

PROPOSITIO LIV.

Tropicos, Polares circulos, & Eclipticam projicere.

Fig. 32.

1. AB Æquatoris projecturâ DE numerentur utrimque gradus 23, 30'. DF, DI, item FH, EG, ducanturque rectæ DH, DG secantes BC in Q & R. Per tria puncta F, Q, H, descriptus arcus erit projectura Tropici ♋, arcus verò descriptus per tria puncta I, R, G, dabit projecturam Tropici ♑.

Arcus enim AQ est projectura graduum 23. 30' Coluri Æquinoctiorum, ut patet ex *p.* 4. Liquet igitur projecturam Tropici ♋ transire non solùm per F, & H, sed etiam per Q. Quare cùm Tropici projectura *n* sit circulus, erit ea circuli arcus per tria puncta F, Q, H descriptus.

n Per p. 7.

2. A polis B, C, numera utrimque gradus 23. 30', BK, BL. CM, CN, ducanturque rectæ DL, DN, secantes BC in S & T. Per tria puncta K.S.L, item M, T, N, descripti arcus sunt projecturæ circulorum Polarium.

Patet siquidem ex *prop.* 4. BS projecturam esse graduum 23. 30' Coluri Æquinoctiorum. Quare projectura Polaris Arctici transit non solùm per puncta K, L, sed etiam per S. Ergo cùm Polaris circuli projectura sit *p* circulus, ea erit circuli arcus per puncta K, S, L descriptus.

p Per p. 7.

3. Ducatur recta IH; transibit illa per centrum A, eritque projectura Eclipticæ.

Cùm enim Ecliptica transeat per Oculum in principio ♈ vel ♎ constitutum, projicietur in *r* rectam lineam: & quia Tropicos Ecliptica tangit in I & H principiis ♋ & ♑, projicietur in rectam non aliam quàm FG.

r Per p. 3.

PROPOSITIO LV.

Eclipticæ gradus ac Signa & Signorum Parallelos projicere.

Schemat. 19. *Fig.* 32.

1. SEmicirculum INH divide in sex partes æquales, in punctis *u*, hoc est in sex arcus 30 graduum, & ex puncto K quod alterum semicirculum IKH bifariam secat, per divisionum puncta *u* radios emitte: quorum medius K*u*N transibit per centrum A. Secabunt illi in recta IH, projecturas *a* sex arcuum 30 graduum, sive sex Signorum, quæ sunt in Ecliptica semicirculo qui Oculo opponitur. Eædem porrò etiam erunt projecturæ sex Signorum reliquorum, juxta notationem 4 suprà. Ordo Signorum projectorum is erit, quem figura monstrat.

a Per p. 4.

2. Circa rectas HG, FI semicirculos describe HOG, FOI. Hos in 6 arcus æquales partire in punctis O, quorum ea quæ sunt opposita rectis lineis connecte secantibus peripherias FDI, HEG in punctis Z & X. In his Signorum paralleli secabunt

peri-

peripheriam Coluri Solstitiorum BDCE. Quare arcus per puncta singula rectæ H I, in quæ projecta sunt Signorum initia, & bina puncta Z, X, illis respondentia descripti, erunt projecturæ Parallelorum per Signorum initia transeuntium.

3. Eclipticæ projecturam IH in gradus distribues, si semicirculo INH in gradus 180 diviso, ex K per singula divisionum puncta rectas ipsam IH intersecantes, emiseris, ut patet ex *prop.* 4.

PROPOSITIO LVI.

Horizontem ad datam poli Altitudinem projicere, & in gradus distribuere.

Schemat. 19. Fig. 33. A Polo B in Coluro Solstitiorum BDCE numera gradus datæ Altitudinis poli usque in F. Per F & centrum A duc rectam FAG. Hæc est projectura Horizontis suprà quem Altitudine datâ polus attollitur.

Nam quia Oculus existit, *a* in communi sectione Æquatoris, Eclipticæ, & Horizontis, liquet *c* eum projici in diametrum Coluri qui est planum projectionis. Projicitur ergo in diametrum F G, quæ abscindit arcum BF datæ Altitudini poli æqualem.

a vide not. 2. *c Perp. 3.*

Hinc patet regulam mobilem circa centrum A omnes Horizontium species repræsentare.

Horizontis projecturam F G in gradus suos distribues, si semicirculo FCG in partes 180 secto, ex puncto O quod alterum semicirculum bisecat, rectas ad singula divisionum puncta ipsam F G intersecantes, emiseris, ut patet ex *prop.* 4.

PROPOSITIO LVII.

Circulos longitudinum & Parallelos Eclipticæ projicere.

Fig. 30. PRojiciuntur eodem modo, quo Meridiani & Paralleli Æquatoris *prop.* 53. Quare si B, C ponantur esse poli Eclipticæ, & D E projectura Eclipticæ in gradus suos per *prop.* 55 distributa in punctis P, arcus BPC qui priùs erant projecturæ Meridianorum, jam erunt projecturæ circulorum Longitudinis: arcus verò FOK, qui fuerant projecturæ Parallelorum Æquatori, jam erunt projecturæ Parallelorum Eclipticæ.

PROPOSITIO LVIII.

Verticales & Horizonti Parallelos projicere.

Schemat. 18. Fig. 30. PRojiciuntur eodem modo ut Meridiani & Paralleli Æquatoris. Nam

Si Poli Horizontis ponantur esse B, C, & D E projectura esse Horizontis dati, eaque in suos gradus distribuatur in punctis P, quemadmodum *prop.* 53. *num* 4. distributus est Æquator; arcus BPC erunt projecturæ Verticalium, arcus verò FOK projecturæ Parallelorum Horizonti.

PROPOSITIO LIX.

Astrolabium Æquinoctiale catholicum construere.

Schemat. 20. Figura ultima. a per prop. 53. IN planum circuli ABXCZ, Colurum Solstitiorum & loci cujusvis Meridianum repræsentantis, projice *a* Colurum Æquinoctiorum, Æquatorem, Parallelos, *d* Tropicos, Polares, Eclipticam, *e* cum suis Signis & gradibus Meridianos *f* seu horarios circulos. Planum verò Coluri BXDZ limbus ambiat justæ latitudinis, in quo gradus Coluri notentur. Deinde regulam construe mobilem circa centrum A, cujus latus B A semper transiens per centrum A, sit æquale assumptæ diametro Sphæræ, seu Coluri Solstitiorum, & in gradus distributum *b*. Repræsentabit ea & Horizontem *c* quemcumque, & quemvis maximum circulum plano projectionis rectum, ut Æquatorem, Eclipticam &c. Fiat deinde regula N D æqualis semidiametro Sphæræ seu Coluri in quem Sphæra projicitur, habens eamdem secundùm gradus divisionem quam habet regula Horizontalis & diameter Planisphærij. Hanc deinde Horizonti Mobili BC internis excavato ita inseres, ut, situ perpendiculari semper retento, moveri per eum ab extremitate unâ B ad C aliam possit, quâ ex causâ etiam Cursor appellatur. Aptetur denique Brachiolum cum suo apice seu indice, ut figura exhibet, affigi hoc solet Cursori. Atque hæc quidem anterior Astrolabij pars est, quæ etiam absolutè Astrolabium vocari solet. Altera pars seu Dorsum continere potest in circulis exterioribus inscriptos totius Anni dies & menses, & gradus ac Signa Zodiaci illis respondentes, item horas Astronomicas. Interius verò, pars superior complecti potest horas inæquales., inferior scalam altimetram. Regula denique circa centrum mobilis ac binis dioptris instructa apponitur. Hæc constructio: usum unum alterumve subjungo.

d per p. 54. e per p. 55. f per p. 53. b per p. 56. c per p. 56.

Tacquet Optica.

USUS PRIMUS.

Ortum & Occasum Solis & aliarum stellarum; item arcum nocturnum & diurnum in quacumque sphæra, invenire.

SI sphæra recta est, nulla est difficultas, cùm in illâ semper Sol & Stellæ reliquæ oriantur horâ sextâ à mediâ nocte, occidant horâ sextâ à meridie; & arcus nocturni & diurni semper sint duodecim horarum.

Si sphæra obliqua est, regula Horizontalis constituatur ad latitudinem Horizontis propositi, & notetur Parallelus per locum Solis aut Stellæ deductus; hic namque ubi concurret cum regulâ Horizontali, exhibebit horam Ortus & Occasus cognoscendam ex circulis horarijs propè quos intersectio occurrit. Ab eo autem loco usque ad meridiem numerati gradus circuli paralleli dabunt arcum semidiurnum, numerati verò usque ad lineam mediæ noctis exhibebunt arcum seminocturnum.

Si Parallelus stellæ aut Solis sit totus suprà Horizontem, tunc non occidet; si sit infrà, non orientur.

USUS SECUNDUS.

Horam à meridie aut media nocte ex Altitudine Solis aut stellæ invenire.

COnstitue regulam Horizontalem ad loci dati Latitudinem, & Apex Brachioli collocetur in Parallelo Solis aut datæ stellæ ,ad æstimatam utcumque horam. Transferatur deinde Horizon cum Brachiolo ad lineam quæ Æquatorem exhibet, & si tum Apex Brachioli incidat in circulum Parallelum Altitudinis aut datæ aut inventæ Solis vel stellæ, hora assumpta erit vera: si verò indicaverit Altitudinem

majorem, quæratur hora propiùs ad meridiem: quod si minorem, quæratur hora remotiùs à meridie. Quare reductâ lineâ Horizontali ad loci Latitudinem ponatur Apex in Parallelo Solis aut stellæ remotiùs aut propiùs ad meridiem secundùm jam dicta, & tum rursum, ut suprà, referatur ad Æquatorem. Quod tentamen toties repetatur donec Apex, in Parallelum Altitudinis Solis aut stellæ exactè incidat, constituto Horizonte ad Æquatoris lineam. Postquam ergo, repetito tentamine, res successerit, collocetur iterùm Horizon ad loci dati Latitudinem, & Apex Brachioli exactè horam indicabit.

USUS TERTIUS.

Latitudinem ortivam & occiduam Solis aut stellarum ex Latitudine Loci cognita, invenire.

Collocetur regula Horizontalis ad Latitudinem Loci dati. Parallelus per locum Solis aut stellæ incedens ubi Horizontem intersecat, ostendit amplitudinem ortivam secundùm numerum graduum Horizontis, qui intercipiuntur inter Regulæ centrum & dictam intersectionem. Et si Sol aut stella declinet in Austrum, erit Latitudo Austrina, si ad Boream, Borea; Latitudini ortiva, occidua æqualis est.

Plures usus qui desideras consulat (ut monui initio Capitis) Gemmam Frisium aliosque: nobis sufficis projectionis Theoriam, ex quo omnis usus profluis, exposuisse & demonstrasse.

Scholium.

Geminum hactenus Astrolabium exposuimus, alterum Polare, quod Oculus dedit in Polorum alterutro constitutus; Æquinoctiale alterum, quod ab Oculo in principio ♈ vel ♎ posito profluxit: qua si inter se conferre voluerimus, alterum alteri jam præstare, jam cedere comperiemus. Æquinoctiale usu universaliter Polari subinde antecellit quidem, sed vicissim ab illo in multis vincitur. Polare siquidem & diei noctisq, horam, quod in Astrolabys inprimis expetitur, ex Altitudine Solis aut stella expeditissimè indicat, quam Æquinoctiale non nisi conjecturâ quadam, & sæpius pertentando exhibet. Deinde spectaculum oculis perjucundum prabet, dum stella oriri, culminare, & occidere paulatim ad Retis motum conspiciuntur. Adhac calo conformatum, res duodecim diversas, quas prop. 46 recensui, uno aspectu videndas exhibet. Accedit his omnibus, quòd ipsum quoque quoad usus plerosque catholicum reddi possit, ut prop. 52, ostensum est. Quando igitur hac instrumenta invicem excedunt exceduntur q, utrumque adhibere consultum erit. Si quis autem etiam tertium (de quo infra) his adjunxerit, is ad omnem Astronomicum usum quàm optime fuerit instructus.

CAPUT V.

PROPOSITIO LX.

Sphæram projicere Oculo in Zenith constituto.

Hoc Problemate concludam genus illud projectionis, quod Oculum in sphæræ superficie collocat. Quamvis enim ad usus Astronomicos parùm aut nihil faciat, subservire tamen potest ad Geographicos, ut suo loco exponam.

Res porrò tota verbo propè uno absolvitur, cùm ea projectio non differat ab illâ, quâ Oculus in polo constituitur, si nomina circulorum permutentur. Nam circulus qui in illâ referebat Æquatorem, in hac Horizontem repræsentat; & projecturæ Tropicorum reliquorumque Æquatori parallelorum in illa, in hac sunt projecturæ parallelorum Horizonti, seu Almincantarath: rursum qui in illâ sunt projecturæ Horizontis, Almincantarath & Verticalium, in hac projecturæ erunt Æquatoris & Parallelorum ejus, ac Meridianorum. Postremò rectæ lineæ quæ per centrum, projectionis ductæ, erant projecturæ Meridianorum in illâ, in hac erunt Verticalium projecturæ. Quare qui illius projectionis modum, quem 2. *cap.* exposuimus, probè intellexerit, hanc quoque nullo negotio perficiet.

CAPUT VI.

Projectionis Ortographicæ fundamenta.

Species altera projectionis Astronomicæ, ut huius libri principio dixi, ea est quâ sphæra vel alia quævis magnitudo in planum transcribitur radijs ad ipsum planum perpendicularibus. Quod si projectionis etiam huius principium referre ad Oculum placuerit, necesse erit eum distantiâ quodammodo infinitâ à projectionis plano removeas: ita enim continget ut radij ab eo per singula magnitudinis projiciendæ puncta evibrati reddantur quoad sensum paralleli. Guido Ubaldo infinita illa Oculi distantia displicet: neque ego diffiteor fictitiam esse minimeque necessariam. Sed quidquid eâ de re senseris, ad scopum hic intentum interest omninò nihil. Hoc certum, projectionem, de quâ agitur, à radijs subjecto plano perpendicularibus dimanare.

Definitiones.

1. Projectio orthographica est quâ sphæra cum suis circulis, vel alia magnitudo, transcribitur in planum radijs ad ipsum planum perpendicularibus.
2. Punctum projicitur in punctum quòd perpendicularis à puncto projiciendo ducta in plano projectionis designat.
3. Cùm perpendiculares nomino, intellige ad planum projectionis.

PROPOSITIO LXI.

Linea recta ad projectionis planum perpendicularis, projicitur in punctum, quo ipsa planum secat.

Patet ex definitione 1.

PROPOSITIO LXII.

Recta linea (AB) projectionis plano non perpendicularis, projicitur in rectam (EF) à perpendicularibus extremis (AE, BF) in plano projectionis comprehensam.

Per EABF ducatur planum secans planum projectionis rectâ EF. Cùm AE, BF per hyp. sint rectæ ad planum projectionis, etiam planum EABF eidem rectum erit. Sumptis igitur in A B punctis

Schemat. 18. Fig. 34. a per 18.11

punctis quotcumque, O, si ab his ad communem sectionem EF, perpendiculares ducantur OI, hæ quoque ad projectionis planum *b* perpendiculares erunt. Omnia igitur puncta rectæ AB projiciuntur *c* in puncta ipsius GF. Ergo ipsa quoque AB projicitur in rectam EF.

b Patet ex def. 4. 11. *c per def. 2.*

PROPOSITIO LXIII.

Schemat. 18. Fig. 34.

Projectura datæ rectæ (AB) maxima est, cùm (AB) fuerit plano projectionis parallela.

Circa datam rectam circulum describe, in quo situm habeat primò parallelum in AB, deinde obliquum in CD, & perpendiculares demittantur AE, BF. Per *præc.* AB projicitur in EF, & CD in GH. Jam quia anguli AEF, BFE *d* recti sunt, estque AB parallela ad EF, etiam EAB, FBA recti erunt, adeoque EA, FB circulum *i* tangunt in A & B. Ergo perpendiculares CG, DH, cadunt intra perpendiculares AE, BF, ac proinde GF major est quàm IH. Ex quo liquet propositum.

d Per hyp. i Per 16. 3.

Corollarium.

Ex dictis patet rectam lineam, cùm situm habet projectionis plano parallelum, projici in rectam sibi æqualem; in rectam verò se minorem, quando situm habet obliquum.

PROPOSITIO LXIV.

Schemat. 18. Fig. 35.

Plana superficies (ACBD) ad projectionis planum recta projicitur in rectam lineam (AB), qua projectionis planum secat.

In plano dato ducantur quotcumque COD, COD perpendiculares communi sectioni AB. Quia planum datum ACBD perpendiculare est plano projectionis, rectæ COD perpendiculares sectioni communi, erunt etiam perpendiculares *o* plano projectionis. Ergo rectæ COD, projiciuntur *m* in O, O, puncta communis sectionis AB, ac proinde totum planum ACBD projicitur in totam AB.

o patet ex def. 4. 11. m per def. 2.

Corollarium.

Hine patet circulum rectè insistentem plano projectionis per centrum suum ducto, projici in rectam AB, quà projectionis planum intersecat.

PROPOSITIO LXV.

Schemat. 18. Fig. 35.

Circulum (ACBD) plano projectionis rectum, cum suis gradibus Orthographicè projicere.

Ducatur in eo diameter AB, quæ per *præc.* sit ipsius projectura. Sit autem peripheria circuli secta in gradus, seu arcus æquales in punctis C, C; D, D; ab his ducantur perpendiculares CO, CO: hæ projecturam circuli AB in gradus distribuent, ut patet ex ante dictis.

Vel puncta divisionum opposita C, D, junge rectis CD, CD, secabunt itidem illæ projecturam AB in gradus suos.

PROPOSITIO LXVI.

Circulus projectionis plano parallelus in æqualem sibi circulum projicitur; obliquus in ellipsim.

Schemat. 19. Fig. 36.

Prima pars patet; secundam sic ostendo. Esto circulus ACBDE projectionis planum intersecans diametro suâ CAD, ad quam alia ducatur diameter perpendicularis BAE. Projectura circuli radijs perpendicularibus BF, NI, EG, OM, alijsque infinitis producta, sit ACFDG, in quâ ducatur FAG. Quia BF recta est ad planum projectionis DFCG, etiam per 18. 11 planum ABF rectum erit eidem. Cùm igitur DA sit recta ad BA, erit quoque ad FA recta, ut patet ex *def. 4. 11.* Ducantur insuper IP parallela ad FA, & NP parallela ad BA. Quia igitur BA, FA, sunt rectæ ad DAC, etiam NP, IP ad DAC rectæ erunt. Deinde quia BF, NI perpendiculares sunt projectionis plano, etiam erunt ad rectas FA, IP in eo ductas *a* perpendiculares, adeoque recti sunt & æquales anguli BFA, NIP. Deinde cum NP, PI, parallelæ sint ad BA, AF, etiam anguli BAF, NPI *b* æquales erunt. Triangula igitur BFA, NIP similia sunt, *i* ideoque FA est ad IP, ut BA ad NP, & quadratum FA ad quadratum IP, *m* ut quad. BA ad quadr. NP. Sed quadr. BA est ad quadr. NP, ut rectangulum CAD ad rectangulum CPD, cùm hæc illis sint *o* æqualia. Ergo etiam quadr. FA est ad quadr. IP, ut rectang. CAD, ad rectang. CPD: quæ cùm *t* circuli & ellipseos proprietas existat, patet figuram AFDGC ellipsim esse vel circulum. Circulum non esse sic ostendo. Cùm BE plano projectionis non æquidistet, projicitur in rectam se *n* minorem. Atqui *r* projicitur in rectam FAG. Ergo FAG minor est quam BAE, hoc est quàm CAD, quæ æquatur ipsi BAE. Quoniam igitur figuræ CFDG diametri FG, CD sunt inæquales, liquet eam non esse circulum. Cùm ergo sit ellipsis vel circulus, ellipsis erit, cujus major axis DC minor FG, est enim ostensum supra esse rectas ad se invicem DA, FA.

a per def. 3. 11. *b per 10. 11* *i per 4. 6.* *m per 22. 6* *o patet ex corol. p. 17. 6* *t per 21. 1. conic.* *n per corol. prop. 62.* *r per p 61.*

Corollarium.

In projectione Orthographicâ semicirculus DBC projicitur in semiellipsim DFC, alterque semicirculus DEC in semiellipsim alteram DGC. Secùs fit in projectione priori quæ Oculum statuebat in superficie Sphæræ; in eâ siquidem inæquales projecturæ partes æqualibus circuli projiciendi portionibus respondent, ut patet ex *coroll. prop. 9.*

PROPOSITIO LXVII.

Circulum projectionis plano non Parallelum cum suis gradibus Orthographicè projicere.

Schemat. 19. Fig. 36. Fig. 37.

Detur circulus BDEC ad projectionis planum inclinatus angulo BAF, & sectus in æquales arcus in punctis N, N, O, O.

Describatur in plano dato circulus *b*D*r*C æqualis dato; per cujus centrum ducantur ad rectos angulos B*r*, DC, & BE, constituens ad centrum BA*b* angulum æqualem dato inclinationis angulo. Ex B & E perpendiculares eductæ abscindent FG axem minorem ellipseos, quæ projectura est dati circuli. Quare si circa axes DC, FG describatur ellipsis, habetur quæsitum.

Demonstratio. Patet ex *præc.* si circa rectam FAG triangula FBA, GEA ita circumagantur, ut rectè insistant plano *b*D*e*C, unum suprà, alterum infrà, quod factum vides in *fig.* 36.

Fig. 36.

Ut projecturam in gradus distribuas ita ratiocinare. In dato circulo obliquo per divisionum puncta B, N, ducantur BA, NP perpendiculares ad DC, & ex ijsdem demittantur perpendiculares BF, NI. Patet arcus BN, NC projici in arcus FI, IC. Item patet si circa rectam CD circulus obliquus reclinetur suprà projectionis planum in D*bn*C*e*, rectæque BA, NP in *b*A, *n*P, eas transire per F, & I, ac manere perpendiculares ad DC.

Fig. 37.

Efficies igitur quæsitum, si descriptum in dato plano circulum D*b*C*e* æqualem dato in gradus distribuas in punctis *n*, *n*, *o*, *o*, & à singulis divisionum punctis perpendiculares emittas *n*P, projecturam DFCG secantes in punctis I & M: vel si opposita divisionum puncta conjungas rectis *no*.

PROPOSITIO LXVIII.

Ellipsis projicitur in ellipsim; sed uno casu in circulum.

Schemat. 19. *Fig.* 38.

PArs prima simili modo ostenditur quo *p.* 65. Alteram sic demonstro. Ducatur in projectionis plano recta DB æqualis axi minori ellipsis datæ: cui in eodem plano æqualem describe CE, sic ut ambæ invicem bifariam & rectè secent in A. Ex AC productâ sume AI parem axi majori. Tum centro A per I describe circulum ad planum projectionis rectum, & ex puncto C erige rectam CO projectionis plano perpendicularem, circulo occurrentem in F. Per F & A duc rectam FA, eamque produc in G, ut sint æquales FA, AG, jungaturque GE, quam patet esse parallelam ad FC. Quare cùm ad BCDE projectionis planum perpendicularis *a* sit FC, erit *b* & GE. Præterea cùm BA sit perpendicularis projectionis plano CBED, etiam planum CFA *c* eidem erit perpendiculare. Quare cùm BA *d* sit perpendicularis ad CA, erit quoque ad *e* FA, adeoque BD, FG invicem ad rectos sunt angulos. Potest igitur circa BD, FG tanquam axes ellipsis describi DBGD, quæ eadem erit cum datâ, eò quòd illius axes axibus datæ sint æquales.

a per constr *b per* 8.11. *c per* 18.11 *d per constr* *e patet ex def.* 4.11.

Dico igitur ellipsim datam, suo axe majori inclinatam angulo CAF projici in circulum BCDE. Cùm enim FC ex constr. & GE ex demonstratione sint perpendiculares plano projectionis, liquet FG ellipsis axem majorem projici in *a* rectam CE, quæ quia per constr. æqualis est BD, patet projecturam BCDE circulum esse: quod erat ostendendum.

a per p. 62.

CAPUT VII.

Orthographica projectio sphæræ in planum Coluri Solstitiorum.

DEmonstratis projectionis Orthographicæ fundamentis, facilè jam erit in quem libuerit maximum circulum Orthographicè sphæram projicere. Sed quia ex maximis sphæræ circulis nullus ad usum aptus est præter Colurum Solstitiorum, in hunc Orthographicè Sphæra projicitur: ex qua projectione altera catholici Astrolabij species enascitur, cujus constructionem atque usum Ioannes de Roias exposuit.

PROPOSITIO LXIX.

Colurum Æquinoctiorum, Horizontem quemcumque, Æquatorem, Tropicos, Polares, Eclipticam, Orthographicè projicere.

Schemat. 19. *Fig.* 39. *a ex corol. p.* 64.

CUm hi circuli omnes sint recti ad Colurum Solstitiorum qui jam est planum projectionis, & repræsentatur per circulum AFXEZ, liquet *a* eos in Coluri Solstitiorum diametros projici. Itaque

1. Per mundi polos X, Z, ducta diameter XAZ est projectura Coluri Æquinoctiorum, & principia ♈ ac ♎ projecta incidunt in centrum A.

2. A polo X in B numerentur gradus Altitudinis poli supra Horizontem datum. Diameter BAC est projectura Horizontis dati. Quod si per quadrantis XO gradus singulos ducantur diametri, dabunt hæ omnes Horizontium species Orthographicè projectas. Ex quo patet regulam mobilem circa centrum A, cujuscumque Horizontis projecturam exhibere.

3. Diameter EF ad XZ perpendicularis, erit projectura Æquatoris.

4. Ab E in D, & O, item ab F in P, & Q numera gradus utrimque 23.30′, ducanturque DP, OQ. Erunt hæ projecturæ Tropicorum.

5. Ducatur recta OP, quæ transibit per centrum A. Hæc est Eclipticæ projectura.

6. A polis X, Z, in H, & K. item in T, & V, utrimque numera gradus 23. 30′ junganturque rectæ HK, TV. Erunt hæ projecturæ circulorum Polarium.

PROPOSITIO LXX.

Parallelos Signorum & graduum Eclipticæ projicere.

Schemat. 19. *Fig.* 39.

1. SEmicirculos PHO, PVO. singulos divide in 6 partes æquales, & opposita divisionum puncta rectis lineis conjunge: distribuent illæ Eclipticæ projecturam OP in Signa, eo ordine quem characteres adscripti indicant. Quod si Coluri gradus singulos oppositos rectis item lineis *απ*, L*ω* connectas, dabunt hæ projecturas omnium graduum Eclipticæ. Utrumque patet ex *prop.* 65. Ducanturque deinde per Signorum initia jam projectæ rectæ SIN, &c. ad EF Parallelæ: erunt hæ projecturæ Parallelorum per Signorum initia transeuntium, ut patet ex *corol. p.* 63. Quod si per singulas graduum Eclipticæ projecturas describantur Parallelæ lineæ ad EF, dabunt hæ projecturas Parallelorum diurnorum.

2. Licebit etiam Signorum initia ac Parallelos projicere hunc in modum. Ducantur rectæ PQ, DO, circa quas semicirculi describantur PMQ, DRO, quos in 6 arcus æquales partire, & opposita partitionum puncta rectis lineis *bφ*, MR connecte: secabunt hæ projecturam Eclipticæ PO in ijsdem punctis, in quibus eam secabant rectæ *απ*, L*ω*, ac proinde etiam ipsæ Signorũ initia designabunt. Quod sic demonstro.

Sumantur ex illis binæ sibi mutuo respondentes MGR, LI*ω*. Quoniam arcus PL, PM similes sunt, ambo videlicet duæ sextæ suorum semicirculorum PLO, PMQ, & rectæ LIC, MGR perpendiculares sunt ad diametros PO, PQ. patet MGR secare PQ in eâdem ratione, quâ LI*ω* secat PO. Sed, quia MGR est parallela ad QO, etiam MGR secat PO in eâdem ratione, qua eadem MGR secat ipsam PQ. Ergo

MGR

MGR secat PO in eodem puncto I, in quo Lω secabat eandem PO. Pari modo ostendam reliquas θΦ secare PO in ijsdem punctis, in quibus reliquæ ωπ eandem PO intersecant. Quod erat demonstrandum.

Projectura circulorum duabus præcedentibus prop. descripta, conficiunt instrumentum, quod analemma Ptolemæus appellat, usumq; habet multis in rebus singularem.

Corollarium 1.

Ex his patet Parallelos Signorum intersecare peripheriam Coluri Solstitiorum in punctis N, N, S, S, in quibus eandem secant rectæ θΦ, MR: quod *prop.* 55 fuerat assumptum.

Corollarium 2.

Si ex centro A, ad intersectiones N, N, ducantur insuper AN, AN, descripta erit figura quam appellant, radiorum Zodiaci; cujus in varijs rebus non modicus est usus. Sunt porrò radij prædicti sectiones Eclipticæ cum Meridiano pro diverso Eclipticæ situ. Cùm enim initium ♋ est in Meridiano in P, tunc sectio communis Eclipticæ cùm Meridiano est AP: quando initium ♊ vel ♌ est in Meridiano, putà in puncto N proximo ipsi P, tunc Eclipticæ ac Meridiani communis sectio est radius AN, ille qui radio AP proximus est, & sic deinceps.

PROPOSITIO LXXI.

Parallelos per singulos Coluri, & Meridianos per singulos Æquatoris gradus projicere.

Schemat. 20. *Fig.* 40.

1. PEr singulos gradus Coluri Solstitiorum FXEZ ducantur rectæ OO, QQ, ad Æquatoris projecturam EF parallelæ. Erunt hæ projecturæ Parallelorum quæsitæ, uti patet ex *corol. p.* 64.

2. Oppositos Coluri gradus O, Q, rectis lineis connecte; distribuent illæ Æquatoris projecturam EF in gradus suos Orthographicè in punctis I, P. Cùm igitur Meridiani circuli sint obliqui ad Colurum Solst. FXEZ, ac proinde projiciantur in ellipses, quarum axes sunt XZ, IP, oportebit circa XZ & singulas IP ellipses describere, quæ erunt Meridianorum per singulos Æquatoris gradus transeuntium projecturæ, uti patet ex *prop.* 66, *&* 67. Colurus Æquinoctiorum, cùm sit ad Colurum Solst. rectus, solus ex omnibus Meridianis projicitur in mundi axem XZ, ut dictum *p.* 69.

Porrò ellipses singulæ Orthographicè repræsentant duos Meridianos æqualiter utrimque à Coluro FXEZ distantes.

PROPOSITIO LXXII.

Horarios circulos projicere.

CUm circuli horarij Æquatorem dividentes in 24 arcus æquales sint de numero Meridianorum, projectio eorum jam habetur ex præcedenti. Hæc sola differentia est, quòd circulus FXEZ, sive planum projectionis jam concipitur esse Meridianus loci dati, ad quem quia rectus est horæ 6 circulus, is in *o* rectã lineam XZ, nempè mundi axem projicitur.

o per corol. p. 64. *Schemat.* 20. *Fig.* 40.

Positã igitur Æquatoris projecturã EF, semicirculos FXE, FZE singulos divide in æquales arcus 12. Rectæ lineæ opposita divisionum puncta connectentes, Æquatoris projecturam EF distribuent in segmenta 12, quæ erunt projecturæ 24 arcuum æqualium Æquatoris. Quare ellipses circa axes XZ, IP descriptæ, sunt projecturæ horariorum circulorum, eo ordine quem in *Fig.* 42 numeri adscripti ostendunt.

PROPOSITIO LXXIII.

Circulos Almincantarath, Crepusculi, & Verticales projicere.

Schemat. 20. *Fig.* 40.

HOrum projectio non differt ab projectione Parallelorum, Æquatoris & Meridianorum. Quare si EF cogitetur jam esse projectura Horizontis, erunt rectæ OO, projecturæ Almincantarath, ellipses verò XIZP projecturæ Verticalium.

Quod si ab Horizonte deorsum numerentur ex E in *n* gradus 18, recta ducta per *n* parallela ad EF dabit projecturam circuli Crepusculorum.

PROPOSITIO LXXIV.

Stellas Orthographicè projicere.

Schemat. 20. *Fig.* 41.

NOtas habeto distantias stellæ ab Æquatore & Eclipticã, hoc est Declinationem & Latitudinem stellæ. In peripheriã Coluri Solstitiorum versùs polum septentrionalem numera gradus Declinationis stellæ ex D in K, & ex E in I, si stella declinat Borealiter, numerandi siquidem essent gradus dicti in partem oppositam, si declinaret stella Australiter. Ducatur recta KI: hæc est projectura Paralleli stellæ. Numerentur deinde gradus Latitudinis stellæ ex Q in P, ex O in F, ducaturque recta PF: hæc est projectura circuli Latitudinis stellæ, secabitque KI ex. gr. in S. Dico stellam projici Orthographicè in Coluri punctum S. Cùm enim stella sit in circulis utrisque, quorum projecturæ sunt KI, PF, necesse est projici illam in communem earum sectionem S.

PROPOSITIO LXXV.

Astrolabium universale Orthographicum construere.

Fig. 42. *a per prop.* 69. 70. 71. 72.

IN planum circuli ABXCZ, Colurum Solstitiorum & loci cujusvis Meridianum repræsentantis projice *a* Colurum Æquin. Æquatorem, Tropicos, Polares, Eclipticam, Parallelos Signorum & graduum Eclipticæ, Meridianos, seu horarios circulos. Planum verò Coluri BXDZ limbus ambiat justæ Latitudinis, in quo gradus Coluri notentur. Deinde regulam construe mobilem circa centrum A, cujus latus BA semper transiens per centrum A sit æquale diametro Sphæræ, & in gradus *b* Orthographicè distributum. Repræsentabit ea & Horizontem *c* quemcumque, & quemvis maximum circulum plano projectionis rectum, ut Æquatorem, & Eclipticam &c. His peractis restant Paralleli Horizontis, Æquatoris, Eclipticæ; quos si describere omnes voluerimus, innumeris lineis Planisphærium confundi intricarique necesse sit. Sed bene habet: quando regulã unica supplere horum omnium vices potest, cujus ejusmodi est constructio. Ex regulã AQ accipe longitudinem AB semidiametro Sphæræ æqualem, quam in gradus 90 *d* Orthographicè distribues. Hanc deinde Horizonti mobili BC interiùs excavato, ita inseres, ut, situ perpendiculari semper retento, moveri per eum ab extremitate unã B ad C aliam possit, quã ex causã etiam Cursor appellatur. Quod si regulam mobilem BC suprà Æquatorem constituas, cursor ab extremo uno motus in aliud, suis gradibus Parallelos Æquatoris designabit; si regulam BC statueris supra Eclipticam, designabit Cursor Parallelos Eclipticæ. Semper autem Horizontis Parallelos describet, quemcumque situm habuerit regula BC, utpote Horizontem cùm libitum fuerit, semper repræsentans. Quod si regulã

b per p. 65. *c per p.* 69. *num.* 2. *Schemat.* 20. *Fig.* 43. *d per p.* 65.

B C circumactâ, Cursorem in partes oppositas dirigas, ibidem eosdem omnes Parallelos designabit. Quorum omnium ratio ex *Corollario p. 64* est manifesta. Postremò stellas aliquot primarias suis locis inscribes. In Astrolabij dorso hæc describentur. Limbus dorsi distribuitur in gradus, horarum numeris ad quindenos quosque gradus adscriptis. Intra limbum sic divisum tympanum circa centrum versatile constituitur, in quo descripta sunt 12 Signa Zodiaci cum gradibus suis secundùm Ascensiones suas rectas projectis, item menses, ac dies singuli prout Signorum gradibus respondent. Adhæc eædem stellæ, quas parti anteriori inscripsisti, etiam dorso inscribes ad eos gradus Zodiaci, cum quibus Meridianum attingunt. Ne verò stellæ gradus perturbent, ex centro ad gradum Zodiaci, cum quo stella culminat, radius emittitur, ad cujus punctum quodcumque * asteriscum signa; & stellæ nomen adscribe. Regula denique circa centrum mobilis ac binis dioptris instructa apponitur. Hæc Astrolabij Orthographici forma est, cujus non modò structuram jam dedi, sed etiam quod Roias non fecit, demonstrationem aperui. Reliquum est usuum hujus organi specimina nonnulla adjungam.

USUS PRIMUS.

Ad Altitudinem poli quamcumque, quovis anni die horam Ortus & Occasus Solis, atque inde diei noctisque quantitatem cognoscere.

Schemat. 19. Fig. 42.

DEtur ex. gr. Altitudo poli grad. 49, & Aprilis dies 20, quâ ferè Sol initium ♉ ingreditur. A polo X in B numera gradus 49 datæ Altitudinis poli, & regulam Horizontalem B C statue suprà B. Observa deinde punctum I, in quo Parallelus D P per initium ♉ incedens Horizontem B C intersecat. Tum vide quam ex horarijs ellipsibus intersectio dicta I attingat, vel cui proxima sit. Comperies eam proximè attingere ellipsim horæ 5 matutinæ ac 7 vespertinæ. Sol igitur in locis omnibus, quibus polus attollitur gradibus 49. die Aprilis 20 oritur paulò post horam 5. occumbit verò aliquantò ante 7.

Demonstratio ex projectionis Orthographicæ legibus supra demonstratis est manifesta.

Intervallum porrò ab horâ ortus ad meridiem duplicando, habebis quantitatem diei: quâ subtractâ ab horis 24, etiam noctis quantitas prodibit.

USUS SECUNDUS.

Diei longissimæ quantitatem pro quâvis Altitudine poli invenire.

Schemat. 20. Fig. 41.

HOrizonte mobili D B ad datam poli altitudinem ex. gr. graduum 49 constituto, nota punctum S, quo is Parallelum ♋ intersecat, & vide quam ex horarijs ellipsibus intersectio S contingat, in casu dato tangit ellipsim horæ 4 matutinæ & 8 vespertinæ. Quibus igitur polus attollitur grad. 49, die longissimâ Sol oritur horâ 4; occidit autem horâ 8, adeoque dies longissima ijs est horarum 16.

USUS TERTIUS.

Ubicumque Terrarum fueris, diei horam ex notâ Altitudine Solis invenire.

Schemat. 20. Fig. 41.

HOrizonte mobili B C ad datam poli Altitudinem, ex. gr. graduum 49 constituto, inquire locum Solis ad diem datum, qui sit ex. gr. in principio ♉. Reperta sit autem Altitudo Solis ex. gr. graduum 18. Cursorem move per Horizontem B C, & nota punctum O, quo gradus 18 Cursorijs Parallelum ♉ D P intersecat. Observa deinde quam ex horarijs ellipsibus intersectio O attingat; quæ in casu dato est horæ 7 matutinæ, & 5 Pomeridianæ; ac proinde si tempus antemeridianum sit, cognosces instare septimam, sin tempus Pomeridianum, quintam aliquantulò jam transijsse concludes.

Demonstratio est manifesta. Cùm enim eo momento Sol existat & in Parallelo Altitudinis gr. 18, quem Cursoris gradus 18 designat, & in Parallelo ♉, in communi eorum sectione O existat necesse est. Quare cùm Solis locus proximè attingat ellipsim XOZ in quam circulus horæ 7 matutinæ & 5 vespertinæ, ea utique horam indicabit.

Itaque Astrolabium Orthographicum, quod nec Polare nec Æquinoctiale præstare possunt, Horologium Sciatericum universale exhibet sane perquam expeditum, cui id unum deest, quod spatium horæ 11 & 1, nimium coarctetur.

USUS QUARTUS.

Ex notâ Altitudine stellæ in Astrolabio descriptæ, horam noctis reperire ubivis Terrarum.

Schemat. 20. Fig. 41.

EXactè & expeditè quæsitum efficies, si utriusque Planisphærij, Orthographici & Polaris usum conjungas hunc in modum.

Horizonte mobili ad datam poli Altitudinem accommodato, numera in Cursore Altitudinem stellæ notam. Tum ita move cursorem ut terminus Altitudinis stellæ in eo notatus, Parallelum stellæ, qui sit ex. gr. DP, contingat in O. Ellipsis horaria transiens per punctum O, horam stellæ, hoc est ejus distantiam à Meridiano indicabit. Sed præcognosci aliundè debet, stelláne Meridianum jam transierit, an non, adeoque an reperta stellæ hora antemeridiana sit, an Pomeridiana. Assumpto deinde Astrolabio Polari, in limbo ejus horam stellæ jam inventam quære, eique regulam applica: tum Reti circumacto stellam eandem ad regulæ latus advolve. Reti in eo situ relicto, regula ad locum Solis in Zodiaco Retis adducta, horam noctis quæsitam ostendet. Si Parallelus stellæ in Astrolabio descriptus non sit, is designabitur lineâ deletili, vel filo ad Æquatorem parallelo.

Demonstratio ex utriusque projectionis naturâ in præcedentibus demonstratâ, facilè elicietur. Neque addo plura. Usus reliquos in Planisphærio Ioannis de Roias Lector reperiet, vel etiam haud difficulter per se ipse deprehendet.

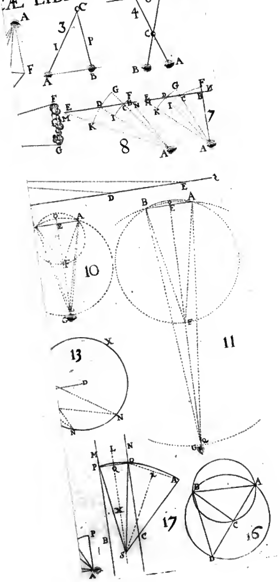
Scholium.

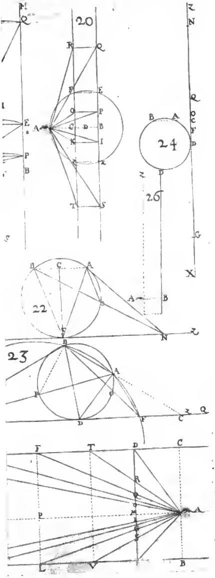
Planisphærij Orthographici laus propria & eximia quidem illa est, quod circuli plerique in rectas lineas projiciantur. Inde siquidem fit, ut & catholicum evadat, regula mobili quemlibet Horizontem repræsentante, & beneficio alterius regulæ currentis, Parallelos omnis generis exhibeat. Quo quidem ex capite Astrolabia priora duo longè antecellit. Illud tamen habet incommodi, quod spatia sphæræ extrema propè Meridianum nimis coarctentur; ellipsium quoque, in quas Meridiani & horarij projiciuntur, operosior descriptio fit, quàm circulorum. Deinde Polari ijsdem ferè in rebus cedit, quibus a Æquinoctiale. Sed tamen diei horam non solùm expeditè, in quo Æquinoctiale deficit, sed etiam universaliter, quod deest Polari, commonstrat. Quod si tria ista organa conjungas, altero alterius defectum supplente, Astronomicos usus plerosque, qui quidem Opticæ fructus longè nobilissimus est, facilitate mirâ ac voluptate expedies.

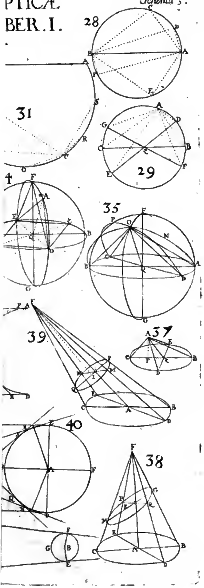
a vide Schol. p. 59.

FINIS OPTICÆ.

ÆE LIBER.I. *schema 1.um*






28
31
29
35
39
37
40
38

Schema 4.

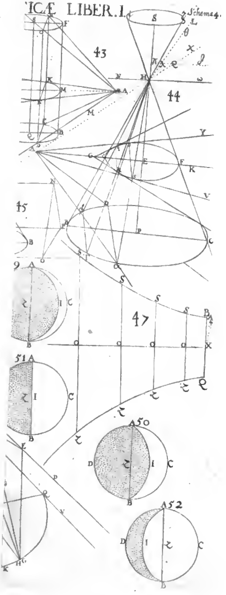
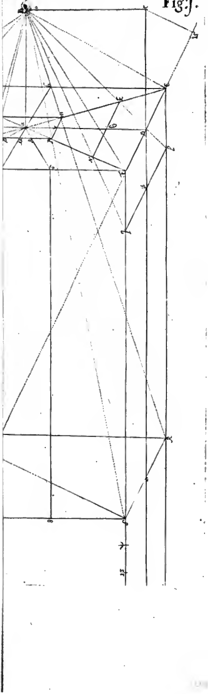


Fig. 7.



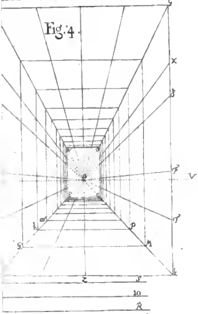


Fig: 4.

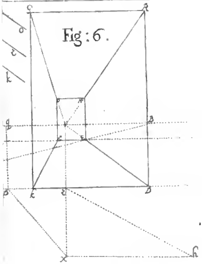


Fig: 6.

E. LIBER . II. *Schema 7um*

Fig: 3.

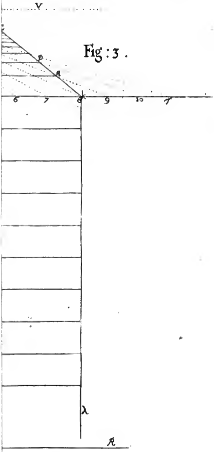
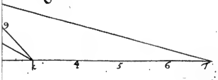
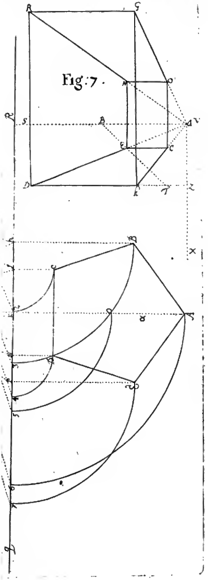


Fig: 5.

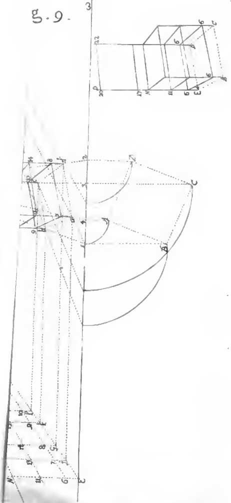


Schema 8.



CÆ LIBER. II. *Schema 9.*

g. 9.



Schema 10.m

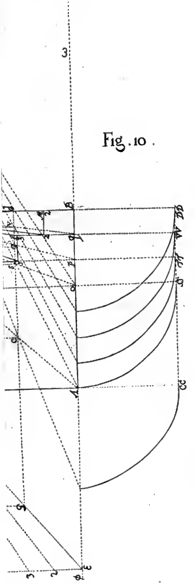
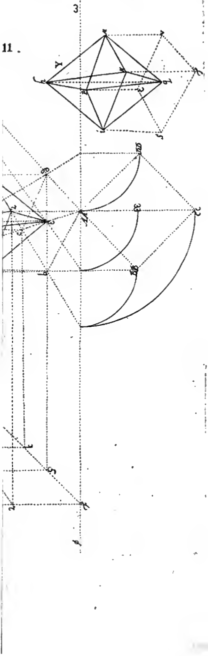


Fig. 10.

11.



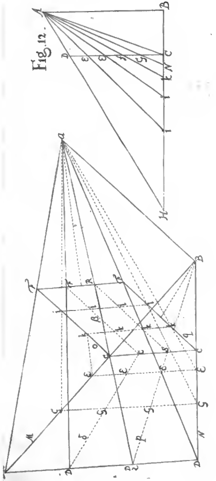


Fig. 12.

Fig. 13.

Fig: 16.

Fig: 17.

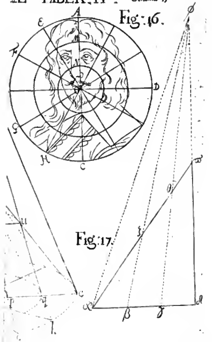
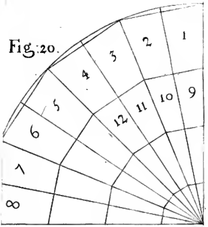


Fig: 20.



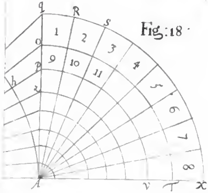


Fig: 18

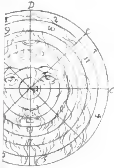


Fig: 17.

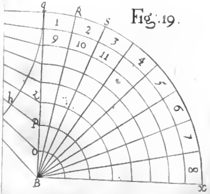
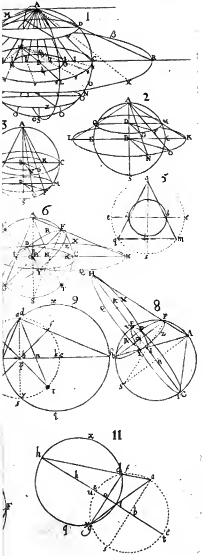
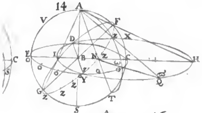


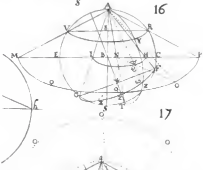
Fig: 19.



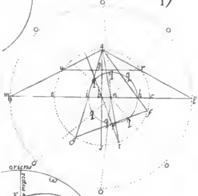
14



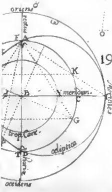
16

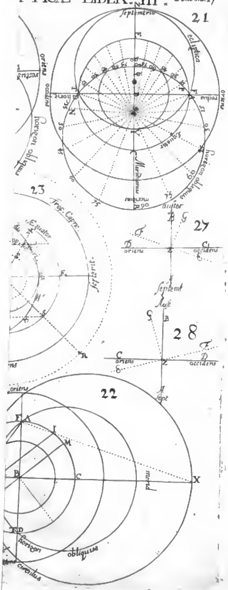


17

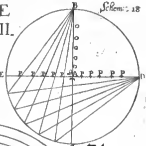


19

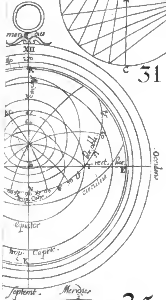

oriens
rectus
meridian.
Meridies
trop. Canc.
ecliptica
horiz.
occidens


21
septemtrio
ecliptica
oriens
occidens
horizon obliquus
Meridianus
auster
23
Trop. Capr.
Æquator
27
oriens
occidens
septent
Aust
28
oriens
occidens
sept
22
oriens
merid
horizon
obliquus
circulus

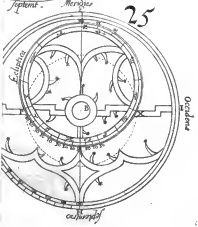
Schem: 18



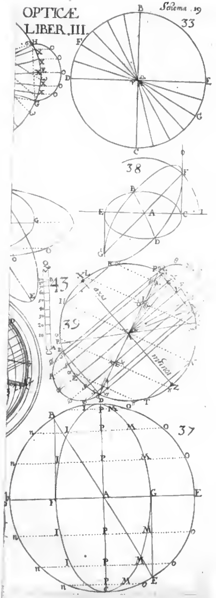
31



25

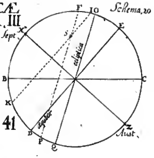


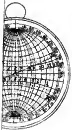
Schema 19



'TICÆ
BER. III

41









ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU CATOPTRICA TRIBUS LIBRIS EXPOSITA.

PRÆFATIO.

Triplici viâ in suis operationibus natura utitur rectâ, reflexâ, refractâ. Prima ad Opticam pertinet, tertia ad Dioptricam, media ad Catoptricam, cujus affectiones adeò sunt multæ, & admirabiles, ut mihi ea inter scientias Mathematicas ex præcipuis ac jucundissimis una videatur. Scripsere de Catoptricâ Ptolomæus & Euclides jejunè admodum, copiosissimè & plurima Albazenus ac Vitello: verùm tantâ prolixitate verborum, adeò implexis ac longis demonstrationum ambagibus, ut molestiam legendi ac tædium superare vix possis. Erit igitur fortasse studiosis non ingratus tractatus hic noster, quo methodo nobis usitatâ inventa aliorum ac nostra ita complexi sumus, ut ea sperem & legenda absque tædio & notitiam hujus scientiæ suis Lectoribus sufficientem paritura.

CATOPTRICÆ LIBER PRIMUS

DE FUNDAMENTIS CATOPTRICÆ.

Definitiones.

1. *Superficiem politam* voco, quæ est vel perfectè plana, vel perfectè curva absque ullo angulo.

2. *Superficiem* verò *asperam*, quæ licet plana vel curva videatur, minutis tamen valliculis monticulisque respersa est.

3. *Speculum* voco omne corpus superficiem politam habens, & rei sibi incidenti imperviam.

4. *Radius Incidentiæ* est linea secundùm quam res in speculum dilabitur.

5. *Radius Reflexus* est, linea secundùm quam res à speculo repulsa regreditur.

6. *Via Reflexionis* est (ACB) quæ ex radijs incidentiæ ac reflexionis componitur. *Fig. 4. 8. 9.*

7. *Punctum reflexionis* (C) est illud speculi punctum, ad quod radius incidens à speculo repellitur.

8. *Perpendicularis*, sive *Cathetus* in speculis Sphæricis est recta (XZC) per speculi centrum ad superficiem emissa. *Fig. 8. 9.*

9. In speculis irregulariter curvis *Perpendicularem* voco (XC) quæ ad planum tangens in ipso contactus puncto perpendicularis est. *Fig. 10. 11.*

10. *Planum reflexionis*, est quo radij incidentiæ & reflexionis continentur.

Hoc esse rectum speculo patebit ex *prop.* 2.

11. *Linea Reflectens* est sectio communis plani reflexionis cum speculo.

12. In curvis speculis *Tangentem* voco rectam lineam (FG), quæ in plano reflexionis existens lineam reflectentem (HCK) tangit. *Fig. 10. 11.*

13. *Angulus Incidentiæ*, in speculis planis est (ACG), qui à radio incidente (AC) ad lineam reflectentem (FCG) constituitur: angulus reflexionis est (BCF) qui fit ad eamdem à radio reflexo (CB). *Fig. 4.*

14. In speculis irregulariter curvis *Angulus incidentiæ* est (ACG), qui à radio incidente fit ad tangentem *Fig. 10. 11.*

gentem (FCG): *Angulus Reflexionis* est (BCF,) qui ad eamdem à radio reflexo constituitur.

15. In speculis sphæricis *Anguli Incidentiæ ac Reflexionis* perinde est, sive ad Tangentem, sive ad Reflectentem accipiantur.

Fig. 8. 9. *Angulus* igitur *Incidentiæ* in illis est tam ACG, quàm ACK; & *Reflexionis angulus* tam BCF, quàm BCH.

16. *Cathetus Incidentiæ* in planis & sphæricis est, quæ à puncto objectivo ad lineam reflectentem perpendicularis est: *Cathetus oculi*, sive *Reflexionis*, quæ ab oculo.

Reflexionis prima ac perpetua lex est, ut angulus sub quo lumen, species, sonus, vel aliud corpus quodcumque in superficiem reflectentem incidit, æqualis sit ei, sub quo ab eâdem superficie exclusum regreditur. Hanc igitur & alia Catoptricæ fundamenta primo libro demonstrabimus.

PROPOSITIO I.

Radius in quamvis superficiem perpendiculariter incidens, in seipsum reflectitur.

Fig. 1. 2. 3. Patet experientiâ, & potest experientiæ hæc ratio dari. Radius AB ad superficiem CD perpendicularis, in omnem partem superficiei CD æqualiter propendet, sic ut nullam in partem magis inclinetur, quàm in aliam. Nihil est igitur quod determinet, ut potiùs in unam partem reflectatur, quàm in aliam. Ergo æqualiter in omnes, hoc est in seipsum, reflectitur, eâdemque regreditur viâ, quâ illapsus est.

PROPOSITIO II.

Planum reflexionis ad speculum quodcumque rectum est.

Fig. 4. Constat experientiâ, quam vide *prop. sequenti*. Et potest ratione ostendi ferè eâdem, quâ præcedens. Cùm enim sit diversitas inclinationum infinita, quas sortiri posset planum KL, in quo existunt AC radius incidens, & reflexus CB, nihil est quod ad inclinationem unam præ alterâ determinet. Caret igitur inclinatione omni, adeoque speculo rectum est.

In speculis curvis planum reflectionis rectum est plano speculum tangenti, & transit per punctum contactus.

Corollaria.

Ex his patet,

1. Planum reflexionis transire per centrum sphæræ.

2. Cathetos incidentiæ & reflexionis esse in plano reflexionis. Sequitur ex hac & *def.* 16.

PROPOSITIO III.

Ad planam superficiem anguli incidentiæ & reflexionis æquales sunt.

Fig. 5. Constat experientiâ. Modus experiendi unus è multis hic est. Speculo BC perpendiculariter impone semicirculum FKG in gradus divisum; & numera arcus utrimque æquales FO, GE, puta graduum 40. Applicato deinde visibili quopiam, sed parvo in O, Oculus in E constitutus intuebitur in speculo objectum O; & si tegatur speculi punctum A semicirculi centro suppositum, non intuebitur. Ex quo manifestum est punctum reflexionis esse A, ac proinde radium incidentem esse OA, & reflexum AE, anguli verò incidentiæ OAF, & reflexionis EAG: qui quòd æqualibus arcubus FO, GE mensurentur, æquales sunt. Exactior operatio erit, si oculus per dioptras collimet in A.

Fig. 6. Idipsum Minervâ rudiori licebit in mensâ trochorum, quam vocant, ludendo experiri. Ad mensæ latus unum designentur duo æquales arcus BC, EG. Si centrum globuli C dirigatur per C in A, resiliet ex A per G in F, per angulum videlicet EAG æqualem angulo CAB sub quo inciderat in A.

Hæc angulorum incidentiæ & reflexionis perpetua æqualitas præcipuum Catoptricæ fundamentum est, cujus rationem Physicam, sive causam quamvis multi sint perscrutati, tamen haud scio an ullus dederit. Referam breviter, quid nonnulli senserint: sed rem, non verba transscribam.

Ratio Vitellonis.

Fig. 4. Libro 5. *prop.* 20, ita ratiocinatur. Axioma Physicum est: *natura agit via brevissimâ.* Hoc dato, superficies esto plana DE, & duo quælibet dentur puncta A, B; sitque planum reflexionis KL & linea reflectens FG. Via brevissima quâ reflexio fieri potest ex A in B, ea est, quæ fit per æquales angulos ACG, BCF: quod *prop.* 6. demonstrabitur. Ratio igitur quòd incidentiæ & reflexionis anguli æquales sint, ea est, quia natura viam brevissimam affectat.

Sed hæc ratiocinatio non est universaliter vera: in cavis enim speculis incidentiæ & reflexionis anguli æquales esse possunt, & tamen reflexio viâ peragi longissimâ, ut *prop.* 8. demonstrabitur. Quare ex axiomate prædicto desumi universim nequit vera causa æqualitatis angulorum incidentiæ ac reflexionis. An igitur falsum est axioma? minimè verò: Sed ita debet intelligi, ut natura viam brevissimam teneat, cùm est possibilis aliqua brevissima. Quod si brevissima nulla sit, ut evenire in cavis speculis patebit ex *prop.* 8, nullum fit axiomati præjudicium, si alia via teneatur, nimirum longissima, quæ sola inter infinitas inæquales determinata est.

Ratio a Cartesij.

a in suâ Dioptricâ.

Supponatur superficiem, quæ reflectit, esse perfectè duram, & motus celeritatem reflexione non diminui.

Fig. 7. Hoc posito, circulus describatur CFBG, per cujus centrum C recta incedens EG reflectentem superficiem repræsentet. Tum ex aliquo peripheriæ puncto A agatur obliquè pila in centrum C. Quia positum est reflexione celeritatem non diminui, quanto tempore pila venit ex aliquo puncto peripheriæ A ad centrum C, tanto inde ad aliud aliquod peripheriæ punctum resiliet. Ducatur deinde AD perpendicularis ad EG, sumptaque QC æquali CD, ex C & Q perpendiculares erigantur CI, QBF. Motus quo pila ex A defertur in C componitur ex motu perpendiculari deorsum per lineam ex. gr. AD, & ex motu parallelo ad EG putà AIB. Motui perpen-

perpendiculari soli resistit superficies reflectens EG, nequaquam autem motui parallelo, quo pila defertur à lineâ AD versùs BQ. Cùm igitur hunc motum reflexio non afficiat, & æqualia sint DC, QC intervalla perpendicularium AD, IC, BQF, quanto tempore delata est pila ex A in C, hoc est à lineâ AD ad lineam IC, tanto tempore resiliet à lineâ IC ad lineam BQF, hoc est tanto tempore ex puncto C reflexum pertinget ad aliquod punctum rectæ BQF. Atqui ostensum suprà tanto etiam tempore ex C resilire ad aliquod punctum circumferentiæ. Eodem igitur instanti pila appellit, & ad aliquod punctum rectæ AQF, & ad punctum aliquod peripheriæ. Ergo ad punctum utrique commune, nimirùm ad B vel F. Non ad F, quia impedit superficies EG. Ergo ad B. Inde verò consequitur necessariò æqualitas angulorum ACD, & BCQ; siquidem ACD æquatur FCQ, & hic ipsi BCQ.

Sed hæc speculatio procedit in casu ficto quo supponitur ex motus celeritate per reflexionem nihil deperdi.

Ratio alia.

Ponatur rursum motus celeritatem reflexione non diminui.

Fig. 7. In lineam reflectentem EG pila obliquè incidat per radium AC, sumptoque ultra C puncto Q, per id ducatur perpendicularis SX. Cùm ex hypothesi reflexio non debilitet motum pilæ, æquali tempore ac celeritate ex C reflexa pertinget ad rectam SX, quâ ad eamdem perveniret recta procedens ex A per C versùs F. Ergo per vias CB, CF æquales. In triangulis igitur BQC, FQC rectangulis ad Q quia BC, CQ æquantur FC, CQ, facilè ostensu est ex 47. 1. æquari etiam BQ, FQ. Igitur per 8. 1. anguli BCQ, FCQ æquales sunt. Sed FCQ [a] æquatur ACG. Ergo ACG, BCQ æquales sunt.

a per 15. 1.

Sed hæc ratiocinatio idem de motus celeritate non minutâ supponit, quod præcedens.

Ratio alia.

Fig. 7. Ponatur radium incidentem AC; à superficie EG impeditum rectâ progredi, viam tenere similem illi, quam tenuisset recta procedens ex A per C in F: quod quidem maximè videtur esse consentaneum naturæ. Hoc dato liquet reflexionem fieri per radium CB, qui cum speculo EC angulum efficiat BCE æqualem angulo FCE, quem fecisset cum speculo si rectâ processisset: sic enim via radij incidentis AC non immutatur sed transfertur. Æqualitatem porrò angulorum FCQ, BCQ, consequitur necessariò æqualitas angulorum incidentiæ ACG, & reflexionis BCE.

Idem breviùs sic probabitur. Si radius incidens AC rectâ procederet, angulum cum speculo constitueret FCE æqualem [b] angulo incidentiæ ACG. Atqui prohibitus rectâ pergere, viam eamdem, sive similem retinet, quantùm potest. Ergo prohibitus rectâ tendere, hoc est reflexus, efficiet etiam cum speculo angulum BCE æqualem incidentiæ angulo ACG.

b per 15. 1.

Licebit etiam hunc in modum ratiocinari. Si radius incidens AC reflecteretur per angulum inæqualem angulo incidentiæ ACG, cùm inæquales sint numero infiniti, omnes magnitudine differentes, nihil est cur per unum potiùs ex istis inæqualibus reflectatur, quàm per alium ex illis quemcumque. Ergo per nullum ex illis. Ergo per æqualem angulo incidentiæ, qui unicus, ac proinde determinatus est.

Quando his meliora ab alijs proferentur, libenter ea amplectemur.

PROPOSITIO IV.

Non solùm ad planam superficiem, ut prop. præcedenti ostensum est; sed etiam ad sphæricam tam convexam, quàm concavam radius incidens (AC) & reflectens (CB) cum reflectente lineâ (HCK) constituunt æquales angulos (ACK, BCH). *Fig. 8. 9.*

Patet experientiâ. Ratio sumi potest, ex *prop. præced.* Ea quæ à viâ brevissimâ petitur, etiam sphæricis convexis convenit, ut patebit ex *prop. 7.* sed cavis non semper, ut ostendam [d] infrà.

d p. 8.

Vera est propositio in quàvis etiam curvâ superficie axem habente, si radius incidat in punctum illud, ubi axis superficiei occurrit: tunc enim incidentiæ & reflexionis æquales anguli sunt possibiles.

Corollarium.

In sphæricis convexis ac cavis etiam ad tangentem GF, incidentiæ & reflexionis anguli ACG, BCF, æquales sunt.

PROPOSITIO V.

Cùm superficies curva (sive convexa ea sit, sive concava) est ejusmodi, ut æquales ad reflectentem lineam (HCK) anguli sint impossibiles, reflexio fit per æquales ad tangentem (FG) angulos (ACG, BCF). *Fig. 10. 11.*

Constat experientiâ; cujus alia ratio melior non occurrit ea quàm quæ *prop. 3.* primo loco allata fuit, quam facilè erit huic loco accommodare. Porrò incidentiæ angulo ex. gr. ACK æqualis dari nequit angulus reflexionis ullus BCH, cùm lineæ reflectentis partes CK, CH sint curvaturæ dissimilis: tunc enim & anguli ipsi dissimiles erunt, ac proinde impossibilis erit eorum æqualitas, ut in scholio ad *prop. 16. lib. 3. elem.* ostensum est.

PROPOSITIO VI.

Ad planam superficiem reflexio à puncto dato (A) in punctum datum (B) brevissimâ fit viâ. *Fig. 12.*

Via reflexionis esto ACB. In plano dato sumatur quodvis punctum F, quod primò sit in lineâ reflectente GK, ducanturque AF, FC. Ostendam viam ACB breviorem esse viâ AFB.

Duc perpendicularem AO, cui occurrat BC in M, & junge FM. Angulus MCO [a] æqualis est angulo GCB. Sed GCB est æqualis [b] angulo incidentiæ ACO. Ergo MCO æqualis est ACO. Sunt verò AOC, & MOC per constructionem recti, adeoque æquales. Ergo in triangulis ACO, MCO latera AC, MC, itemque AO, MO, æqualia [c] sunt. Ergo si æqualibus AC, MC, addatur communis CB, erit via ACB, æqualis rectæ MB. Jam verò quia in triangulis

a per 15. 1. b per 3 hujus. c per 26. 1.

gulis OFA, OEM, duo latera AO, OF, æqualia sunt duobus MO, OF, angulique ijs contenti ad O æquales, etiam bases AF, MF æquales *d* erunt. Quare si addatur utrisque communis F B, via AFB, rectis MF, FB æqualis erit. Atqui M B unum latus trianguli MBF minus *e* est duobus MF, FB. Ergo etiam via ACB, quam suprà ostendi parem esse ipsi M B, minor est quàm M F, F B, hoc est ut jam ostendi, quàm via A F B. Igitur via reflexionis A C B, omnium ad lineam reflectentem G K existentium brevissima est.

d per 4. l. 1.

e per 20. l. 1.

Fig. 13.

Accipiatur deinde in superficie planâ datâ quodvis punctum P, extra lineam reflectentem GK. Ducanturque AP, PB. Ostendam viam ACB etiam esse breviorem viâ APB. Ex P duc PO perpendicularem ad GK, & junge AO, OB. Quoniam planum AKCOB rectum *e* est plano Q S, erit P O perpendicularis ad G K communem sectionem, etiam perpendicularis plano AKCOB, ut patet ex *def. 4. lib. 11.* Ergo per *def. 3. lib. 11,* PO cum lineis AO, BO in plano AKCOB existentibus, angulos efficiet rectos POA, POB. Anguli igitur *f* OPA, OPB sunt acuti. In triangulo igitur APO latus AO oppositum acuto OPA minus *g* est latere A P, quod opponitur recto POA. Pari de causa latus BO minus est latere B P. Igitur via tota AOB minor est viâ APB. Atqui via reflexionis ACB per 1. partem adhuc minor est viâ AOB. Ergo reflexionis via AC B, multò minor est viâ APB. Ergo est absolutè omnium brevissima, quæ ad planum datum reflectens QS haberi potest. Quod erat demonstr.

e per 2. hujus.

f per Corol. 5. p. 32. l. 1.

g per 19. l. 1.

PROPOSITIO VII.

Etiam ad convexam quamcumque superficiem reflexio à puncto dato (A) in punctum datum (B) brevissimâ fit viâ.

Fig. 14.

Via reflexionis esto A C B : linea reflectens FCQ. Sumatur in curvâ superficie quodvis punctum; quod primò sit E in lineâ reflectente FCQ, ducanturque rectæ, A E occurrens tangenti in O, & EB, ac BO. Per *præc.* via ACB est brevior viâ AOB. Atqui via AOB est brevior quàm AEB (nam per 20. *lib.* 1. BE, EO sunt majores quàm BO, ac proinde, additâ communi OA, erit via BEA major viâ BOA). Ergo via ACB multò minor est viâ A E B.

Sumatur deinde punctum quodvis in superficie convexâ, extra lineam reflectentem; eodemque discursu, quo partim hic, partim in 2 parte demonstrationis *præced.* usi sumus, ostendetur via A C B esse brevior eâ, quæ ad punctum assumptum constituitur. Ergo via reflexionis est absolutè omnium brevissima, quæ ad convexam superficiem haberi possunt. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO VIII.

Ad concavam superficiem sphæricam reflexio à puncto in punctum viâ fieri potest longissima.

Fig. 15.

Constat experimento, & demonstrari potest reflexionem ex A in B fieri ad segmenti medium punctum C : nam si in C tangat X Z, erunt anguli ACX, BCZ æquales: quod quia ad nullum segmenti punctum aliud contingit, necesse est per 5 hujus reflexionem fieri ad C, viâ ACB. Atqui hæc aliâ quâvis AFB, AEB, &c. longior est, ac proinde omnium longissima, ut demonstrat Serenus *lib. 2. p. 44.* Ergo hic reflexio fit viâ longissimâ.

Neque tamen, corruit axioma : naturam viâ agere brevissimâ, id enim eâ cautione intelligi debet, si via aliqua brevissima non sit impossibilis, ut hic contingit, cùm à Sereno demonstratum sit vias omnes à longissima BCA, versùs A, & B perpetuò decrescere; sic ut ea, quæ puncto A vicinior est, semper remotiore sit brevior.

PROPOSITIO IX.

In planam superficiem KL incidat ex A species, sive lux sub figura quacumque ABQD, quæ reflectatur per viam solidam BQDMPN. In peripheria basis incidentiæ BQD sume quodvis punctum Q. Deinde per A & Q seca solidam reflexionis viam ABQDMPN, plano ad K L recto, faciente in K L sectionem OG, in superficie autem viæ solidæ reflexionis sectiones AQ, QP.

Fig. 16.

Dico angulos AQO, PQG æquales esse.

Demonstr. Quoniam ex hypothesi planum AQP est rectum plano reflectenti K L, per 1. hujus radij A Q radius reflexus erit in plano AQP. Rursum quia radius incidens A Q, est in superficie lucis incidentis, etiam reflexus ipsius radius, est in superficie lucis reflexæ. Quare cùm radij AQ reflexus radius sit & in plano AQP, & in superficie BQDMPN, necessariò est communis utriusque sectio, quæ est Q P per hypothesim. Cùm igitur radius A Q reflectatur per radium Q P, erunt per 3. hujus, anguli AQO, & PQG æquales. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO X.

Quæ hactenus demonstrata sunt de superficiebus æqualiter extensis, tam planis quàm curvis, cujusmodi sunt sphærica, conica, cylindrica, elliptica, parabolica, hyperbolica, & aliæ infinitæ, eadem omnia particulis superficierum asperarum conveniunt.

Nam asperitas omnis oritur à minutis superficieculis rectis, concavis, & convexis, inter se variè commixtis; neque enim alia superficiei inflexio præter jam enumeratas excogitari potest. Cùm igitur illa superficiecularum rectarum, convexarum, & concavarum mixtura nequeat in infinitum procedere; necesse est, ut particulæ omnes, quæ totius superficiei asperitatem componunt, singulæ sint vel rectæ, vel convexæ, vel concavæ. Quare superficies aspera nihil aliud est, quàm innumerabilium ac minutissimorum specillorum mixtura, quorum alia recta sint, alia cava, convexa alia, à quibus proinde singulis incidentes radij juxta leges hactenus demonstratas reflectantur.

Vide plura de his *Astronomiæ lib. 8.* in tractatu de luce & maculis Solis ac Lunæ *num. 2.*

PRO-

PROPOSITIO XI.

Radius obliquè in quodvis speculum incidens ad majoris anguli partes reflectitur ultra perpendicularem (CX) ex incidentiæ puncto erectam.

Fig. 17. 8. 9.

Linea reflectens, seu reflectentem tangens esto FG, in quam radius obliquè incidat AC sub acuto nimirùm angulo ACG. Dico eum reflecti ad perpendicularis partem alteram B. Aliàs enim angulus reflexionis (BCF) non posset æqualis esse angulo incidentiæ ACG.

PROPOSITIO XII.

Punctum reflexionis (C) in quovis speculo existit inter incidentiæ ac reflexionis perpendicula (AG, BN).

Fig. 18.

Detur primò speculum planum, & C punctum reflexionis cadat extra (si fieri potest) in F, & via reflexionis esto AFB. Tum verò radius incidens AF secabit BN in O. Quoniam igitur angulus incidentiæ AFG est *m* æqualis angulo reflexionis BFK, is verò major est interno *n* BNF; etiam AFG, seu OFN, major est quàm BNF, acutus recto: quod est absurdum. Quod si velis cadere in N, ut via reflexionis sit ANB, tum verò acutus incidentiæ angulus ANG æqualis est recto reflexionis angulo BNK: quod denuò absurdum est.

m Per prop 3. *n per* 32. 1.

Fig. 19. 20.

Detur deinde speculum sphæricum convexum, & in eo linea reflectens FCG. Objecti punctum in A, oculus in B: perpendiculares ad speculum BNZ, AGZ. Dico C punctum reflexionis ex A in B versari inter cathetos AGZ, BNZ. Sit enim (si fieri potest) extra in F, ducanturque tangens KFL, & ex centro cathetus ZFP. Hæc necessariò cadet ultra BNZ. Cùm igitur radius incidens AF, per 18. reflecti debeat ultra cathetum ZFP versus O, non poterit reflexio pertingere in B. Ac proinde reflexionis punctum nequit esse extra arcum NCG. Eodem modo ostendam non posse incidere in puncta G, vel N. Igitur intra arcum NCG existat necesse est: quod erat demonstr.

De concavis idem commodius demonstrabitur lib. 3.

PROPOSITIO XIII.

In speculo quocumque angulus (ACB) ab radio incidente & reflexo comprehensus, secatur bifariam ab ea, quæ ad reflexionis punctum (C) perpendicularis est speculo.

Fig. 18. 8. 9. 10. 11.

Linea reflectens aut reflectentem tangens esto FG. Incidentiæ & reflexionis anguli ACG, BCF æquales *a* sunt. Anguli autem XCG, XCF sunt recti, adeoque æquales per hypothesim. Ergo etiam reliqui XCA, XCB æquales sunt. Ergo ACB, à perpendiculari XC secatur bifariam.

a Per p. 3.

Corollarium.

Hinc patet cùm anguli circa perpendicularem ACX, BCX, æquales existunt, reflexionem peragi viâ ACB in speculo quocumque.

Cùm enim etiam æquales sint XCG, XCF, utpotè recti, patet reliquos ACG, BCF æquales fore. Ergo per 3. 4. 5. reflexio fiet viâ ACB.

PROPOSITIO XIV.

Ab uno speculi cujusvis puncto (A) non possunt reflecti radij duo (BA, CA) ad punctum unum (D).

Fig. 20.

Linea reflectens, aut reflectentem tangens esto FN. Si fieri possit, quod propositio negat, erunt incidentiæ anguli tam BAF, quàm CAF æquales *b* uni reflexionis angulo DAN; ac proinde BAF, CAF æquales inter se, pars & totum. Non igitur &c.

b per 3 4 5.

PROPOSITIO XV.

Radius unus (DA) in speculo quocumque non reflectitur in duo puncta (B, C).

Fig. 20.

Linea reflectens, aut reflectentem tangens esto FN. Si fieri possit id, quod negat propositio, erit unus incidentiæ angulus DAN æqualis duobus *c* reflexionis angulis CAF, BAF. Ergo etiam hi sunt æquales, pars & totum. Non igitur &c.

c per 3. 4 5. *hujus.*

PROPOSITIO XVI.

In planis & convexis speculis non possunt ex puncto uno (A) duo radij (AC, AP) reflecti ad unum punctum (B). Sive non possunt duo puncta (A, B) reflecti ad invicem à pluribus speculi plani aut convexi punctis, quàm ab uno.

Fig. 21. 22.

Ducantur perpendiculares AGZ, BNZ, & radij ambo AC, AP (si fieri potest) reflectantur in B. Per 12, reflexionum puncta C, P cadunt intra G, N. Angulus autem ACG æqualis est *i* angulo BCN. Atqui ACG quia perpendiculari AGZ vicinior, est major angulo APG. Ergo etiam BCN est major quàm APG. Atqui APG æquatur *m* BPN. Ergo etiam BCN major est quàm BPN: quod est absurdum; angulus enim BCN, utpote remotior à perpendiculari BNZ, minor est quàm BPN, Non igitur &c.

i Per 3. & 4. *m per* 3 & 4.

In concavis speculis posse duo puncta reflecti ad invicem à pluribus punctis quam uno patebit ex lib. 3.

PROPOSITIO XVII.

In planis & convexis speculis, si plura puncta, ut A, B, ad unam incidentiæ cathetum existentia, ad unum visum C reflectantur, punctum A à speculo remotius, reflectetur à speculi puncto O distante minùs à visu C quàm punctum Q, à quo reflectitur punctum B speculo vicinius.

Fig. 26. 25.

Demonstr. Reflectatur enim, si fieri potest, in puncto remotiore, putà N. manifestum est AN occursuram rectæ BQ in X. Ergo punctum X reflectetur ex N in C, & quia idem punctum etiam est in recta BQ, reflectetur etiam ex Q in C. Quod est absurdum per *prop.* 16. hujus.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 24. 23.

In planis & convexis speculis, si lineæ AB extremitates reflectantur ad visum C à speculi punctis O, Q, tota AB ad visum reflectetur à tota linea OQ.

Quomodo se ista habeant in concavis patebit ex lib. 3.

DEmonstratio. Accipiatur, rectæ BA, punctum quodlibet N, &, si fieri potest, reflectatur extra QO in M, vel V. Manifestum est NM, NV occursuras rectis BQ, AO in D & X, adeoque punctum D reflectetur ex M in C & ex Q in C, item punctum X reflectetur ex O in C, & ex V in C: quod absurdum est per 16. hujus.

PROPOSITIO XIX.

In omni speculo plano ac convexo rectæ lineæ ad speculum perpendicularis est imagini suæ indirectum.

CErtum est experientiâ, quam centies exploravi. Qui id in sphæricis convexis & cavis negant contingere, eos opinor vel experimentum non sumpsisse, vel imperitè & oscitanter. Cùm enim recta ad sphæricam superficiem perpendicularis nulla sit, nisi ea, quæ producta transit per centrum, oportebit longitudinem, quam in speculo vis indirectum apparere, ita speculo obvertere, ut si produceretur per centrum transiret. Quâ in re nisi cura adhibeatur, cùm facilè errari possit, non erit mirum, siquis fallaci deceptus experimento fidem deneget experimento vero.

Cur verò semper perpendicularis ad speculum fit imagini suæ indirectum, hæc esse ratio videtur. Cùm perpendicularis recta in nullam speculi partem magis inclinet, quàm in aliam; nihil etiam est, cur imago in ullam partem magis quàm in aliam inclinet, ac proinde unam cum prototypo suo debet rectam lineam efficere.

PROPOSITIO XX.

In omni speculo plano & convexo unumquodque punctum objecti, apparet in suo catheto incidentiæ.

Fig. 27. 28. 29.

INspiciantur tria schemata ad marginem indicata; quarum prima speculis planis inservit, altera sphæricis convexis, tertia sphæricis concavis.

Oculus esto in A, objecti punctum F, ejus incidentiæ cathetus FBZ. Dico punctum F apparere in catheto F B productâ. Statuatur enim inter punctum F & speculum stylus quispiam ad speculum perpendicularis, repræsentans cathetum F B. Imago hujus styli, ex. gr. B G, erit ipsi stylo indirectum per præcedentem, hoc est stylus & imago unam conficient rectam lineam speculo perpendicularem FBG. Cùm igitur punctum F per constructionem sit in extremitate styli, etiam imago puncti F erit in G puncto extremo imaginis styli; ac proinde in catheto, seu perpendiculari F B productâ.

Vera est propositio etiam tum, quando in cavis speculis objectum apparet antè speculum.

Quousque veritas hujus assertionis se extendat in cavis speculis, patebit ex dicendis lib. 3.

PROPOSITIO XXI.

In omni speculo objecti punctum unumquodque apparet in radio reflexo.

Fig. 27. 28. 29.

ESto objecti punctum F, quod ad oculum positum in A sui speciem propaget viâ reflexâ FDA. Dico punctum F apparere in radio reflexo AD, producto quidem si punctum appareat post speculum, in non producto, si (quod in cavis speculis potest accidere) appareat ante speculum.

Est certum experientiâ: si enim interponatur quidpiam quod intercipiet lineam jungentem punctum reflexionis & oculum, illicò disparet imago puncti F; quod non contingeret, si imago non existeret in rectâ lineâ per A & D incedente, hoc est in radio reflexo A D. Ratio est; quia res apparent in radio, qui visus organum immediatè afficit. Is verò cùm sit radius reflexus, secundùm ejus directionem, hoc est in eo, objecta apparere necesse est.

PROPOSITIO XXII.

In omni speculo plano & convexo objecti punctum unumquodque non alibi apparet quàm in concursu radij reflexi cum catheto incidentiæ.

ESto punctum F visum ab oculo A viâ reflexâ FDA: cathetus incidentiæ sit FBZ, cum quâ radius reflexus DA concurrat in G. Dico punctum F oculo A apparere in G.

Fig. 27. 28. 29.

Id verò ex jam præmissis manifestum est. Nam per 20. punctum F apparet in catheto FBZ, & per 21. apparet etiam in radio reflexo A D. Necesse est igitur ut appareat in utriusque concursu G.

Hoc theorema totius Catoptricæ fœcundissimum est, ex quo ferè omnia speculorum planorum & convexorum phœnomena demonstrantur, ut ex toto libro secundo, ac tertio fiet manifestum. Unde vicissim ejusdem veritas egregiè stabilitur, cùm id falsum esse non possit, quod phœnomenis omnibus, nullo excepto, mirabiliter consentit.

Vtrum verò & quando locum habeat hæc propositio in cavis speculis, planum fiet ex dicendis lib. 3.

FINIS LIBRI PRIMI.

CATOP-

CATOPTRICÆ
LIBER SECUNDUS
DE
PLANIS SPECULIS.

EXpositis primo Libro generalibus principijs ac fundamentis Catoptricæ, ad singulas speculorum species gradum facio. Et quando omnium simplicissima sunt plana, horum tractationem hoc secundo libro complectar, convexis & concavis in tertium librum rejectis.

AFFECTIONES PRIMÆ PLANORVM SPECVLORVM.

PROPOSITIO I.

In planis speculis unius objecti tantùm una est imago non solùm respectu unius Oculi, sed etiam utriusque.

Fig. 1. a Per 14. 1 Catop. b Per 22. 1 Catop.

ESto objectum BGF, & quodvis in eo punctum F, Oculus autem in A, Linea reflectens KL. Ex puncto F ad Oculum una *a* tantùm datur reflexio FEA, unusque solùm radius reflexus EA. Cùm igitur in concursu Q reflexi radij AE, cum FI incidentiæ catheto *b* appareat punctum F, liquet unius puncti F unam tantùm esse imaginem Q. Eodem modo ostendam punctorum reliquorum G, B, non nisi singulas singulorum imagines esse S, P. Ergo totius objecti BGF in planis speculis non nisi una est imago (PSQ) respectu unius Oculi: quod erat primum.

Esto deinde alter Oculus in D, ad quem species puncti F reflectatur viâ FCD, & radius reflexus DC productus concurrat cum FI catheto incidentiæ in R, prior autem concurrebat in Q. Patebit ex demonstratione propositionis sequentis tam QI, quàm RI esse æquales ipsi FI. Ergo QI, RI æquales sunt inter se, adeoque reflexi radij AE, DC cum incidentiæ catheto FI, in uno puncto concurrunt. Ergo utrique Oculo A, D in uno loco punctum F apparet. Ergo &c.

PROPOSITIO II.

Objectum eo post planum speculum apparet intervallo, quo distat antè speculum.

Fig. 1. a Per 22. 1 Catop. c Per 3. 1. Catop. d Per 15. 1. e Per 26. 1

OBjectum esto BGF, in quo designetur quodvis punctum B, speciem reflexè ad Oculum A derivans viâ BCA. Perpendiculum incidentiæ sit BK, cum quo radius AC concurrat in P. Apparebit *a* igitur B in P. Jam quia in triangulis KBC, KPC, latus KC commune est, & duo anguli æquales, (nam ad K recti sunt, & BCK *c* æquatur ACE, hoc est *d* KCP) erunt BK, PK *e* æquales, ac proinde P imago puncti B tanto est intervallo post speculum, quanto B ante speculum. Idem eodem modo demonstrabitur de imagine S cujuslibet puncti G in objecto designabilis. Ergo imago tota PSQ eo distat intervallo post speculum, quo objectum BGF ante speculum. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO III.

In plano speculo distantia imaginis ab Oculo, viæ reflexionis æqualis est.

Fig. 1. f Per 26. 1.

COnstruantur eademque in præcedenti, Quoniam in triangulis KBC, KPC latus KC commune est, & duo anguli æquales, ut in præced ostensum est, erunt *f* BC, PC æquales: additâque communi CA, erit PA distantia imaginis P ab Oculo A, par viæ reflexionis BCA. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO IV.

Imagines in planis speculis sunt objectis æquales, & similes, & similiter positæ.

Fig. 1. a ex 22. 1. Cat. b Per 15. 1 c Per 3. 1. Catop. d Per 13. 1 e Per 15. 1 f Per 3. 1. hujus.

OBjectum esto quodcumque BGF Oculo A apparens in PSQ. Manifestum est *a* omnes radios reflexos AC, AO, AE cum perpendiculis incidentiæ BK, GN, FI, concurrere in imagine PSQ, quæ ex illis concursibus determinatur. Deinde ex 17. 1. *Catopt.* patet eundem esse ordinem punctorum reflectentium C, O, E, qui est punctorum objectivorum BGF. Ex quo liquet imaginis punctum P respondere objecti puncto B, & S ipsi G, & Q ipsi F; ac proinde eundem esse situm imaginis qui objecti, quod erat ex demonstrandis alterum. Jam verò, quia angulus PCK æquatur *b* angulo ACL, hoc est *c* angulo BCK, etiam reliqui *d* PCE; BCE æquales erunt. Eodem modo ostendam singulos angulos SOE singulis GOE æquales esse. Deinde angulus QEC *e* æquatur angulo AEL; hoc est *f* angulo FEC: eodemque modo demonstrabimus singulos SOC singulos GOC esse æquales. Est autem & demonstratum in præced. singulos radios PC, SO, QE æquari singulis incidentiæ radijs BC, GO, FE. Liquet ergo pyramidis Catoptricæ PAQS, segmentum SPCEQ esse simile & æquale, similiterque positum viæ incidentiæ GBCEF, adeoque etiam segmenti basim PSQ, ipsam videlicet imaginem, objecto BGF, quod viæ incidentiæ basis est, debere similem esse & æqualem: quod restabat demonstrandum.

Corol-

Corollarium.

Plana specula objecta sibi parallela & inclinata non invertunt. Patet ex demonstratis hic.

PROPOSITIO V.

In planis speculis dextra apparent sinistra, & contra.

Fig. 1. Cum intueris quempiam ad te conversum ejus dextra respondet tuæ sinistræ, & ejus sinistra dextræ tuæ: ac proinde ut dextra appareat dextra, debet ea respondere tuæ sinistræ. Cùm verò teipsum contemplaris in speculo, dextra imaginis dextræ tuæ respondet; atque hoc est dextram apparere sinistram.

Esto igitur objectum BF, in quo dextra sit B, sinistra F, & constructis iisdem quæ in præcedenti, imago sit PSQ. Cùm igitur *a* partes imaginis objecti partibus ordinatim respondeant, punctum imaginis P refert objecti punctum dextrum B, & Q sinistrum, adeoque P est imaginis dextra, Q sinistra. Quando igitur spectator ad speculum se convertet, ejus dextra respondebit imaginis dextræ P, hoc est objecti dextra B in speculo visa, illi apparebit sinistra. Quod erat propositum.

a Per præc.

PROPOSITIO VI.

Objecti (BF) plano speculo perpendiculariter obversi, punctum (F) speculo vicinius, apparet etiam vicinius post speculum (in N) quàm punctum objecti remotius (B).

Fig. 2. 3. Linea speculi reflectens sit G L, visus in A. Per *coroll. 1. p. 17. 1. Catop.* punctum F reflectitur à puncto E remotiori à visu A, B verò à viciniori C. Productis ergo radijs reflexis usque dum concurrant cum catheto BFG in N, & K, apparebit F propiùs speculo in N; B verò remotius in K. Quod erat propositum.

Corollaria.

Hinc patet.

1. Cur arbores, ædificia &c. ad ripam fluminis sita appareant inversa.

2. Cur in speculo infrà suprave Oculum parallelè ad horizontem constituto, teipsum aliosque videas capite deorsum & pedibus sursum.

3. Cur in speculo ad horizontem parallelo, si infrà Oculum est tabulatum, vel cælum appareat deorsum; si verò suprà Oculum, cur pavimentum seu terræ superficies appareat sursum.

PROPOSITIO VII.

In plano speculo ad angulum semirectum inclinato, teipsum videbis horizonti parallelum.

Fig. 4. Horizontem repræsentet NC, cui longitudo staturæ tuæ perpendiculariter insistens esto BAC; Oculus verò A. Angulum cum horizonte semirectum CND, faciat recta ND, concurrens cum C B in D; ducaturque D I parallela horizonti CN. Tum à punctis B, A, C ducantur ad D N perpendicula incidentiæ BEF, AGH, CKI, ac demùm rectæ FA, IA secantes rectam ND in O & P.

Dico si speculum statuatur in PO, staturam tuam BC, Oculo tuo A apparituram in FI, horizonti videlicet parallelam.

Ducantur enim CP, & BO. Quoniam ID, NC sunt ex constr. parallelæ, alterni anguli IDN, & N æquales *a* erunt, unde cùm N per hyp. semirectus sit, etiam IDN semirectus erit. Et quia *b* in triangulo DNC angulus C rectus est, & N semirectus, etiam *c* reliquus CDN semirectus est, ac proinde æqualis ipsi IDN. Quoniam igitur in triangulis IKD, CKD anguli tam ad D, ut jam ostendi, quàm ad K per constr. æquales sunt, latus verò KD utrique commune, etiam *d* IK, CK æquales erunt. In triangulis igitur IPK, CPK, quia latera IK, KP, æquantur lateribus CK, KP, anguliquè ad K æquales sunt, utpotè per constr. recti, anguli quoque *e* IPK, CPK æquales erunt. Atqui IPK par *f* est GPA. Ergo etiam CPK æqualis est GPA. Ergo species puncti *g* C reflectitur ad Oculum A viâ CPA, radiusque reflexus est PA: qui quia concurrit cum incidentiæ perpendiculo CK in I, punctum C Oculo A apparet in puncto I, quod per constructionem est in parallelâ DI. Eodem prorsus modo demonstrabitur speciem puncti B reflecti ad Oculum A viâ BOA, ipsumque B Oculo A apparere in F. Ergo statura tota B C apparet in *o* tota I F Oculo A, ipse autem Oculus A apparebit sibi ipsi in H. Totam igitur staturam tuam B C videbis in F I Horizonti parallelam. Quod erat demonstr.

a Per 27.1
b Per hyp.
c Per 32.1
d Per 26.1
e Per 4.1.
f Per 15.1.
g Per 3 1. Cat.
o Per p. 18.1. Cat.

PROPOSITIO VIII.

Fieri potest, ut in plano speculo te ipsum quasi volantem conspicias.

Ptolomæus *lib. 2. prop. 6. Catoptr.* & Vitello *lib. 5. prop. 59.* duo specula adhibent, cùm sufficiat unicum, ut ex *theoremate* nostro præcedenti jam ostendam.

Fig. 5. Linea horizontalis esto NZ, cum quâ angulum semirectum constituat recta infinita NX. Statura se intuentis sit primò in CB, concurrens cum NX in D, ejusque Oculus in A. Per D ducatur DI parallela ad NC. Ex B autem & C ducantur ad ND perpendiculares BF, CI, atque ex I & F ad Oculum A rectæ IA, FA secantes ipsam ND in P & O. Speculo constituto in PO, videbis CB, hoc est teipsum, sublimem in I F horizonti parallelum, ut *prop. præced.* demonstratum est.

Procede deinde ex C in *c* versùs speculum, & statura tua jam sit in *cb* occurrens infinitæ NX in *d*, Oculus verò sit in *a*. Per *d* ducatur rursum *di* parallela ad NC. Ex *b* autem & *c* ad NX perpendiculares emittantur *bf*, *ci*, atque ex *i* & *f* ad Oculum *a* rectæ *ia*, *fa* secantes ipsam NX in *p* & *o*. Si speculum statuatur in *po*, videbis rursum *bc*, teipsum nempè, sublimem in *f i* & horizonti parallelum, ut in præcedenti demonstravimus. Quare si vitra specularia disponantur per totum spatium *pod*PO, & ex *bac* retrocedas usque in BAC, conspicies te moveri situ semper ad horizontem parallelo, ac proinde si brachia extendas atque agites, quodammodo sursum evolantem. Verùm quia, ut dicetur *prop. 10*, simul etiam pavimentum CN, cui insistis, erectum apparet, imò & incessus ipse pedum, oportebit visum quantùm fieri poterit inde avertere, atque eum dirigere potissimùm versùs brachia & caput imaginis: sic enim volantis illa species minùs interturbabitur.

Vitello

Vitello (ut dixi suprà) cùm frustra binis speculis utitur, tum insuper paralogisat in loco imaginis per bina specula visa assignando. Errorem visâ propositione nostrâ 27, facilè lector deprehendit, si ipsum adeat.

PROPOSITIO IX.

In speculo ad angulum semirectum inclinato, objecta quævis suprà terram erecta, apparent terræ parallela.

Fig. 6.

SImilis est demonstratio ei quam *prop.* 7 attulimus. Linea terræ esto NC, & suprà eam perpendicularis longitudo EC, Oculus ubivis in A. Ducatur infinita N D faciens cum N C angulum semirectum DNC, eique CE occurrat in D. Per D duc infinitam D I parallelam ad NC, ad quam ex E & C duc EKL, CBI perpendiculares ipsi ND; tum ex L, atque I ad Oculum A jungantur LA, IA secantes ND in O & P.

Dico, si speculum planum ponatur in PO, longitudinem CE Oculo A apparere in I L parallelam horizonti.

Ducantur enim EO, CP. Cùm ID, NC sint parallelæ, anguli IDN, DNC æquales *a* sunt. Quare cùm DNC sit *b* semirectus, etiam IDN erit semirectus. Et quia *c* DCN rectus est, DNC verò semirectus, etiam *d* CDN erit semirectus, adeoque par ipsi IDN, seu LDN. Sunt autem *i* etiam recti, adeoque æquales LKD, EKD, & latus DK duobus triangulis commune. Ergo LK, KE æquales *m* sunt. Cùm igitur LK, KO æquentur ipsis EK, KO, & anguli LKO, EKO æquales sint, utpotè recti, etiam EOK *n* æqualis erit LOK, hoc est *o* ipsi AOP. Ergo punctum E ad Oculum A *r* reflectitur viâ EOA, & apparet in *s* puncto L parallelæ D I, in quo per constr. radius reflexus AO concurrit cum catheto incidentiæ EK. Eodem modo ostendam punctum C ad Oculum A reflecti viâ CPA, & apparere in I. Ergo tota E C apparet in tota L I parallela terræ. Quod erat demonstr.

a Per 27 1
b per constr
c per hyp.
d per 32 1.
i per constr.
m per 26. 1
n per 4. 1.
o per 15. 1.
r per 3. 1. Catop.
s per 22 1. Catop.
m per 18 1 Catop.

PROPOSITIO X.

In plano speculo ad angulum semirectum inclinato, Oculo infrà ejus planum constituto superficies terræ, apparet perpendiculariter erecta sursum: Oculo autem suprà speculi planum existenti, cælum & laquearia apparent erecta deorsum.

Fig. 6.

COnstructio & demonstratio eadem quæ præcedentis. Si enim pro primâ parte figuram sic invertas, ut CD sit deorsum, repræsentans terræ superficiem, ipsius portio C E reflexa à speculo PO apparebit Oculo A in I L sursum erecta. Si autem figuram ita invertas ut I N deorsum spectans terram referat, C D verò sursum sit terræ parallela, portio illius C E reflexa à speculo P O Oculo A apparebit in I L erecta deorsum.

PROPOSITIO XI.

In duobus planis speculis videbis te ipsum in oppositas partes eodem tempore moveri.

Fig. 7.

POnantur ad angulum rectum specula A, B, & ducatur GF parallela speculo B. Si recedis à speculo A per parallelam GF, imago tua apparens in speculo A pari passu post speculum retrocedet versùs X; imago autem apparens in speculo B, te sequetur versus E. Simul igitur moveri te conspicies in partes oppositas X & E: quod erat propositum.

PROPOSITIO XII.

In reflexione plana perpendicula incidentiæ (AE, BF) sunt ipsorum à reflexionis puncto (C) intervallis (EC FC) proportionales.

Fig. 8.

IN triangulis X, Z, anguli BCF, ACE æquales sunt per 3. *lib.* 1. *hujus*, & BFC, AEC etiam *a* æquantur utpotè recti per hyp. Ergo *a* reliqui B, & A *b* æquales sunt. Triangula igitur X, Z *b* similia sunt, ac proinde E C est ad C F, ut AE ad BF. Quod erat demonstr.

a Per 32. 1
b Per 4. 6.

Corollarium.

Ex hoc theoremate elicitur praxis mensurandi altitudinem turris, speculi adminiculo, modò detur turris distantia. Altitudo turris esto B F & species apicis B ad Oculum A reflexa perveniat viâ BCA. Notum fiat perpendiculum reflexionis A E & intervallum E C. Distantia turris C F nota est per hyp. Tribus igitur notis EC, CF, AE reperiatur quarta proportionalis, dabit ea altitudinem B F.

Ut nota fiat E C, punctum reflexionis C prius erit determinandum, quod sequenti theoremate docebitur.

PROPOSITIO XIII.

Datis puncto (B) Oculo (A) linea recta reflectente (EG), punctum reflexionis invenire.

Fig. 9.

EX puncto B duc ad EG perpendiculum BQF, sic ut B Q, F Q sint pares. Tum ab F ad Oculum A ducatur FA, secans E G in O. Dico O esse punctum reflexionis.

Ducatur enim B O. Quoniam in triangulis X, Z duo latera B Q, Q O, æquantur duobus F Q, Q O, anguliqüe his contenti BQO, FQO, sunt pares, utpotè recti; etiam anguli BOQ, FOQ, *a* æquales erunt. Sed FOQ æquatur *b* AOG. Ergo etiam BOQ ipsi AOG æqualis erit. Ergo reflexio ex B in A fit per viam BOA, adeoque reflexionis punctum est O.

a Per 4. 1.
b Per 15. 1.

Idipsum aliter efficies per *præced*.

Mechanicè invenietur punctum reflexionis, si digito aut stylo designetur punctum speculi, quod directè interjacet Oculum A inter & imaginem F. Hoc enim est ipsum illud reflexionis punctum C suprà Geometricè inventum; cujus probatio etiam inde est manifesta, quod eo tecto imago repentè disparet.

Sic etiam proponi potuit Problema: *Pilam ex loco dato* (B) *in locum datum* (A) *reflectere.*

PROPOSITIO XIV.

Partem plani speculi reflectentem determinare.

Fig. 10.

Detur primùm in objecto linea A B, ipsius putà longitudo. Inveniantur per *præced.* puncta C, D, ad quæ reflectuntur in Oculum E species punctorum A, B extremorum. Recta C D, est linea speculi se tota reflectens. Patet ex *prop.* 18. *lib.* 1. *Catoptr.*

Si objectum datum sit superficies aut corpus, in ambitu ejus designentur quotlibet puncta, quorum singulorum *a* inveniantur reflexionis puncta, hæc superficiem reflectentem determinabunt.

a per præc.

QUÆ PROPORTIO IN PLANIS SPECULIS EXISTAT SUPERFICIEI REFLECTENTIS AD OBIECTUM.

Pulchra est hujus rei disquisitio, & cum egregijs planorum speculorum affectionibus connexa; quam proinde vehementer miror ex Opticis nullum vel leviter attigisse.

PROPOSITIO XV.

Radij (BD, PO, CE) à plano speculo in unum punctum (F) reflexi, si post speculum producantur, concurrunt cum perpendiculo incidentiæ (FG) in eodem puncto.

Fig. 11.

Radius PO concurrat cum FG in H, & linea reflectens esto GK. Angulus FOG per 3. *lib.* 1. hujus æquatur angulo POK, hoc est *a* angulo GOH: anguli quoque OGF, OGH æquantur, utpote recti, & OG utrique triangulo latus commune est. Ergo *b* HG, FG æquantur. Concurrat deinde radius CE cum FG in I, & linea ejus reflectens sit GR. Angulus FEG æquatur *c* angulo CER, hoc est *d* angulo IEG: anguli quoque FGE, IGE æquantur, quia recti; latus verò EG utrique triangulo commune est. Ergo *e* IG, FG æquantur inter se. Quoniam igitur tam HG, quàm IG æquantur eidem FG, inter se æquales erunt. Ergo puncta concursuum H, & I, eadem sunt. Quod erat demonstrandum.

a Per 15. 1
b Per 26. 1
c Per 3. 1. Catop.
d Per 15. 1
e Per 26. 1

Corollarium.

Ex demonstratione patet etiam HE, FE, & HO, FO, & HD, FD æquales esse per 26. 1.

PROPOSITIO XVI.

Radij à superficie (BPC) plano speculo parallela, incidentes, suis quique reflexis sunt proportionales.

Fig. 12. & 13.

Accipiatur incidens quivis radius CE, cum quo cæteri omnes comparentur, ut PO, BD & alij infiniti, ducantur rectæ PC, & OE. Quoniam superficies BPC, DOE sunt parallelæ, erit per 17. 11. ut HE ad EC, sic HO ad OP. Pari ratione ostendam esse ut HE ad EC, sic HD ad DB. Ergo HO est ad OP, ut HD ad DB. Atqui per *corol. præc.* HE, HO, HD æquantur radijs reflexis FE, FO, FD. Ergo ut FE ad EC, sic FO ad OP & FD ad DB. Quod erat demonstr.

Corollarium.

Radij reflexi ad suas reflexionum vias eandem omnes habent proportionem.

Nam cùm sit FE ad EC, ita FO ad OP, & FD ad DB, etiam compon. erit ut FE ad viam FEC, ita FO ad viam FOP, & FD ad viam FDB.

PROPOSITIO XVII.

Cùm longitudo (BC) plano speculo parallela, ad unum punctum (F) reflectitur, linea reflectens (DE) ad ipsam (BC) eam habet proportionem quam radius quilibet reflexus (DF) ad suam reflexionis viam (BDF).

Fig. 12. & 13.

Producantur longitudinis datæ radij extremi BD, CE, donec concurrant cum perpendiculo incidentiæ FG: concurrent autem per 15 in uno puncto, putà in H. Quoniam igitur ex hyp. BC est parallela ad DE, erit DE *a* ad BC, ut HD ad HB, hoc est per *coroll. p.* 15 ut FD radius reflexus ad viam reflexionis FDB. Quod erat demonst.

a per coroll. 2. p. 4. lib. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Cùm species superficiei (BPC) plano speculo parallelæ, ad unum punctum (F) reflectitur, proportio superficiei reflectentis (DOE) ad ipsam (BPC) est duplicata proportionis, quam habet radius quivis reflexus (DF) ad reflexionis viam (BCF).

Fig. 12. 13
a Ex elem. conic.
b ex demonst. in lem. 1. ante 5. 12.
c Per 2. 12. vel per 20. 6.

Superficies reflectens DOE est Sectio coni seu pyramidis Catoptricæ BPIC ad basim BPC parallela. Ergo DOE similis est objecto BPC: & quidem si BPC circulus est, etiam DOE circulus erit; si BPC rectilineum planum est, etiam erit DOE, & *b* illi simile. Ergo proportio DOE ad BPC est duplicata proportionis *c* DE ad BC; hoc est proportionis DI ad BI; hoc est (quia demonstratum in *corol. prop.* 15 DI æqualem esse DF) proportionis DF ad reflexionis viam BDF. Quod erat demonst.

PROPOSITIO XIX.

Ut in plano speculo te ipsum à vertice ad pedes contemplari possis, ejus longitudo debet esse tuæ dimidia.

Fig. 14.

Planum speculum in quo te à capite ad pedes usque conspicias, esto NP: statura tua BF speculo parallela: Oculus in A: linea reflectens CO. Demonstrandum est hanc esse dimidiam longitudinis tuæ BF.

Ab Oculo A duc perpendiculum AGL, cum quo radius BC concurrat in L, & radius FO in K: ducanturque AC, AO. Quoniam CO ex hypothesi ad Oculum A reflectit speciem puncti B, via reflexionis erit BCA, ac proinde angulus ACG *a* æqualis est angulo BCX, hoc est *b* angulo LCG. Est verò etiam AGC æqualis LGC, cùm ambo recti sint & constr. latusque GC utrique triangulo commune. Ergo AG, LG, *c* æquales sunt, ac proinde AL dupla est GL. Cùm igitur in triangulo ALB, recta GC sit *d* paral-

a Per 3. 1. Catop.
b Per 15. 1
c Per 26. 1
d Per hyp.

e per corol. 1. p. 4. l. 6. parallela ad BF, ideoque *e* ut AL est ad GL, ita AB sit ad GC, etiam AB dupla erit GC. Eodem modo ostendam AF esse duplam GO. Ergo tota BF longitudo tua dupla est totius CO, quæ est longitudo speculi reflectentis. Quod erat demonstr.

Aliter. Quoniam ob XZ & BF parallelas, angulus XCB *f* par est alterno B, & GCA alterno BAC, jamque supra ostensum est ipsos XCB, GCA æquales esse, etiam B & BAC æquales erunt. Ergo *g* AC, BC æquantur, adeoque AC radius reflexus, dimidius est viæ reflexionis BCA. Atqui GC *i* est ad AB, ut AC ad reflexionis viam ACB. Ergo etiam GC dimidia est AB. Eodem modo demonstrabitur GO dimidia esse AF. Ergo tota CO, longitudo videlicet speculi reflectentis, dimidia est longitudinis tuæ BF. Quod fuit demonstrandum. *f per 27. 1.* *g per 6. 1.* *i per 17.*

Idem adhuc aliter demonstrabitur ductis perpendiculis ex B, & F, vel ex C, & O.

Corollarium.

Eodem modo demonstrabitur ut te ipsum in speculo videre possis totum in latitudinem, speculi latitudinem debere similiter esse dimidiam tuæ.

PROPOSITIO XX.

Longitudines etiam aliorum objectorum plano speculo parallelorum, & æqualem cum Oculo distantiam à speculo habentium, ut totæ apparere possint in speculo, debet hujus longitudo esse illarum dimidia.

Demonstratur ut præcedens.

PROPOSITIO XXI.

Cùm teipsum aliaque objecta speculo parallela & eodem intervallo dissita quo tu, tota vides in speculo, portio specularis reflectens objecti subquadrupla est.

Fig. 14. Per 18 *hujus* superficies reflectens ad objectum proportionem habet duplicatam ejus, quam habet radius reflexus AC ad viam reflexionis BCA. Atqui in casu assertionis per demonstrata in 19 *hujus* proportio AC ad BCA eadem est quæ 1 ad 2, cùm radius AC dimidius sit viæ BCA. Ergo proportio superficiei reflectentis ad objectum in casu assertionis duplicata est proportionis 1 ad 2, ac proinde par proportioni 1 ad 4. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XXII.

Cùm teipsum in aliquo speculo vides præcisè totum, sive accedas, sive recedas, perges te semper totum videre.

Pari modo si objecta, quæ tecum æqualiter à speculo remota vides tota, tecum accedant vel recedant, perges semper videre tota.

Quod non habere locum in objectis quæ magis minùsve à speculo distant, quàm Oculus patebit ex *prop.* 23. & 24.

Tacquet Catoptrica.

Demonstr. Quocumque intervallo absis à speculo, semper linea reflectens, sive speculi longitudo, est dimidia *a* tuæ. Ergo semper sibi ipsi illa æqualis est. Pari modo quocumque intervallo absis à speculo, semper reflectens superficies est tuæ *b* subquadrupla, ac proinde semper æqualis sibi ipsi. Eodem discursu de aliis objectis speculo parallelis & æqualiter tecum dissitis, idipsum probabitur. Ergo speculum quod sufficit ut te tibi totum aliaque objecta tecum æqualiter remota à speculo exhibeat in aliquâ distantiâ, sufficit ut exhibeat in omni. Quod erat demonst. *a per 19. hujus.* *b per 21. hujus.*

PROPOSITIO XXIII.

Esto objectum BR ab Oculo in A totum præcisè visum in speculo CG. Si id manente Oculo propiùs ad speculum parallelè admoveatur, desinet videri totum ab Oculo A; & quò erit propinquius, eò pars ejus videbitur minor: semper tamen major dimidia longitudinis, & major quàm quarta superficiei. *Fig. 15.*

Quoniam objectum totum BR ex hyp. Oculo A totum apparet in speculo CG. Ergo viæ reflexionum, per quas species extremitatum B, & R perveniunt ad Oculum A, sunt BCA, RGA, ad speculi extremitates *o* terminatæ. Manifestum est si inter extremos incidentiæ radios BC, RG ducantur longitudines MQ, SI, has quoque ab Oculo A videri præcisè totas in eodem speculo CG; ac proinde eas, quæ hosce extremos radios excedunt, ut MT, SV, non *r* posse apparere totas. Atqui BR, si parallela speculo propiùs admoveatur, excedet necessariò radios extremos BC, RG; cùm enim CG per 20 hujus sit dimidia BR, adeoque ipsâ minor, etiam MQ minor erit quàm BR. Ergo patet si BR propiùs speculo admoveatur in MT, SV, Oculo A in speculo CG non amplius apparere totam. Deinde quia SI est minor quàm MQ, liquet etiam quò BR accedet propiùs ad CG, eò minorem ejus videri partem. Quia tamen MQ, SI, sive lineæ sint, sive superficies, semper majores sunt quàm CG; CG autem, si pro lineâ reflectente capiatur, sit dimidia lineæ BR *p*, si verò capiatur pro speculo, sit quarta pars superficiei objecti BR, semper ex objecti longitudine apparebit plus quàm dimidium, & ex superficie plus quàm pars quarta. Quæ erant demonstranda. *o per 18. 1. Catop.* *r ex eodem.* *p ex 20 hujus.*

PROPOSITIO XXIV.

Iisdem positis, quæ in præcedenti; si Oculo manente objectum longiùs removeatur, poterit in eodem speculo CG apparere totum, licèt augeretur in infinitum.

Producantur enim extremi incidentiæ radii CB, GR versùs P & H infinitè. Manifestum est *a* quidquid inter hos radios comprehenditur, ab Oculo A videri totum in eodem speculo CG. Et quia si versùs PH recedatur longiùs ac longiùs, inter radios jam dictos interponi potest longitudo quàcumque datâ major, liquet objectum BR si longiùs semper ac longiùs Oculo manente recedat, videri totum in eo- *Fig. 15.* *a ex p. 17. 1 Catop.*

dem speculo CG, licèt augeatur in infinitum. Quod erat demonst.

Quæ Theor. 23. & 24 dicta sunt, proponemus universalius in sequenti.

Objectum speculi adæquatum voco, quod apparet in speculo totum, & sic, ut imago totum præcise occupet speculum, cujus proinde nulla sit pars, quæ non reflectat.

PROPOSITIO XXV.

Ejusdem determinati speculi objectum adæquatum, si objecti augeatur distantia, fit quocumque dato majus: imminuta verò distantia, etiam ipsum minuitur quidem, semper tamen manet speculo majus.

SI primò objectum lineare, longitudo videlicet aut latitudo rei cujuscumque. Quò objectum longiùs à speculo removetur, Oculo immoto, eò major evadit proportio radiorum incidentium ad radios reflexos, sic ut ea tandem fiat quacumque datâ major. Quare etiam componendo proportio radij incidentis cum reflexo ad reflexum, hoc est proportio viæ reflexionis ad radium reflexum fiet quâcumque datâ major. Atqui a longitudo objecti speculo parallela est ad lineam reflectentem ut via reflexionis ad radium reflexum. Ergo proportio longitudinis objectivæ semper ejusdem in lineam reflectentem fiet quàvis datâ major. Ergo etiam ipsa longitudo, tota à speculo dato repræsentabilis præcisè, potest esse quàvis datâ major.

a per 17. hujus.

Deinde objectum esto superficies. Jam ostendi augendo distantiam, proportionem viæ reflexionis ad radium reflexum fieri quàvis datâ majorem. Ergo etiam proportio quæ illius duplicata est, nempè proportio b superficiei objectivæ semper ejusdem ad superficiem reflectentem, fiet quàvis datâ major. Ergo etiam superficies objectiva, adæquatum videlicet speculi objectum, fiet quàvis datâ major. Quæ erant demonst.

b per 18. hujus.

Similiter facilè demonstrantur reliqua in propositione asserta.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 15.

Datis Oculo (A), speculo (CG) & objecti longitudine (K) quæ longitudine speculi sit major, locum reperire, in quo longitudo data (KO) fiat objectum speculi adæquatum in longitudinem.

DUcatur ab Oculo A perpendicularis AZS, sic ut SZ, AZ æquales sint. Tum ex puncto S per speculi margines emittantur rectæ infinitæ SCP, SGH: fiatque ut CG ad NO differentiam longitudinis speculi CG & longitudinis datæ KO, ita SC ad quartam CP.

Dico, si longitudo data statuatur in P, inter radios CP, GH, speculo parallela, eam fore objectum speculi adæquatum in longitudinem.

Demonst. Ducatur PH, ad speculi longitudinem CG parallela. Jam sæpiùs ostensum a est, cùm perpendicularis AZS æqualiter utrimque producta est, æquari angulos AGZ, & HGX, item ACZ, & PCX. Ergo b species rectæ PH reflectitur ad Oculum A per viam inter extremos radios PCA, HGA interceptam, ac proindè est objectum speculi adæquatum, cùm à totâ speculi longitudine CG reflectatur. Atqui PH est æqualis datæ K; quod sic ostendo: per constr. ut CG, seu KN est ad NO, sic SC est ad CP. Ergo c etiam KN, seu CG, est ad KO ut SC ad SP, hoc est ut eadem CG est ad PH. Cùm ergo CG ad KO, & ad PH eandem habeat rationem, KO & PH æquales erunt. Liquet ergo quæsitum.

a in 13. & alibi.
b per 17. 1. Catop.
c patet ex corol. 2. p. 18. 5.
o per corol. 1. p. 4. 6.

DE REFLEXIONE AD MULTA PLANA.

PROPOSITIO XXVII.

Planis quotcumque positione datis (LD, DE, EM) dato quoque reflexionis principio (B) ac termino (A) puncta reflexionis (O, T, X) invenire.

Fig. 16.

HOc Problema unum est ex præcipuis Catoptricæ planæ.

In planis datis lineæ reflectentes sint, LD, DE, EM, quæ sunt in eodem reflexionis plano cum punctis datis B, & A. Ex B reflexionis principio ducatur ad LD perpendiculum BCF, sic ut BC, FC sint æquales. Item ex F ad ED productam duc perpendiculum FGH, sic ut FG, HG sint æquales. Rursum ex H ad ME productam duc perpendiculum HIK, sic ut HI, KI, sint æquales. Tum ex K ad reflexionis terminum datum A, duc KA, secantem ME in X; & ex H rectam HX, secantem DE in T; & ex F rectam FT, secantem LD in O. Dico reflexionum puncta esse O, T, X, ac proinde viam reflexionis esse BOTXA.

Quod si sectio X contingat inter E & I, aut sectio T inter D & G, Problema est impossibile.

Demonstr. Quoniam BC, FC perpendiculum utrimque æquale est, erit (quod jam a sæpè ostensum est) angulus BOC æqualis angulo TOD. Pari modo quia perpendiculum FGH utrimque æquale est, erit angulus FTG par angulo XTE. Denique quia perpendiculum HIK utrimque æquale est, etiam anguli HXI, AXM æquales erunt. Ergo b via reflexionis ex B in A (vel contra) est BOTXA. Quod erat quæsitum.

a in 13. & alibi.
b per 3. 2. Catop.

Corollarium.

Hinc patet ad quas datorum planorum partes specula sint applicanda, nimirùm circa O, T, X, ut Oculus A in speculo circa X posito, videat objectum B reflexum ad omnia specula.

PROPOSITIO XXVIII.

Distantia apparens objecti per reflexionem ad unum vel plura specula plana visi toti viæ reflexionis (BOTXA) æqualis est.

Fig. 16.

MAnentibus iisdem, quæ in præcedenti, species objecti B, ex B ita pervenit ad Oculum A, ac si veniret ex F, eò quòd BO, FO sint æquales, & FOT una recta. Rursum species ex F ita refertur ad Oculum A, ac si veniret ex H, quia iterum æquales sunt FT, HT, & HTX una recta. Ergo etiam species ita defertur ex B in Oculum A, ac si veniret ex H. Atqui si esset in H, appareret in K d quia perpendiculum incidentiæ HI cum radio reflexo AX con-

d per 22. 1. Catop.

concurrit in K. Ergo objectum B Oculo A apparet in K.

Atqui distantia KA æqualis est toti viæ BOTXA. Quod sic demonstr. Quoniam BO, FO, *i* æquales sunt additâ communi OT, erit via BOT æqualis FT. Rursum quia FT, hoc est (ut jam ostendi) via BOT, æquatur HT, *m* additâ communi TX, etiam via BOTX par erit HX. Quare cùm HX par *n* sit KX, etiam via BOTX ipsi KX æqualis est. Additâ igitur communi XA, erit via reflexionis, tota BOTXA æqualis KA. Quod erat demonstrandum.

i per cor. p. 15. *m ibid.* *n ibid.*

Corollarium.

Longè igitur alius est locus imaginis in plano (EM) speculo, dum species objecti B, in illud mediatè incidit, priùs nempè reflexa ad alia specula, quàm dum immediatè. Nihilominùs etiam hic cum quadam analogia verum est objectum apparere in concursu radij reflexi cum perpendiculo incidentiæ. Cùm enim ostensum sit speciem objecti B eodem modo allabi ad oculum A ex B & ex H, censeri potest objectum esse in H. Tum verò perpendiculum incidentiæ erit HI, cum quo in K concurrit radius reflexus AX.

PROPOSITIO XXIX.

Cùm res per plures reflexiones cernitur, dextra apparent sinistra, si numerus reflexionum est impar; si autem par fuerit dextra apparent dextra.

CUm enim per unam reflexionem dextra appareant sinistra juxta 5. *hujus*, manifestum est per duas reflexiones dextra apparere dextra, nam secunda reflexio restituit, quod prima converterat. Quod si accedat reflexio tertia, ea rursum convertet, quod restituerat secunda; & quarta restituet, quod converterat tertia, & sic deinceps.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 17.

Si in polygono quocumq; ordinato(F,G, H,I,K) ex lateris alicujus medio puncto(A) objecti species aut pila quæpiam dirigatur, in lateris vicini medium punctum (B); ad omnia latera polygoni reflexa, redibit in punctum idem (A): eritque reflexionis via polygonum simile ordinatum, priori inscriptum.

BIsecea etiam latera reliqua in C, D, E. Ducanturque præter AB jam ductam, rectæ BC,CD, DE, EA. Quoniam in triangulis P, Q, R, S, T anguli F,G,H,I,K sunt æquales, utpotè polygoni ordinati, & latera æqualis angulos ambientia æqualia sint, æquales erunt *a* anguli FBA, GBC; item GCB, HCD; item HDC, IDE; item IED, KEA. Ergo pila ex A incidens in B *b* reflectitur in C, & ex C in D, & ex D in E, & ex E in A: ac proinde via reflexionis est ABCDE.

a per 4. 1. *b per 3. l. 1. hujus.*

Quod autem via reflexionis sit polygonum regulare priori simile, sic demonstro. Quia triangula P, Q, R, S, T sibi mutuo æquiangula sunt per 1. partem, etiam sibi mutuo æquilatera erunt, ac proinde æquales sunt AB, BC, CD, DE, EA. Deinde, quia tres anguli ad B æquantur tribus ad C, & duo FBA, GBC, duobus GCB, HCD æquales sunt ex 1. parte, etiam reliqui ABC, BCD æquales erunt. Eodem modo ostendam omnes polygoni ABCDE angulos inter se esse æquales. Ergo polygonum ABCDE est ordinatum. Liquet ergo quæsitum

Corollarium.

Si in A ponatur oculus videbit seipsum per tot reflexiones unâ minùs quot sunt latera polygoni.

PROPOSITIO XXXI.

Oculo E, & objecto A positione datis, datum numerum speculorum ita disponere, ut objectum ad omnia specula reflexum in uno speculo videatur.

Fig. 17.

SUprà AE distantiam oculi & objecti describe polygonum ordinatum ABCDE, habens latera binario plura numero speculorum: ut, si dentur tria specula, describe pentagonum. Deinde angulum ABC objecto A proximum bisecet recta BV, & ponatur primum speculum in B perpendiculariter ad BV. Si eodem modo constituantur reliqua specula in C, & D; Dico oculum E in speculo HDI videre objectum A, reflexum ad tria specula in B, C, D, existentia.

Demonstr. Cùm BV sit recta speculo existenti in B, etiam planum ABCDE per BV ductum erit *a* rectum speculo in B existenti, ac proinde & alijs speculis eodem modo positis in C, & D. Ergo ABCDE planum reflexionis est, ejusque sectiones cum speculorum planis, sunt FG, GH, HI, quæ proinde sunt lineæ reflectentes. Restat ut probemus angulos ABF, CBG, &c æquales esse. Quoniam BV est perpendicularis plano speculi, etiam erit perpendicularis ad lineam *c* FG in plano speculi existentem. Quia igitur anguli FBV, GBV recti, adeoque æquales sunt, si auferantur æquales per constr. ABV, CBV, reliqui ABF, CBG æquales erunt. Eodem modo ostendam æquales esse BCG, DCH; & CDH, EDI. Ergo species objecti A reflectitur ex B in C, & ex C in D, & ex D ad oculum E. Quod erat quæsitum.

a per 18. 11. *c per def. 3. 11.*

Corollarium.

Hinc patet quomodo Oculo E videri possit objectum A, licèt murus interpositus directam visionem impediat.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 17.

Oculo (A) & objecto (E) positione datis, efficere ut distantia imaginis ab oculo, sit multiplex ad lubitum distantiæ datæ (AE) Oculi ab objecto.

Fig. 17.

EXempli grat. quadrupla. Super AE describe polygonum ordinatum, cujus denominator sit unitate major multiplo desiderato distantiæ datæ AE. In casu dato quoniam distantia imaginis petitur quadrupla ipsius AE, describendum erit super AE pentagonum. Angulis D, C, B, applicentur tria specula, ut in præcedenti prop. factum. Oculo A speculum in B positum intuenti apparebit imago objecti E, distans ab Oculo intervallo AE quater sumpto.

 Nam,

Nam, ut patet ex demonstratione præced. via reflexionis EDCBA, quatuor videlicet pentagoni latera, quæ reliqui AE quadrupla sunt. Atque per 28, distantia imaginis ab oculo viæ reflexionis æqualis est. Ergo etiam distantia imaginis ab oculo est quadrupla intervalli dati AE. Quod erat quæsitum.

PLANORUM SPECULORUM ÆQUIDISTANTIUM AFFECTIONES.

PROPOSITIO XXXIII.

Si duo plana specula sibi fuerint parallela, in singulis apparent unius objecti inter specula constituti duæ series rectæ imaginum infinitarum, in longitudinem infinitam excrescentes.

Fig. 18.

INter duo plana specula parallela, sint Oculus A, & objectum B positione data, per quæ transiens planum reflexionis, faciat in speculis lineas reflectentes ZE, XF: & per oculum A, ac objectum B ducantur perpendiculares ZX & RBK infinita. In hac fiat FG æqualis ipsi F B. Tum distantia speculorum E F duplicata, transscribatur ex G in H, & ex H in I, & ex I in K, & sic in infinitum. Pari ratione speculorum distantia EF duplicata, transferatur ex B in α; ex α in β; ex β in γ; & sic in infinitum.

Dico I. Oculo A, intuenti speculum XF, objectum B apparere in locis G, H, I, K, L, & alijs infinitis. Item in locis α, β, γ, δ, & infinitis, quantum videlicet vis specierum finita, per multiplicatas reflexiones sensim languescens, patitur.

Et in G quidem apparet objectum B per reflexionem unam: in H, per tres, in I, per quinque, in K per septem, & sic deinceps per numeros impares. At verò in α objectum B cernitur per reflexiones duas, in β per 4; in γ per 6; in δ per 8; & sic deinceps per numeros pares.

Dico II. Si E P fiat per E B, & distantia speculorum EF duplicata transscribatur ad partem alteram in infinitam FER, primò ex P, deinde ex B, Oculo A intuenti speculum ZE eadem omnia apparebunt.

Demonstratio.

Claritatis gratiâ eam in plura membra partiemur.

Fig. 19.

1. Rectis FH, FI, FK, & reliquis infinitis, æquales accipiantur FL, FM, FR, &c. Ostendam etiam EL, EM, ER &c. æquales fore, rectis EG, EH, EI &c. Per const. GH dupla est FE. Ergo FH (hoc est per const. F L) continet F E bis, & F G. Ergo E L continet F E semel & F G, ac proinde par est E G. Deinde quia FI par est c FM; FI autem d continet FE quater & F G; etiam F M continebit F E quater & FG. Ergo EM continet FE ter & FB. Atqui etiam EH continet e FE ter, & FB. Ergo EM æquatur EH. Pari ratione ostendam ER æquari EI, & sic deinceps in infinitum.

c per const. d per const. e patet ex const.

Fig. 20.

2. Rectis Fα, Fβ, Fγ &c. sumantur æquales FP, FR, FS &c. Ostendam etiam EP, ER, ES, ipsis EB, Eα, Eβ &c. æquales esse. Quia αB f dupla est FE, continebit Fα ipsam FE bis, minùs FB. Ergo & FP par i ipsi Fα, continet FE bis, minùs FB. Ergo EP continet FE semel, minùs FB. Atqui etiam EB æquatur FE, minùs FB. Ergo EP, & EB æquales sunt. Rursum, quia Bβ continet k FE quater, continebit Fβ, adeoque & FR l ipsi par, rectam FE quater, minùs FB. Ergo ER continet FE ter, minùs FB. Atqui etiam Eα continet FE ter, minùs FB, (nam Bα continet m FE bis, ac proinde Fα continet FE bis, minùs FB; ideoque Eα continebit FE ter, minùs FB). Ergo ER & Eα æquales sunt. Eodem planè modo demonstrabimus ES, & Eβ æquales esse, & sic in infinitum.

f per const. i per const. k per const. l const. m const.

Fig. 21.

3. His demonstratis, reliqua demonstratio omnis in promptu est. Nam quia per constr. perpendiculares FB, FG utrimque æquales sunt, & latus FC utrique triangulo commune, angulique BFC, GFC recti, ideoque æquales, erit n angulus BCF etiam par angulo GCF, hoc est o ACX. Ergo BCA est p via reflexionis, radiusque reflexus est AC: qui quia concurrit cum perpendiculo incidentiæ BF in G, objectum B q oculo A apparet in G.

n per 4.1. o per 15.1. p per 22.2. cat. q per 3.1. cat.

Fig. 22.

4. Quod etiam objectum B, Oculo A, appareat in H, per reflexiones tres, sic ostendo. Fiat rectæ FH æqualis FL: ducanturque rectæ AH secans XF in D; DL secans EZ in N; NG secans XF in O, ac demùm OB. Quoniam BF, GF æquantur, erunt, ut *num.* 3. jam ostendi, æquales anguli BOF, NOD. Deinde quia FH, FL r æquales sunt, etiam per demonstrata *num.* 1. EG, EL, æquales erunt. Ergo rursum anguli ENG, ZND æquales. Denique quia FH, FL s æquales sunt, anguli NDF, XDA iterum æquales erunt. Ergo species objecti B reflexa ter in O, N, D, defertur ad Oculum A per viam BONDA; radiusque ad Oculum pertingens est AD.

r const. s const.

Deinde species ex B ita defertur ad Oculum A, ac si veniret ex G, quia BO, GO æqualis sunt, & GON una recta; ex G verò sic, ac si veniret ex L, quòd pares sint GN, LN, & LND una recta; denique sic ex L, ac si veniret ex H, quia pares sunt LD, HD, & HDA una recta. Atqui L t appareret in H, quia AD radius ad Oculum pertingens cum perpendiculo incidentiæ LF concurrit in H. Ergo objectum B, Oculo A apparet in H, quod eidem Oculo A *num.* 3, ostensum est apparere etiam in G.

t per 22.1. cat.

Fig. 23.

5. Eodem planè ratiocinio, & adminiculo eorum quæ *num.* 1. & 4 ostensa sunt, demonstrabitur (non variatâ umquam objecti B, vel Oculi A positione) objectum B apparere in I per reflexiones quinque, si rectis FG, FH, FI accipiantur æquales FB, FL, FM, ac tum ducantur AI secans in Q, QM secans ZE in N, NH secans in O, OL secans in D, DG secans in C, ac tandem CB: erit enim via reflexionis BCDONQA.

Fig. 19.

Quod si rectis FG, FH, FI, FK, fiant æquales FB, FL, FM, FR, ducanturque AK secans in Q, QR in S, SI in Y, YM in T, TH in V, VL in D, DG in O, ac tandem OB; eodem discursu demonstrabitur Oculo A, objectum B apparere in K per reflexiones septem. Atque ita in infinitum.

Fig. 24.

6. Transeamus modò ad imagines in α β, γ, δ &c. apparentes. Ostendam primò objectum B, Oculo A (servatâ utriusque eâdem semper positione) apparere in α per reflexiones duas. Fiat rectæ Fα æqualis FP, ducanturque Aα secans in D; DP secans in C; & CB. Quoniam ex const. Fα, FP, æquales sunt, etiam per *num.* 2. EB, EP æquales erunt. Patet igitur angulos BCE, DCZ æquales esse. Deinde quia Fα, FP æquales sunt, etiam angulos CDF, XDA liquet esse æquales. Ergo species objecti B reflexa bis in C, D, defertur ad Oculum A per u viam BCDA; radiusque ad oculum pertingens est D A, concurrens cum

u per 3.1. Catop.

cum perpendiculo incidentiæ PF, in α. Ergo P apparet in *i* α. Atqui species veniens ex B ita defertur ad Oculum A, ac si veniret ex P. Ergo etiam B, Oculo A apparet in α.

i per 22. 1. Cat.

Fig. 25. 7. Quod verò B, Oculo A appareat etiam in β per reflexiones quatuor, sic demonstro Rectis Fα, Fβ æquales fiant FP, FR, ducanturque Aβ secans in M, MR secans in N, Nα secans in D, DP secans in C, ac tandem CB. Quoniam *z* Fα, FP æquantur, etiam per *num.* 2 FB, IP æquales sunt. Anguli igitur ad C sunt pares. Et quia æquantur Fα, FP, anguli quoque ad D pares erunt. Jam quia Fβ, FR æquantur, etiam per *nu.* 2. Eα, FR æquales erunt. Æquantur ergo anguli ad N. Et quia pares sunt Fβ, FR, etiam anguli ad M æquales erunt. Species igitur ex B reflexa quater in C, D, N, M, pertingit ad Oculum A per viam *a* BCDNMA, radiusque ad oculum pertingens est AM: qui quia cum incidentiæ perpendiculo RF concurrit in β, idcirco R *d* apparet Oculo A, in β. Atqui species objecti ex B in oculum A ita incidit, ac si veniret ex R, quod ostenditur ut *num.* 4. Ergo etiam B, Oculo A apparet in β.

z const. *a per 3. 1. Cat.* *d per 22. 1. Cat.*

Fig. 20. 8. Quod si rectis Fα, Fβ, Fγ, æquales sumantur FP, FR, FS, ducanturque rectæ AOγ, OMS, MQβ, QLR, LCα, CNP, NB, eodem ratiocinio & adminiculo eorum, quæ *num.* 2 & 4 ostensa sunt, demonstrabitur objectum B, Oculo A, per reflexiones sex apparere in γ atque ita in infinitum.

Omnes igitur theorematis partes demonstravimus.

PROPOSITIO XXXIV.

Iisdem positis, Dico quamlibet imaginum supradictarum tanto intervallo distare ab oculo A, quanta est tota via reflexionis suæ.

Fig. 22. **D**Emonstr. Accipiamus in *Fig.* 22, imaginem in H apparentem. Quoniam per constr. æquantur BF, GF, OF utrique triangulo communis est, anguli verò ad F recti, erunt BO, GO *a* æquales. Addita igitur communi NO, erit GN æqualis viæ BON. Rursum quia per *num.* 1. *præced. prop.* EG, EL æquales sunt, & NE communis, anguli verò ad E recti, etiam *b* GN, (hoc est BON) & LN æquales erunt. Addita ergo communi DN, erit LD viæ BOND æqualis. Sed LD est par *c* HD, quod per *num.* 1. *præced.* æquales sint FL, FH; DF communis; & anguli ad F recti. Ergo via BOND, æqualis est HD. Addita igitur communi AD, erit HA distantia imaginis in H apparentis, toti viæ reflexionis BONDA æqualis. Quod erat demonstrandum.

a per 4. 1. *b per eand.* *c per eand.*

Eodem planè modo idem demonstrabitur de imagine I in *Fig.* 23, & de imagine K in *figura* 19. & sic de cæteris: item de imagine α in *figura* 24, & de imagine β in *Fig.* 25, & de imagine γ in *Fig.* 20, & sic de cæteris.

PROPOSITIO XXXV.

Iisdem positis, stet in B homo facie conversus ad speculum XF, quod intuetur oculus A.

Dico imagines in G, H, I, K, &c. fore conversas ad Oculum A, aversas verò in α, β, γ &c. sive in G, H, I, K &c. apparere faciem Oculo A; in α, β, γ &c. tergum. *Fig. 18.*

NAm pro apparentiâ imaginum G, H, I, K, reflexio prima fit ad speculum XF, uti patet ex *num.* 3.4.6. *propositionis præcedentis.* Cùm igitur ad speculum XF non tergum hominis B, sed facies per hypothesim conversa sit, manifestum est per reflexionem primam, adeoque & per eam subsequentes deferri ad Oculum A speciem non tergi, sed faciei. *Fig. 21. 22. 23. 19.*

At verò quia pro apparentiâ imaginum α, β, γ reflexio prima (ut patet ex *num.* 6.7.8.) fit ad speculum ZE, cui tergum *a* obvertitur hominis B; liquet per reflexionem primam eamque subsequentes deferri ad Oculum A speciem non faciei, sed tergi, ac proinde imagines in α, β, γ cerni aversas ab oculo A, quæ in G, H, I, K ad eundem conversa videbantur. Quod erat propositum. *Fig. 24. 25. 20.* *a per hyp.*

PROPOSITIO XXXVI.

Iisdem positis, quæ in duabus præcedentibus: Dico conversas ad invicem esse facies hominis B, & imaginis G, item facies imaginum α & H: β & I: γ & K: aversas autem esse ab invicem facies imaginum G & α: H & β: I & γ. *Fig. 18.*

DEmonstratio patet ex *præcedenti.* Nam per hyp. facies hominis B est conversa ad speculum XF, imaginis autem G facies ad Oculum *b* A, adeoque & ad speculum XF. Ergo facies hominis B, & imaginis G ad invicem converti necesse est. Rursum cùm imago α fit *c* aversa ab Oculo A, imago autem H ad eundem *d* conversa, liquet eas esse conversas ad invicem. Eodem modo idem patet de imaginibus β & I. *b per præc.* *c per eand.* *d per eand.*

Deinde cùm imago G *i* conversa sit ad Oculum A, imago autem α *m* aversa ab eodem, liquet eas aversas esse ab invicem. Idem eodem modo patet de imaginibus H & β: I & γ. *i per eand.* *m per eand.*

PROPOSITIO XXXVII.

Iisdem positis, si objectum B moveatur versus speculum XF. 1. Imagines G, A, I, K, L &c. ad Oculum A videntur accedere, 2. imagines verò α, β, γ, δ, &c. recedere. 3. Accedunt ad invicem objectum B & imago G, item imagines α & H; β & I; γ & K, & sic deinceps. 4. Ab invicem recedunt imagines G & α: H & β: I & γ: K & δ.

Quod si objectum B moveatur versus speculum ZE, omnia eveniunt contraria.

NImirùm imagines G, H, I, K &c. recedunt ab Oculo A: imagines verò α, β, γ, δ &c. accedunt

dunt: ab invicem autem recedunt objectum B & imago G; imagines item α & H: β & I: γ & K &c. Accedunt ad invicem imagines G & α: H & β: I & γ: K & δ, &c.

Demonst. Quoniam imago G determinatur intervallo FB translato in FG, patet accedente objecto B ad XF minui FG, adeoque G locum imaginis accedere ad XF, & ad Oculum A. Deinde quia loca imaginum H, I, K, &c. determinantur per duplicatum speculorum intervallum EF translatum ex G in H, & ex H in I, & ex I in K, & sic deinceps: manifestum G, ut jam ostendi, accedente ad XF, accedere etiam H, I, K, adeoque & imagines isthic apparentes. Quod erat primum.

Quoniam verò loca imaginum α, β, γ, &c. determinantur per duplicatum speculorum intervallum EF translatum ex B in α, & ex α in β, & ex β in γ, & sic deinceps, manifestum est, objecto B accedente ad XF, hoc est recedente ab A Oculo, recedere etiam ab A, puncta singula α, β, γ, δ, &c. adeoque & imagines isthic apparentes. Quod erat alterum.

Deinde quia objecto versùs XF moto, jam ostendi imagines α, β, γ, δ, &c. recedere ab Oculo A, imagines verò H, I, K, L &c, ad eundem accedere, patet appropinquare ad invicem imagines α & H; β & I: γ & K, &c. Quod erat tertium.

Denique quia objecto B moto versùs XF, imagines G, H, I, K &c. ad Oculum A accedunt, imagines verò α, β, γ, δ, &c. recedunt ab eodem, manifestum. est etiam recedere has ab illis, nimirum G ab α: H à β: I à γ, & sic deinceps. Quod erat quartum.

Atque ex his facilè intelligetur omnia evenire contra, objecto B moto versùs Z E.

AFFECTIONES PLANORUM SPECULORUM INCLINATORUM, SIVE DE REFLEXIONE INTRA ANGULUM.

Ad duo plana sibi invicem inclinata à puncto dato in punctum datum reflexiones contingunt, non quidem infinitæ, ut in planis parallelis, sed tamen eò plures, quò sub minori angulo plana concurrunt. Hinc si duo plana specula sibi mutuo ad angulum acutum statuantur. Oculo utcumque speculum intuenti propriæ faciei sive objecti alterius cujuscumque imagines 14, imò 16 vel etiam 18 apparent quasi in ellipseos formam dispositæ; cùm in parallelis vix sex septémve videantur. In his enim quamvis, ut *prop.* 33. ostensum est, objecti species infinities possit reflecti; tamen quòd repetitis reflexionibus species sensim debilitentur, neque visus possit in utrumque parallelum speculum simul intendere, pauciores imagines situs parallelus exhibet, quàm angularis. Hujus igitur phœnomeni sanè peramœni causas aperiam, atque ita finem huic libro imponam.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 26.

Intra rectum angulum (A) vel obtusum plures fieri reflexiones non possunt, quàm duæ.

IN latus BA incidat radius FD sub quocumque acuto angulo FDB: acutus enim a fit oportet ut reflexio fieri possit in latus alterum AC. Quia angulus reflexionis ADE par est angulo incidentiæ FDB, etiam ADE acutus erit. Atqui A est rectus vel obtusus. Ergo AED acutus est: cui cùm par sit reflexionis angulus CEG, etiam ipse acutus erit, ac proinde minor quàm A. Ergo radius EG non concurret cum latere AB. Quare plures in recto vel obtuso angulo reflexiones haberi nequeunt, quàm duæ.

a per tt. 1. Catop.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 27.

In duobus planis speculis ad angulum rectum CAB constitutis, si Oculus existat extra rectam lineam AQ, quæ ab anguli vertice ducitur per punctum objecti datum G, semper tres puncti dati imagines apparent, & non plures.

PONatur Oculus extra rectam AQ, ubivis inter specula CA, BA, putà in F. In singulis speculis CA, BA, puncti G apparere imagines singulas per reflexionem unam patet ex *prop.* 13. *hujus libri.* Superest ut exhibeatur & tertia. Ex puncto dato G ad speculum CA ducatur perpendicularis GM: quâ æqualiter protractâ in I, ex I ad BA productam ducatur perpendicularis IN; eàque æqualiter productâ in X, ab X ad Oculum F ducatur recta XF, quæ (ut mox ostendam) secabit necessariò AB, ultra A versùs B, putà in D. Ex D ad I ducatur recta DI secans AC in E. Dico puncti G imaginem tertiam conspici in X ab Oculo F per reflexiones duas ad E ac D. Demonstratum est *propos.* 27. *hujus.* Quod autem XF occurrat speculo AB sic ostendo. Ducatur XG secans rectam CE in O. Quia a GM, MI æquales sunt, erit IG dupla MG. Quare cùm æquidistent IXCEO, erit ut b IG ad MG, sic IX ad MO, adeoque IX ipsius MO dupla est. Atqui IX etiam dupla MA (cùm enim æquales sint c IN, NX, erit XI dupla ipsius IN hoc est MA). Ergo MA, & MO æquales sunt, ac proinde XG transit per A verticem anguli CAB. Ergo XF secat speculum AB in D.

a per constr. b per cor. 1. p. 4. l. 6. c per constr.

PROPOSITIO XL.

Fig. 28. 29.

In duobus planis speculis ad angulum rectum positis, si Oculus (F) existat in rectâ per A verticem & G punctum datum transeunte, duæ solùm possunt puncti G imagines apparere.

QUod duæ appareant patet ex *prop.* 13. *hujus.* Tertiam non posse sic ostendo. Ex puncto dato G ad speculum utrumlibet (putà CA) ducatur perpendicularis GM; quâ productâ æqualiter in I, ex I ad alterum speculum BA productum ducatur perpendicularis IN, quâ protractâ æqualiter in X, ab X ad Oculum F ducatur XF occurrens speculo BA in D. Quoniam IM æqualis a est GM, erit IG dupla MG. Sed quia IX parallela est ad MO, ut IG ad b MG, sic IX est ad MD. Ergo etiam IX dupla est MD. Atqui etiam IX dupla est MA (cùm enim c æquales sint IN, NX, erit IX dupla IN, hoc est MA). Æquantur ergo MD, MA, ac proinde XF transit per verticem A. Atqui deberet XF secare speculum BA ultra A versùs B, ut haberi posset imago tertia, quemadmodum patet ex discursu præcedentis, & ex *prop.* 27 *hujus.* Quare imago tertia hic est nulla.

a per constr. b per cor. 1. p. 4. l. 6. c per constr.

PRO.

PROPOSITIO XLI.

Acuto angulo & binis intra eum punctis positione datis, maximum numerum reflexionum, quibus puncta ad invicem possunt reflecti, cùm primus radius in latus sinistrum incidit, invenire.

Fig. 30.

ANgulus acutus esto ZTδ, & intra eum puncta positione data A, B; latera autem anguli ultra verticem producantur infinitè.

Constructio prima. Ex puncto A ad ZTλ latus anguli sinistrum duc perpendicularem Aω, & extende in I, ut Iω sit æqualis Aω. Ex I ad latus dextrum δTω duc perpendicularem Iβ, & extende in D, ut Dβ par sit Iβ: & sic deinceps alternatim ad anguli latera ZTλ, δTω perpendiculares æqualiter utrimque productæ continuentur, ut DVL, LYF, FφN, NωH, donec veniatur ad aliquam Hψθ, cujus producta semissis ψθ intra angulum ωTλ terminetur.

Ducatur deinde ex θ ad punctum alterum datum B recta occulta. Si ea latus anguli ZTλ ad quod ultima perpendicularis Hψθ est ducta, secat suprà verticem T versùs λ, ut in hoc schemate contingit: Dico singulis perpendicularibus, demptâ ultimâ responde-re, reflexionem unam ad illud latus ad quod unaquæque perpendicularis spectat: atque is maximus est reflexionum numerus, qui hisce datis haberi potest.

Hæc demonstro, unaque reflexionum puncta singula, totamque adeò reflexionis viam exhibeo hunc in modum.

Constr. altera. Ex H extremitate perpendicularis NωH ducatur ad punctum B recta HB, secans latus anguli δTω in X. Tum ex N ad X ducatur NX, secans latus ZTλ in S. Rursum ex F ad S recta FS, secans δTω in R: & ex L ad R recta LR, secans ZTλ in Q: item ex D ad Q recta DQ, secans δTω in P. Tandem ex I ad P recta IP, secans ZTλ in O, & ex O ad punctum datum A ducatur OA.

Dico reflexionum puncta esse O, P, Q, R, S, X totamque reflexionis viam ex A in B esse AOPQRSXB. Quod sic ostendo. Quoniam IOP est recta *a* linea erunt ad verticem anguli IOω, *b* POT æquales. Sed in triangulis IωO, AωO latera Iω, ωO æquantur *c* lateribus Aω, ωO, & anguli ad ω sunt recti. Ergo *d* angulus AOω incidentiæ primus æquatur angulo IOω, hoc est angulo POT primo reflexionis. Eodem modo IPβ *e* æquatur DPβ, hoc *i* est TPQ: & DQV æquatur LQV, hoc est TQR: & LRY æquatur FRY, hoc est δRS: & FSφ æquatur NSφ, hoc est ZSX: & NXω æquatur HXω, hoc est δXB. Quare cùm ad puncta singula O, P, Q, R, S, X incidentiæ ac reflexionis anguli sint æquales, reflexio ex A in B fit *o* per viam AOPQRSXB. Atque ex hoc processu manifestum est, ut perpendicularium prædictarum quæcumque, adeoque & ultima Hψθ novum reflexionis punctum prioribus superaddat, necesse esse, ut recta ab ejus termino θ pertingens ad B, anguli latus, ad quod ipsa pertinet (nempè hic ZTλ) secet infrà verticem T versùs Z: quod quia in hac figurâ non contingit, tot hic erunt reflexiones possibiles, quot sunt perpendiculares, demptâ ultimâ Hθ, sex nimirum in schemate præsenti.

a per constr. *b per 15.1.* *c per constr.* *d per 4.1.* *e per eand.* *i per 15.1.* *o Per 3.1. Cat.*

Quod si recta procedens ex θ in B, secaret latus ZTλ (ad quod ultima Hψθ perpendicularis est) infrà

Tacquet Catoptrica.

verticem T, tot, & non plures, haberi reflexiones possent, quot fuêre perpendiculares descriptæ, annumeratâ etiam ipsâ Hψθ intra angulum terminatâ. Quæ quidem superiùs constructa ac demonstrata expendenti erunt perspicua.

PROPOSITIO XLII.

Iisdem positis, quæ in præcedenti, invenire maximum reflexionum numerum, primâ incidentiâ factâ in latus anguli dextrum δTω.

Fig. 31.

EX puncto dato A ad latus anguli dextrum δTω ducatur perpendicularis prima AQ, & protrahatur in Q, ut CQ sit æqualis AQ. Tum ex C ad latus sinistrum ZTλ perpendicularis ducatur CR, producaturque in K, ut KR, CR sint æquales: & sic deinceps alternatim ad latus dextrum sinistrumque perpendiculares æqualiter utrimque productæ describantur KPE, EωM, MβG, donec veniatur ad aliquam Gπζ, cujus producta semissis πζ intra angulum ωTλ terminetur.

Deinde ex ζ ad alterum punctum datum B ducta intelligatur recta linea: hæc si latus ZTλ, ad quòd ultima Gζ perpendicularis existit, intersecat infrà verticem T, reflecti poterit A in B tot reflexionibus, quot perpendiculares sunt ductæ: si intersecat suprà T, tot haberi reflexiones poterunt, quot sunt perpendiculares, demptâ ultimâ Gζ.

Demonstratio quamvis sit eadem, quæ præcedentis, juvabit tamen claritatis causâ exhibere reflexionis puncta, quæ in casu hujus figuræ haberi possunt. Ex G ad B ducatur recta GB secans latus anguli dextrum δT in ω. Tum ex M ad ω recta ducatur Mω secans latus sinistrum ZT in Y. Ducatur rursum EY secans δT in V; & KV secans ZT in S; & CS secans δT in O, jungaturque demùm OA. Dico viam reflexionis ex A in B esse AOSVYωB. Quod ex constructione per 4, & 15. *lib. 1. elem.* sic ostendes. AOQ æquatur COQ, hoc est TOS: & CSR æquatur KSR, hoc est TSV: & KVP æquatur EVP, hoc est δVY: & EYω æquatur MYω, hoc est ZYω: & Mωβ æquatur Gωβ, hoc est δωB. Cùm igitur ad singula puncta O, S, V, Y, ω incidentiæ & reflexionis anguli sint æquales, reflexio ex A in B fit per viam AOSVYωB.

Corollarium ad duas præcedentes.

Fig. 34.

Quò datus angulus (FOG) acutior, eò plures haberi reflexiones possunt ex puncto dato in punctum datum. Quia plures duci possunt ad anguli latera alternatim perpendiculares, priusquam veniatur ad aliquam quæ intra angulum dato ad verticem positum finiatur.

PROPOSITIO XLIII.

Intra acutum angulum ZTδ punctis A & B positione datis, datum reperire numerum reflexionum, sed maximo minorem.

Fig. 32.

OPorteat ex. gr. punctum A reflectere ad punctum B per reflexiones tres.

Ex A ducatur perpendicularis Aω prima ad latus

anguli ſiniſtrum ZT, æqualiter extenſa in I; & ex I ad ∂T perpendicularis ſecunda Iβ æqualiter protracta in D; & ex D ad ZT perpendicularis tertia DV æqualiter producta in L. Tum ex L ad B ducatur recta LB ſecans ZT in X; & ex D ad X recta DX ſecans ∂T in S; & ex I ad S recta IS ſecans ZT in R; jungaturque RA. Dico pilam ex A emiſſam in latus ſiniſtrum anguli ZT ſub angulo ARZ, pervenire in B viâ ARSXB per reflexiones tres factas in R, S, X. Demonſtratio patet ex diſcurſu duarum præcedentium.

Fig. 33. Ducatur deinde ex A perpendicularis prima AQ in latus anguli dextrum ∂T, producaturque æqualiter in C; tum ex C ad ZT perpendicularis ſecunda CR æqualiter producta in K; ac demùm ex K ad ∂T perpendicularis tertia KP, æqualiter extenſa in E. Deinde ex E ad B ducatur recta EB ſecans ∂T in Y; & ex K ad Y recta KY ſecans ZT in V; & ex C ad V recta CV ſecans ∂T in O. Dico Pilam ex A emiſſam, ſub angulo AO∂ in latus anguli dextrum ∂T, pervenire in B viâ AOVYB per reflexiones tres factas in O, V, Y. Demonſtratio quæ ſuprà.

Eodem modo per duas perpendiculares habentur reflexiones duæ, & reflexiones quatuor per 4 perpendiculares, & reflexiones 5 per 5 perpendiculares: ac ſic deinceps.

Ex tribus præcedentibus propoſitionibus planorum ſpeculorum ſub acuto angulo ad ſe invicem inclinatorum phænomena demonſtrabimus.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 34. **Duo plana ſpecula ſe mutuo tangant ſub angulo acuto ZT∂, cujus latera ultra verticem ſint producta infinitè. Intra angulum ZT∂ ſit poſitione datum alicujus objecti punctum A: Oculus autem intra angulum ſit ubivis in B.**

Oporteat demonſtrare quot in binis hiſce ſpeculis puncti dati B imagines appareant: item loca imaginum, & quot ſingulæ reflexionibus videantur, exhibere.

Fig. 34. *Conſtruct.* Ex dato puncto A ad anguli latera ZTλ, ∂Tα, initio facto à latere ſiniſtro ZTλ ducantur alternis perpendiculares utrimque ſemper æqualiter protractæ AαI, ID, DL, LF, FN, NH, donec veniatur ad aliquam Hθ, quæ terminetur intra angulum αTλ. Deinde incipiendo à dextro latere ∂Tα ducantur iiſdem legibus perpendiculares AQC, CK, KE, EM, MG, donec rurſum ad aliquam veniatur Gζ, quæ intra αTλ angulum finiatur.

Fig. 34. *Dico I.* Quocumque loco intra angulum datum ZT∂ Oculus conſtiterit, objecti A tot imagines apparebunt, quot univerſim duci potuêre perpendiculares extra angulum terminatæ: loca autem ipſa imaginum in dextro ſpeculo ∂T apparentium, ſunt in C, D, E, F, G, H; loca apparentium in ſiniſtro ZT, ſunt in I, K, L, M, N.

Demonſtrationis initium faciam ab imagine ultimâ H. Inſpiciatur deinceps ſchema a aliud citatum in margine. [a Fig 30.] Quoniam perpendicularis NαH terminatur extra angulum αTλ, ubicumque fuerit Oculus intra angulum datum, recta ex H ad Oculum ducta ſemper occurret, putà in X, ſpeculo T∂, ad quod protractum ipſa NH erat perpendicularis; ac proinde (ut ex dictis *prop.* 41 patet) exhiberi poteſt reflexionis punctum X, reſpondens ultimæ perpendiculari NαH. Reperiantur deinde reliqua reflexionum puncta perpendicularibus cæteris inter ſe connexis NF, FL, LD, DI, IA reſpondentia, adeoque tota exhibeatur reflexionis via AOPQRSXB per *prop.* 41; cujus proinde conſtructio tota huc revocanda. Quare eâ tota hic ſuppoſitâ, ſic ulterius ratiocinabimur. Quoniam IO, AO b æquales ſunt, & IOP eſt una c recta, ſpecies objecti A ex A ita defertur ad Oculum B per viam AOPQRSXB, ac ſi veniret ex I per viam IPQRSXB. Et ob eandem cauſam, ſic ex I, ac ſi veniret ex D per viam DQRSXB; & ex D, ac ſi veniret ex L per viam LRSXB; & ex L, ac ſi veniret ex F per viam FSXB, & ex F, ac ſi per viam NXB. Igitur à primo ad ultimum ſpecies puncti A ſic defertur ad Oculum B per viam AOPQRSXB, ac ſi veniret ex N per viam NXB. Atqui ſi veniret ex N, appareret in d H concurſu radij reflexi XB cùm catheto incidentiæ NαH. Ergo etiam A apparet in H.

[b per 4. 1. c per conſtr. p. 41. d Per 22. 1 Catop.]

Fig. 34. Quod ſi per *prop.* 42; exhibeatur reflexionis via tota reſpondens 5 perpendicularibus inter ſe connexis GM, ME, EK, KC, CA, oſtendam eodem modo A apparere in G. Rurſus ſi per *prop.* 43. exhibeatur via reflexionis debita perpendicularibus 4, FL, LD, DI, IA, demonſtrabitur ut ſupra, punctum A apparere in F. Eodemque ratiocinio probabitur A apparere etiam in E, D, C. Ex quo proceſſu imagines in ſiniſtro ſpeculo ZT apparentes, N, M, L, K, I, haud difficilè jam erit demonſtrare.

Dico II. Unaquæque imago per tot reflexiones apparet, quot ad ipſam uſque ab objecto perpendiculares inter ſe colligatæ exiſtunt. Quare in ſpeculo ∂T imago prima videtur per unam reflexionem ob unam perpendicularem AC: imago ſecunda D per reflexiones duas propter duas perpendiculares AI, ID: imago tertia E per tres reflexiones propter tres perpendiculares AC, CK, KE: quarta F per reflexiones 4 propter 4 perpendiculares AI, ID, DL, LF: & ſic deinceps. Atque eadem accidunt in altero ſpeculo ZT. Demonſtratio patet ex *prop.* 43. 42. 41.

Dico III. Cùm teipſum in duobus ſpeculis ad acutum angulum conſtitutis, intueris, converti ad ſe invicem videntur tu & imago prima C; ſecunda D & tertia E; quarta F & quinta G; & ſic deinceps: averſæ autem ab invicem, prima & ſecunda, tertia & quarta, & ſic deinceps. Ratio patet ex aſſertione 2. & ex *prop.* 29.

Dico IV. Diſtantia uniuſcujuſque imaginis ab Oculo æqualis eſt toti viæ reflexionis, qua ad Oculum defertur.

Fig. 30. Exemplum demonſtrationis ſtatuamus in imagine H; idem quippè erit proceſſus in reliquis. Per *prop.* 41. reperiatur via AOPQRSXB, quâ ſpecies puncti A apparentis in H defertur ad Oculum B, ex tota conſtructio ad hanc requiſita, hîc ſupponatur. Quoniam AO par a eſt IO, additâ communi OP, erit AOP æqualis IP, hoc eſt DP. Ergo communi adjectâ PQ, erit AOPQ æqualis DQ, hoc eſt LQ. Additâ ergo rurſum communi QR, erit AOPQR par LR hoc eſt FR. Ergo communi adjectâ RS, erit AOPQRS par FS, hoc eſt NS: adjectâque iterùm communi SX, erit AOPQRSX æqualis NX, hoc eſt HX. Quare adjectâ demùm communi XB, erit tota reflexionis via AOPQRSXB æqualis diſtantiæ HB imaginis ab Oculo.

[a Per 4. 1.]

Dico

Fig. 34. *Dico V.* Si ex terminis ζ, θ perpendicularium intra angulum *a*Tλ finitarum per T verticem dati anguli ducantur infinitæ θTO, ζTP, & Oculus ponatur inter ſpeculum ZT, & rectam TO; tunc præter imagines puncti A aſſertione primâ determinatas, apparebunt inſuper imagines in ζ & θ, & aliæ præter has nullæ.

Tum enim rectæ ex ζ & θ emiſſæ ad Oculum, interſecare poterunt ſpeculum TZ infrà T: quod requiri ad imaginum apparentiam patet ex diſcurſibus jam antè factis.

Quod ſi Oculus ſtatuatur inter rectas TO, TP, præter imagines aſſertionis tertiæ apparebit inſuper tantùm una in ζ.

Dico VI. Quò ſpecula ſub acutiori angulo conveniunt, eò plures ejuſdem objecti imagines apparebunt. Ratio eſt quia tantò plures duci poterunt perpendiculares antequam veniatur ad aliquam, quæ intra angulum MON finiatur.

Fig. 35. In angulo FOG graduum 11. quantùm eſt ex vi reflexionum apparere poſſunt imagines 31, quia totidem duci poſſunt ad anguli latera alternatim perpendiculares. Vide *fig.* 35. in quà imaginum loca ſunt, 1,2,3,4,5 &c.

PROPOSITIO XLV.

Pilam in anguli acuti latus ita ex puncto intra angulum dato immittere, ut per datum numerum reflexionum, qui maximo non ſit major, ad punctum idem redeat.

Fig. 35. Intra acutum angulum FOG datum ſit punctum A; ex quo juxta conſtructionem propoſitionis 44, ducantur ad anguli latera perpendiculares omnes, quæ ad determinandas reflexiones idoneæ eſſe poſſunt. Tum initio facto à latere GO numera perpendiculares conjugatas tot A 1: 1,2: 2, 3: &c. quot reflexiones deſideras, ex. gr. 13. Et ex termino ultimæ ducatur ad punctum A recta 13 A, ſecans latus GO in C. Dico pilam ex A ſub angulo ACG immiſſam in latus GO, poſt reflectiones 13 redituram in A.

Idem continget ſi numerentur perpendiculares conjugatæ 13 initio facto à latere FO, ductaque recta 13 NA ſecante latus FO in N, pila dirigatur in latus FO ſub angulo ANF.

Demonſtratio patet ex ratiociniis propoſitionum 43. 42. 41.

PROPOSITIO XLVI.

Pilam ex puncto intra acutum angulum dato (B) in latus anguli ita dirigere ut poſt aliquot reflexiones versùs anguli verticem peractas, eâdem viâ regrediatur. Fig. 36. 37. 38.

P Guilielmus Boelmans meus olim in Mathematicis Magiſter ita conſtruebat.

Ab angulo recto SNP aufer toties angulum datum A, donec relinquatur XNP vel æqualis dato A, vel proximè minor. Ex dato deinde puncto B duc rectam BD, quæ cùm latere CA faciat angulum BDC æqualem angulo illi reſiduo XNP.

Dico pilam ſub angulo BDC in latus CD directam poſt aliquot reflexiones versùs A verticem factas, eâdem, quâ venerat, regredi viâ in B.

Demonſtr. Reflexio ſecunda contingat in E, ducaturque EM parallela ad AC. Angulus MED *a* æquatur angulo ADE, hoc eſt *b* BDC, hoc eſt *c* XNP: angulus autem YEM æquatur *d* angulo A, hoc eſt per conſt. XNT. Ergo totus YED, æquatur angulis PNX, XNT, hoc eſt toti PNT. Deinde ex tertio reflexonis puncto F ducatur FK parallela ad AY. Angulus EFK *i* æquatur AEF, hoc *m* eſt YED, hoc eſt *n* PNT: & KFD *o* æquatur dato A, hoc eſt *r* angulo TNV. Ergo totus EFD æquatur ipſis PNT, TNV, hoc eſt toti PNV. Eodem modo oſtendam quartum incidentiæ angulum FGE æquari angulo PNZ, atque inde quintum GHF æquari toti recto PNS. Quare radius GH in ſeipſum reflectitur, adeoque pila eâdem viâ HGFEDB regreditur in B, unde venerat.

a per 29. 1. b per 3. 2. Catop. c per conſtr. d per 27. 1. i per eand. m per 3. 2. Catop. n jam oſtendi. o per 27. 1. r per conſtr.

Scholium.

Ex iis, quæ de multiplicatione imaginum per ſpecula ſibi mutuo parallela & inclinata demonſtravimus, facilè quivis intelliget, quâ arte conficiantur ciſta illa ſive arca Catoptrica jam vulgò nota, imò & Kircheri illa haud paulò operoſiores, quas ipſe deſcribit Artis magnæ lib. 1. cap. 2. *Totum enim artificium in eo ſitum eſt, ut multa plana ſpecula ſibi contigua ſitu ad ſe mutuò partim parallelo, partim inclinato diſponantur. Inde ſiquidem tanta illa ſpectaculorum varietas & multitudo enaſcitur. Quæ quidem uti facta conſpicere perjucundum, ita multis deſcribere tædioſum eſt, & nobis minimè neceſſarium.*

FINIS LIBRI SECUNDI.

CATOPTRICÆ
LIBER TERTIUS
DE
SPECULIS CURVIS.

CONVEXORUM SPHÆRICORUM AFFECTIONES PRÆCIPUÆ.

REvocanda hîc sunt ad memoriam, quæ dicta fuêre *prop.* 2. *lib.* 1. *Catop.* videlicet planum reflexionis (hoc est in quo peragitur puncti reflexio) rectum esse ad speculum quodcumque, ac proinde si speculum sphæricum est, transire per centrum sphæræ. Ex quo patet punctum incidentiæ centrum visus, radios tam incidentem, quàm reflexum, centrum sphæræ in uno esse plano ad speculum recto. Adhæc circulum reflectentem voco eum, quo sphæram speculi interfecat planum reflexionis: quod quia per sphæræ centrum transit, liquet reflectentem circulum esse maximum unumque ejus ac sphæræ centrum existere.

PROPOSITIO I.

In speculis sphæricis convexis unius objecti uni visui apparet imago tantùm una.

Fig. 1.

ESto objecti punctum B, visûs in A. Per 16. 1. *Catop.* in planis & convexis speculis ex puncto (B) ad punctum (A) reflexio fieri nequit à pluribus speculi punctis quam uno, ac proinde unicus solùm est radius reflexus, putà CA. Quare cùm imago sit in concursu *a* radij reflexi cum catheto incidentiæ BEF, necesse est ut imago quoque tantùm sit una, ex. gr. in D.

a per 22. 1. *Catop.*

PROPOSITIO II.

Sola portio sphæræ conspicua radios sibi incidentes potest ad Oculum reflectere.

Fig. 2.

AB Oculo A ducatur radius AQT sphæram contingens in Q, & alius AFL per centrum F. Si angulus TAF circa immobilem AFL circumagatur, tangens AQ determinabit portionem sphæræ QNGSP conspicuam Oculo A, cujus basis est circulus QNSP à puncto Q descriptus. Dico hanc solam incidentes sibi radios posse reflectere ad oculum A.

Sumatur in eâ punctum quodvis G, ducaturque AG; per quam ducto reflexionis plano, circulus reflectens esto LQGS: hunc quia tangunt ex hyp. AQ, AS, patet secari ab AG. Alia igitur recta MR circulum tanget in G, efficiens cum AB angulum MGB recto non majorem, ut patet. Quare poterit illi ad partem alteram fieri æqualis RGB. Quoniam igitur æquales sunt anguli BGR, AGM poterit *b* radius BG à puncto G reflecti ad Oculum A. Cùm ergo punctum G assumptum sit quodlibet, liquet à totâ portione conspicuâ fieri posse reflexiones ad visum A.

b per 41. 1. *Catop.*

Quod autem ab eâ solâ, exclusâ etiam ejus basi QNSP, in quâ radij ab Oculo ducti sphæram contingunt, sic ostendo. Incidat in contactum Q radius quicumque à tangente diversus. Ex 16.3. patet hunc esse suprà tangentem TQA. Esto ille HQ, & anguli TQH, æqualis fiat AQI. Posito igitur radio incidente HQ, reflexus erit QI; qui pertingere non potest ad Oculum A, cùm per illum ex hyp. transeat tangens TQA. Multò minùs ad Oculum reflecti poterunt radij incidentes in portionem sphæræ QLS. Liquet ergo propositum.

Corollarium.

Ex his patet punctum nullum inter conicam superficiem à tangentium portionibus infinitis QT, SV descriptam & portionem sphæricæ superficiei QLS inconspicuæ existens, reflecti posse ad Oculum A, reliqua omnia posse.

PROPOSITIO III.

Cathetus *c* infinita (CM) portioni conspicuæ (QGS) specularis sphæræ insistens, apparet intra sphæram tota, & minor quartâ parte diametri.

c def. 3. 1. *Catop.* *Fig.* 3.

VIsus esto in A, & continuetur cathetus CM usque ad sphæræ centrum F. Per A & CMF acto reflexionis plano producatur circulus reflectens SQL, quem contingant in Q & S rectæ venientes ab Oculo A. His positis,

Intelligatur ab Oculo A ducta esse recta AD ita secans peripheriam in B & in D radium MF, qui catheto CM indirectum est, ut BD sit æqualis FD.

Dico MD. imaginem esse adæquatam catheti infinitæ MC, & minorem esse quartâ parte diametri sphæræ.

Demonstr. Ex centro F per B ducatur FP, & angulo PBA æqualis fiat PBK. Quodlibet ergo punctum radij BK reflectitur ad visum A, *i* à speculi puncto B. Deinde quia BD, FD æquales *m* sunt, erit angulus BFD æqualis *n* angulo FBD, hoc est *o* angulo PBA, hoc est angulo *p* PBK. Ergo FMC, BK *q* æquidistant. Sumatur jam in infinitâ MC punctum quantumvis à speculo remotum E; per idem ratiocinium, quo usi sumus in demonstratione propositionis 17. *lib.* 1. *Catop.* 1. reflectetur punctum E ad visum A à speculi puncto O remotiore à visu quàm punctum B, à quo ostendi suprà reflecti punctum K, sic tamen remotiore, ut existat *s* inter B & M. Radius ergo reflexus OA productus occurret catheto incidentiæ CMF inter D & M, putà in I. Quare punctum E quantumcumque remotum à speculo apparet in I inter M & D, adeoque MI est imago rectæ ME quantumvis magnæ. Ergo imago catheti infinitæ MC non est major rectâ MD.

i Per 13.1. Catop.
m Per const.
n Per 5. 1.
o Per 15.1
p Per const.
q Per 27.1
s Per 12.1 Catop.

Accipiatur deinde in MD punctum I quantumvis vicinum puncto D, sive recta capiatur MI deficiens ab MD quantitate quantumvis parvâ; ducaturque AI secans peripheriam in O, & ex centro F per O recta FOT. Angulo deinde TOA æqualis fiat TOX. Quoniam æquales sunt *t* BD, FD, patet OI minorem esse quàm FI. Ergo angulus FOI major *u* est angulo OFI. Atqui angulus TOX æqualis est *x* angulo TOA, hoc est *z* angulo FOI. Ergo etiam TOX major est quàm OFI. Ergo OX concurret *a* cum FI, putà in E. Cùm igitur angulus TOX, sive TOE par sit *b* angulo TOA, reflectetur *c* punctum E ad visum A in speculi puncto O, apparebitque in *d* I ubi radius reflexus AI cum CMF incidentiæ catheto concurrit. Ergo MI deficiens ab MD defectu quantumvis parvo, est imago ipsius ME. Ergo MD non est major imagine catheti infinitæ MC; sive imago catheti non est minor quàm MD. Sed neque major est, ut ostendi suprà. Ergo ipsi MD æqualis est. Quod erat demonstrandum.

t Per const.
u Per 18 1
x Per const.
z Per 15 1
a colligitur ex 27.1.
b Per const.
c Per 13.1 Catop.
d Per 22.1 Catop.

Quod autem MD sit minor quartâ parte diametri est manifestum: cùm enim MD minor sit quàm *e* BD, hoc est quàm *i* FD, erit MD minor semisse radij FM, hoc est minor quartâ parte diametri.

e Per 7.3.
i Per const.

Vera est propositio licet cathetus incidat in ipsum contactum Q.

PROPOSITIO IV.

Fig. 4.5.

Sphæra specularis per Oculum A & centrum F secta, reflexionis plano exhibeat circulum reflectentem DHD, cujus ac sphæræ centrum sit F, eumque tangant in Q ductæ ab Oculo rectæ infinitæ AQω. Eumdem circulum ex Oculo A ita secet recta ABD, ut intercepta BD sit æqualis sphæræ radio, sive lateri hexagoni. Deinde in arcus QD punctum quodvis C incidat cathetus infinita ZCF tangentem secans in K.

Dico catheti ZC partem KC non videri in speculo, reliquam verò ipsius partem infinitam KZ partim intra speculum, partim extra apparere.

Claritatis causâ propositionis partes singulas singulis assertionibus demonstrabo. Sit ergo

Assertio I.

Dico CK omninò non videri.

Id verò ex corollario *prop.* 2. manifestum est; cùm enim CK existat inter peripheriam QDL, & tangentem Qω, nullum ejus punctum reflecti potest ad Oculum A.

Assertio II.

Fig. 4.

Ab Oculo A ad C ducatur recta AC reflectenti circulo occurrens in O, & ex centro F per O recta FOV; fiatque angulo VOA æqualis VOω. Concurret Oω cum CZ (ut mox ostendam) alicubi in G. Intelligatur deinde sic esse ducta APN, ut intercepta PN sit æqualis FN, quam cadere ultra rectam AD versùs F mox ostendam.

Dico punctum G apparere in ipsâ speculi superficie, portionem verò catheti infinitam GZ apperere intra sphæram, ejusque imaginem esse CN, & minorem quartâ parte diametri.

Demonstr. Quoniam OC *a* minor est quàm BD; hæc autem per hyp. par sit radio FD, seu FC, erit OC minor quàm FC. Ergo angulus OFC minor est *b* angulo FOC, hoc est *c* VOA. Sed VOω est *d* æqualis ipsi VOA. Ergo etiam OFC minor est quàm VOω. Ergo Oω *i* concurret cum FC puta in G. Quod erat è præmonstrandis primum. Ducatur deinde ex F per B recta FBX, & ex π, ubi ABD secat FC, recta πδ parallela ad FD. Quia igitur BD *m* par est radio FD, etiam Bπ *n* par erit ipsi πδ. Et quia æquales sunt BD radiusque FB, pares erunt *o* anguli BFD, FBD. Sed Fδπ *p* major est quàm FBD. Ergo etiam Fδπ major est quàm BFD, adeoque multò major quàm BFπ, seu δFπ. Ergo Fπ major *r* est quam δπ, hoc est (ut jam ostendi) quàm Bπ. Ex quo patet rectam APN, quæ sic est ducta ut FN interceptæ PN sit æqualis, cadere ultra ipsam ABD versùs F. Quod erat è præmonstrandis alterum.

a Per 15.3
b Per 18.1
c Per 15.1
d Per hyp.
i Patet ex 27. 1.
m Per hyp.
n Per 4. 6.
o Per 5.1.
p Per 32.1
r Per 18.1

His positis, ostendam punctum G apparere in C, quodvis autem punctum infinitæ GZ imaginem habere in rectâ CN, & quodvis punctum rectæ GN imaginem esse alicujus puncti infinitæ GZ. Unde consequens erit infinitæ GZ imaginem adæquatam esse CN.

Quoniam angulus VOω, seu VOG æqualis est angulo *s* VOA, liquet punctum G *t* reflecti ad Oculum A viâ GOA, & radium reflexum esse OA: qui quia cum incidentiæ catheto GCF concurrit in C, apparebit G Oculo *u* A in C.

s per hyp.
t per 13.1. Catop.
u per 22.1. Catop.

Sumatur deinde in infinitâ GZ punctum quodvis T, ductàque ex F centro per P rectâ FPR, fiat angulus RPM æqualis angulo RPA. Quoniam æquales *x* sunt FN, PN, erit angulus PFN, seu RFN æqualis angulo FPN, hoc *z* est RPA, hoc est *a* RPM. Æquidistant ergo *b* PM, FGZ. Igitur TCF cathetus incidentiæ puncti T longiùs distat à visu A quàm cathetus incidentiæ puncti cujusvis, putà M, in rectâ PM. Atqui ob æqualitatem angulorum RPM, RPA punctum M ad visum A *c* reflectitur in P. Ergo T ad visum A reflectitur à puncto aliquo B, quod sit ultra P, ut facilè ostenditur eo ratiocinio quo usi sumus *prop.* 17. 1. *Catop.* sed tamen *n* citra O, à quo reflectitur punctum G. Ergo radius reflexus AB cum incidentiæ catheto TCF concurrit in π inter N & C. Ergo *m* T apparet in puncto π rectæ NC.

x per hyp.
z per 15.1.
a per const.
b per 27.1.
c per 14.1. Catop.
n per 17. 1 Catop.
m per 22.1 Catop.

Sumatur vicissim in rectâ NC punctum quodvis π, du-

π, ducaturque Aπ secans in B, ductâque FBX fiat angulus XBE par angulo XBA. Quia PN æqualis o est FN, erit Bπ minor quàm Fπ. Ergo angulus BFπ minor est quàm FBπ, hoc est quàm XBA, hoc est quàm p XBE. Ergo BE cum FC r concurret, putà in T. Ergo aliquod punctum T rectæ GZ; ob æqualitatem angulorum XBT, XBA reflectitur in A viâ TBA, radiusque reflexus est AB: qui quod cum incidentiæ catheto TCF concurrat in π, punctum T apparet in π. Ergo π punctum quodvis rectæ NC, est imago alicujus puncti infinitæ GZ. Sed ostendi suprà etiam punctum quodvis infinitæ GZ imaginem habere in rectâ NC. Ergo recta NC est imago adæquata infinitæ GZ. Quod erat demonstr.

o per hyp. p per constr. r patet ex 27. 1.

Assertio III.

Portio GK media inter jam dictam GZ & non apparentem KC, apparet tota extra speculum, ejusque imago est ipsa KC.

Demonstr. Accipiatur in GK punctum quodvis P. Ostendam hoc apparere inter C & K. In assertione præc. jam ostendi G ad A reflecti à puncto O. Ergo P ad A reflectetur à puncto d remotiori inter O & e Q, putà ab I. Ergo radius reflexus IA concurret cum incidentiæ catheto PCF inter C & K, putà in S. Ergo P apparet in S. Cùm igitur & C appareat in g C, erit CK imago ipsius GK.

Fig. 5. d per 17. 1. Catop. e per Coroll. p 2. g Ostendi assert. 2.

Assertio IV.

Portio GK extra speculum apparens semper crescit, imò fit quacumque datâ major, si cathetus semper magis atque magis ad D terminum lateris hexagonici BD appropinquet.

Ratio est, quia quò cathetus ZCF fit vicinior puncto D, eò anguli VOα latus Oα longiùs concurrit cum ipsâ catheto uti patet ex assertione 2. imò quando cathetus inciderit in ipsum punctum D, tunc (ut *prop. seq.* ostendam) latus prædictum fit ipsi catheto parallelum, ac proinde nusquam concurrit. Cùm igitur concursu illo determinetur a quantitas ipsius KG extra speculum apparentis, liquet eam per accessum catheti ad punctum D, fieri tandem quàcumque datâ majorem.

a per assert. 2 & 3.

PROPOSITIO V.

Ijsdem positis quæ *prop.* 4. in D terminum lateris hexagoni incidat cathetus infinita RDF secans tangentem in S. Dico partem ejus DS non apparere, portionem verò reliquam infinitam SR apparere totam extra sphæram, ejusque imaginem esse ipsam DS.

Fig. 6.

NOn apparere DS patet ex *Coroll. prop.* 2. cùm enim sit inter tangentem Qα & speculum, non potest punctum ipsius ullum reflecti ad Oculum A.

Infinitæ verò SR imaginem esse DS sic demonstro. Sume in SR infinitâ punctum quodvis M. Ostendam hoc apparere in aliquo puncto rectæ DS. Ductâ FBX, fiat angulo XBA par XBE. Quoniam per hyp. BD æquatur radio FD, erit BFD par b ipsi FBD, hoc est c XBA, hoc est d XBE. Ergo æquidistant e BE, FDR. Unde per idem ratiocinium quo usi sumus *prop.* 17. *lib.* 1. *Catop.* (cum rectæ BE punctum quodvis, putà Y reflectatur in B ad Oculum A) facilè ostenditur quod punctum M reflectatur ad visum A, à puncto quopiam K quod sit ultra B, sed o tamen citra contactum Q. Ergo radius reflexus KA, cum incidentiæ catheto MDF concurret inter D & S in O. Ergo x M apparet in O.

b per 5. 1. c per 15. 1. d per const. e per 27. 1. o per 2 hujus. x per 22. 1. Catop.

Sumatur deinde in rectâ DS punctum quodvis O. Ostendam hoc imaginem esse alicujus puncti infinitæ SR. Ducatur OA secans arcum QB in K; ductâque FKT, fiat angulo TKA æqualis TKN. Angulus externus OKI major p est interno AIK, hoc est FID. Sed FID externus major est interno FBI. Ergo OKI, seu OKF multò est major quam FBI, seu FBD, hoc est (ob æqualitatem r laterum FD, FB) quàm s BFD, ac proinde OKF adhuc multò major est quàm KFO. Quoniam igitur OKF, hoc est t TKA, hoc est u TKN major est quàm KFO, seu TFO, concurret KN x cum FO in M. Ergo ob æqualitatem z angulorum TKM, TKA punctum M reflectitur ad A a viâ MKA, apparetque visui A in O b concursu radij reflexi KA cum incidentiæ catheto MDF. Ergo rectæ DS punctum quodvis O, est imago alicujus puncti in infinita SR. Sed & ostendi suprà quodvis punctum infinitæ SR imaginem habere in rectâ DS. Ergo DS est imago adæquata infinitæ SR. Quod erat demonstrandum.

p per 32. 1. r per hyp. s per 5. 1. t per 15. 1. u per const. x patet ex 29 1. z constr. a per 13. 1. Catop. b per 22. 1. Catop.

PROPOSITIO VI.

Ijsdem positis: ducta sit FLV parallela tangenti AQα, secans speculi circulum in L, & arcum DL qui interjacet lateris hexagoni terminum D ac punctum L, secet utcumque cathetus infinita TSF tangenti occurrens in C. Dico partem SC non apparere: portionem verò reliquam CT infinitam apparere totam extra speculum: postremò catheti VL apparere omninò nihil.

Fig. 7.

QUod ad visum A omninò nihil reflectatur, sive ex portione SC, sive ex catheto totâ LV patet ex *Coroll. prop.* 2.

Imaginem verò portionis infinitæ CT extra sphæram apparentem sic exhibeo. Ducatur ad contactum ex centro recta FQ. Quia rectus c est FCQ, erit d FCQ acutus. Ergo i QC minor est quàm FC. Rursum quia BD per hyp. æqualis est radio FS, & DE major m quàm SE, erit BE major quàm FE. Ergo si ducta sic fuerit AP, ut interceptæ OP, FP sint æquales, cadet ea inter rectas AQC, & ABDE. Dico CP esse imaginem adæquatam infinitæ CT. Demonstrabitur ut propositio 5, vel ut assertio 2. *prop.* 4.

c per 18 3. d per 32 1. i per 19. 1. m per 8 3.

PROPOSITIO VII.

Quæ objecta intra specularem sphæram appareant, quæ extra, determinare.

Fig. 8.

PEr Oculum existentem in A, & sphæræ centrum F ducto reflexionis plano producatur circulus FECD, quem ab Oculo A tangant in P & Q rectæ infinitæ AI, AK. Tum sic ducantur AD, AE, ut interceptæ BD, CE sint æquales lateri hexagoni, sive radio

radio FD. Ductis deinde per D, & Q cathetis infinitis FQN, FDM, inter has aliæ quotcumque describantur FX, FX etiam infinitæ, secantes tangentem in punctis φ. Ostensum est *prop.* 4. *Assertione* 2. & 3. infinitas OX partim intra sphæram, partim extra apparere; & quænam illæ sint, ibidem fuit determinatum. Partes igitur extra sphæram apparentes sint φG, φG. Per harum extremitates incedit curva linea verticem habens in contactu Q; quæ, quòd φG, φG fiant tandem *a* quavis datâ majores, protenditur in infinitum: neque tamen cum rectâ infinitâ SM umquam concurret; quamvis illi ad intervallum quovis dato minùs appropinquet, eò quod SM, quæ infinita est, & per *prop.* 5. tota extra speculum apparet, sit terminus in quem apparentes extra speculum finitæ φG semper crescentes desinunt. Similis porrò ad partem alteram linea porrigitur PV.

a per assert. 4 p. 4.

Dico I. igitur: puncta omnia versùs Oculum A citra curvas infinitas QG, PV existentia apparent Oculo A intra sphæram. Quæ verò sita sunt inter curvas infinitas QG, PV, & tangentes infinitas QI, PK, extra sphæram apparent. Postremò quæ existunt inter tangentes infinitas PK, QI, & arcum PωQ, omninò nun apparent.

Demonst. Sit primò quodvis punctum X inter curvam QG, & cathetum QN ductam per contactum, vel inter curvam PV & cathetum PR, atque à puncto illo X ducatur cathetus XGF. Per *assert.* 2. *prop.* 4. quâ genesis curvarum prædictarum continetur, recta XG apparet visui A intra speculum. Ergo & punctum A. Accipiatur deinde, sive in cathetis infinitis QN, PR, sive in spatio inter ipsas constituto punctum quodvis H, ab eoque ducatur cathetus HBF. Per *prop.* 3. HB apparet intra speculum, adeoque & punctum ejus H. Ergo puncta omnia citra curvas infinitas versùs Oculum A constituta intra speculum apparent: quod erat primum.

Sit deinde in spatio MSQG punctum quodvis ω, perque illud ducatur cathetus ωΦF. Per *assert.* 3. *prop.* 4. recta ωΦ apparet extra speculum. Ergo & punctum ω. Rursum intra angulum ISM vel in ipsâ SM, sume punctum quodvis Z, à quo ducatur cathetus ZβF. Per *prop.* 6 vel 5, recta Zβ extra speculum apparet. Ergo & punctum Z. Igitur puncta omnia inter curvam QG, & tangentem QI existentia, extra sphæram apparent. Atque idem eodem modo de existentibus inter curvam PV, & tangentem PK demonstrabitur: quod erat alterum.

Ultimum patet ex *Coroll. prop.* 2.

Dico II. Curva linea infinita apparet in speculi superficie. Omnia quippè puncta G, G, per *Assertionem*. *prop.* 4. apparent in punctis 5, 5, ubi catheti speculum intersecant, ac proinde arcus QD est imago infinitæ DG.

Dico III. Assertio prima ad objecta corporea accommodabitur, si pro curvis lineis QG, PV, intelligatur curva superficies ab his circa cathetum ocularem AF circumactis descripta, & pro tangentibus QI, PK, superficies conica ab his circa eandem AF producta.

PROPOSITIO VIII.

Quò puncta in eâdem catheto existentia a speculo distant longiùs eò imagines ipsorum ad speculi centrum propiùs accedunt. Nullius tamen objecti quantumlibet distantis imago ad quartam diametri partem speculi sphæram ingreditur.

AD unam cathetum BDZ existant puncta B, & C. Visus autem sit in A, ad quem reflectatur remotiùs punctum B à speculi puncto Q. Ergo punctum vicinius C reflectetur ad visum A à puncto O quòd sit *a* remotius à visu A, quàm punctum Q, tamen citra *b* punctum D. Productis igitur radijs reflexis AO, AQ usque ad incidentiæ cathetum BCDZ, erit G imago puncti à speculo remotioris B vicinior centro Z, quàm F imago puncti C vicinioris. Quod erat primum.

Fig. 9.

a per p. 17. 1 Catop.
b per 12. 1. Catop.

Objectorum intra speculum apparentium limites sint QG, & PV juxta *prop.* 7. intra quos objectum aliquod à speculo distet quantumcumque, & sit objecti istius punctum quodvis H; per quod ad centrum F cathetus ducatur infinita F5Hψ. Imago tota 5π catheti infinitæ Bψ est minor quartâ parte diametri, ut *prop.* 3, & *assertione* 2. *prop.* 4. demonstratum est. Liquet igitur imaginem puncti H quantumlibet distantis existere inter 5 & π, ac proinde ad quartam diametri partem intra speculum non admitti. Quod erat alterum.

Fig. 8.

PROPOSITIO IX.

Limitem imaginum intra convexum speculum assignare.

LImites objectorum intra speculum apparentium per *prop.* 7. determinati, sint QG, PV; & ad Oculo A ductæ ita sint secantes AD, AE, ut à circulo interceptæ BD, CE sint æquales radio FD, seu FE. Ducantur deinde radij quotcumque F 5, F 5, ad eosque ab Oculo A sic emittantur rectæ Aπ, Aπ, ut interceptæ, Oπ, Fπ sint æquales.

Fig. 8.

Dico I. Lineam DππE esse limitem quæsitum; hoc est, punctorum omnium intra speculum apparentium imagines existere inter arcum DBE & lineam DπE.

Nam imagines cathetorum omnium XG; XG; NQ: ψ5; 45, RP; 32, citra limites QG, PV versùs A existentium in plano circuli reflectentis FECD, & absque termino productarum sunt *c* rectæ 5π, 5π; eò quòd per genesim lineæ DπE interceptæ Oπ, Fπ semper æquales existant. Quare cùm puncta omnia quæ intra circulum FECD apparere possunt. existant *d* citra limites QG, PV, versùs A, neque horum punctorum sit ullum, quod non in aliquâ cathetorum prædictarum existat, manifestum est eorum omnium imagines esse in rectis Oπ, Oπ, hoc est inter arcum DBE & lineam DπE.

c per assert. 2. p. 4. & per p. 3.
d per 7.

Dico II. Superficiem EπDBCE imaginem esse adæquatam spatij infiniti, quod à limitibus VPCBQG porrigitur versùs RAN. Patet ex dictis.

Dico III. Radiorum partes π5, π5, à linea DπE, & arcu DYE interceptæ omnes minores sunt quartâ parte diametri, præter unam λY, quæ est in catheto visuali AF.

Cùm

Cùm enim ex genesi lineæ DπE, intereeptæ Oπ, Fπ sint æquales; sint autem ςπ minores quàm a Oπ; etiam ςπ erunt minores quàm Fπ; adeoque minores semisse radij FO, sive quartâ parte diametri. Quia autem ςπ minùs semper ac minùs deficiunt ab Oπ, hoc est ab Fπ, quò propiùs accedunt ad cathetum ocularem AF, in quâ coincidunt rectæ AOπ, & Fπς; inde fit ut YA, & FA sint æquales, ac proinde YA sit quarta pars diametri.

a per 7.3.

Dico IV. Assertiones præcedentes ad objecta corporea transferentur, si pro arcu DYE sphærica speculi superficies, & pro lineâ DπE curva superficies ab eâ circa cathetum ocularem AF producta accipiatur.

Scholium.

Quæ hactenus demonstrata sunt cum experimentis congruere evidenter comperies præsidio ampullæ, seu sphæræ vitreæ transparentis. Imagines quippe objectorum ab ejus convexa superficie reflexas contineri intra sphæram & quidem citra centrum manifesto conspicies.

PROPOSITIO X.

Cur res in convexis speculis parvæ appareant.

Fig. 8.

Causa ex hactenùs demonstratis in promptu est. Quantavis enim fuerit longitudo objecti, longitudo imaginis inter arcum speculi & lineam DπE continetur, neque adæquare unquam potest rectas ςπ, quæ sunt radij semisse minores. Rursum quantacumque fuerit objecti latitudo, ex. gr. RN, latitudo imaginis continetur cathetorum extremarum RPF, NQF, segmentis Pζ, Qθ.

Fig. 10.

Poterit aliter propositio demonstrari hunc in modum. Detur linea AB & Oculus Z in uno reflexionis plano, faciente in plano speculo lineam reflectentem EF. Reflectatur autem ad visum Z lineæ datæ extremitas A viâ ACZ, & extremitas B viâ BDZ. Tota igitur AB a reflectetur à totâ GD, & visus Z spectabit in plano speculo lineam AB sub angulo CZD. Describatur deinde per puncta C, D, in eodem reflexionis plano circulus POQ. Linea AB ad visum Z non reflectetur à toto arcu COD, sed ab ejus particulâ aliquâ OS; aliàs enim anguli incidentiæ & reflexionis æquales minimè poterunt obtineri: quod quidem facilè per seipsum demonstrabit lector Ergo AB à visu Z in speculo convexo spectabitur sub angulo OZS multò minori quàm CZD, sub quo in speculo plano spectabatur, ac proinde multò apparebit minor. Atqui in plano speculo AB apparet tanta, b quanta directè visa. Ergo in convexo apparet minor quàm visa directè.

a Per p. 18.1. Cat.

b Per 42. Catop.

PROPOSITIO XI.

Cur recta in speculis convexis curva appareant.

Ratio est, quia speculi convexitas efficit, ut puncta in quibus radij reflexi cùm incidentiarum cathetis concurrunt, in curvam lineam vel superficiem disponantur. Cujus rei demonstrationi, cùm neque admodum sit difficilis, & ob casuum varietatem valdè prolixa, non est animus immorari.

Sed neque illa hic deducere opus erit, in quibus convexa specula cum planis conveniunt: Cujusmodi sunt partes imaginis objecti partibus ordinatim respondere, ac proinde objecta speculo parallela non inverti; item illa quæ *lib. 2. prop. 5. & 6.* demonstrantur de planis. Ea enim omnia sunt ejusmodi, ut per se quemvis illa haud difficulter assequi posse existimem.

PORISMA.

Si ellipsis & circulus se mutuò tangant, recta quæ alterutram figuram in contactus ipsarum puncto tangit, utramque tangit.

Fig. 11.

Tangant se ellipsis & circulus primò exteriùs in A, & circulum ibidem tangat recta CA. Dico hanc etiam tangere ellipsim. Si non: ergo CA producta ellipsim secet in A & S, sitque una recta CAS. Sumpto in arcu SA puncto quovis P, ab eo ducatur recta PA. Cadet ea intra arcum SPA. Sed arcus SPA totus extra circulum est, cùm ellipsis ponatur circulum contingere. Ergo etiam recta PA tota est extra circulum. Ergo inter SAC tangentem circuli & circulum cadit recta PA contra 16. 3. Ergo circulum tangens CA producta ellipsim non secat, ac proinde illam tangit.

Fig. 12. 13.

Tangant deinde circulus & ellipsis sese invicem interiùs. Si circuli arcus tangens DAE cadat intra ellipsim ducatur recta BC tangens ellipsim in A. Hæc à fortiori (quod ajunt) etiam circulum continget. Quod si ellipseos arcus tangens DAF intra circulum cadat, ducatur recta circulum in A contingens. Multò magis eadem ellipsim continget. Liquet ergo propositum.

PROPOSITIO XII.

Data sint duo puncta quæcumque O, Q, à speculo sphærico DAE, sive convexo, sive concavo ad se mutuò reflexa. Si illis tanquam polis describatur ellipsis speculi circulum contingens in A: Dico reflexionis punctum esse A.

Ducatur enim recta ellipsim contingens in A, junganturque rectæ OA, QA. Erunt anguli a OAB, QAC ad ellipsis tangentem æquales. Sed per *Porisma* recta BC etiam circulum EAD tangit in A. Ergo etiam anguli ad circuli tangentem OAB, QAC, æquales sunt. Ergo puncta O, Q, reflectuntur ad invicem b à circuli specularis puncto A. Quod erat demonstrandum.

a per 48. 3. conic. Apol.

b per 41. Catop.

AFFECTIONES PRÆCIPUÆ SPHÆRICORUM CONCAVORUM.

PROPOSITIO XIII.

Speculi sphærici cavi maximus circulus esto EOGX, ad cujus peripheriæ punctum A ex punctis B ac D in circuli plano positione datis, ductæ sint rectæ BA, DA, secantes insuper peripheriam in E & G.

Dico, si æquales sint interceptæ à circulo EA, GA, puncta B, D reflecti ad invicem à puncto A; non verò, si inæquales.

Ducatur enim recta FP circulum tangens in A, junganturque EG. Si ponantur æquales AE, AG, etiam

a per 27. 3. b per 29. 3. c per 4. 1. Catop. etiam arcus a ANE, AOG, ideoque & anguli b AGE, AEG æquales erunt. Sed angulus AGE æquatur angulo FAE, & AEG ipsi PAG. Ergo etiam æquales erunt FAE, PAG, uti & NAE, OAG. Ergo c reflectuntur ad invicem puncta B, D à speculi puncto A.

Quod si dentur puncta B, X, per quæ ductis ad A rectis BA, XA, interceptæ EA, MA sint inæquales, tunc inæquales erunt anguli AME, AEM: quibus cùm æquentur FAB, PAX, etiam hi erunt inæquales. Quare puncta B, X, non reflectuntur ad invicem à puncto A.

Corollarium.

Vera est propositio etiam in convexis. Vide *Fig.* 15.

PROPOSITIO XIV.

Centrum sphæræ à totâ superficie sphæricâ in seipsum reflectitur.

a per 18 3. Omnes enim radij è centro in superficiem incidentes æquales utrimque, nempe a rectos, cum tangentibus angulos efficiunt. Ergo per 1. 1. *Catop.* &c.

Inde fit ut Oculus in centro positus seipsum per totam cavi speculi superficiem spectet, sed confusè.

PROPOSITIO XV.

Fig. 16. **Speculi sphærici cavi maximus circulus esto ACFEG, ejusque diameter CE, in qua sint puncta duo B, D, æqualiter remota à centro A. Dico hæc reflecti ad invicem ab uno tantùm puncto semicirculi CFE, & ab uno semicirculi CGE.**

Per centrum A ducatur diameter FAG perpendicularis ad CE, junganturque BF, DF. Per 4. 1. æquales sunt anguli BFA, DFA. Ergo per 13. 1. *Catop.* puncta B, D reflectuntur ad invicem à puncto F. Eadem erit demonstratio de puncto G.

Quod autem à nullo alio, sic ostendes. Sumatur quodvis aliud punctum P, ducanturque BP, AP, DP. Item HI tangens circulum in P. Quia punctum P, cadit extra F, & DA, BA æquales: erit per Lemma sequens angulus DPI major angulo BPH. Ergo puncta D, B non b reflectuntur ad invicem à puncto P. (b patet ex 2d. Catop.)

Corollar. Ex his patet puncta B, D reflecti ad invicem à totâ peripheriâ FOGQ, cujus diameter est FG, & solâ.

Lemma.

Fig. 17. Datus sit circulus NEM, cujus diameter NM; & à centro F æqualiter distent puncta G, H. Erigatur FE ex centro F perpendicularis ad diametrum. In NCEM sumatur punctum quodvis extra E ut C, & ducantur CG, CH, item AD tangens circulum in C. Dico angulum DCH majorem esse angulo BCG.

Ducantur enim ex H & G rectæ HD, GB perpendiculares ad AD & FC ex centro ad contactum. Erunt illæ a sibi mutuo parallelæ. Et cùm angulus ACF b rectus sit, angulus verò CFA c acutus quia cadit intra NFE; rectæ AD, NH concurrent versus (a 29. 1. b constr. c constr.)

N, puta in A. Erit itaque DH, major quàm BG, Sumatur in DH recta DI æqualis BG & jungantur CI. Cùm e GF sit ad FH sicut BC ad CD, erunt BC, CD æquales, quoniam GF, FH f æquales sunt. Uti f etiam BG, DI. Et anguli ad B & D g sunt recti: igitur etiam angulus BCG æquabitur angulo h DCI; qui cùm cadat intra DCH, erit DCI, hoc est BCG minor quàm DCH. Quod erat demonstrandum. (e cor. p. 2. 6. f constr. g constr. h 4. 1.)

PROPOSITIO XVI.

Cavi sphærici maximus circulus esto ACFEG, ejusque diameter CE, in qua sint puncta B, D inæqualiter distantia à centro A, ducaturque diameter FG perpendicularis ad CE. Dico à nullo puncto semicirculi FCG, in quo est punctum à centro remotius B, reflecti ad invicem puncta B, D. (*Fig.* 18.)

Reflectantur enim, si fieri potest à puncto F, vel G, ducanturque BF, DF. Quia BA major est quàm DA, fiat OA ipsi DA æqualis, junganturque OF. Patet d æquales esse angulos OFA, DFA; ideoque BFA, DFA sunt inæquales. Ergo B, D non e reflectuntur ad invicem à puncto F vel G. (d ex 4. 1. e patet ex 13. 1. Cat.)

Sumatur deinde in semicirculo FCG quodvis aliud punctum P, ducanturque BP, AP, DP. Quoniam l obtusus est angulus PAD, & DA minor quàm BA, erit DPA m minor quàm BPA. Ergo puncta D, B non n reflectuntur ad invicem à puncto P. Ergo &c. (l per hyp. m patet ex lem. n 13. 1. Cat.)

Vitello prop. 15. l. 8. Optic. paralogismum commisit in demonstratione hujus theorematis: assumpsit enim radium AP esse majorem quàm BP, cùm possit esse minor.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem positis: si proportio BA ad DA fuerit æqualis vel major proportione BE ad ED. Dico non posse à puncto ullo circumferentiæ CFEG, imò neque ab ullo cavæ superficiei sphæricæ reflecti ad invicem puncta B, D.

Fig. 19. Quod puncta B, D non reflectantur ad invicem à puncto ullo semicirculi FCG patet ex præcedenti. Sed nec reflecti à puncto ullo semicirculi FEG sic ostendo. Reflectantur, si fieri potest, ad se invicem puncta B, D, à semicirculi FEG puncto quovis R, in quo circulum tangat OQ, occurrens diametro CE in K, ducanturque BR, AR, DR, & DQ parallela ad BR. Angulus igitur DRQ æquatur o angulo BRO. Sed ob BR, DQ parallelas, BRO æquatur ipsi DQR. Ergo DRQ, DQR æquales sunt. Æquantur r ergo DR, DQ. Deinde quia puncta B, D reflectuntur ad invicem à puncto R, æquales s erunt anguli BRA, DRA. Ergo est BA ad AD, t ut BR ad DR, hoc est (quia æquales jam ostendi DR, DQ) ut BR ad DQ, hoc est ut u BK ad DK. Sed BA est ad AD in æquali x vel majori proportione, quàm BE ad ED. Ergo etiam BK ad DK est in æquali vel majori quàm BE ad ED. Dividendo igitur BD est ad DK in a æquali vel majori, quàm BD ad DE. Quod est absurdum. Quare puncta B, D non reflectuntur ad invicem à puncto R, vel alio quocumque semicirculi FEG. Sed neque ab ullo semicirculi FCG: à nullo igitur totius circuli CFEG. (o per 4 1. Catop. r per 6 1. s per 13 1. Catop. t per 3. 6. u per 4. 6. x per hyp. a per 17 & 29. 5.)

Eodem modo ostendam non reflecti à puncto ullo alterius cujuscumque maximi in sphærà circuli. Cùm igitur reflexio fieri debeat in *b* plano ad sphæram recto, ac proinde in aliquo circulo maximo. Liquet puncta B, D non reflecti ad invicem à puncto ullo superficiei sphæræ. Quod erat demonstrandum.

b *Per 2. 1. Catop.*

Corollarium.

Ex demonstratione patet, si puncta B, D reflectantur ad invicem à puncto R, in eoque circulum tangat RK occurrens diametro in K, esse BK ad DK, ut BA ad AD.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 20.

Ijsdem positis, quæ *prop.* 16. si ratio BA ad AD minor est ratione BE ad DE, puncta B, D reflectentur ad invicem à duobus tantùm punctis circuli CFEG continentis punctum D centro vicinius, quorum unum est in quadrante FE, alterum in quadrante GE.

QUoniam BA major est quàm AD, fiat SA æqualis DA. Cùm igitur sit BA ad DA, seu SA in minori ratione quàm BE ad DE, etiam dividendo erit *a* BS ad SA in minori, quàm BD ad DE. Fiat ergo ut BS ad SA, sic BD ad DK, quæ necessariò major erit quàm DE. Tum ex K ducatur recta circulum tangens in R, & arcui F R æqualis sumatur G X.

a *Per 29 5*

Dico puncta B, D reflecti ad invicem à punctis R & X tantùm.

Ducantur enim BR, AR, DR, & OAQ parallela ad KR, occurrens ipsis BR, RD, in O & Q. Quia BS est ad SA ut BD ad DK, erit compon. BA ad SA, seu AD, ut BK ad DK; & permutando BK ad BA, ut DK ad AD. Sed ut BK est ad BA, *b* sic RK ad OA, & ut DK ad AD, sic *c* RK est ad QA ob similitudinem trigonorum RDK, QDA. Ergo RK est ad OA, ut RK ad QA. Æquantur ergo OA, QA. Deinde quia angulus ARK *d* rectus est, & OQ æquidistat RK, etiam RAQ, adeóque & RAO recti sunt. Ergo *e* anguli ORA, QAR sive BRA, DRA æquales sunt. Ergo puncta B, D reflectuntur ad invicem *i* à puncto R. Idem eodem modo patet de puncto X.

b *Per 4. 6.*
c *per eand.*
d *per 18. 3.*
e *Per 4. 1.*
i *per 13. 1. Catop.*

Quod autem ab alio nullo, sic ostendo. Reflectantur, si fieri potest, puncta B, D à semicirculi FEG puncto quovis alio N (non posse enim à puncto ullo semicirculi FCG, patet ex 16) & circulum in N tangat NM. Igitur erit ut BA ad *m* AD, sic BM ad DM. Atqui erat *n* ut BA ad AD, sic BK ad DK. Ergo BM est ad DM. ut BK ad DK; & divid. BD ad DM, ut BD ad DK. Quod est absurdum. Non ergo &c.

m *per corol. p 17.*
n *per 1. part.*

PROPOSITIO XIX.

Fig. 21.

Cavi sphærici maximus circulus esto AYGHD, ejusque diametri binæ quemvis angulum continentes CH, DG, in quibus sumantur duo quævis puncta X, Z. Dico ea non reflecti ad invicem à puncto ullo arcuum CG, DH.

PEr puncta data X, Z, ducatur recta IXZK. Si puncta X, Z reflecti possint à puncto aliquo arcus DH; reflecterentur vel à puncto K, vel à D, vel ab H, vel à medijs inter D & K; H & K. Quod non à puncto K, patet. Non etiam à puncto D, aliàs enim DXT *a* æqualis esset diametro DZAG contra 15. 3. Sed neque ab H; aliàs enim rursus diameter CXAH æquaretur *b* rectæ YZH. Non etiam à puncto ullo E medio inter D & K; aliàs enim contra 15. 3. EXN à centro A remotior æqualis esset *c* rectæ EZV quæ centro vicinior est. Sed neque à puncto ullo L medio inter H & K; aliàs rursum contra 15. 3. OXL centro A vicinior *d* æquaretur ipsi LZM remotiori à centro. Liquet igitur à nullo puncto arcus DH reflecti ad invicem puncta X, Z. Idem eodem modo ostenditur de arcu CG. Ergo &c.

a *Per 13.*
b *per eand.*
c *per eand.*
d *per eand.*

PROPOSITIO XX.

Fig. 22.

Cavi sphærici maximus circulus esto BCFD, ejusque diametri binæ quæcumque CH, DG; in quibus duo quælibet sumantur puncta X, Z æqualiter distantia à centro A, & angulum CAD bifariam secet diameter BF.

Dico, si circulus transiens per A centrum & puncta X, Z, cadat intra speculi circulum BGFD, vel eum tangat, puncta X, Z reflecti ad invicem à duobus tantùm concavæ sphæræ punctis B & F.

DUcantur rectæ XB, ZB; XF, ZF. Quia *a* latera XA, AB æqualia sunt lateribus ZA, AB, & *b* anguli XAB, ZAB æquales; etiam XBA, ZBA æquales erunt. Ergo puncta X, Z reflectuntur *c* ad invicem à puncto B. Idem eodem modo patet de puncto F.

a *hyp.*
b *hyp.*
c *per 13. 1. Catop.*

Quod non à pluribus quàm B & F, sic ostendo. Inprimis non posse à puncto ullo arcuum CG, DH patet ex præcedenti. Dubitari ergo tantùm potest de arcubus GH, CD. Sumatur igitur quodvis in illis punctum N. ducanturque XN, ZN, & AN secans circulum XAZ in O, & jungantur XO, ZO. Quia æquales *d* sunt rectæ XA, ZA, etiam arcus *e* æquales erunt. Igitur *i* anguli XOA, ZOA æquales. Inæquales igitur sunt *o* XNA, ZNA. Puncta igitur XZ *n* non reflectuntur ad invicem à puncto N. Igitur à nullis, præterquam à B & F.

d *hyp.*
e *per 26. 3.*
i *per 29 3.*
o *per lem.*
n *per 13. 1. Catop.*

Lemma.

Fig. 23, 24.

Ad rectam DQ inæquales rectæ AB, BC constituant æquales angulos ACQ, BCQ. Si ad aliud ejusdem rectæ punctum ducantur AD, BD, dico angulos ADQ, BDQ fore inæquales.

Quoniam inæquales ponuntur AC, BC, sit BC minor quàm AC. Ductà igitur rectà AEB, liquet acutum esse angulum BEC. Quare si ex B ad DE perpendicularis ducatur, ea cadet intra triangulum BEC, secabitque EC, AC in O & I. Quoniam ergo æquales sunt anguli BOC, IOC utpote recti, & BCO, ICO per hyp. & latus OC utrique triangulo commune, æquales erunt *o* BO, IO. In triangulis igitur DOI, DOB per 4. 1. inæquales erunt anguli ODI, ODB. Ergo ADE, BDE inæquales. Quod erat propositum.

o *per 26. 1.*

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Fig. 25. **Iisdem positis, si circulus per speculi centrum A, & æquidistantia à centro puncta Z,X descriptus, speculum secet (in M, P), Dico puncta X,Z, reflecti ad invicem à punctis quatuor F,B,M,P; nec à pluribus.**

SUppositâ constructione præcedentis, ducantur insuper XM, AM, ZM, XP, AP, ZP. Quia æquales *a* sunt rectæ XA, ZA, etiam æquales *b* erunt arcus, ideoque *c* & anguli XPA, ZPA, item XMA, ZMA, æquales. Puncta igitur X, Z, reflectuntur ad invicem *d* à punctis P & M. Reflecti etiam à B & F ostensum in præcedenti. Ergo puncta X, Z reflectuntur ad invicem à punctis quatuor. Quod autem non à pluribus, sic ostendo. In arcubus CD,GH (non enim posse à puncto ullo arcuum CG, DH patet ex 19) sumatur quodvis punctum O diversum à punctis M,P,B,F, ducanturque rectæ AON,XO,ZO,XN, ZN. Quia æquales sunt rectæ XA, ZA, adeoque & arcus *l* quos subtendunt, etiam æquales *m* erunt anguli XNA, ZNA. Ergo *n* XOA, ZOA inæquales. Puncta igitur X, Z non reflectuntur ad invicem à puncto O. Ergo à nullis præterquam à dictis quatuor M, P, B, F.

a *hyp.* b *per* 26.3. c *per* 29.3. d *per* 13.1. *Catop.* l *per* 26. 3 m *per* 29 3 n *per lem.*

Scholium.

Ex propositionibus 18,20,21 perspicuum est, quod in planis & convexis speculis non contingere p.16. l.1 ostensum fuerat, posse duo puncta reflecti ad invicem à pluribus speculi cavi punctis, quam ab uno. Reperire porrò ac determinare reflexionum puncta illa, quando puncta ad invicem reflectenda inæqualiter à centro distant, longissimi a laboris est, usus vero propè nullius. Quare his omissis ad illustriores cavorum speculorum proprietates me converto.

a *vide Albaz. l.5. & Vitellonem l.8.*

POSTULATUM
AD SEQUENTIA.

In cavis speculis objecti punctum unumquodque non alibi apparet, quàm in concursu radij reflexi cum catheto incidentiæ.

IN planis & convexis speculis hoc demonstravi *prop.22. lib.1.Catop.* atque ex eo speculorum planorum ac convexorum proprietates huc usque deduxi. In cavis autem istud modò postulamus tantisper, donec appareat, quousque ipsius veritas se extendat.

PROPOSITIO XXII.

Longitudo perpendiculariter insistens speculo cavo sphærico apparet post speculum infinitè longa, quamvis ipsa necessariò semper radio speculi minor existat.

Fig. 26. CAvi sphærici maximus circulus esto AFDG, in quo radius ducatur AD longitudinem solidam baculi aut calami repræsentans. Oculus sit ubivis extra diametrum, sive cathetum DAP, in Z. Producatur deinde radius, sive cathetus AD infinitè post speculum, sumaturque ex eo pars quantumvis magna DE.

Dico DE imaginem esse longitudinis radio AD minoris.

Ducatur enim ab Oculo Z ad punctum E; recta FZCE, speculi circulum secans in F & C. Tum ex C aptetur in circulo recta æqualis ipsi FC. Non transibit illa per centrum A; alias enim FC æquaretur diametro CM contra 15.3. Neque cadet inter centrum A & Oculum Z ex gr. in COM; alias rursum FC magis à centro distans, æquaretur COM minùs distanti contra eamdem 15.3. Restat igitur, ut ea cadat ultra centrum in BG, ac proinde secet radium AD, putà in B. Quoniam igitur æquales sunt FC, GC punctum B reflectetur ad *a* visum Z à puncto C, radiusque reflexus erit CZ, qui productus quia cum incidentiæ catheto AD concurrit in E, punctum B *b* apparebit in E, adeoque BD, quam ostendi necessariò esse radio minorem, apparet in ED, quantumvis magna. Quod erat demonstrandum.

a *Per* 13. b *Per* 22.1 *Catop.*

PROPOSITIO XXIII.

Res ante speculum distantes intervallo minore quàm radij, apparent distare post speculum intervallo quantumvis magno.

Fig. 26. IN maximo sphærici cavi circulo ACFG ducatur utcumque radius AD, in quo post speculum infinitè producto, sumatur punctum quantumvis à speculo distans E. Hoc *d* erit imago alicujus puncti (putà B) in radio AD. Idem eodem de infinitis alijs demonstrabitur. Ergo &c.

d *ostendi prop.22.*

Scholium.

Distantia ingens imaginum clarissimè percipitur, cùm inter objectum & speculum bacillus aut calamus longior interponitur. Tunc enim juxta p.22. bacillus, seu calamus apparet longissimus, & in ejus termino objecti imago conspicitur. Idipsum clarissime cernitur in vitreo speculo, cujus intima superficies sit concava, extima verò plana. In eo quippe unius objecti duas simul imagines intueborum; unam, quæ à planâ superficie reflectitur, objecto æqualem & dilutam: alteram, quæ reflectitur à superficie cavâ, vividam, ingentem, & multo longiùs distantem, quàm prima. Sed quia ob modicam anterioris superficiei reflexionem imago prima valde diluta est, convenient objectum adhibere intense coloratum, calamum ex.gr. album, aut flammulam candelæ; alias imago illa non apparebit.

PROPOSITIO XXIV.

Cur objecta in cavis speculis tam prodigiosæ magnitudinis appareant.

Fig. 27. CAvi sphærici maximus circulus esto AODC, & in ejus plano inter A centrum & speculum alicujus objecti longitudo, seu latitudo PN, quæ visui posito ex.gr. in Z, appareat post speculum. Per extrema puncta P & N emittantur catheti infinitæ AR, AS. Per *p.20. lib.1. Catop.* puncta P, N, apparent in suis singula cathetis incidentiæ APN, ANM; &

per *præcedentem* apparent in earum punctis valdè distantibus post speculum, putà in R, & S. Ergo lineæ PN imago est RS; quæ eo major erit quàm PN, quò AR, AS magis excedent ipsas AP, AN. Cùm ergo possint AR, AS, esse quantumvis magnæ, etiam poterit quantumvis magna esse imago RS; quæ semper major apparebit, quia angulum RZS, sub quo videbitur imago, semper magis magisque excedet angulum PZN. Unde patet intentum

PROPOSITIO XXV.

Imaginum post cava specula apparentium partes ordinatim respondent partibus quas repræsentant.

Fig. 27. Nimirùm ut in speculis convexis ac planis. Cavi sphærici maximus circulus sit AODC, & recta in eo NP objecti longitudinem spissitudinemque repræsentans, & post speculum apparens visui Z in RS; per cujus extrema P & N catheti emittantur infinitæ. Quoniam igitur recta PN ponitur apparere post speculum, necesse est post speculum appareant etiam puncta P & N. Cùm ergo illa in suâ quæque catheto appareant, necesse est P apparere post speculum in aliquo suæ catheti AN puncto R, & M in aliquo suæ catheti puncto S. Ergo R est ad easdem partes, ad quas est punctum P quod repræsentat, & S ad easdem partes cum puncto à se repræsentato N. Ergo &c.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 28. **Cavi sphærici maximus circulus esto HBKA, à cujus puncto B ducantur infinitæ BE, BV, sic ut æquales sint anguli EBH, VBK. Ex centro A sit AD parallela ad EB, quæ producatur infinitè versùs Z. Dico, si visus existat in rectâ BE, infinitam BZ imaginem esse rectæ BD.**

Sumatur enim in infinitâ BZ punctum Q quantumvis distans post speculum, & visus sit in C, ducaturque ex centro A recta AQ. Quia igitur AD æquidistat CBZ, secabit AQ ipsam DB in O. Quare cùm ex hyp. æquales sint anguli OBK, CBH, punctum O reflectetur ad visum C, à puncto B, apparebitque in Q, ubi radius reflexus BC, & cathetus incidentiæ AOQ concurrunt. Ergo Q punctum quantumvis distans à speculo, est imago puncti O. Ex quo patet infinitam ZB esse imaginem rectæ DB.

Ducatur deinde ab Oculo C per centrum A recta CAX, Dico rectam DX in speculo non apparere.

Accipiatur enim quodvis in eâ punctum S, ducaturque per centrum cathetus SAE. Concurret illa cum radio reflexo BC in E post Oculum C, cui proinde punctum S non apparere. Ergo &c.

PROPOSITIO XXVII.

Potest imago extra cavum speculum prodire usque ad ipsum Oculum.

Fig. 29. Cavi sphærici maximus circulus esto HBK, ex cujus puncto B ducantur infinitæ BR, BV ad æquales utrimque angulos RBH, VBK. In harum alterâ BR ponatur Oculus in puncto C ad libitum remoto a speculo. Tum ab Oculo C per A centrum ducatur CAX occurrens ipsi BV in X, & per centrum A ponatur TAY parallela ad BV.

Dico I. Infinita in XV apparere in YC. Sumatur enim in XV quodvis punctum F, à quo per centrum A ducatur FAN: hæc, quia TAY est parallela ad BV, secabit BC ultra Y versùs C, non tamen ultra C. Secet ergo in N. Quoniam anguli NBH, FBK æquales sunt, reflectetur F ad visum C à puncto B, apparebitque in N, ubi radius reflexus BC & incidentiæ cathetus FAN concurrunt. Ergo F punctum quodvis infinitæ XV imaginem habet in rectâ YC. Sumatur deinde in rectâ YC punctum quodvis Q, à quo ducatur per A centrum cathetus QAI, quæ necessariò intersecabit rectam XV ultra X versùs V, putà in I. Ergo visui C punctum I apparet in Q, ac proinde I punctum quodvis rectæ YC est imago alicujus puncti in infinitâ XV. Sed & ostendi quodvis punctum infinitæ XV imaginem habere in rectâ YC. Ergo YC est imago adæquata infinitæ XV.

Dico II. Puncti G speculo vicinioris imago longiùs prodit ante speculum, quàm imago puncti remotioris F. Ductis enim cathetis FAN, GAP, IAQ, OIR, ex dictis *assert.* 1. patet Oculo C apparere F in N, & G in P, & I in Q, & O in R.

Dico III. Si gladius in speculum cavum sphæricum dirigatur secundùm rectam VXB, quò is propiùs speculo admovebitur, eò longiùs acumen ejus versùs Oculum C prodibit, & cùm acumen pervenerit in X, id in ipsum videbitur Oculum irruere. Patet ex *assertione* 1. & 2.

PROPOSITIO XXVIII.

Res ultra centrum cavi speculi constitutæ, si etiam visus ultra centrum existat, semper apparent inter centrum ac speculum, & situ inverso.

Cavi sphærici maximus circulus esto MBNA, *Fig.* 30. ultra cujus centrum A sit objecti alicujus linea 31. DE: sit verò etiam visus ultra centrum in Z. Ut punctum D reflectatur ad visum Z, debent interceptæ *Per* 13. à speculi circulo (ex. gr. FC, CG) esse æquales: non possunt autem (ut ex 15.3. patet) æquales esse, si ambæ ad easdem centri A partes cadant. Necesse est igitur ut radius incidentiæ DFC cadat ad unam centri partem, nimirùm versùs MD, radius autem reflexus CZ ad partem alteram versùs NE. Quare incidentiæ cathetus DA occurret radio reflexo CZ ultra centrum A in P ad partem contrariam puncti objectivi D. Eodem modo patet puncti E radium incidentiæ EB existere versùs NE, reflexum verò BZ versùs MD, ac proinde incidentiæ cathetum EA occurrere radio reflexo BZ ultra centrum A in O ad partes MD contrarias puncti objectivi E. Quòm igitur D appareat in concursu P, & E in concursu O, tota DE apparebit in OP inter speculum & centrum A, situ inverso. Quod erat demonstrandum.

PRO.

PROPOSITIO XXIX.

Si visus existat inter centrum ac speculum, objecta ultra centrum constituta, quandoque apparent inter centrum ac speculum situ inverso, quandoque post speculum, sed situ erecto.

Fig. 32. a Patet ex 15.3.

CAvi sphærici maximus circulus esto ASLG, in quo duæ ponantur æquales SC, FC. Erit igitur inter *a* has centrum A, per quod ducatur infinita LAT faciens cum SC acutum angulum LZC. Tum in LT sumpto quovis puncto R, ultra centrum A ducatur per R perpendicularis ad LAR recta RD; cum quâ CF concurrat in D. Ex D autem cathetus ducatur DA occurrens ipsi SC in P, ponaturque visus in Z.

b Per 13. d Per postul.

Quoniam igitur æquales sunt FC, CS, reflectetur *b* punctum D ad visum Z, à puncto C, apparebitque D in *d* P, ubi radius reflexus CZ & cathetus incidentiæ DA concurrunt.

Sumatur deinde arcus LB, æqualis arcui LC, & per B ac visum Z ducatur BG. Erit ergo angulus BZL, par ipsi CZL, adeoque etiam acutus. Unde recta OP est inter visum Z & speculum. Jam rectæ BG æqualis in eodem circulo aptetur BQ concurrens cum DR in E. Quia igitur æquales sunt BG, BQ, liquet *i* E ad visum Z reflecti in B. Ductâ igitur catheto incidentiæ EAO, punctum E *o* apparebit in O, ubi radius reflexus BZ & cathetus EAO concurrunt. Linea igitur DE visui posito in Z inter centrum A & speculum BLC apparet inter visum ac speculum in linea PO, & situ inverso, quia D apparet in P, & E in O. Atque hoc erat primum.

i Per 13. o Per postul.

Alterum verò, quamvis experientiâ non minus certâ constet, quàm primum; nequit tamen expostulato superiùs assumpto demonstrari: imò verò oppositum ex illo conficì propositione seq. ostendam. Quare veritas postulati, quod a prop. 22. huc usque cum phænomenis egregiè concordavit, hic primùm deficit. Sit ergo

PROPOSITIO XXX.

In cavis speculis imago subinde apparet extra concursum radii reflexi cum catheto incidentiæ.

Fig. 32.

ULtra A centrum cavi speculi sit objectum DE, à cujus extremitatibus ducantur catheti DA, EA; quæ si ultra centrum producantur, necessariò tendunt in partes contrarias punctis D, E. Itaque si quodvis punctum semper appareat in suâ catheto, non poterit objectum DE ultra centrum A existens, apparere post speculum umquam aliter quàm situ inverso. Si enim D appareat post speculum in suæ catheti puncto N, & E in suæ catheti puncto M, liquet imaginem NM semper esse inversam. Atqui experientiâ certâ constat Oculo propè ad speculum admoto (putà in Y) objecta ultra centrum posita apparere post speculum situ alio. Ergo in cavis speculis quodvis punctum non semper apparet in suâ catheto incidentiæ, sed extra eam subinde, ac proinde extra concursum radij reflexi cum catheto incidentiæ. Quod erat demonstrandum.

Errarunt igitur Alhazenus, Vitello, aliiq́ Optici hos secuti, existimantes ut in planis convexisque speculis, sic & in cavis numquam imaginem extra concursum radij reflexi cum incidentiæ catheto apparere.

DE SPECULIS USTORIIS.

PROPOSITIO XXXI.

In cavum sphæræ portionem (FCG) gradibus 120 minorem radius incidens (EF) axi (DAC) parallelus, post reflexionem axi occurrit (in I) inter centrum (A) & verticem portionis (C)

Fig. 33.

MAximus sphæræ circulus & simul *a* planum reflexionis esto AEFG. Quoniam arcus FG est minor gradibus 120, ejus semissis CF erit minor gradibus 60, sive tertiâ parte semicirculi CQD. Sed arcus ED, CF, utpote inter rectas EF, DC parallelas constituti, æquales sunt. Ergo etiam arcus ED minor est triente semicirculi. Ergo arcus EQF est triente major, adeoque major arcu FC. Quare si ducatur recta FC, ea minor est quàm EF. Igitur quæ ex puncto F aptabitur in circulo æqualis ipsi EF, propior esse debet *b* centro quàm FC, ac proinde secabit axem inter centrum A & C. Sit ergo illa FS, axi occurrens in I. Quoniam igitur æquales sunt EF, ES, liquet radij incidentis EF reflexum *c* esse FS, occurrentem axi in I inter centrum & verticem. Quod erat propositum.

a def. 10. b Per 15. 3 c Per 13.

PROPOSITIO XXXII.

Inter radios axi parallelos, in cavam portionem sphæræ minorem gradibus 120 incidentes, qui axi propinquior est, is majorem axis partem reflexus abscindet, quàm remotior; semper tamen minorem radij semisse.

Fig. 33.

MAximus sphæræ circulus esto AEQFS, de quo sumatur arcus FG minor gradibus 120, eoque bisecto in C, inde per centrum A ducatur CAD, quæ erit axis portionis sphæricæ, cujus arcus est FG. In arcum FG incidant radii EF, MN æquidistantes axi DAC, & positi in plano circuli AEQFS. Sit autem radij EF reflexus FI, abscindens axis partem CI.

Dico reflexum radij MN abscindere partem axis CO, quæ major sit quàm CI, sed minor semper semisse radij AC.

Demonstr. Cùm æquidistent *a* EF, DC, erit angulus EFA par *b* angulo CAF, sive IAF. Sed *c* æquales sunt anguli EFA, IFA. Ergo etiam IFA ipsi IAF æqualis est. Ergo triangulum FIA isosceles est. Eodem modo ostendam esse isosceles NOA. Jam quia MN est *d* propior axi quàm EF, arcus NC minor est arcu FC, ideoque *i* angulus NAO minor est quàm FAI. Quare cùm his ostensi sint æquales esse ONA, IFA, etiam summa utriusque OAN, ONA, minor est summâ utriusque IAF, IFA. Ergo reliquus NOA *m* major reliquo FIA. Cùm igitur Isoscelia triangula æquales habeant bases NA, FA, si illæ sibi mutuo imponantur, patet *n* angulum NOA cadere intra angulum FIA, ac proinde summam æqualium laterum NO, AO minorem esse summâ laterum æqualium FI, AI. Ergo unum AO minùs est uno AI. Ergo CO major quàm CI: quod erat primum.

a hyp. b Per 27. 1 c Per 13 Catop. d hyp. i Per 33. 6. m Patet ex 32. 1. n ex 21. 1.

Deinde quia CO semper minor est *o* quàm NO, & NO ostensa est æqualis AO, etiam CO semper minor est quàm AO. Ergo CO semper minor est semisse radij AC: quod erat alterum.

o Per 7. 3.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 34. **Portio cava sphæræ 18 graduum omnes radios sibi incidentes axi (DAC) parallelos reflectit in spatiolum lineare (BO) minus parte centesima sexagesima radij (AC), quod à puncto (B) bisectionis radij ad verticem portionis porrigitur.**

Maximus sphæræ circulus esto AQG, in quo sit datæ portionis arcus grad. 18, bisectus in C à portionis axe DAC, quod enim de hoc arcu demonstrabitur, patebit pariter de portione ipsâ speculi ex revolutione arcus progenitâ. Sint autem in plano maximi circuli AQG radij ad axem paralleli MN, SP, qui reflexi occurrant axi in O. Ex præcedenti patet radios axi parallelos, qui inter hos extremos MN; SP incidunt, reflexos occurrere axi infrà O & suprà B punctum bisectionis radij, hoc est inter O & B; ac proinde omnes radios axi parallelos incidentes in arcum NP reflecti in spatiolum OB. Restat igitur ut ostendam BO esse minùs $\frac{1}{160}$ parte radij. Ducatur ex centro A recta AN. Quoniam MN, AC *a* æquidistant, erit angulus OAN *b* æqualis alterno sibi MNA, hoc est *c* angulo ONA. Et cùm arcus *d* NP sit grad. 18, erit semissis ejus NC, adeoque & angulus *e* OAN grad. 9, qui cùm par sit ostensus ONA, etiam hic est grad. 9. Ergo uterque simul est grad. 18: quos si auferas ex duobus rectis, remanet NOA grad. 162, cujus complementum ad duos rectos est NOC grad. 18. Sinus porrò anguli NOA grad. 162, sive ejus complementi NOA grad. 18, est 30901; sinus verò anguli ONA (quem ostendi esse grad. 9) est 15643. Cùm igitur latera trianguli sint inter se *o* ut sinus angulorum oppositorum, erit AN ad AO ut 30901 sinus anguli NOA, ad 15643 sinum anguli ONA. Igitur quarum partium AN, sive AC est 30901, earum AO est 15643, & AB semissis ipsius AC est 15450; adeoque BO est 193: per quæ si dividatur AC 30901, quotiens prodibit $160\frac{21}{193}$. Ergo BO minor est parte centesimâ sexagesimâ radij AC. Quod erat demonstrandum.

a *hyp.*
b *Per* 27.1
c *Per* 13.1 *Catop.*
d *hyp.*
e *Per* 33.6
o *per probl.* 7. *cap* 3. *Geo. pract.*

Corollarium.

Simili calculo reperies arcum FG graduum 40 radios sibi incidentes axi parallelos reflectere in spatium minùs $\frac{1}{31}$ parte radij: arcum verò grad. 60 in spatium minùs duodecimâ parte radij: & sic deinceps quò major fuerit arcus, eò & focum (ita spatium appello, in quod radij per reflexionem conveniunt) fieri majorem.

PROPOSITIO XXXIV.

Specula cava sphærica Soli exposita circa punctum, quo radius bisecatur, ignem accendunt.

Fig. 34. Si speculi axis CD dirigatur in centrum Solis, ob immensam propè Solis distantiam erunt radij à Sole in speculum evibrati quoad sensum ad CD paralleli, ac proinde omnes illi qui incidunt in portionem speculi NP grad. 18, reflectentur *i* in spatiolum BO minus parte radij AC centesimâ sexagesimâ, cujus initium sit in puncto B, ubi radius bisecatur. Cùm igitur tantum lucis in locum tam angustum cogatur, intensissimus ibi calor existat necesse est. Unde fit ut siquid eo loco combustibile statueris, illicò exuratur.

i *per præc.*

Radios porrò Solis esse quoad sensum parallelos manifestum ex ijs quæ *Astronomia lib.* 3. docuimus. Nam si educi ex Solis centro duo radij intelligantur, quorum alter transeat per centrum Terræ, alter eamdem tangat, continebunt illi angulum, qui Parallaxis Solis Horizontalis ab Astronomis appellatur. Hunc verò angulum nemo majorem statuit tribus minutis, nos autem probavimus non esse minuto dimidio majorem. Quare licet hi radij divaricentur ad amplitudinem semidiametri Terræ, quia tamen angulum adeò parvum continent, quoad sensum paralleli erunt. Cùm igitur radij ex Solis centro incidentes in speculum, angulum adhuc multò minorem contineant, erunt illi multò magis quoad sensum paralleli, quod erat probandum.

Scholium.

Vt expeditè ignis accendatur, materia flammæ concipiendæ idonea foco præcise applicanda est: si enim vel modicè à foco aberraveris, effectus erit nullus. Vt igitur applicatio fiat exacta, focum oportebit conspicuum reddere excitando fumum aut pulveres; sic enim luminis reflexi conus, ejusq; vertex, sive focus clarissimè apparebit.

PROPOSITIO XXXV.

Euclidis & veterum error circa focum speculi cavi sphærici.

Putarunt illi accendi ignem in centro, hoc inducti argumento. Omnes radij qui à Sole in speculi centrum diriguntur, ultra centrum procedentes in speculi superficiem, perpendiculariter incidunt, ac proinde reflectuntur in seipsos. Ergo omnes reflexi in centro conveniunt. Ergo ignis in centro accenditur. Ita illi contra experientiam nunc quidem manifestam. Sed quia probationis vitium nemo ostendit, juvabit istud paucis hìc aperire.

Angulus DAE, quem in speculi centro efficiunt extremi radij solares DA, EA, est ille ipse, sub quo Solem è terra conspicimus. Hunc *a* Astronomi reperêre gradus circiter dimidij. Tantillus igitur est angulus DAE, & illi ad verticem oppositus BAC, adeoque & subtendens illum speculi arcus BC, qui determinat luminis quantitatem radijs per centrum transeuntibus à speculo exceptam, & in A centrum reflexam. Atqui luminis portio tantilla in centro collecta non potest ignem accendere. Patet igitur veterum paralogismus.

Fig. 35.
a *vide Astron. l.* 3. *c.* 5. *nu.* 31.

Contra, lumen, quod radijs parallelis defertur, & colligitur circa punctum, quo radius bisecatur, portionem speculi occupat *b* graduum 18, ac proinde sufficiens est ut causet ustionem.

b *per* 34.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 36. Portio cava (COBF) conoidis parabolicæ omnes radios sibi incidentes axi (CB) parallelos reflectit in axis punctum (A) distans à vertice (B) quartâ parte lateris recti: ubi proindè vehementissima ustio.

PArabola conoidem revolutione suâ producens, sit EBF; quod enim de hac ostenderis, de conoide ipsa liquebit pariter. In parabolæ quodvis punctum O radius incidat axi parallelus & in parabolæ plano existens DO, ducaturque recta OA. Parabolam deinde contingat in O recta PI. Demonstratum est à Vitellone alijsque angulos ad tangentem DOI, AOP esse æquales. Ergo per 5. *lib.* 2. *Catop.* omnes radij DO æquidistantes axi reflectuntur in punctum A. Quare ustionem fieri in A validissimam necesse est.

Corollaria.

1. *Speculum quod reflexione radios colligat post se, exhibere.*

Fig. 37. Proprium hoc est speculis refractorijs: potest tamen etiam reflectentibus convenire. Si enim à conoide parabolicâ EBF abscindatur portio MBN continens focum A, reliquus tubus parabolicus radios axi parallelos post se colliget in A.

2. *Mensam trochorum construere, in quâ globulus secundùm lineas lateribus parallelas impulsus semper annulum reflexus incurrat.*

Fig. 38. Fiat mensa terminata duabus parallelis AB, CD, & duabus parabolis AFD, AEC in quarum focis I, O, statuantur annulus, & portula. Patet igitur globulum, si impellatur secundùm lineas GX, vel MQ, reflexum iri semper in focos I, vel O, ac proinde incursurum semper in annulum vel in portulam. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XXXVII.

Si flamma candelæ in foco cavi speculi sphærici vel parabolici collocetur, totum speculum quasi ardens apparebit, & lumen ad spatium longissimum reflectetur ea intensione quæ ad legendum sufficiat.

Fig. 41. LEgi ego libellum in distantiâ pedum circiter 400 à speculo & candelâ, alio nullo adjutus lumine, quàm reflexo. Ratio est, quia cùm radij paralleli DA reflectantur in focum C vicissim etiam radij CA è foco egressi reflectuntur parallelè, totumque lumen è foco incidens in speculum AB, cogitur in cylindrum ABDT. Quia tamen flamma candelæ foco major est, non omnes radij ab eâ emissi in speculum reflectuntur prorsus paralleli, sed ad parallelismum propè accedunt: atque hæc est causa, quod figura luminis opposito muro excepti similis sit non speculo, sed candelæ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Potest reflexione lumen colligi ad distantiam à speculo quantumvis magnam; non sic tamen ut urat.

DUo sunt modi præcipui. Primus per speculum parabolicum. Potest enim describi parabola habens latus rectum, adeoque & quartam lateris recti partem quantumvis magnam. Cùm igitur focus speculi parabolici distet à vertice *a* quartâ parte lateris recti, poterit ab aliquo speculo parabolico Solis lumen colligi in focum quantumvis distantem à speculo. Non poterit tamen illud ad quamvis distantiam urere, tum quia lumen reflexum sensim elanguescit, tum propter nimium acumen coni Catoptrici, quo vim ustionis diminui experientiâ constat. Refert tamè Kircherus noster *pag.* 882 & 883 artis magnæ speculo parabolico Manfredi Septalij ignem fuisse accensum ad passus 15 vel 16 à speculo, indifferenter videlicet à passu 15 usque ad 16, sed morâ longiusculâ, quâ nimirum Psalmus *Miserere* recitari posset.

a Per 37.

Fig. 42. Modus alter est ejusmodi. Speculo parabolico AB radij paralleli DA, DB colliguntur in focum Q. Deinde tubulus parabolicus OP ita ponitur, ut ejus focus congruat cum foco Q. Sic enim radij à speculo AB reflexi in focum Q, inde ulteriùs progredientes à tubulo excipiuntur, à quo reflexi rediguntur in cylindrum OF; qui quò tubulus fuerit gracilior, tantò & ipse gracilior erit propiusque accedet ad lineam. Atque hæc est linea illa ustoria, quâ nonnulli putaverunt ad quamvis distantiam posse ignem accendi. Verùm neque illa idonea est ad urendum in distantiâ magnâ, nedum infinitâ. Nam præter duas rationes contra modum primum allatas, adversùs hanc etiam tertia accedit, quod lumen duplici reflexione debilitatum ac fractum plurimum activitatis amittat.

Corollarium.

Ex is patet non potuisse Catoptrico artificio Archimedem Marcelli naves ad tria stadia (ut refert Diodorus), vel ad tria passuum millia (ut alij volunt) distantes incendere. Credibile est à muro non ultra passus 30 abfuisse. Ita Kircherus loco ipso diligenter à se inspecto *i* opinatur.

i artis mag. pag. 876.

PROPOSITIO XXXIX.

Sphærois cava radios omnes à polo uno egressos in polum alterum reflectit.

Fig. 39. PUncta ex comparatione facta, sive poli sphæroideos sint A, B, ellipsis autem, quæ sphæroidem genuit, esto COD, in quâ ex polis A, B ad perimetrum inclinentur rectæ AO, OB, ducaturque PQ tangens in O. Demonstratum est angulos POA, QOB ad tangentem facto *b* æquari. Ergo *c* radij omnes AO egressi è polo A ab ellipsis perimetro reflectuntur ad polum B. Ex quo idem patet de cavâ superficie sphæroidis.

b 48.3. Con. Apol. c Per 5.1. Catop.

Corollaria.

Fig. 39. 1. Si in polorum uno A ponatur flamma candelæ, lumen incidens in superficiem totam sphæroidis colligetur circa focum alterum B; ubi proinde lumen existet quidem vehementer intensum: sed ignem non existimo accensum iri, ob necessariam lucidi in A polo existentis parvitatem.

2. Tu

Fig. 40. 2. Tubum auditorium conficies si à sphæroide oblongâ & gracili AB tubum abscindas ECDF, polos O & Q non continentem. Si enim os loquentis ponatur in polo Q, & polus alter O in aure audientis, omnes radij sonori in cavam tubi superficiem incidentes reflectentur ad aurem in O.

Fig. 39. 3. Si mensa trochorum construatur formâ ellipticâ, & in polorum altero A annulus collocetur, in altero B globulus, is quamcumque in partem ad mensæ latera impingatur, incurret in annulum.

Fig. 46. 4. Radius ex uno ellipsis polo procedens versùs majorem axem, infinities reflectitur.

Ex polo radius exeat AE: is reflectetur ad focum alterum B. Hinc pergens in F reflectetur ad focum A. Inde pergens in G reflectetur ad focum B. Ex B procedens in I reflectetur ad focum A, atque ita in infinitum.

PROPOSITIO XL.

Conois hyperbolica convexa omnes radios *a* (PO) tendentes in focum (A) reflectit in conoidis oppositæ focum (B) & conois hyperbolica cava omnes radios *b* (PO) tendentes in conoidis oppositæ focum (B) reflectit ad focum suum (A).

a Fig. 43. b Fig. 44.

Egregiè & primus id observavit Marius Bettinus noster Apiario 7, progym. 3: & mirum est ante illum nemini incidisse, cùm ex p. 48. 3. conic. non minùs immediatè ac facilè deducatur pro hyperbolà, quàm pro ellipsi.

Fig. 43. Hyperbolam conoidis genetricem KSN in puncto O tangat recta CD, ducaturque BO. Quoniam radius incidens PO per hyp. tendit in focum A, & per constr. OB in focum B, erit angulus AOC æqualis angulo BOC. Sed AOC est par *d* ipsi POD. Ergo POD æqualis est BOC. Ergo radius PO tendens in focum A reflectitur *i* ad focum B. Quod erat primum.

d Per 15. I. i Per 5. I. Catop.

Fig. 44. Tangat rursus hyperbolam in O recta CD, ducatur OA. Quia radius incidens PO *m* tendit in focum B, & OA in focum *n* A, erit angulus AOC, *o* par angulo BOC. Sed BOC æquatur *r* ipsi POD. Ergo POD æqualis est AOC. Ergo radius PO tendens in focum B *s* reflectitur in focum A. Quod erat alterum.

m hyp. n constr. o Per 48. 3. Conic. r Per 15. I. s Per 5. I. Catop.

Corollarium.

Fig. 45. Radius quivis CE tendens in focum A inter oppositas hyperbolas versùs axem infinities reflectitur.

Nam quia CE tendit in focum A, reflectitur in focum B, occurrens alteri hyperbolæ in S. Quoniam igitur radius ES tendit in focum B, reflectitur in focum A, occurrens hyperbolæ in O. Rursum igitur quia radius SO tendit in focum A, reflectetur ad focum B, & sic deinceps in infinitum.

PROPOSITIO XLI.

Cava conois hyperbolica urit non Soli exposita: sed igni.

Fig. 44. Quoniam ignem struere possumus tam latum quàm voluerimus, & speculum illi pro libitu admovere, manifestum est radios PO ab igne in speculum emissos, & in oppositæ hyperbolæ focum B tendentes, posse magnam insidere speculi portionem VSX. Magna igitur quantitas caloris colligetur in foco A; quæ proinde possit ad urendum sufficere.

Fig. 47. Contra accidet, si Soli speculum obvertas. Cùm enim ob ingentem Solis distantiam extremi solares radij tendentes in focum B, angulum efficiant non majorem gradu dimidio, exigua tantùm speculi portiuncula solare lumen excipiet quod reflectat ad focum, adeoque luminis quantitas tam modica colligetur in foco A, ut ad urendum minimè sufficiat.

Corollarium.

Convexa conois hyperbolica ad urendum minùs idonea est.

Nisi enim valdè magnus sit ignis, extremi radij EO, FO ab igne tendentes in polum A, modicam speculi portionem intercipient, ac proinde caloris quantitas minùs parva reflectetur ad focum B. Multò adhuc minùs erit ustioni aptum si Soli obvertas, ut patet ex dictis in præcedenti.

PROPOSITIO XLII.

Dantur specula, quorum focus sit linea recta, vel curva quæcumque.

Si portio cava circuli vel parabolæ unà cum foco motu recto deferatur, describet superficiem cylindricam, & focus rectam lineam. Manifestum est omnes radios parallelos in ejusmodi superficiem perpendiculariter incidentes, reflecti in totam lineam à foco descriptam. Quod si eadem illa portio circuli vel parabolæ cum suo foco circumagatur motu circulari vel elliptico vel alio quocumque, describet ipsa superficiem annularem cavam, focus autem lineam circularem vel aliam curvam pro motus ratione, ad quam omnes radij paralleli in cavam annularem superficiem incidentes, reflectentur. Non urent tamen lineæ istiusmodi, quòd in singulis ipsarum punctis non nisi unica luminis superficies colligatur.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 48.

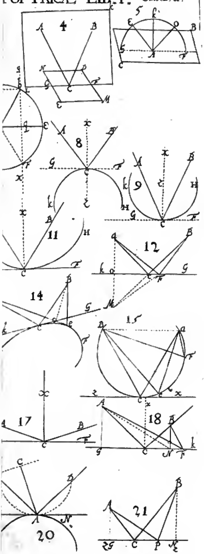
Convexa conois parabolica, imò & sphæra convexa radios (BO) tendentes in focum (A), axi (FA) parallelos reflectit.

Ducatur COE parallela axi AF, & NM tangat in O. Igitur EO *a* reflectitur ad focum A, radiusque reflexus est OA, qui per hyp. ipsi DO est indirectum. Ergo anguli *b* EOM, AON, æquales sunt. Ergo etiam æquantur illis ad verticem oppositi MOD, CON. Ergo radius DO tendens in A reflectitur *c* radio OC parallelo ad *o* AF.

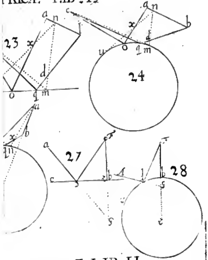
a Per 34. & 37. b per 4. & 5. I. Catop. c per eund. o per const.

FINIS CATOPTRICÆ.

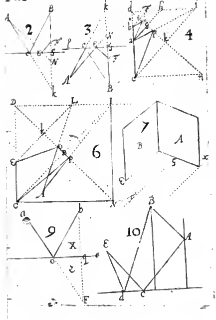
AN-



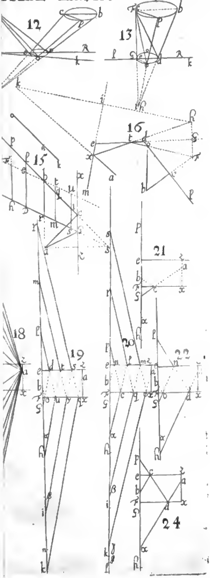
TRICÆ LIB. I.

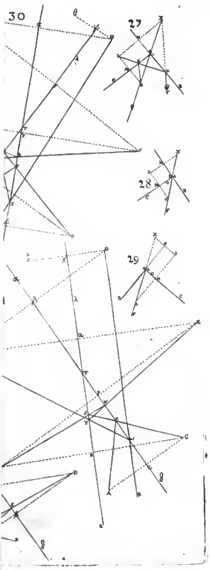


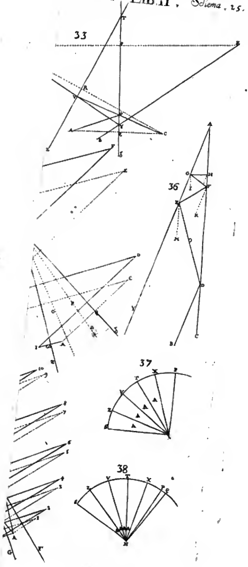
TOPTRICÆ LIB. II.



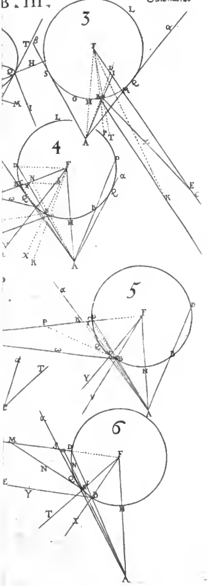
Schema 23.um



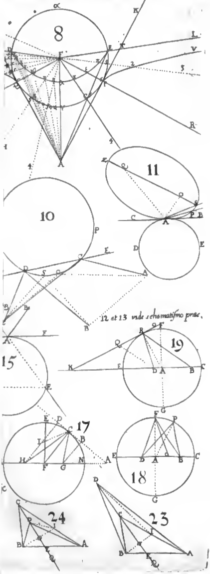



33
36
37
38

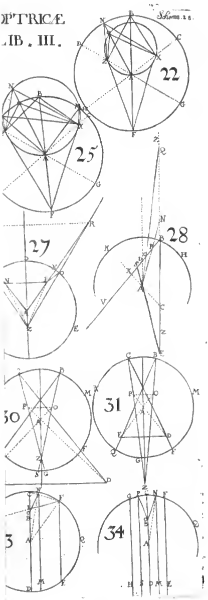
B. III. Schema. 26

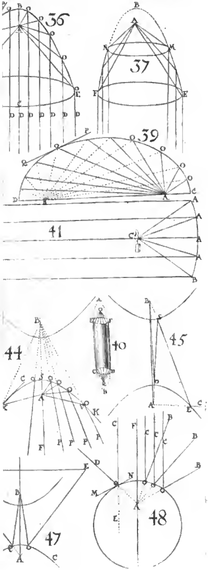


Schema 27.



OPTRICÆ
LIB. III.





ANDREÆ TACQUET

E SOCIETATE JESU ARCHITECTURÆ MILITARIS

PARS I.

DE MUNITIONE REGULARI.

CAPUT PRIMUM.

Architecturæ Militaris Definitio, Initia, Progressus, Perfectio.

ARchitectura Militaris, est scientia locum quemcumque adversus vim hostilem aptè muniendi ac tuendi.

Urbes atque Castella (inquit Vegetius) aut naturâ muniuntur, aut manu, aut utroque. Naturâ aut loco edito sive abrupto, vel circumfuso mari, sive paludibus vel fluminibus. Ciliciam Asiæ, & Helvetiam Germaniæ montes circumjecti propè inaccessas reddunt. Aornis petra, Herculis & Alexandri impetum elusit. Arces Hermensteniæ & Namurcensis, plurésque per Europam alias, rupes subjectæ invictas reddunt. Venetias, Straelsundam, Custrinum, Hollandiamque propè omnem aquæ & paludes circumfusæ tuentur. Natura igitur muniendis Urbibus vel terræ elementum vel aquæ circumfudit. Naturam ars ut solet imitata, pro montibus ac saxis, muros ac valla, pro fretis paludibusque fossas substituit.

Fig. 1. Sed, ut omnia rerum exordia solent, principio rudis admodùm & simplex fuit muniendi ratio. Muris oppida cingebant qui ad eam altitudinem attollebantur, quæ facilem hosti per scalas ascensum negatura videbatur. Latitudo erat tanta quæ senos, septenósve armatorum ordines caperet. Muros Babylonis refert Curtius fuisse latos 32 pedes. Verùm duplici vitio hæc structura laborabat utroque capitali. Primum erat quod defensores suprà murum stantes nullo munimento tecti, hosti paterent. Alterum quod hostis muro propiùs succedens ab ipso muro tegeretur, ut lædi à defensoribus in sublimi stantibus non posset.

Fig. 2. His erroribus ita deinceps occurrere conati sunt. Murum perpetuâ Loricâ BCZ sepiebant. Loricæ fastigium pinnæ Z distinguebant non continuæ, sed vacuis spatijs interruptæ. Pinnis tecti defensores per intervalla vacua hostem arcebant. Ita primus error utcumque sublatus. Ut alteri vitio mederentur, murum à solo ad altitudinem hominis certis intervallis P pervium relinquebant. Sed ne sic quidem dicta incommoda perfectè tollebantur: cùm hostis intrà triangula DEF, GKA oppidanorum tela effugeret.

Fig. 3. Ergo ad defensionem lateralem cœperunt respicere, retentis pinnis fenestrisque, quadratas turres quæ ultra muros prominerent, in orbem extruxêre, atque ita defensioni directæ quâ priùs sulâ utebantur, lateralem utcumque adjecêre. Sed lateralis defensio illa adhuc erat imperfecta quòd hostis intra triangulum IPK receptus occultaretur. Præterea quadratæ turres non satis ferebant vim machinarum & arietum.

Fig. 4. Rejectis igitur quadratis turribus, rotundas substituêre, ita, ACB triangulum quo hostis occultatur, multum fuit imminutum, ut jam intra illud nequiret hostis arietarias machinas disponere: & rotunda turrium forma firmior quàvis aliâ adversùs arietantium impetus subsistebat. Hic veterum ars & conatus conquievit, donec nitrico pulvere reperto, fabricare homines fulmina, & tonitrua imitari didicerunt. Et erat sanè ista muniendi ratio prioribus longè anteferenda. Nihilominus adhuc negotium facessebat suspectum illud triangulum ACB quod satis capax erat ut muri suffossores & cunicularios occuleret. Deinde lateralis defensio FC, DC unicum tantùm turris rotundæ punctum stringebat B, A, quòd rotundæ corpora à rectis lineis non nisi punctualiter tangi possint.

Vicit tandem seipsam ars, atque eam quâ modò utimur, defensionis formam adinvenit. Rotundas turres in propugnacula Faciebus, Alisque instructa, muros in Valla commutavit; rectisque lineis Munimentum omne circumscripsit. Ita denique effectum est ut quocumque hostis loco consisteret propugnatorum telis pateret, atque omnes munitionis partes se mutuo tutarentur.

De hac novissimâ muniendi formâ deinceps tractaturus eum tenebo ordinem, ut ubi terminos in hâc materia usitatos explicaro, regulas, & principia artis proponam. Ita demùm instructi praxim ipsam, bono Deo, aggrediemur.

CAPUT II.

Termini Architecturæ Militaris explicantur.

Fig. 5. 1. MUNIMENTUM, est locus eam habens circumferentiam, cujus partes singulæ, præter defensionem directam, quam sibi ipsis præstant, ab alijs partibus recipiunt defensionem lateralem, sic ut omnes partes se mutuo stringant. STRINGERE pars una alteram dicitur quam bombardæ parallelo ictu tueri potest. Ita circumferentiæ pars XBC stringit partem FG. Pars AEF stringit CD, & sic de cæteris.

2. DELINEATIO MUNIMENTI est extimarum Munimenti linearum descriptio.

3. MUNIMENTUM REGULARE est quod super figurâ regulari extructum, omnes partes æquales & similiter positas habet.

4. Est porrò figura regularis quæ æquilatera & æquiangula est. Talis est figura HKRPMN, cujus omnia latera KR, RP, PM, MN, NK & omnes anguli N, M, P, R, K inter se æquantur. Huic semper potest circulus circumscribi qui idem habet H centrum quod figura. Angulus centri est is qui duabus KH, RH semidiametris continetur. Angulus circumferentiæ seu figuræ est qui lateribus figuræ continetur ut M, P &c.

5. MUNIMENTUM IRREGULARE est, quod super irregulari figurâ construitur. Est verò figura irregularis, quæ æquilatera & æquiangula non est.

6. PROPUGNACULUM est Munimenti pars BDHLM maximè in campum procurrens. *Bastion.*

Fig. 6. 7. AC, BD, ALÆ PROPUGNACULI. *Flancq.*

8. DH, CG FACIES. *La face. Pend du bastion.*

9. BF, MF. LINEÆ COLLI. *La gorge.*

10. FH. LINEA CAPITALIS. *Ligne capitale.*

11. AB CORTINA SEU CHORDA. *La Courtine.*

12. Si Ala Propugnaculi divisa fuerit in puncto 2. & parti 2B introrsum accipiatur æqualis 53, & connectantur puncta 2,3; Pars 2, 3, D, aut ea quæ intra hanc incurvatur, AURICULA dicitur. (*Orillon*) & pars reliqua 3, 5, vocatur Ala tecta. Sed Auricularum jam usus propè obsolevit.

13. CQ ALÆ CONTINUATIO. *Flancq prolongé.*

14. QG FRONS. *Surface.*

15. BG DEFENSIO FIGENS. *Defense fichante.*

16. KG DEFENSIO STRINGENS. *La flancquante.*

17. KB ALA CORTINÆ. *Second flancq*, est ea cortinæ pars, quæ inter Alam propugnaculi DB & lineam Stringentem, sive Faciem GC protractam, interjicitur.

18. EF LATUS ARCIS, *Polygone interieur*, seu FIGURÆ INTERIORIS.

19. GH DISTANTIA PROPUGNACULORUM, seu LATUS FIGURÆ EXTERIORIS. *Polygone exterieur.*

20. PE, PF RADIUS ARCIS; RADIUS MINOR, seu INTERIOR. *Le petit demidiameter.*

21. PG, PH RADIUS MAIOR, seu EXTERIOR. *Le grand demidiameter.*

22. EPF ANGULUS CENTRI. Vide *def.* 4. *Angle du centre.*

23. AEO ANGULUS CIRCUMFERENTIÆ *def.* 4. *Angle polygone.*

24. NGC, LHD ANGULUS PROPUGNACULI. *Angle Flanqué.*

25. KCA, IDB ANGULUS STRINGENTIS ET ALÆ. *Angle de la Flancquante & du Flancq.*

26. CKA, DIB ANGULUS STRINGENTIS ET CORTINÆ. *Angle Flanquant interieur.*

27. ACG ANGULUS FACIEI ET ALÆ. *Angle du Flancq & de la Face.*

28. GTH ANGULUS DECUSSATIONIS, sive DEFENDENS. *Angle Flancquant exterieur; angle de tenaille.*

29. DFB ANGULUS DETERMINANS ALAM. *Angle forme-Flancq.*

Munimentorum quoad magnitudinem plures sunt formæ.

30. FORMA REGIA est, cujus defensio Figens non excedit ictum musquettæ. Adhibetur muniendis urbibus locisque majoribus.

31. FORMA REGIA MEDIOCRIS dicitur, cujus Defensio figens minor est jactu musquettæ. Sed distantia propugnaculorum major.

32. FORMA REGIA MINOR est cujus distantia propugnaculorum æquat jactum musquettæ.

Reliqua minora vocantur CASTELLA: *Forts.*

Terminos Orthographicos explicabimus infrà *c.*7.

CAPUT III.

Munitionum Canones.

I. FInis Munimenti est, ut pauci multis resistant.

II. Munimenti ea forma sit oportet, ut singulæ ejus partes præter defensionem directam quam sibi præstant, etiam lateralem seu obliquam accipiant ab alijs.

III. Singulæ igitur Munimenti partes & stringi debent & stringere.

Ratio strictionis seu defensionis hæc est; Facies quæ debilissima munimenti pars est, defenditur ab Alis propugnaculi & Cortinæ, quin & à Facie oppositâ, Alæ propugnaculi à Cortinâ. Cortina ab Alis. Vide *fig.* 5.

IV. Defensio quò brevior & obliquior, *Fig. 6.* eò fortior & certior.

Eò porrò obliquior est defensio, quò angulus decussationis GTH est acutior. Vide *fig.* 6.

V. Defensio Figens BG, AH non excedat jactum musquettæ, hoc est 750 aut *Fig. 6.* 720 pedes.

Longius quidem glans defertur, sed non ad scopum. Figens inter omnes Munimenti lineas princeps est, cæterarumque magnitudines ipsa determinat.

Nota. Dum pedes nominantur semper intelligi Rhynlandicos.

VI. Curandæ præ cæteris defendentes, sive præsides Munimenti partes. Hæ quantum fieri poterit augeantur.

VII. Justæ igitur magnitudinis sint Alæ propugnaculorum, & præter eas quàm maximæ fiant Alæ in Cortina.

Longè enim fortius est Munimentum, quod salvis essentialibus alijs Alas etiam habet in Cortinâ.

VIII. Cortina sit justæ longitudinis: superet Faciem, imò & Alas propugnaculorum junctas.

Quia

Quia fortissima est Munimenti pars.

IX. Angulus propugnaculi sit par violentiæ tormentorum. Unde non sit minor 60 gradibus.

Talem sufficere usus docuit.

X. Rectus propugnaculi angulus optimus est. Is tamen ut habeatur, Ala Cortinæ non omittenda aut nimiùm decurtanda.

XI. Angulus Alæ & Cortinæ semper rectus esto.

Ita tam Cortina quàm Facies latiùs, ac proinde certiùs commidiusque stringitur, & Faciei ac Alæ angulus fit major, ideoque robustior.

XII. Linea Colli sit spaciosa.

Ne aliàs coarctetur propugnaculum.

XIII. Propugnaculi quantitas ea sit, quæ sufficientem armatorum numerum capiat, & satis præbeat spatij ad tormenta dirigenda, cæteraque militaria munia obeunda.

Coarctatur propugnaculum ex his maximè capitibus, si manente eodem angulo propugnaculi Facies minuatur, ac proinde augeantur Alæ: Vel si manentibus iisdem Alis augeatur angulus propugnaculi.

XIV. Tandem ut superiores regulas simul plerasque complectar, ea Munimenti forma erit optima quæ & Alas habeat tum in propugnaculis tum in Cortinis quàm maximas; & lineam Colli spatiosam; & propugnaculi angulum aut rectum aut recto proximum: & defensionem Figentem, seu longissimam intra jactum musquettæ.

Hæc forma ut habeatur in regularibus, proportio Cortinæ, Faciei, Alæ & Colli erit ejusmodi.

XV. Facies non sit minor Cortina dimidia, nec major tota.

XVI. Ala non sit minor quarta parte Faciei, nec major semisse.

XVII. Linea Colli non sit minor quàm Ala.

In his tribus convenit inter *Dogen* & *Goldman*. Horum ratio patebit ex calculo *cap.* 5.

CAPUT IV.

Canones jam traditi declarantur.

Canonibus sive regulis superiori capite traditis ratio muniendi nostra omnis nitetur. Uberiùs igitur hic erunt declarandi, præsertim ij de quibus una omnium sententia aliquando fuit: *Primus, Secundus, Tertius* expositione non indigent.

De *quarto & quinto*, licèt jam nemo dissentiat, aliquando tamen dubitatum fuit. Nonnulli siquidem militares Architecti, ij maximè qui superiori sæculo floruerunt, eam propugnaculorum distantiam statuebant, ut linea Figens, sive longissima defensionis linea, jactum musquettæ non parùm excederet. Causam adferebant, quòd melior per tormenta quàm per musquettas haberetur defensio. Quia igitur tormenta in vicinos dirigi vix possunt, majorem propugnaculorum distantiam requirebant. Sic etiam sumptus minui dum paucioribus propugnaculis urbs tota cingitur. Hic modus ab omnibus modernis Architectis reprobatur, qui unanimiter ita removent propugnacula, ut Figens linea ictu musquettæ mensuretur. Quod adferebant opinionis suæ fundamentum planè est nullum. Et usu quippè & ratione constat musquettis melius quàm tormentis urbes defendi. Nam tormentorum usus est sumptuosus, tardus, difficilis, rarus, incertus, ut infelix dicatur passim quem tormenti pila tetigerit. Quod si vehiculum hostili globo confringatur aut librator occumbat, aut alio quopiam deficiente machina reddatur inutilis, lateralis defensio omnis cessabit ingenti vel commodo invadentium vel discrimine obsessorum. Contra musquettarum usus minimè sumptuosus, facilis, expeditus, velox, certus. Quis invadentem hostem neget mille pilis minoribus certius quàm grandiori unâ propulsari? Res clara probari non debet pluribus. Maneat igitur quod statuimus defensionis latitudinem fistulæ minoris latione mensurandam.

Neque tamen usum tormentorum à defensione excludimus, cùm in hac etiam modernâ muniendi formâ adhiberi utiliter & possint & debeant; id tantùm agimus summam defensionis musquettis potiùs quàm tormentis committi oportere.

Quod Canone *sexto* & *septimo* præscripsimus, maximi sanè momenti est in toto muniendi negotio. Facies propugnaculorum, quia maximè præ cæteris eminent, debilissimæ sunt partes Munimenti; Alæ & Cortina fortissimæ, eæque, siquidem longiùs ab hoste distant, seque mutuo ex propinquo tuentur, validissimæ. Cùm igitur portio reliquis infirmior sit Facies quam hostis plerumque impetit ei, præcipuâ cura erit subveniendum.

Duplex est propugnaculorum forma. In primâ Facies GVC productâ incidit in terminum Cortinæ F. Unde Facies GC ex solâ propugnaculi Ala stringi potest. In alterâ Facies GF producta non incidit in Cortinæ terminum, sed in aliud ejus punctum X, sic ut partem Cortinæ relinquat XB quæ Ala Cortinæ dicitur, ex quâ æquè stringi potest Facies atque ex Alâ ipsâ propugnaculi BC. Priorem ij sequuntur, qui angulum propugnaculi rectum volunt in figuris omnibus pentagono majoribus. Posteriorem inprimis Belgæ amplexi sunt, quibus longè opportunius defensioni visum est secundas in Cortinis Alas statuere, etiam cùm recti anguli, ad duodecangulum usque, jacturâ. Neque dubium esse potest quin ista methodus sit illâ alterâ multò præstantior, cùm & propugnaculi angulo satis caveat, quem nunquam 60 grad. minorem facit & Facierum defensionem augeat sæpè plus quàm in duplum. *Fig.* 7. 5.

Canonis *octavi*, qui Cortinam jubet justæ longitudinis esse, ratio in promptu est, quæ & in ipso canone insinuatur, quod nimirum inter omnes Munimenti partes validissima sit Cortina. Nam cæteris paribus ab hoste removetur longiùs & inter duo propugnacula posita fortissimè defenditur. Est verò rationi consentaneum firmiores munitionis partes, debilioribus esse longiores. Ne tamen Cortinam ita extenderis ut Linea Figens jactum musquettæ superet, quod canoni *quinto* repugnat. Aptissima proportio ea erit si in Formâ Regiâ aut 432 pedes ei dederis cum Dogeno, Fritachio, aliisque, aut 480 cum Goldmanno.

Nono & *decimo* Canone de propugnaculi angulo statuitur, & cæteris paribus rectus præfertur non rectis.

Pro Canonis ratione notandum est angulos rectum & obtusum perpendicularibus tormentorum ictibus se totis resistere, acutum verò non se toto. Esto propugnaculum *a* rectangulum FOBQP; Acutangulum *b* MLHDB. A tormentis positis in R incidant globi *c* in BO Faciem propugnaculi rectanguli FOBQP per rectas perpendiculares RB, RS. Quoniam igitur ex hypothesi duæ rectæ RB, BQ perpendiculares ambæ sunt ad BO in eodem puncto B per 14. *l.* 1. *Eucl.* conficient unam rectam lineam RBQ. Unde patet rectanguli propugnaculi latus BQ se toto objici ac resistere ictui perpendiculari RB. Ac proinde propugnaculum rectangulum reliquis ictibus perpendicularibus omnibus RS se toto resistere.

a Fig. 7. b Fig. 6. c Fig. 7.

Idipsum à fortiori patet in obtus angulo. At in *d* acutangulo MLHDB, ictus perpendiculares SH, SQ protracti brevi spatio intra propugnaculum cadunt, adeoque non se totâ illis propugnaculi moles objicitur. Unde recto & obtuso acutus angulus debilior erit.

d Fig. 6. 7

His notatis, manifestum est cur rectus angulus acuto præferatur cæteris paribus; cur verò etiam obtuso habeatur potior, hæ sunt causæ. Prima quòd retentis iisdem Alis *e* QP, OF & lineis Colli PE, FE propugnaculum reddatur angustius, quod Canoni 13 sæpè incommodat, angulus verò PQB Humeralis fit tanto minor. Altera & præcipua quòd quò angulus est obtusior, eò Ala Cortinæ fiat minor, aut etiam tota pereat.

e Fig. 7.

Itaque quantum fieri poterit, rectus angulus aut recto proximus propugnaculo dandus, sic tamen ut pars altera *noni* Canonis non negligatur, quæ vetat ne anguli recti studio Ala Cortinæ corrumpatur. Quoniam igitur in hexagono figurisque sequentibus usque ad duodecangulum rectus propugnaculi angulus Cortinæ Alam evertit, consultius arbitramur cum plerisque hujus ævi celebrioribus Architectis aliquid de angulo propugnaculi, salvâ nihilominùs ejus debitâ firmitate, detrahere, quàm carere Alâ Cortinæ, cum tanto defensionis imminutæ præjudicio. Barleduc aliique oppositum secuti sunt; sed eos experientiâ rerum magistrâ plerique jam edocti deseruêre.

Reliquorum Canonum sensus & ratio satis perspicua sunt, ut non egeant ulteriori explicatione.

CAPUT V.

Munimentorum regularium constitutio.

Definitionibus principiisque scientiæ jam expositis, ad rem ipsam accingamur. *Fig. 6.*

Ut constitutio Munimenti inveniatur, aliqua dari debent. Ea verò data hic dicuntur quæ pro arbitratu accipimus sic ut nullum vel ab altero dependeat, vel alteri præjudicet. Jam ex datis semel constitutis reliquarum partium proportio consequitur certa & determinata pro datorum videlicet ratione. Igitur periti Architecti hæ partes erunt, ut ea data seligat quæ cùm regulis *cap.* 3 & 4 statutis & conveniant ipsa & reliquas partes a se pendentes faciant convenire. Porrò quia ea data variari possunt salvis decretis Munitionum, varia quoque erit Munimentorum constitutio. Sex probatissimos seligo & propono. Proportio linearum omni Formæ serviet, quantitas soli Regiæ.

MODUS PRIMUS.

Est *Goldmanni*. Facies semper Cortinæ esto dimidia, in quotcumque-angulo.

Chorda ———— 480 ped.
Facies ———— 240.
Ala in IV }-angulo { 60 ped. hoc est ¼ Faciei.
in V }-angulo { 80 ped. hoc est ⅓ Faciei.

In reliquis usque ad IX semper 10 adduntur pedes, donec in nonangulo Ala fiat pedum 120, hoc est ½ Faciei, quæ deinde Alæ quantitas in omnibus figuris sequentibus retinetur.

Angulus propugnaculi constet ex semisse anguli figuræ auctâ 15 gradibus. Igitur erit

Grad.
In IV 60
in V 69
in VI 75
in VII 79. 17'. 9".
in VIII. 82. 30'.
in IX. 85.
in X 87.
in XI. 88. 38'. 11".
in XII. 90, sive rectus qui deinde in figuris sequentibus retinetur.

Ex his datis reliquarum proportio exoritur quam Tabella subjecta exhibet.

	Radius	Capit.	Collum.	Ala 2.	Figens.
IV.	494.5.5.8.	172.6.9.9.	109.7.0.6.	256.0.7.7.	722.2.2.2.
V.	595. 2.9.3.	197.9. 1.1.	109.9.0.2.	254.0.8.7.	724. 1.5.7.
VI.	713.4.8.6.	209.9.7.6.	116.7.5.3.	262.7.2.1.	724.9.0.9.
VII.	833.8.5.8.	222.0.5.6.	121.7.9.3.	262.0.1.1.	726.2.5.4.
VIII.	955.6.6.1.	233.9.6.4.	125.7.1.3.	256.9.4.2.	728.0.7.4.
IX.	1078.5.0.8.	245.6.2.8.	128.8.7.0.	249.4.8.2.	730.3.1.7.
X.	1212.6.0.7	246.5.9.2.	134.7.1.7.	258.9.8.8.	729.6.3.3.
XI.	1347.0.8.3.	247.5.4.3.	139. 5.2.1.	266.3.2.1.	729.0.3.5.
XII.	1481.8.8.6.	248.4 6.0.	143.5.4.0.	272. 1.5.4.	728. 5.1.5.

In hac Tabellâ numeri ante punctum sunt pedes Rhynl. tres reliqui sunt 10*e*. 100*e*. 1000*e*. *pedis.*

In

In primo igitur modo præter speciem figuræ dantur quatuor Chorda, Facies. Ala, Angulus propugnaculi & conveniunt cum Canonibus, tum ipsa, tum cætera ex ipsis consequentia Collum, Ala Chordæ, Defensio, Figens & stringens &c. quod ita se habere comperies si harum partium singularum quantitates ex datis trigonometriæ subsidio elicueris, de quo *cap. sequ.* Hic duo tantùm insinuo; Alam Chordæ eo modo fieri maximam sic ut semissem Cortinæ semper superet; & lineam Colli numquam non 100 pedes excedere.

MODUS SECUNDUS.

Est Dogeno 1. Facies 24 perticarum, hoc est 288 pedes Rhynl.

Cortina 36 perticarum.

Proportio igitur Cortinæ ad Faciem semper est sesquialtera, ut 3 ad 2: quod in omnibus modis sequentibus observatur.

Angulus determinans Alam semper 40 grad.

Angulus propugn. semissis anguli Figuræ, aucta 15 gradibus, ut in modo primo.

Consentiunt in angulo Propugn. Goldman, Marolois, Fritach.

Nota. Pertica quâ deinceps utimur continet 12 pedes Rhynland.

MODUS TERTIUS.

Est Dogeno 2. Differt à secundo in solo dato ultimo: assumit enim angulum Propugnaculi parem duabus tertijs anguli Figuræ. Igitur erit

In IV. 60 grad.
in V. 73.
in VI. 80.
in VII. 85.42'.51".
in VIII. 90 seu rectus & deinceps semper.

	Rad.	Capit.	Coll.	Ala 1.	Ala 2.	Figens
IV.	38.5.0.	19.7.3.	9.2.3.	7.7.4.	7.1.0.	60.8.0.
V.	49.0.5.	20.4.0.	10.8.3	9.0.9.	8.0.3.	61.1.0.
VI.	60.0.0.	21.1.0.	12.0.0.	10.0.7.	8.3.3.	61.3.4.
VII.	70.8.0.	21.7.5,	12.9.0.	10.8.3.	8.4.1.	61.5.4.
VIII.	82.6.6.	22.3.2.	13.6.3.	11.4.4.	8.3.9.	61.7.2.
IX.	93.0.8.	23.1.5.	13.8.3.	11.6.1.	11.1.0.	61.7.1.
X.	103.6.2.	23.8.3.	14.0.2.	11.7.6.	12.9.1.	61.7.0.
XI.	114.2.6.	24.4.0.	14.1.9.	11.9.1.	14.1.9.	61.6.8.
XII.	124.9.7.	24.8.8.	14.3.4.	12.0.4.	15.1.5.	61.6.6.

Numeri ante punctum sunt pertica Rhynlandica 12 *pedum : reliqui sunt* 10**. 100**. *pedis.*

MODUS QUARTUS.

Est Dogeno tertius. Fritachio primus.

Esto

Cortina 36 perticarum.
Facies 24 perticarum.
Angulus Propugnaculi semissis anguli Figuræ aucta viginti gradibus.

Pert. /. Ped.
Ala in IV. 6./.72.
in V 7./. 84.
in VI 8./. 96.
in VII 9./. 108.
in VIII 10./. 120.
in IX. 11./. 132.
in X 12./. 144 & servatur in figuris omnibus sequentibus.

MODUS QUINTUS.

Est Fritachio secundus.

Esto

Cortina 36 perticarum
Facies 24
Angulus Propug. compositus ex semisse anguli Figuræ, & 15 grad, ut in modo 1. & 2.

Pertic. /. Ped.
Ala in IV. 8./. 96.
in V. 9./. 108.
in VI. 10./. 120.
in VII. 11./. 132.
in VIII. 12./. 144. & in sequentibus semper.

Ex his datis ea reliquarum partium consequitur proportio quam Tabella adjecta exhibet.

	Rad.	Capit.	Collum	Ala 2.	Figens
IV.	38. 1. 4	20.0.1	8.9.7	6.1.4	parum
V.	48. 0. 8	21.0.3	10. 2.6	10. 5.8	excedens
VI.	58. 1.9	22.1.5	11. 0.8	11.8.6	60 virgas
VII.	68. 4. 7	23.3.1.	11. 7.1	12. 0.3	
VIII.	78. 6. 0	24.4.8.	12. 1.6	11. 6.7	
IX.	90. 3. 1.	24.6.4	12. 8.9	12. 9.5	
X.	101. 8. 4	24.6.6	13. 4.7	13. 9.0	
XI.	113. 3. 8	24.7.6	13. 9.5	14. 6.3	
XII.	124. 7. 7	24.8.5	14. 2.9	15. 2. 2	

Numeri ante punctum sunt pertica 12 *ped. Rhynland. reliqui sunt* 10*. 100*. *unius pertica.*

MODUS SEXTUS.

Est Dogeno Quartus.

Esto

Cortina 36 perticarum

Facies 24

Angulus determinans Alam semper 40. grad.

Angulus Propugnaculi, ut in modo 4. Erit igitur

In IV. 65. grad.

in V. 75.

in VI. 80.

in VII. 84. 17'. 9".

in VIII. 87. 30'.

in IX. 90. & deinceps semper.

Hi modi omnes conveniunt cum Canonibus *capite* 3 & 4 constitutis. Quartus videtur minùs usitatus (ita colligo ex Fritacho *pag.* 15). *Quintus* est usitatior. *Secundus* & *tertius* satis similes sunt. Inter hos (*secundum* nempè *tertiumq;*) & *quartum*, medius est *sextus*, qui fortè (ita Dogen) ijs præstat. *Primus* omnes superat magnitudine secundæ Alæ, cedit reliquis omnibus in Alâ primâ, in Collo, in Faciebus, in Angulo propugnaculi, unde consequens est ut propugnacula cæteris minora habeat. Cortinâ alios superat pedibus 48. Videtur hic minùs cæteris in usu esse.

Data *Secundi* & *Quinti* differunt penes Alam quæ in *quinto* major est. Unde & Collum & secundam Alam habet minora. *Tertius* & *quartus* in datis differunt penes Angulum propugn. & Alam, hæc in *quarto* minor, illc major præterquam in Sexangulo, ubi &c.

Cæterùm probati omnes sunt: quisque eum teneat qui placuerit.

Ita singulorum modorum constitutiones hactenùs ordinavimus. At quo artificio ex singulorum datis reliquorum angulorum linearumque ex datis pendentium quantitates eliciantur: hoc est quâ methodo superiores Tabellæ confectæ sint, ut plena habeatur Munimenti constitutio, id verò deinceps inquirendum nobis est.

Inventio angulorum.

I. Angulus centri cujuslibet Figuræ regularis habetur, si per numerum angulorum ejus dividantur 360 gradus. Vide *Scholium prop.* 16. *lib.* 4. *Elementorum* à nobis editorum.

	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII &c.
Centri.	90.	72.	60.	51, 43', 38".	45.	40.	36.	32, 43', 38".	30.
Fig.	90.	108.	120.	128. 34'. 17".	135.	140,	144.	147, 16', 22".	150.

II. Angulus circumferentiæ seu Figuræ invenitur, si angulum Centri subtraxeris à duobus rectis, hoc est à 180 grad.

Nam angulus centri P unà cum duobus PEF, PFE facit duos *a* rectos. Sed hi sunt semisses anguli Figuræ, ac proinde simul angulum figuræ efficiunt. Ergo angulus Centri, cum angulo Figuræ facit duos rectos. Ergo &c.

a 32. 1. *elem.*

3. Angulus Propugnaculi sic habetur per *num.* 2 inveniatur angulo Figuræ, ejus semissi adde 15. gradus.

4. Angulus GKA, seu CKA proveniet, si semissem anguli Figuræ demas à semisse anguli Propugnaculi. Nam quia GH, EF sunt parallelæ, erit *b* angulus EGQ par PEF, & GKA par CGQ, ergo &c.

b *per* 27. 1. *elem.*

5. Angulus ACK habetur, CKA subducto ex 90 grad. Nam cùm CAK sit rectus; ACK CKA, faciunt rectum *c* alterum.

c *per* 32. 1. *elem.*

6. Angulus GTH. Dupla angulum DKA *num.* 4. inventum. Nam GTH externus æquatur duobus *d* internis TKI, TIK æqualibus.

d *per* 32. 1. *elem.*

7. Angulus ACG, ACK inventum *num.* 5 subtrahe à 180 gradibus. Residuum est ACG. Nam ACK, & ACG faciunt *e* duos rectos.

e *per* 13. 1. *elem.*

8. Angulus GEA. Anguli Figuræ *num.* 2 inventi semissem PEF subtrahe ex 180 gradibus. Sunt enim PEF, & GEA duobus rectis *f* æquales.

f *per eand.*

Linearum inventio.

1. Rectæ AK, CK.

In triangulo rectangulo ACK datur Ala AC, & anguli C, K inventi sunt *num.* 5 & 4. Invenientur igitur trigonometriæ *g* beneficio latera AK, CK.

Fig. 6. g *Geom. Pract. lib.* 1 *c.* 3. *probl.* 3.

2. Ala Cortinæ & Stringens.

Facies quæ datur addita ad CK *num.* 1. inventam dabit stringentem GK: AK verò inventa *num.* 1 dempta à Cortinâ quæ datur, relinquet Alam Cortinæ BK.

3. Rectæ GQ, QC.

In triangulo rectangulo GQC datur Facies GC & anguli inventi sunt *num.* 4 (est *h* enim QGC par GKA) invenientur *i* igitur GQ, QC.

h *per* 27. 1. *elem.* i *Geom. Pract. lib.* 1. *c.* 3 *probl.* 2.

4. Latus exterius GH.

Duplæ GQ *num.* 3. inventæ adde Cortinam quæ datur.

5. Recta AQ.

Alæ quæ datur adde QC *num.* 3. inventam.

6. Capitalis GE & GZ.

In triangulo rectangulo GZE. Angulus EGZ inventus est *num.* 2. (nam æquatur *k* angulo PEF semissi anguli figuræ, & latus ZE, seu QA inventum est *num.* 5. Inveniuntur ergò *l* GE & GZ.

k *per* 27. 1. *elem* l *Geom Pract lib.* 1. *c.* 3 *probl.* 3.

7. Linea Colli AE.

Subtrahe GZ *num.* 6. inventam à GQ inventâ *num.* 3. restat ZQ, seu EA.

8. Latus figuræ interioris EF.

Duplæ lineæ Collari *num.* 7. inventæ adde Cortinam quæ datur.

9. Radius PE, & YP.

In triangulo rectangulo EYP latus EY inventum est *num.* 8 (est enim semissis lateris figuræ) & angulus PEY *num.* 2 inventus est. Ergo *m* inveniuntur EP, YP.

m *Geom. Pract. lib.* 1. *c.* 3 *probl.* 3.

10. Radius major GP.

Radio minori adde Capitalem.

11. Defensio Figens BG.

Ex quadratorum GR, BR summâ radicem extrahe, ea dabit GB patet ex 47. 1. Porrò RB inventa est *num.* 5. GR habetur si ad ZR, seu EB summam Cortinæ ac Collaris lineæ (quarum, hæc *num.* 7 inventa, illa datur) addideris GZ inventam *num.* 6.

Atque ita habetur plena Munimenti constitutio. Neque difficile jam erit trigonometriæ quam docuimus

mus *lib.* x *nostræ Geometriæ Practicæ cap.* 3. non imperito, simili methodo ex quibuscumque datis, angulos omnes lineasque elicere.

CAPUT VI.

Munimentorum Regularium delineatio in Chartâ & in Campo.

CUm *Capite præcedenti* quantitates linearum, angulorumque Munimentorum determinatæ sint, ad eadem in chartâ vel campo delineando aliud nihil requiritur, quàm quod in Geometriâ nostrâ Practica docuimus. Adeatur ergo Geometriæ nostræ Practicæ caput decimum, in quo, quidquid hîc desideratur, per decem Problemata digessimus.

CAPUT VII.

Termini Orthographici explicantur.

HActenùs tradidimus Munimentorum Regularium delineationem, hoc est, extimum solius Valli circuitum descripsimus. Nunc transeo ad orthographiam, quâ omnes Munimenti partes secundùm altitudinem latitudinemque continentur. Principium ducatur ut solet ab explicatione terminorum.

Fig. 8. HORIZONTALIS LINEA est AESVZ.

ORTHOGRAPHIA MUNIMENTI est sectio munimenti facta plano ad horizontem perpendiculari, singularum munimenti partium altitudinem, latitudinem, positionemque exhibens. Exhibetur *Fig.* 8.

VALLUM est moles terrea ALIKE universum munimentum ambiens. *Rempar.* complectitur etiam Propugnacula.

VALLI LATITUDO INFERIOR AE *Base du Rempar.*

VALLI LATITUDO SUPERIOR L3. *sommet du Rempar.*

VALLI FACIES ACCLIVIS EXTERIOR. 3E *le penchant du Rempar.*

VALLI ACCLIVITAS EXTERIOR EF. *le talu exterieur du Rempar.*

VALLI FACIES ACCLIVIS INTERIOR AL. *le penchant du Rempar interieur.*

VALLI ALTITUDO BL. *Haulteur du Rempar.*

VALLI LORICA, THORAX, *Parapet* 4GIK3, est moles terrea totum Munimentum ambiens, suprà vallum erecta ad hominis altitudinem.

LORICÆ LATITUDO INFERIOR D3. *Base du parapet.*

LORICÆ LATITUDO SUPERIOR OK: negligitur lineola inter IT & ID intercepta. *Sommet du parapet.*

LORICÆ VERTEX INCLINATUS IK.

LORICÆ FACIES ACCLIVIS EXTERIOR K3 est in directum cum facie valli E3.

LORICÆ ACCLIVITAS EXTERIOR 32. *Talu exterieur du parapet.*

LORICÆ FACIES ACCLIVIS INTERIOR ID. *Le penchant interieur du parapet.*

LORICÆ ACCLIVITAS INTERIOR DT. *Talu interieur du parapet.*

LORICÆ SCABELLUM DG. *Banquet.*

VALLI AMBULACRUM L4 *Terreplein. Le plan du Rempar.*

ANTEMURALE, PROMURALE, SUCCINCTUM 5NPQR. *Fausse Braye, parapet des rondes* : ad fossæ aqueæ defensionem constitutũ; similis per omnia Loricæ superiori.

AMBULACRUM PROMURALE E5. *chemin des rondes.*

MARGO RS. *Lisiere.*

FOSSA S87V. *le fossé.*

FOSSÆ DESCENSUS ACCLIVIS INTERIOR S8. *Escarpe.*

FOSSÆ ACCLIVITAS INTERIOR SH. *Talu interieur du fossé.*

FOSSÆ DESCENSUS ACCLIVIS EXTERIOR V.7 *Contrescarpe.*

FOSSÆ ACCLIVITAS EXTERIOR V5. *Talu exterieur du fossé.*

FOSSÆ LATITUDO INFERIOR. 87.

FOSSÆ LATITUDO SUPERIOR. SV.

FOSSÆ PROFUNDITAS 8H. 75 *profundeur du fossé.*

VIA TECTA N6. *chemin couvert. Corridor.*

LORICA CAMPESTRIS, SUBURBANA, EXTIMA, SEU VIÆ TECTÆ 6x, YZ, *Parapet du chemin couvert.*

EIUS BASIS OZ, *pied ou base du parapet de chemin couvert* : FACIES SENSIM ACCLIVIS YZ.

Notandum sectionem orthographicam nos ducere, non per cortinam, sed per Faciem propugnaculi, ac proinde rectas 87, & SV repræsentare latitudinem fossæ propugnaculum alluentis, quam deinceps semper intelligimus cùm de fossæ latitudine agitur.

CAPUT VIII.

Munimentorum orthographicæ dimensiones deinceps determinantur, ac primo Valli & Loricæ Vallo impositæ.

DElineationis hactenùs explicatæ unicum & totum munus fuit Valli solius ambitum qui Faciebus, Alis, Cortinisque absolvitur, ritè constituere, quod quidem universæ structuræ Martiæ fundamentale ac princeps est opus. At verò tum Valli ipsius, tum membrorum cæterorum in altum latumque dimensiones præscribere, Orthographiæ sunt partes. Porrò Munimentum omne his quasi membris constat: Vallo, Loricâ, Promurali, Fossâ, Viâ tectâ, Loricâ campestri, seu extimâ. Quamquam si fossa sicca habeatur, Promurale omitti potest & solet. Hoc capite tradentur Valli ejusque Loricæ dimensiones.

Vallo fossisque urbem tutari suam nolebant olim Spartiatæ: & cuidam interroganti cur Sparta muris careret: cives armatos commonstrans Agesilaus rex eo tempore, istos dixit Spartæ muros. Fuit hæc sanè inanis & stulta fortitudinis ostentatio, nullo sano consilio, sed solâ temeritate nixa, quam omnium gentium usus damnavit, & ipsi Spartiatæ sibi in Thebano bello propè exitialem sunt experti, nos, his relictis, ad rem aggredimur.

I. *Valli materia.*

Valli materia fit non ligna, non lapides, sed terra: hæc ubique ad manum maximeque parabilis est, ac proinde facilè ita accumulatur ut Valli crassitudo Tormentis resistat: & terra cedendo globorum vim elidit ac vincit. Non tamen Vallum terrestre nudum præferimus vestito saxis, de quo infrà.

Ll Al-

II. *Altitudo Valli mediocris esto.*

Vix aliud munitioni perniciosius est quàm altitudo Valli magna. Hic error in plerisque Munimentis antiquioribus, urbium præsertim per Europam celebriorum, commissus fuit. Abblandiuntur nimirum oculis excelsa valla, & fortitudinis speciem inanem ostentant. Reverà interim defensionem corrumpunt omnem, urbemque hosti produnt, & ne gratis tantum habeatur mali, ærarium sumptibus immensis exhauriunt.

Mœniorum sublimium in eo potissimum labes existit, quod hostem propiùs accedentem Urbanis telis eripiat, subducatque. Id magno suo damno ab Hollandis postremùm obsessa Breda docuit. Munierat eam Urbem Mauritius ingenti curâ & sumptu ut absolutissimis Europæ munitionibus accenseri posse videretur. Sed eum fefellit, blandiens, ut dixi, oculis Vallorum celsitas. Bredani certè à Frederico Mauritij fratre deinde obsessi, ex Vallo nimis alto hostem propiùs accedentem, prorepentemque sensim Vineam, ejicere Tormentis suis minimè potuerunt. Unde coacti sunt Valla sublimia tantis impensis structa, varijs perforare locis ac diruere, dirutaque explanare, ut locum facerent humilioribus Tormentorum suggestis, quas dicunt *Batterias*. Ex quibus fatales Vineas impetere ac diffringere certiùs liceret. Verùm ne sic quidem vallis sublimibus subveniri potest quin ijsdem alio ex capite graviùs noceatur. Dum enim varijs locis perforantur, operis colligatio & compages solvitur, adeoque Tormentis hostilibus verberatum facilè concidet.

Fig. 9. Hoc tam exitiali incommodo caret vallum mediocriter assurgens ut per se est manifestum: imò verò ictus bombardarum universim ex statione humiliori plus nocumenti inferunt quàm ex altiori. Sint enim altitudines binæ AB major, & AC minor, & horizonti insistat longitudo DE ex. gr. statura hominis. Constat rectam quæ ex C per E emittitur, cadere ultra eam quæ ex B emittitur per E, majusque in terrâ intercipere spatium DF, ubi altera ex B veniens per E, solum intercipit DG. Majus igitur spatium stringitur ex humiliori loco quàm ex altiori.

Vallorum sublimium patroni fortasse dicent ea esse ascensu difficiliora, ex ijsque melius detegi accessus hostiles (*Aproches*).

Resp. Incommodum jam allatum prævalere. Et verò mediocris altitudo satis ascensum impedit. Ad accessus detegendos in propugnaculis excitari possunt Tormentorum Tribunalia (*Cavalliers*) Katten.

III. *Altitudo determinatur.*

Valli igitur altitudo non superet 18 pedes Rhynlandicos, neque minor sit pedibus 10. Hæc enim hostilibus telis exponeret urbem: illa sufficit, & major incurreret in vitium numero 2 explicatum. Pro varia Munimentorum magnitudine altitudinem intra dictos terminos variam præscribunt Architecti.

In	IV.	V.	VI.	VII.	VIII	&c. Sed merè arbitrariè.
Ped.	12.	14.	15.	16.	18	

Si colles urbi immineant, non idcircò vallum ultra 18 pedes attollatur. Sed tribunalia tormentorum in Propugnaculis excitentur, aut loca editiora munitioni infesta præmunitionibus insideantur.

IV. *Valli acclivitas.*

Vallum ita extruendum ut tam exterius quàm interius acclive sit, nam ad perpendiculum assurgere instar muri terrea moles non potest.

Acclivitas interior AB perpetuò altitudini BL æqualis est, ut militibus ad subitos casus facilis undique in vallum ascensus sit.

Acclivitas exterior EF plerumque statuitur altitudinis dimidiâ & expediret aliquantò etiam minorem esse si humus sit firma & constans. Si valdè esset fluxa, duas tertias altitudinis æquare poterit. Cæterùm exterior acclivitas immodica facilem hosti ascensum præbet, ut patuit in expugnatione memorabili Schenkianæ arcis. *Fig. 8.*

V. *Valli latitudo superior.*

Valli latitudo, sive crassities superior L3 non ea solùm esse debet quæ vim Tormentorum ferat, verùm tanta sit oportet ut post impositam ipsi Loricam, cujus infima latitudo 24 pedes expleat, (aliàs enim tormentis esset pervia) unà cum scabello D4 tres pedes lato, ambulacrum adhuc exhibeat reliquum 4L tormentis dirigendis exonerandisque spatiosum satis. Explebit igitur plerumque 51, aut 57 pedes Rhynl. Latitudo hanc multùm excedens superflua erit, neque alij erit usui quàm ærario exhauriendo. Cæterùm pro figurarum diversitate hic quoque varias latitudines Architecti præscribunt, sed merè iterum arbitrariè. *Fig. 8.*

In	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX	*Latitudo valli superior.*
Ped.	36.	39.	44.	48.	51.	57	

Quoniam valla & Loricæ vim Tormentorum sustinere debent, adjungamus breviter quantum terræ globus ea machina ejectus penetret. Canon integer ad distantiam 400 pedum globo 48 librarum, 20 pedes terræ firmæ penetrat. Canon dimidius ad distantiam 300 pedum globo librarum 24. pervadit pedes 12 terræ firmæ. Tormentum campestre ad distantiam 200 ped. globo 12 librarum pertransit terræ firmæ pedes 7 circiter. Hæc Goldmannus. Quod si fluxa sit humus, longè plures penetrabuntur pedes. Dogenus globo Canonis integri negat penetrari pedes 20 terræ mediocriter densæ.

VI. *Valli latitudo ima.*

Latitudo valli ima AE habetur si ad latitudinem supremam L3, sive BF adjiciantur acclivitates interior AB, & exterior FE. Est igitur plerumque sex septémve perticarum, hoc est pedum 72, aut 84. Tum verò erit acclivitas exterior EF aliquantò minor semisse altitudinis. Pro qualitate figurarum arbitrariè rursum statuuntur ab authoribus *Fig. 8.*

In	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX	*Latitudo valli ima.*
Ped.	54.	60.	66.	72.	78.	84	

VII. *Vallum muro cinctum.*

Vallum muro cinctum præferendum nudo; 1. Quia maximè impedit expeditiones nocturnas invasionesque inopinatas, cùm nequeant ipsum hostes ascendere sine scalis quarum apparatus magnus est & usus incertus. 2 quia impedit oppugnationem apertam,

apertam, seu assaltum, qui tentari nequit nisi vel scalis quod frustraneum, vel ruinâ per cuniculum factâ. 3 Quia opus est stabile ac perpetuum, ubi Vallum nudum, nisi assiduò reparetur, sensim corruit.

Qui dissentiunt, hæc ferè adferunt. 1. Muros Tormentis verberatos faciliùs ruinam trahere quàm terram nudam. 2. Lapides disjectos fossam opplere. 3. Lapidum dissilientium fragmenta propugnatores lædere.

Primum nego si muri sint valdè crassi, aut certè quod hic statuimus, terreo aggere fulciantur. Secundum perinde aut magis locum habet in Vallo nudo. Tertium vitatur si murus ad Valli summitatem non assurgat, quod servatum in mœnibus Antverpiensibus. Minuetur adhuc incommodum, si muri sint lateritij.

VIII. Valli Lorica.

Fig. 8. Vallo Lorica superstruitur 4GIK3, cujus hæ statuuntur dimensiones.

1. Altitudo interior TI perpetuò 6 pedum, ut commodè milites qui rarò hanc mensuram exeedunt, possit abscondere.

2. Altitudo exterior 2K semper 4 pedum. Sic enim commodè ex Vallo non solùm campus & Loricæ campestris, sed etiam fossæ pars magna defenditur. ...cietur quanta, si innotescat Cφ, quæ innotescet sic: ...t IO ad OK, sic IC ad Cφ. Sed tres primæ sunt notæ, ergo & quarta Cφ innotescet. Aufer jam ex CV etiam notâ notam Cφ, remanebit nota φV.

3. Acclivitas interior DI semper unius pedis. Non est opus majori, cum & ab hoste sit aversa & scabello G4D fulciatur, neque exposita sit scandentium pedibus ut Valli latus internum LA.

4. Acclivitas exterior 2, 3 semper est 2 pedum. Cùm enim latus exterius Loricæ K3 sit indirectum cum latere Valli externo 3E, & K2, 3F sint parallelæ, patet 2K3, F3E triangula esse similia. Quare cùm *num*. 4. statuerimus Valli acclivitatem exteriorem EF esse dimidiam altitudinis F3, etiam 32 dimidia erit altitudinis 2K. Est autem 2K semper 4 pedum. Ergo 32 semper erit pedum 2.

5. Latitudo superior OK viribus Tormenti majoris mensuranda. Quare cùm Canon maximus vix penetret 20 pedes terræ mediocriter solidæ. Sufficient 21 pedes.

6. Latitudo inferior D3 componitur ex superiori & acclivitatibus DT, 32 quæ cùm simul sumptæ efficiant pedes 3, provenient pro latitudine inferiori pedes 24.

Hic rursum ludunt Architecti, & pro varietate figurarum variant latitudines hunc in modum.

In	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	&c.
Lat. sup.	9.	11.	12.	15.	17.	21.	Ped.
Lat. inf.	12.	14.	15.	18.	20.	24.	Ped.

Scabellum Loricis omnibus astruitur semper latum pedes 3, altum $1\frac{1}{2}$.

IX. Valli ambulacrum.

Ambulacrum vallare L4 habetur si ex latitudine Valli supremâ L3 dempseris latitudinem Loricæ imam D3 & latitudinem scabelli D4. Quare cùm D3 *num*. 8. statuerimus semper 24 pedum, & D4 pedum 3. Ipsam verò L3, *num*. 6 posuerimus 51 aut 57 pedum, remanent pro ambulacro pedes 24 aut 30. Quod si ludere cum Architectis supra volueris, proveniet

In	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	&c.
Lat. ambu.	21.	22.	$25\frac{1}{2}$.	27.	28.	30.	ped.

X. Margo.

Si vallum Promurali careat, succedit ipsi margo RS, 6 pedes Rhynl. latus.

CAPUT IX.

Orthographia Promuralis.

I. Promuralis necessitas & finis.

Experientia docuit in urbium Belgicarum complurium expugnationibus, Loricâ suburbanâ expugnatâ, haud magno molimine fossas aqueas Vineis instratis ac superari, quod eruptiones obsessorum impediente fossâ aqueâ structores Vineæ lateraliter solùm ab Alis oppositis submoveri possent, tuti à fronte ob Valli necessariam altitudinem, quæ hostem tam vicinum conspectui telisque stantium ex adverso propugnatorum eriperet. Tam exitiali incommodo medetur Lorica 5NPQR ad Valli pedem extructa, quam Promurale, seu Succintum appellamus. Hic unâ Fossæ aqueæ tutela constat. Ex illa siquidem ictibus penè horizontalibus, ideoque (ut *cap*. 8. *num*. 2. ostensum est) certissimis maximeque noxijs, undique à fronte & à lateribus Fossæ oppugnatores submoventur. Finis igitur unicus Promuralis est Fossæ aqueæ defensio; sicca eo præsidio non indiget, ut infrà docebimus. Fig. 8.

II. Ejus Altitudo & structura.

Acriter contendunt Architecti nonnulli eam Altitudinem Promurali dandam ut Loricæ suburbanæ & præmunitionibus dominetur. Verùm hæc defensio abundè præstatur à Vallo ipso, & quantum altitudini Promuralis addes, tantum Fossæ defensionis eripies. Staturam igitur humanam non excedat. Cætera ejus structura eadem quæ Loricæ Vallaris *cap*. 8. *num*. 8. tradita.

III. Ambulacrum Promurale.

Vallum inter & Promurale, spatium relinquitur E5 Tormentis dirigendis locandisque propugnatoribus idoneum, quod Promurale ambulacrum dicimus. Ejus latitudo maxima duas perticas. Rhynl. minima unam æquat. Cùm Vallis antiquis Urbium Promurale circumducitur, à solis sclopetarijs propugnandum, poterit etiam nonnihil minor unâ perticâ ambulacri latitudo assumi. Si id multangulis placet proportionari, sic ordina.

IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	&c.	*Ambul. Prom. cum scab.*
15.	18.	20.	24.	24.	24.	ped.	

Hæc latitudo Tormentis quidem, sed non maximis, conveniet.

IV. Margo.

Ad basim Promuralis Margo succedit RS, 6 pedum, operi continendo firmandoque & ne qua in Fossam humus decidat.

CAPUT X.

Fossa.

I. An sicca præstet stagnanti, seu aquea.

Non alia quæstio inter Architectos agitatior; plerique jam præferunt siccam.

Aqueæ incommoda hæc sunt. Obsessos quasi captivos tenet ne in hostem erumpant, nisi ultra eam via tecta cum Loricâ suburbanâ extruatur sumptu magno. Expugnatâ verò Loricâ suburbanâ seipsam tutari nequit, cùm per eam non liceat nisi cymbulis commeare. Non magno igitur labore quod expetientia Belgas jam sæpè docuit, Vineæ per Fossam ad Vallum perducuntur, impediente obsessos aquâ ne per Fossam discurrentes, manu cominus consertâ fatale opus dejiciant. Huic exitio utcumque quidem occurritur extructis Promurali, Parmulis, Lonulisque, at sumptibus immensis & multò numerosiore præsidio. Itaque Fossa aquea & de se imbellis est & cives quasi vinctos inclusosque detinet ne hostem cuniculos pestemque ultimam urbi inferentem, aliter possint quàm telis eminus submovere, ejusque unius tutandæ gratiâ, Lorica suburbana, Via tecta, omnis generis præmunitiones, Promurale ipsum ac tandem (quod necesse est) propugnatores longè plures requiruntur.

Fossa sicca suis ipsa viribus tuta, his sumptuosissimis præsidijs præsertim Antemurali, nequaquam eget. Nam quos aquea quasi captivos intra Vallum continet, eos sicca expeditos & invisos in hostem emittit. Neque opus habent eruptores Viâ tectâ, cùm eos sinu suo Fossa ipsa abscondat; neque Loricâ suburbanâ egent cum ipsum Fossæ latus V7 exterius, si scabellis interpoletur, Loricæ vices explere possit. Sed neque præmunitiones requiruntur ullæ cùm illæ ad hostem Fossæ Vallique aditu prohibendum excitentur, quod tutissimis per Fossam siccam oppidanorum eruptionibus efficacius perficitur. Erumpentibus adhæc urgente hoste facillimum Fossa sicca receptum præbet, quos aquea excludit & suffocat, præmunitiones enim tum inter se, tum cum Vallo principali non nisi ligneis ponticulis perangustis jungi possunt, qui & paucos simul excipiunt, & pondere succumbentes subinde franguntur, ut evenit cùm Breda postremùm obsessa fuit, in expugnatione Cornuti Ginekensi-pago objecti, ingenti militum fortissimorum in aquis pereuntium strage. Denique cùm Fossa sicca Lunulis, Parmulis, Cornutis, Loricâ suburbanâ alijsque præmunitionibus tutò aut certè tutiùs quàm aquea careat, præsidio longè minori urbs obsessa propugnabitur.

Ceterùm quantum Fossa sicca stagnanti præstet, patuit in obsidione Trajectensi Belgicarum omnium acerrimâ. Cùm Fossæ urbis partim siccæ essent, partim aqueæ, Auraicus cum belli ducibus deliberavit quâ parte urbi vim adferret. Resoluta est Fossæ siccæ expugnatio. Ea verò fuit tam lenta, tamque ardua ut & errorem suum sit deinde fassus Auraicus, statueritque expugnationem Fossæ siccæ præ aqueâ deinceps tentare numquam. Ut cæteros fortissimæ defensionis actus omittam. Ex ipsâ fossâ cuniculos suos oppidani ad subvertenda brachia propugnatoria eâ facilitate eventuque educebant, ut hosti ad superandam 5 perticarum lineam totidem hebdomadæ fuerit impendendæ. Unde velitationibus, operibus, cuniculisque repugnatorijs obsessores Batavos sic fatigarunt, ut desperatâ lineæ per fossam siccam traductione, coactus sit Auraicus cuniculum infrà fundum siccæ fossæ in urbem agere, qui 40 ferè pedibus solo urbis depressior esset.

Fatendum nihilominùs est stagnanti Fossâ improvisos ac nocturnos hostium impetus averti melius quàm siccâ. Quamquam etiam ab aquis ipsis congelatis, nisi dolabris findatur glacies, magnum existit periculum; ut patuit in Wachtendonchâ à Batavis, & Phlipsburgo à Cæsarianis nocturnâ aggressione per constrictas glacie fossas expugnatis.

His in utramque partem agitatis, ita sentio: Fossa sicca repellit fortiùs vim apertam; stagnans occultam. Sed quia improvisæ aggressiones vigilantiâ ducum militumque averti possunt, vis autem aperta non aliter quàm vi manuque propulsatur; videtur stagnanti sicca, si eam soli ferat conditio, absolutè præferenda, præsertim cùm sic etiam immensis sumptibus aliàs in Promuralis, ac præmunitionum structuras expendendis pareatur.

II. Structura Fossæ.

Fossæ soliditas sit æqualis soliditati operum extruendorum, Vallo nimirum, Loricæ Vallari, Promurali, Loricæ suburbanæ simul sumptis. Non plus igitur terræ ex Fossâ egerendum quàm requiratur ad opera dicta. Quare nequeunt Fossæ omnes dimensiones prius determinari, quàm innotuerit universi operis extruendi soliditas.

III. Latitudo superior.

Fossæ minima latitudo superior circa Propugnacula SV superare debet procerissimas arbores, aliàs hostis per pontes ligneos aut junceos eam facilè transmitteret. Satis magna erit pedum 120, 132, 144. Si placet in diversis figuris variare, sic ordina. Fig. 8.

In IV. V. VI. VII. VIII. IX. X.
72. 84. 96. 108. 120. 132. 144. ped.

IV. Declivitas SH, V5.

Declivitas tam exterior V5, quàm interior SH fossæ aqueæ sit par profunditati 8H jam determinandæ, ac proinde HS8 semirectus.

V. Profunditas 8H, ax.

Plerumque statuitur pedum 10 aut 12: nequit esse minor ped. 6. aliàs aquea facilè transvadari posset, sicca virum stantem non tegeret.

Quod autem fossa latitudines habens suprà determinatas, & profunditatem pedum 10 terram suppeditet ferè parem Vallo, Loricæ, Promurali, & Loricæ suburbanæ. Sic ostendo. Mensurentur sectiones orthographicæ Valli & Loricæ ALIKE, Promuralis 5NPQR, Loricæ suburbanæ 6XYZ (modus docetur in nostrâ *Geometriâ Practicâ lib. 2. cap. 1.*) & earum summa ducatur in principalem Munimenti ambitum,

bitum, qui innotefcet, fi omnes Cortinæ, Alæ, Faciefque inter fe addantur quæ in hoc tractatu alibi determinantur. Sed oportet ut fectiones orthographicæ, & Munimenti ambitus principalis eadem menfurâ menfurentur. Productum dabit folidum ferè æquale aggregato. Valli, Loricæ, Promurali, Loricæ fuburbanæ. Pari modo foffa ferè æquatur folido producto ex orthographicà foffæ fectione S87V in ambitum tranfeuntem per α medium latitudinis punctum, ut facilè colligitur ex *Geom. Pract. lib. 3. c. 17. Probl. 2.* Quoniam itaque foffa debet effe æqualis aggregato operum, erit per 34. *& coroll. lib. 11.* ut ambitus per α tranfiens, ad ambitum Munimenti principalem, ita fumma fectionum Valli &c. ad fectionem foffæ S87V, quæ proinde innotefcet cum tribus quantitatibus notis fit 4 proportionalis. Jam quia nota eft SV, eft & nota ejus femiffis Sα, hoc eft αβ, cùm enim SH, fit par H8, erit α & Sα par αβ. Ergo ducta βα in Sα dabit *b* triangulum SβV. Ab hôc deme S87V jam notam, remanet triangulum 8β7 notum. Porrò ut triangulum SβV ad quadr. αβ, ita triangulum 8β7 ad quadr. πβ. Quare cùm tria fint nota, innotefcet & 4 nempè quadr. πβ. Hujus radix dabit rectam βπ; quæ dempta ex βα (hoc eft Sα) exhibebit απ foffæ profunditatem, quæ eà ratione reperitur circiter decempedalis.

a per l. 4. 6. elem.
b per lib. 2. c. 1. Probl. 4 Geo. Pract.

Si plus requiris terræ ad fuggefta Tormentorum, Tribunalia &c. erigenda, foffam aliquantulo profundiorem facito circa Propug. Quod fi Promurale omittatur, imò & Lorica fuburbana, foffam nihilominus convenit 10 pedes profundam effe, maximè fi ficcam velis; terra quæ fupererit, ferviet Tribunalibus erigendis, quorum magna utilitas, aliifque operibus.

VI. Latitudo ima 8, 7.

Confequitur illa ex latitudine fuperiore, angulo declivitatis, & profunditate jam determinatis.

In IV. V. VI. VII. VIII. IX.
52. 64. 76. 84. 96. 108.

VII. Propria foffa ficca.

1. Expedit eam effe aliquantò profundiorem aqueâ.

2. Acclivitas interior SH minor fit; dimidia nempè profunditatis, hoc eft 6 ped. ut afcenfus hofti fit difficilior.

3. Non verò fit minor 6 pedibus ne vallum fubfidat.

4. Plurimum negotij hofti faceffes, fi in medio foffæ minor defodiatur foffula α1φ8, 16, 18, 20 pedes lata, profunda 4 aut 5.

5. Foffæ latus exterius 7V ad modum Loricæ efformabitur, quæ virum tegat duplici fcabello inftructæ ad afcenfum faciliorem.

6. Portæ occultæ in Vallo fiant per quas oppidanis in foffam liceat defcendere.

CAPUT XI.

Lorica fuburbana & Via Tecta.

I. Vtilitas.

Hæc Loricâ ficca foffa tutò caret, aquea prorfus indiget. Cùm enim hæc non magis hoftem arceat, quàm oppidanos impediat ne fubitas rei benè gerendæ occafiones arripiant, & in obfeffores erumpant, neceffaria fuit via poft foffam tecta V6, & lorica eam protegens, cujus beneficio obfeffis clam urbe exire ac tranfire foffam liceret, quæque hoftes quidem ab urbe, minimè verò obfeffos ab hofte, quando manum conferere opus effet, dirimeret.

II. Latitudo via tecta.

Plerumque æqualis ftatuitur ambulacro promurali, pedum nempè 24 aut 21. Tanta enim ferè ad militares ufus ac tormenta etiam ibidem fubinde conftituenda, requiritur. Si placet in diverfis figuris variare, fic ordina.

In IV. V. VI. VII. VIII. IX.
Ped. 12. 15. 15. 17. 21. 24.

III. Lorica Suburbana ftructura.

1. Ejus altitudo ↓Y fex pedum.

2. Acclivitas interior pedis unius, ut in Loricis alijs.

3. Facies exterior YZ fic inclinanda ut producta tranfeat per 1 verticem Loricæ vallaris. Hujus formæ multa & magna funt commoda. Sic enim tota ftringitur à Loricâ vallari, quod non contingeret, fi haberet inclinationem 10, Y: nam ita totum triangulum ↓Y10 telis Loricæ vallaris eripitur.

4. Ut ea inclinatio habeatur, invenienda eft ↓Z bafis: quod ita fit. Notæ funt IC & C9, ergo & 9I nota: nota quoque eft T3, feu CF. Item nota eft Fλ. Ergo tota Cλ, feu 9Y nota. Nota quoque eft Yλ, funt autem per 4. *lib. 6. Eucl.* proportionales I9; 9Y, Yλ, λZ. Quare cùm tres notæ fint: etiam quarta λZ fit *a* nota. Cui fi addas unum pedem, nota erit bafis tota ↓Z.

a per reg. proport.

5. Ambitus denique Loricæ fuburbanæ tam interior quàm exterior, paralleli ducantur ad Facies folas, fic ut ex adverfo mediorum punctorum Cortinæ coeant, & angulos faciant externos. Quod fi Cortinis Parmulæ præftruantur, circa has Lorica erit circumducenda, non verò circum Cornuta, fi quæ fuerint exftructa.

IV. An expediat Loricam fuburbanam foffâ cingere.

Nonnulli affirmant, tuenturque. Sed illi non advertunt fe dum Loricam fuburbanam tutiorem volunt reddere, illius finem evertere. Nam finis eft ut obfeffi in hoftem facilè erumpant, & ab eruptione reduces tutum & facilem habeant receptum. Utrumque nova illa foffa impedict. Ut fi ab oppidanis ftructa non effet, eam hoftes debere exftruere videantur.

CAPUT XII.

Tabula Orthographica Munimentorum regularium.

EX præcedentium quatuor capitum doctrinâ hanc Tabulam collegimus.

TABULA ORTHOGRAPHICA MUNIMENTORUM REGULARIUM.

	Max.	Med.	Min.
Latitudo Valli ima AE	84	72	60
Acclivitas interior AB	18	16	14
Acclivitas exterior EF	9	8	7
Valli altitudo BL	18	16	14
Valli Latitudo fuprema L3	57	48	39
Loricæ latitudo ima 3D	24	18	14
Loricæ acclivitas interior DT	1	1	1
Loricæ acclivitas exterior 32	2	2	2
Loricæ altitudo interior TI	6	6	6
Loricæ altitudo exterior 2K	4	4	4
Loricæ latitudo fuprema KO	21	15	11
Scabelli latitudo D4	3	3	3
Scabelli altitudo 4G	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$
Valli ambulacrum 4L	30	27	22
Ambulacrum Promurale E5	21	17	15
Promurale cum Scabello			
Margo RS	6	6	6
Foffæ latitudo fuprema SV	132	108	84
Foffæ acclivitas utraque SH, V5	12	12	10
Foffæ profunditas H8, απ	12	12	10
Foffæ latitudo ima 8, 7	108	84	64
Via tecta VX	21	17	15
Scabellum			
Bafis Loricæ fuburbanæ λZ	79	70	69
Altitudo	6	6	6

PEDES RHINLANDICI.

Pro bafi Loricæ operando ut *cap.* 11. *num.* 3. tradidi, reperio :

82	$75\frac{1}{4}$	69
Max.	Med.	Min.

Errant igitur in fuo calculo hic Dogen & Fritach.

Promuralis ftructura & dimenfiones eædem quæ Loricæ vallaris.

Scabella Loricarum femper eodem modo conftruuntur.

Prima columna maximam feu robuftiffimam Orthographiam exhibet, quæ valeat quantamcumque vim obfidentium fuftinere. Secunda, mediocrem: tertia minimam. Sed tantùm de Munimentis hic ago : caftellorum campeftrium ac præmunitionum Orthographiam infrà dabimus. Cæterùm nullam hic diverfitatis multangulorum, feu figurarum habuimus rationem, ut plerique Architecti, qui Munimento ex. gr. 5-angulo aliam Orthographiam tribuunt quàm 6-angulo & 9-angulo nullâ ratione nixi. Munimento enim infirmior robuftiórve Orthographia danda eft, non

non quia plures pauciorésve habet angulos & propugnacula, sed quia debebit majorem minorémve vim hostium sustinere.

Nota, Si Munimentum fiat Promurali carens, alia orietur Loricæ suburbanæ basis, hæc enim 4 proportionalis est tribus I9, 9Y, YA, quarum media 9Y minor erit, si Promurale absit quantitate ER. Erit tum igitur Loricæ basis AL, ped. Rhynl.

65	60	55
Max.	Med.	Min.

Ut habetur ex operandi ratione traditâ *cap.* 11. *num.* 3, 4.

CAPUT XIII.

Munitionum externarum fabrica.

MUnimentum secundùm partes essentiales constitutum, fortius redditur si externis quibusdam substructionibus eingatur. Præcipuæ sunt Ravelinus, Semiluna, Opus cornutum, Corona, Forcipulæ: de singulis agam propositionibus singulis.

PROPOSITIO I.

1. *Ravelini definitio & forma.*

Fig. 10. RAvelinus, sive *Parmula*, est moles terrea ferè similis abscisso propugnaculo, nisi quòd Alis ferè careat. Atqui cinctâ & à Munimento reliquo totâ fossæ latitudine separata. Talis est in *fig.* 10 moles FEGH, Facies habet FE, GE: Alis, ut dixi, caret plerumque, subinde tamen admittit, cum portis videlicet objicitur, quæ tum esse poterunt 8 vel 9 perticarum. Versùs hostem Vallo & Loricâ cingitur: versùs Munimentum patet, ne occupata hosti latibulum præbeat. Altitudine suprà horizontem exiguâ attollitur ut ex Munimento defendi commodiùs possit, & horizon ex ipso stringi magis.

Angulus non sit minor 60 grad. neque major recto, Facierum longitudo in Munimentis regularibus determinatur *num.* 3. si adhibeantur ad Cortinam quæ nimis longa sit tegendam, hoc observa, ut Facies non sint longiores quàm propugnaculi Facies: 40 igitur passus, aut 50, aut 60 explere poterunt.

2. *Locus & defensio.*

Objicitur plerumque portis & Cortinis, numquam Propugnaculis. Ejus situm dum Cortinæ objicitur, exhibet *Fig.* 10. Expedit fieri eâ latitudine ut tantùm Cortinam, non etiam Alas tegat. Tum verò defenditur & à Faciebus & Alis Propugnaculorum quibus interponitur.

3. *Structura.*

Varia est: hæc probatior. Ex medio Cortinæ puncto S erigatur perpendicularis infinita. Ex hac ultra fossam pro Capitali abscinde HE quæ expleat vel ¼ vel ⅓ vel ½ Faciei. Deinde à puncto E ducantur rectæ lineæ vel ad terminos Cortinæ A, B (& hæc optima erit Ravelini forma, sic enim & Cortina tota tegitur à Parmulâ & Parmula ipsa stringitur non solùm à Faciebus, sed etiam ab Alis Propugnaculorum) vel ad punctum aliquod Alæ, vel ad Alarum terminos C. D. Harum rectarum partes FE, GE, à marginibus fossæ versùs E abscissæ, erunt Facies Parmulæ. Fig. 10.

Aliter 1. Centris A & B, extremis nimirùm punctis Cortinæ, ipsius Cortinæ intervallo describe binos arcus se mutuo intersecantes in E.

2. Producantur margines fossæ ΦI, ML sibique occurrant in H. Tum ex Alarum extremitatibus C, D ad punctum E ducantur rectæ, quæ marginales fossæ lineas secent in F & G: Eritque perfecta delineatio Parmulæ FEGH. Facies sunt FE, GE; lineæ Colli FH, GH.

Aliter 1. Lineas colli AR, BQ biseca in O & P. Tum ex punctis O, P, per Alarum extremitates C, D rectæ emittantur sibi occurrentes in E.

2. Protrahe Lineas fossæ extremas ΦI, ML, quæ sibi occurrant in H, rectas autem priores secent in F & G. Erit FEGH Parmula quæsita.

4. *Orthographia & Ichnographia.*

Singularum partium latitudinem altitudinemque subjecta Tabula exhibet: Columna tertia exhibet Orthographiam præmunitionum Bredanarum; Prima & quarta Stabilium, Secunda & quinta Mediocrium; sexta minimarum. Quatuor posteriores columnæ sunt ex Dogeno: inservit hæc Tabella non solis Parmulis, sed præmunitionibus omnibus.

TABULA EXTRUENDIS PRÆMUNITIONIBUS.

	Max.	Med.	Bredan.	Stabilia	minus Stab.	Temporar.
Valli latitudo inferior.	40.	36.	44.	36.	24.	20.
Valli acclivitas exterior.	3.	2.	6.	3.	2.	2.
Valli acclivitas interior.	6.	4.	8.	6.	4.	4.
Valli altitudo.	6.	4.	8.	6.	4.	4.
Valli latitudo superior.	31.	30.	30.	27.	18.	14.
Loricæ basis.	15.	15.	$16\frac{1}{4}$	13.	10.	8.
Loricæ acclivitas exterior.	2.	2.	$3\frac{3}{4}$	2.	2.	2.
Loricæ acclivitas interior.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
Loricæ altitudo exterior.	2.	2.	5.	4.	4.	4.
Loricæ altitudo interior.	6.	6.	6.	6.	6.	6.
Loricæ latitudo superior.	15.	12.	12.	10.	7.	5.
Scabelli altitudo.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.
Scabelli latitudo.	3.	3.	3.	3.	3.	3.
Valli ambulacrum.	12.	10.	$10\frac{1}{4}$.	11.	5.	3.
Valli Margo.	3.	3.	6.	3.	3.	2.
Fossæ latitudo.	48.	30.	42.	30.	24.	16.
Fossæ acclivitas exterior.	10.	8.	7.	8.	6.	4.
Fossæ acclivitas interior.	10.	8.	7.	8.	6.	4.
Fossæ profunditas.	10.	8.	7.	8.	6.	6.
Fundi fossæ latitudo.	18.	14.	28.	14.	12.	8.

PEDES RHINLANDICI.

PROPOSITIO II.
De mediâ Lunâ sive Casside.

1. *Definitio & locus.*

MEdiæ Lunæ ferè non differunt à Ravelinis nisi penes magnitudinem: inde fortassis nomen sortitæ, quòd quæ ex adverso Propugnaculorum eriguntur, eâ parte quâ Propugnaculum spectant, in Lunæ arcuatæ speciem excaventur. Statuuntur suprà Viam tectam quæ est post fossam, sic ut earum linea Capitalis Cortinam producta secet bifariam; prætenduntur item Propugnaculorum angulis ut jam dixi, plurimus denique earum usus est in Munitione Irregulari, ut dicetur infrà.

2. *Forma.*

Angulum habeant non minorem 60 gr. nec minorem 90. Altitudo sit modica & non multùm distent à Vallo intra ictum musquettæ ut defendi ex Vallo possint. Cùm statuuntur ad Viam tectam, Facies expleant pedes 25 aut 30, Valli crassitudo 15 aut 20 pedes, eâ magnitudine sint ut capiant 100 aut 150 milites.

3. *Delineatio.*

1. Angulo Promuralis V tanquam centro describe arcum intervallo latitudinis fossæ VM, & producatur linea Capitalis Propugnaculi indefinitè, secans arcum in ω.

2. Ex lineâ Capitali productâ abscinde ultra fossam ωx; Faciei propugnaculi, & ex H ac λ punctis in quibus se intersecant lineæ Colli, Parmularum utrimque existentium ducantur ad X rectæ HX, λX.

3. Producantur φV, φV Alæ Promuralis secentque ipsas HX, λX in ζ, δ arcum verò in β, γ, vel Promuralis Figentes 2V, 3V protractæ intersectiones illas determinent. Habes delineatam Semilunam, objectam Propugnaculo cujus Facies sunt Xζ, Xδ. Alæ (sed apertæ) ζβ, δγ.

Aliarum Semilunarum delineatio similis est delineationi Ravelinorum.

Orthographia & Ichnographia

Habetur ex Tabula Propositionis *prec. num.* 4.

4. *Usus & commodum.*

Inter externa opera cæteris debilius est, cùm neque

que validam manum propugnatorum angustijs suis capiat & ex munimento difficiliùs defendatur. Videntur igitur Cassides Munimento noxiæ nisi his cautionibus firmentur, nimirum ut utrimque circumstent Parmulæ, & solis constent Faciebus, Alis omninò destitutæ (aliàs enim ab hoste occupatæ ex Parmulis impeti non possent) ac tandem longè intra teli jactum undequaque consistant. Quæ omnia cùm adfuerint, dubia adhuc Cassidum utilitas erit. Quare non videntur sine necessitate peculiari extruendæ.

PROPOSITIO III.

De Opere Cornuto.

I. *Definitio & species.*

Fig. 10. Cornutum opus vocari solet Munitio externa longiùs in campum duobus rectis lateribus procurrens, ac bina dimidiata propugnacula hosti objiciens. Exemplum præbet *Fig.* 10. Tres cornutorum sunt species. 1 habet latera coeuntia versus campum, 2 versùs Munimentum, 3 parallela.

II. *Locus & forma.*

Extruuntur ex adverso Cortinæ, vel anguli Propugnaculi ultra Loricam suburbanam: melius tamen defenduntur si Cortinam quàm Propugnaculum tegant, si latera præsertim habeant parallela: cùm enim tegunt Propugnacula parallelis lateribus, non aliam ferè defensionem excipiunt, quàm è Cortinâ, eamque non satis efficacem quia nimis longinquam, accedit quod nimis angustum sic fiat opus. Si tamen Propugnaculis oporteat objicere, necesse omninò est latera coëant versùs Propugnaculum, ut non totas intercipiant Facies, sed aliquas excludant earum partes è quibus defendi possint. Vide constructionem apud Dogenum *pag.* 160, 161.

Si Cortinæ objiciantur, latera potiùs sint parallela & recta ad Cortinam. Si totam (ut quidam statuunt & nos in figurâ expressimus) Cortinam tegant, defensio laterum obtinebitur ex Faciebus propugnaculorum, quibus Cortina interjicitur: Si non totam, ut malunt alij, defensio laterum erit major, nimirum ex Faciebus Propugnaculorum ex parte Cortinæ. Inter opus Cornutum & Cortinam Parmula crebrò interjicitur. Quin & ante ipsum opus Cornutum inter utrumque cornu subinde Parmula vel potius media Luna extrui poterit. Tandem plurimum roboris huic addes Munitioni si aliquoties tescindas. Verùm de rescissionibus agemus infrà.

III. *Delineatio.*

Fig. 11. 1. Ducantur duæ parallelæ EI, FK pro lateribus operis Cornuti à Loricâ extimâ versùs campum eo intervallo ut si versùs arcem producantur, Alis propugnaculorum sint in directum, aut si minorem Cornuti latitudinem desideres, intra Alas incidant in Cortinam ipsam. Debent autem extremitates laterum distare à Vallo intra ictum musquettæ. Quare ultra 60 perticas Rhynlandicas extra Vallum non procurrent. Subinde tamen 60 illæ perticæ numerari solent ab ipsâ Loricâ suburbanâ, ut accessus hostiles magis infestentur.

2. Junge EF ad quam fiant anguli FEG, EFH 25 grad. singuli, horum deinde unum FEG, biseca per rectam EL occurrentem ipsi FH in C. Tum ex EG abscinde ED parem FC. Erunt FC, ED Facies propugnaculorum dimidiatorum.

3. Ex punctis D, C ducantur DA, CB æquales & parallelæ ad EI & FK, pro Alis Cornuum, & Cortinam junge AB, erit autem Alarum DA, CB ea ferè proportio ad Facies quæ in Munimentis regularibus esse solet.

Lineæ Capitales, Collares, Cortina & Alæ etiam sic & faciliùs determinantur. ½ EF dat Capitales EN, FM, lineas item colli NA, MB dabit ⅓ NM, seu EF: Manetque pro Cortinâ AB etiam ⅓. Alas ex A & B erectas determinabunt rectæ ME, NF, atque ita prodibunt etiam Facies ED, FC.

His peractis delineatum est Cornutum opus, quale solet Cortinis prætendi in Munimento regulari. Delineatio reliquorum simili ferè methodo peragetur, habitâ semper loci ratione.

NOTA. *Duplicem in hisce involvi praxim, 1 ut determinetur Cortina à Faciebus, 2 ut Facies à Cortinâ, &c.*

IV. *Utilitas.*

Quod si Ravelini, Semilunæ, & Cornuta circum locum regulariter communitum extruantur, munitio perfectissima habebitur, quorum utilitas in his posita, 1. Hostem longiùs à Munimento arcent. 2. difficillimè capiuntur: defenduntur enim ex Cortinâ, Propugnaculis, operibus adjacentibus, & ab ipsâ quandoque Loricâ suburbanâ. 3. occupata difficillimè retinentur, quia versùs Munimentum tota patent. 4. Brachijs hostium accessorijs sunt infestissima Cornuta, & sub eorum tutelâ licebit obsessis Brachia repugnatoria moliri, dum res feret &c.

PROPOSITIO IV.

De Forcipulis.

I. *Definitio & species.*

Sunt Munitiones externæ quæ hoc ferè tantùm differunt à Cornutis, quòd pro duobus dimidiatis Propugnaculis angulum externum solum habeant illæ quæ dicuntur Simplices, vel duos externos cum uno interno, ac tum Duplices appellantur. Simplicem exhibet figura 12, Duplicem 13.

Est porrò angulus ille externus qui extra figuram est, & cujus latera introrsum flectuntur: internus qui intra figuram lateribus foras procurrentibus continetur.

II. *Locus.*

Idem qui Cornutorum. Vix tamen expediet prætendi Propugnaculis ob earum imbecillitatem, de quo *num.* 4.

III. *Delineatio.*

Fig. 12. Simplicem sic describes. 1. Duc latera AC, BD eodem modo quo in delineatione Cornutorum 1. præscriptum est; nisi quod breviora esse soleant 40 videlicet aut 50 pertic.

2. Junge CD, quam biseca in F, & ex F demitte normalem FE parem ½ ipsius CD, & junge CE, DE. Habes Forcipulam simplicem.

Fig. 13. Duplicem ita delinea. 1. ductis lateribus AC, BD, ut suprà junge CD: quâ bisectâ in G ex G erige perpendicularem GE parem ¼ CD, & junge CE, DE.

2. Pro-

2. Produc EG in F, donec GF sit dimidia GE, rectisque CE, DE bisectis in K & H junge FK, FH. Erit ACKFHDB forcipula duplex.

IV. *Robur & Usus.*

Multum cedunt Cornutis, quare tum ferè tantùm videntur adhibendæ cùm temporis premunt angustiæ. Forcipum porrò omnisque externi anguli defectus hic est, quòd circa ipsum angulum quadrangulum quoddam spatium hosti præbeat, intra quod nullis defensorum telis exponatur. Determinatur illud spatium si acclives Loricæ Facies externæ concipiantur produci donec campum secent. Ejus capacitas ferè æquat perticas quadratas 23, quod facilè computabitur. Cùm igitur in primas Architecturæ leges ita peccet hoc genus structuræ, necessarium ferè erit illi Parmulam objicere.

Geminatæ forcipes cùm duplicem habeant externum angulum K & H, etiam duplicant defectum jam expositum, quare rarior illarum est usus.

Orthographia, & Ichnographia.

Eadem quæ Ravelinorum.

PROPOSITIO V.

De opere Coronato.

I. *Definitio.*

Opus Coronatum dicitur quod utrimque bina habet dimidiata Propugnacula, in medio unum vel plura integra. Est igitur pars alicujus Munimenti regularis. Appellationem inde sortitur quòd partem Munitionis circum cingat. Exhibetur in *Fig.* 14. *Fig.* 14.

II. *Locus.*

Idem qui operum Cornutorum: quamvis majorem Munimenti partem possit tegere Coronatum, quàm Cornutum. Subinde etiam circumducuntur operibus Cornutis. Usus eorum præcipuus est ut loca vicina, urbi infesta (ut colliculis &c.) includant, hostique præripiant.

III. *Delineatio.*

Cùm sit pars plerumque alicujus Munimenti regularis, dispiciat Architectus, quòd polygonum loco, qui cingi debet, sit aptissimum. Quod ubi fuerit assecutus, ejus Munimenti, quod suprà polygonum observatum exstruitur, tot Propugnacula delineet, quot locus requiret. Illud modò observet, ut anguli dimidiatorum Propugnaculorum, non sint minores 60 gradibus, nec majores 90. Solent etiam Propugnacula fieri minora quàm Munimenti Principalis. Sed exponamus specialiùs constructionem Coronati unum habentis integrum Propugnaculum.

Descriptio tota perficitur in hunc modum. Producatur indefinitè Capitalis Propugnaculi, aut si Cortinæ objicienda est Corona, ex medio Cortinæ puncto perpendicularis ducatur indefinita. In Capitali productâ numerentur ex B in D 40 circiter perticæ Rhynl. In perpendiculari Cortinæ numerari possunt 60, aut 70; sic enim adhuc Coronati latera erunt intra musquettæ ictum venientem ex Propugnaculis Munimenti.

Deinde fiat ad rectæ BD punctum D angulus BDI, alicujus multanguli dimidiatus, itemque ad partem alteram angulus BDK. Tum in horum angulorum lateribus ex D in I & K numerentur perticæ 40 aut 50 aut ad summum 60. & termini I ac K connectantur cum Alis Propugnaculi. Ita provenient Coronati latera MI, LK per Loricam suburbanam determinata.

Quod si latera MI. LK 60 perticas, id est ictum musquettæ, excederent, muniendi erunt anguli BDI, BDK (sic tamen ut totus IDK maneat recto major) aut certè (quod plerumque consultiùs) longitudo BD decurtanda.

Videatur deinde cujus figuræ regularis angulo par aut proximus sit angulus KDI. Ponamus ex. gr. septangulæ. Igitur fac intra KDI unum integrum Propugn. & duo dimidiata figuræ septangulæ.

Si plura integra velis mediare Propugnacula, latera Coronati undecumque educantur, modò ictum teli non excedant, intraque illa Munimenti regularis pars exstruatur, ut dictum suprà.

Regulæ generales Præmunitionum.

1. Sint intra jactum teli è Munimento venientis.
2. Earum altitudo non sit major quàm ut stringi commodè possit campus hostilis.
3. Remotiores propinquioribus sint humiliores.
4. Sicca fossa nullas habeat præmunitiones nisi Cornuta, si videbitur: aquea parmulas habeat, & Cornuta, Lunulas vix sine damno admittet.

PARS II.

De Munimentis Irregularibus.

Cum pleræque civitates irregularis figuræ sint, patet quanta hujus partis utilitas, imò necessitas sit. Rem omnem breviter complectar Capitibus sequentibus.

CAPUT XIV.

Partes Munitionis irregularis.

Locis irregularibus muniendis hæc opera inserviunt: Propugnacula ordinaria, Propugnacula duplicata & triplicata, Propugnacula furcata, Propugnacula plana, Propugnacula dimidiata, Ravelini, Mediæ Lunæ, Opera Cornuta, Coronæ, Forcipulæ, Anguli externi, Forcipulæ angulares, Moles planæ, Moles planæ dimidiatæ, Defensiones mediæ, seu dentatæ, Rescissiones.

Nonnulla ex his quæ nimirum regularibus etiam Munimentis roborandis adhiberi solent, jam exposuimus. Et quamquam constructiones illic traditæ regularibus Munimentis sint propriæ, ex his tamen facilè intelligitur quomodo dato loco irregulari sint accommodandæ, jam quæ supersunt hoc capite erunt explicanda.

I. Propugnacula duplicata, aut triplicata, vocatur moles ex pluribus Propugnaculis suprà invicem collocatis composita. Exhibetur *fig.* 15. *Fig.* 15. Exstruuntur in locis acclivibus ut hostis ascendens, cùm tangi amplius nequit ex infimo, impeti possit ex secundo, ac demùm ex tertio. Horum rarus est usus.

II. Propugnacula furcata, seu secta voco quorum angulus (E) truncatus est & mutatus in angulum externum FKG. Hujusmodi in *fig.* 16 est

est moles ACFKGDB. Usui sunt cùm angulus Propugnaculi nimium acutus est.

III. Propugnacula dimidiata habes in Opere Cornuto *Fig.* 10, & Coronato *Fig.* 14. Usui sunt non tantùm in operibus Cornutis & Coronatis, sed etiam alijs locis pluribus, ut dicemus infrà. In his observa ne angulus sit nimiùm acutus, & latus planum Defensione destituatur.

Fig. 17. IV. Angulus externus, est qui à duabus lineis versùs centrum loci introcedentibus constituitur, Gallicè *angle retiré*. Contra internus angulus est qui fit à lateribus à centro loci procurrentibus versus campum, Gallicè *angle avancé*. In *Fig.* 17 anguli externi sunt A, L, C, E, G &c, interni B, D, F &c. Externus angulus si nimis obtusus non sit, satis est fortis cùm ejus latera sese mutuo stringant: ab eoque petitur defensio Forcipulæ & Propugnaculi furcati. Illius defectum indicavimus superius.

Illum sic nonnulli extollunt ut locum angulis internis externisque cinctum æquent Munito Propugnaculis. Sed audiendi non sunt, 1. enim semper accidit, ut quando locus angulis externis, internisque alternatim positis cingitur, interni aliqui nimis obtusi sint, ut A, L; externi verò nonnulli nimium acuti. Quod noxium utrumque est: hoc quidem quia reddit angulum facilè Tormentis hostilibus detruncabilem, illud verò quòd strictionem imminuat eò magis quò propiùs ad rectam lineam accesserit. 2. habent etiam interni anguli hoc essentiale incommodum, quod hostis, cùm propè ad angulum ipsum accesserit, impeti nequeat intra spatium notabile, ut ostendimus suprà; quo vitio carent Propugnacula. Denique 3. externi anguli locum minuunt & circumferentiam loci augent, quod utrumque vitiosum.

Fig. 18. 19. V. Forcipulæ angulares adhiberi solent muniendo externo angulo acuto, vel recto, minus commodè obtuso: harum quippe præsidio occurritur vitio secundo suprà indicato: Construes hunc in modum.

Latera anguli AB, FB produc ad 8 aut 10 passus in K & N. Et junge KN. Deinde erige KE, NG parallelas ad BA, BE: item CE, DG parallelas ad BE, BA quæ prioribus occurrant in E, G. Si spatium omne lineis CEKNGD contentum vacuetur: habes forcipulam quæsitam.

Fig. 19. Alij sic construunt. Omissâ lineâ KN trianguloque FBN relicto, evacuant solummodo CEFB, BNGD spatia. Sed prior videtur præferenda. Quia in hac non solùm ex Alis EK, GN habetur defensio, sed etiam ex KN quæ quasi parva quædam Cortina est, altera verò hac defensione caret & latera BF, BN ad defensionem ferè inutilia sunt. Quod si muro (ut fieri plerumque debet) incrustanda sit, labor duplicatur & sine fructu, quia FB, BN majores sunt quàm FN; &, ut dixi, inutiles. Super extremitates laterum anguli qui forcipulâ minutus est, fieri semper solent Propugnacula dimidiata (X, Z).

Fig. 20. VI. Moles planæ, inserviunt muniendis externis angulis obtusis; acutis & rectis minus aptæ: Construes hunc in modum.

Ex lateribus anguli externi EBD abscinde rectas BA, BC 25 aut 30 passuum, iisque pares erige normales AH, CI, & junge HI. Erit AHIC moles plana, cujus Alæ AH, CI stringent anguli latera AE, CD, & stringentur ab iisdem: frons autem HI stringetur ab NE, MD laterum segmentis quæ utrimque frons producta abscindit. Debent igitur anguli latera esse tam longa ut frontem HI utrimque productam secent, & partes NE, MD sint quantitatis notabilis, ne aliàs frons defensione careat.

Hæc munitio melior est quàm forcipulæ, quòd locum augeat, & receptionum magnarum sit capax.

Si auriculas desideras, sume HK, IL, ⅓ Alarum, ac super his eas construe. Reliquæ partes AK, LC singula ⅔ Alarum, dabunt Alas coopertas.

Fig. 21. VII. Molem planam dimidiatam, exhibet *Fig.* 21. Usui est quando anguli externi (ABE) latus unum (BE) longius est altero, & ita longius ut ictum musqueti excedat.

Fig. 22. VIII. Anguli interni, *Angles avancés*, assumi possunt loco forcipulæ angularis & molis planæ ad muniendos externos angulos, sive acuti illi sint, sive obtusi. In exemplo sit angulus externus BAC: commodè hic munietur extructo angulo interno DFE. Ubi hoc observa: partes intercepta AD, AE tantas debere esse ut segmenta laterum, reliqua non excedant ictum musquetæ.

Fig. 23. 24. IX. Defensiones mediæ, sive simplices, exhibentur in *Fig.* 23, 24. Usui sunt quando latus aliquod Munimenti defensionem aliam nequit admittere. Item utiliter adhibentur in Loricâ extimâ, quorumdam judicio. Alij malunt abesse Defensiones medias, sive simplices quòd CD, EF &c. ab unâ tantum Alâ singulæ stringantur CB, ED &c. secus ac fit in Cortinis, quæ inter duo Propugnacula sint positæ.

Fig. 25. X. Rescissio (*Retrenchement*) est pars abscissa à toto opere, quod tueri diutiùs nequeas similis toti. Cornutorum operum ac Propugnaculorum rescissiones exhibet *Fig.* 25. ad quarum ideam facilè perficientur cæteræ.

Fig. 26. XI. Restat ut planorum Propugnaculorum constructionem exponamus. Propugnacula illa dicuntur plana, quæ fiunt non super angulos, sed supra rectam lineam. Adhibentur muniendis aggeribus, ripis fluminum, Cortinis nimis longis &c. quanquam dum muniendis Cortinis adhibentur, constructio aliquantulum diversa sit, ut dicetur infra.

Horum constructioni triplici, modo perficiendæ servit Tabella apposita. Primus modus debetur hexagono, secundus octangulo, tertius nonangulo & majoribus nonangulo.

	Cortina.	Collum.	Ala.
Mod. 1.	480.0.0.0.	169. 7.0.6.	90.0.0.0.
Mod. 2.	480.0.0.0.	169.7.0.6.	110. 0.0.0.
Mod. 3.	480.0.0.0.	169.7 0. 6.	120.0.0.0.

Constructio sic fiet. Data sit linea recta AZ quam munire oporteat ubi juxta 2. modum, 1. quære in tabulâ Cortinam, reperies 480. pedes Rhenenses, quos abscinde ex AZ & sint AB. Pari modo quære in tabulâ lineam Colli, reperies pedes 169. 7. 0. 6. hos abscinde bis ex BZ, sintque BC, CD, & nota punctum C. Deinde abscinde rursum Cortinam DE & lineas Colli EF, FG, & sic deinceps progredere pro numero Propugnaculorum quibus indiges. 2. ex tabulâ quære Alas, reperies 110, quos erige normaliter ex B & D, sintque BK, DL & junge KL: quam biseca in N, & ex N erige perpendicularem NI

NI parem lineæ Colli CB. Tandem junge KI, LI, habes Propugnaculum planum BKILD cujus a angulus I rectus est. Pari modo fient & reliqua. Cæterarum partium proportio ex hac constructione exsurget, qualem exhibet Tabella altera hic apposita.

a patet ex constr. & etem lib. 1. prop. 5. & 32.

	Facies	Ala Cortinæ	Defens.Stringens.	Defens.Figens.	Ang.Propug.
Mod. 1.	240	390	367.2.7.9.	699.6.8.9.	90
Mod. 2.	240	370	795.5.6.3.	707.3.5.7.	90
Mod. 3.	240	360	409.7.0.5.	711.3.7.0.	90

CAPUT XV.

Quomodo locus irregularis regulariter muniatur.

LOca irregularia duplici modo communiri possunt, regulariter nimirum aut irregulariter. Dicitur locus irregularis regulariter muniri quando sic immutatur, ut fiat regularis, aut si reduci ad regularitatem nequeat, regularis illi figura circumscribitur. Locus autem irregularis munitur irregulariter quando figura loci ad regularem non reducitur.

PROBLEMA I.

Datum locum irregularem, propositum sit regulariter munire.

1. DEscribe ichnographiam loci muniendi, & observa ad quam figuram regularem propiùs accedat, ad eamque reducito ad quam accedere propiùs deprehenderis. Reductio autem illa sic fiat, ut partes eæ omnes veteris circumferentiæ retineantur, quæ usui ullo modo esse possunt. Reliquæ novo ambitu vel excludi debent si locus amplus est, vel includi potiùs si capacitas mediocris tantùm sit. Locus deinde hunc in modum reductus juxta leges Munimentorum regularium munietur.

2. Quod si figura loci adeò irregularis sit, ut reduci ad regularem figuram nullam possit, circumscribere oportebit figuram regularem. Ut autem scias quot laterum figura circumscribi debeat, metire radium loci maximum quem vis includere. Tum adi tabulas Munimentorum regularium, & observa cujus figuræ radio tuus radius aut æqualis aut proximus sit. Et cujus figuræ radium esse deprehenderis, eam circumscribe.

CAPUT XVI.

Quomodo locus irregularis habens angulos & latera apta, irregulariter muniendus.

LOcorum irregularium anguli alij dicuntur apti, alij inepti. Similiter & laterum quædam apta, quædam inepta.

Angulus aptus est qui 90 gradibus non est minor; ineptus qui minor. Nam Propugnaculi impositi angulus si debita reliquarum proportio partium servetur, minor tum existeret gradibus 60. Externi quoque anguli ad ineptos pertinent.

Latus aptum est quod abscissis utrimque lineis Colli quadrato debitis relinquit pro Cortina non minus 300 pedibus, neque plus 500. Latus ineptum est quod relinquit plus 500, ped. aut minus 300. Dogenus ineptum esse statuit quod minus latere figuræ quadratæ regularis. Quære igitur lineas Colli Munimenti quadrati; easque abscinde utrimque à lateribus singulis; si residua non minora sint 300 pedibus, & non majora 500, latera erunt apta.

PROBLEMA I.

Datus sit locus Z irregularis angulos & latera habens apta, quem oporteat irregulariter munire.

Fig. 27.

1. INquire instrumenti adminiculo minimum loci angulum qui sit A; tum observa cujus figuræ regularis angulus circumferentiæ minimo angulo sit æqualis aut proximè minor. Statuamus eum esse angulum quadrati.

2. Quære igitur in tabulis *cap. 5* lineas Colli quæ quadrato inserviunt, quæ à lateribus abscissæ sint AH, AH. Item quære Alas quadrati quæ normaliter erectæ ex H, H sint HG, HG. Tum angulo A bisecto rectâ infinitâ AQ, ab eâ abscinde lineam AF Capitalem quadrati similiter inventam ex tabulâ: & junge FG, FG: habes HGFGH Propugnaculum Munimenti quadrati. Ubi nota si angulus minimus est 100 grad. aut inter 100 & 108, Alis dandos pedes 70.

3. Suprà reliquos angulos si itidem feceris propugnacula quadrato debita, perfecta erit loci munitio.

4. Si Cortina & Alæ in Cortinâ sint alicubi nimis parva, isthic fac Propugnaculum figuræ regularis proximè minoris, donec habeatur Cortina satis longa. Licebit etiam, si Ala Cortinæ sit nimis brevis, minuere angulum Propugnaculi, salvâ tamen illius justâ magnitudine. Contra augere poteris Propugnaculi angulum si Ala Cortinæ esset valdè magna.

5. Anguli valde magni, qui nimirum majores sunt 150 gradibus, munientur ut latera recta, hoc est ita munies utrumque anguli latus tamquam una Cortina foret. Modus traditur infrà.

6. Si constructis ad eum modum, duce angulo minimo, Propugnaculis, Cortinæ & Alæ Cortinæ eâ sint longitudine, ut decurtari possint, salvâ earum debitâ quantitate, tunc angulos Propugnaculi licebit augere, augendo vel Alas vel lineas Colli, vel simul utraque, atque ita tolles si quid huic modo insit incommodi, neque jam erit quod damnare Dogenus possit, neque opus erit operosâ linearum inventione novâ per regulam proportionum.

PROBLEMA II.

Idem aliter efficere.

1. MEtire singulos loci angulos, & vide quarum figurarum regularium angulis æquales singuli sint aut proximè majores.

2. Su-

2. Super singulis dati loci angulis constitue Propugnacula, lineis Colli, Alis, Capitali, desumptis ex figuris ijs, ad quarum circumferentiæ angulos proximè accedunt singuli anguli loci dati.

Res exemplo illustrabitur. Ponatur angulus A proximè reperiri minor angulo quadrati. Suprà hunc fac Propugnaculum quadrati. Angulus deinde B sit proximè major angulo hexagoni. Oportebit igitur suprà B construere Propugnaculum hexagoni; & sic deinceps.

Fig. 27. 3. Quod si extructis hunc in modum Propugnaculis v. g. suprà B hexagoni, suprà C pentagoni contingat Cortinam LK notabiliter breviorem esse 300 pedibus, constitue super B Propugnaculum pentagoni & super C quadrati. Si Cortina nondum æquet 300 pedes, etiam super B Propugnaculum quadrati facies. Quod si tum adhuc 300 pedibus Cortina sit minor, latus CB erit ineptum.

PROBLEMA III.

Idem adhuc aliter efficere.

Fig. 27. Tertius modus hic est (*fig.* 27) Si angulus loci notabiliter differat ab angulo proximæ figuræ regularis, tum iisdem datis quæ in aliquo sex modorum *cap.* 5, inveniantur pro singulis angulis A,B, omnes anguli & lineæ ut fecimus ibidem in munitione regulari. Dogenus *pag.* 204 videtur præferre pro hoc negotio modum 3. *cap.* 5.

2. Suprà angulum A fac Propugnaculum, assumptis lineis Colli, Capitali, Alis, quas invenisti pro angulo A. Similiter suprà angulum B fac Propugnaculum assumptis lineis Colli, Capitali, Alis, quas invenisti pro angulo B; & sic in reliquis angulis C, D, E.

3. Si ordinatis hunc in modum Propugnaculis, inveniatur Cortina nimis brevis, occurrendum erit huic vitio ferè ut *num.* 3. *probl.* 2.

4. Munitâ demùm hunc in modum figurâ, prout circumstantiæ variæ possunt exigere, liberè immutari poterit proportio Alarum, Facierum, anguli Propugnaculi &c. modò in canones *cap.* 3 fixos non peccetur. Tabulas habet Dogenus post *pag.* 200. Hic modus colligitur ex Dogeno.

CAPUT XVII.

Quomodo locus irregularis habens angulos & latera inepta munire debeat.

PROBLEMA I.

Loci irregularis (A) angulos ineptos munire.

Fig. 28. 1. Si angulus SIB sit tantùm paulò minor recto, extrue super eo Propugnaculum quadrati, atque hujus angulum Q (erit enim justo minor) abscinde factâ forcipulâ, seu externo angulo NOP. Alij, quando angulus mediat inter 80 & 90 gradus, malunt opus Cornutum præstruere. Optimum judico si utrumque conjungatur.

2. Si angulus (BCH) fuerit minor 80 gradibus, sed major 60; opere Coronato cingatur. Alij angulum ipsum præscindunt, si propè ad 60 gradus accedat & in forcipulam mutant DFE. Optimè consulet Munimento qui utraque conjunget.

Tacquet Architecturâ Militari.

3. Si angulus aliquis v. g. SGH reperiatur minor 60 gradibus, mutetur figura loci ducto novo latere GRC quòd angulos justæ magnitudinis cum utroque latere SG & BC constituat.

4. Licebit etiam non rarò ineptum angulum si 60 gradibus non sit minor, mutare in Propugnaculum integrum vel dimidiatum; aut in Parmulam, vel Cassidem, aut eum truncatum convertere in Forcipulam, vel potiùs in Cornutum.

PROBLEMA II.

Loci irregularis angulos externos munire. *Fig. 29.*

Datus sit irregularis loci angulus externus ABC quem munire oporteat.

1. Si extremitates laterum A & C à se mutuo distent neque minùs 518 pedibus neque plus 826, suprà angulos A & C construe Propugnacula integra, ut docuimus *capite* 16. *probl.* 1. & 2.

2. Si distantia extremitatum A, C sit major 826 pedibus angulo externo B insuper Ravelinus, aut Cornutum, aut utrumque præstruatur. Fieri etiam in lateribus possent defensiones mediæ (de quibus *cap.* 5. *num.* 9.) adjecto insuper Ravelino.

3. Si distantia extremitatum A, C minor sit 518 pedibus, fiant duo dimidiata Propugnacula pro defensione laterum AS, CR: angulo autem externo ABC Ravelinus major præstruatur. *Fig. 30.*

4. Denique omnium optima externi anguli munitio habebitur, si ducto latere novo GC loco includatur; ac tum anguli BCG, SGC latusque GC muniantur juxta modum *cap.* 16 traditum, si apta sint; si inepta, juxta methodum hoc capite jam partim traditam, partim tradendam. *Fig. 28.*

PROBLEMA III.

Dati irregularis loci latera nimis longa munire.

Fig. 31. 1. Latus nimis longum sit AB. Metire minimum loci angulum, A, & observa ut suprà ad cujus figuræ regularis angulum circumferentiæ proximè accedat: ponamus accedere proximè ad angulum pentagoni. Et bifariam seca latus AB in G: abscinde item lineas Collares pentagoni AO, BN. Quoniam pentagoni angulo posuimus proximum esse angulum minimum A. His peractis, si residua GO, GN sint non minora 300 pedibus, nec majora 500, constitues suprà medium Cortinæ punctum G Propugnaculum planum, juxta methodum traditam *cap.* 14. *num.* 11, in quâ hoc solùm muta, ut lineæ Colli GI, GH æquales sumantur lineis Collaribus AO, BN Propugnaculorum angulis vicinis impositorum.

2. Si latus aliquod v. g. AL tantæ longitudinis sit, ut ipso in plures partes æquales $L\varpi$, $\varpi\theta$, θA diviso, abscissisque lineis Colli $A\beta$, $\theta\zeta$, $\theta\lambda$, $\varpi\omega$ $\varpi\phi$, $L\delta$ Cortinæ intermediæ $\delta\phi$, $\omega\lambda$, $\zeta\beta$ sint non minores 300 pedibus, neque majores 500, plura suprà latus AL Propugnacula plana constitues.

3. Latus cui duo Propugnacula non sufficiunt, tria verò abundant, potiùs duobus magnis, quàm tribus parvis muniatur.

4. Si latus nimis longum ne unum quidem Propugnaculum planum admittat, Ravelinis alijsque operibus Cortina muniatur, sed eorum orthographia communi sit fortior.

Nota Universim latera nimis longa & nimis brevia vel corrigi possunt vel non. Corrigi possunt quando nimis longa decurtari possunt & nimis brevia produci. Faciendo v.g. ex trypezio quadr. Licebit quoque lateri nimis longo angulum superstruere qui duo nova latera justa exhibeat.

PROBLEMA IV.

Dati loci irregularis latera nimis brevia munire.

1. SI plura latera minora sint 300 pedibus; immutetur figura, & muniatur juxta modum aliquem hactenùs traditum.

2. Si figura loci immutari nequeat, vel Cortinæ Parmulis muniantur, quarum orthographia sit fortior ordinariâ, vel anguli cingantur Operibus Coronatis. Mutari etiam poterunt in Forcipulas aut Cornuta, aut uno Propugnaculo obumbrari.

3. Si latus muniendum abscissis utrimque lineis Colli quadrato debitis, minus sit 300 pedibus, non exstruentur Propugnacula suprà angulos adjacentes dicto lateri, quamvis apti essent, sed alijs operibus externis munientur. Et quidem si anguli medient inter gradus 90, 120 Opus Cornutum perstruatur: si maiores 120 gradibus in ipsâ fossâ Ravelini, sive Propugnacula abscissa, angulis objiciantur.

4. Emendatur etiam subinde latus nimis breve, eademque latera vicina nimis longa, si Propugnacula fiant irregularia quorum Colla ferè tota rejiciantur in latera longiora.

PROBLEMA V.

Urbes antiquæ qui muniendæ.

1. VAllum antiquum si robustum sit & muro ac turribus cinctum, minimè diruendum; Novâ igitur munitione circumda, quæ si fieri possit, regularis sit, aut quàm proximè ad regularem accedat. Inter Munitionem novam & fossam veterem pomerium satis amplum relinquatur ad militares usus necessarium.

2. Si munitio antiqua sit terrea, aut sine magno labore ac sumptu emendari possit, procedatur juxta regulas Munitionis irregularis hactenùs traditas. Pleræque urbes Gallicæ, Belgicæque, Parmulis, Cassidibus, Cornutis alijsque prætenturis sunt communitæ: quarum structura cùm Propugnaculorum suppleat vices, robustior sit oportet. Non raró Loricâ promurali, & Viæ Tectæ Loricâ, & fossâ Loricam extimam ambienti, sudibusque circumdatâ muniuntur.

Corollarium.

Ex tribus præcedentibus capitibus intelligitur quâ methodo quævis irregularia loca munienda sint, sive omnibus simul defectibus suprà memoratis laborent, sive non omnibus. Illud porrò in munitione cujuscunque irregularis loci observandum est, ut ichnographiam loci descriptam habeat, ut sic melius possit dispicere quæ muniendi forma & quæ opera loco dato maximè conveniant. Cæterum quemadmodum figura quæ munitur, irregularis est, ita etiam Propugnacula, Opera Cornuta, Ravelinus &c. irregularem non raró figuram sortiuntur, loco id exigente.

CAPUT XVIII.

Reliqua ad munitiones irregularium pertinentia.

QUædam ex dicendis communia sunt etiam regularibus. Commodè simul omnia hoc loco expediemus.

1. Loca quibus vicinus Mons, aut Collis altior dominatur, ad muniendum inepta sunt. Aut igitur Collis mœniorum ambitu includendus, aut si includi nequeat, providendum omni studio est, ne ab hoste occupetur: quod fiet si Munimento novo ac firmo insideatur; aut cùm id fieri non poterit, si Propugnaculo Cortinæve, cui Collis imminet, Collis vicissim Tormentarius imponatur. Si arces seu urbes montibus sunt inædificatæ, quibus à suffossione periculum est, radices montis munitionibus sunt includendæ.

2. Portarum locus commodissimus & tutissimus est inter duo Propugnacula in Cortinæ medio: nullo enim loco certiùs ac faciliùs defenduntur. Pari de causâ flumina urbem intersecantia tutissimè excipiuntur inter duo Propugnacula.

3. Ad magnas urbes in officio continendas nihil aptiùs est quàm arcem adjungere eo loeo unde civitatem sibi obnoxiam habeat. Circa harum constructionem situmque hæc observa. 1. Fortissimum urbis locum occupent. Quare si mons aut rupes intra urbem sit, ibidem construatur. Ita Namurci, Cameraci, Neapoli alijsque in locis factitatum. 2. Præcipuum ad urbem accessum, ejusmodi sunt portus &c. insideat, & obnoxium habeat. 3. Sit pentagona, hæc enim figura aptissima: nam quadrata & imbecillior est & minùs capax; figuræ reliquæ pentagonâ majores capaciores sunt quàm sit necesse & nimis sumptuosæ. Arces pentagonas habent Antverpia, Turinum, Ambianum, Vitriacum, Phaltzburgum, Stenaia, plurimæque aliæ: hexagonas Mediolanum, Perpignianum, Casalia. Septangulas Manhemium, Verodunum, Blavetum. 4. ita collocandæ ut duo Propugnacula urbi obvertant, tria campo. Atque una civitatis Cortina AB arcis Cortinæ T occurrat inter bina Propugnacula C, G. Quorum alterum C, civitatem, alterum G hostem respicit, ut expressum habes in *fig.* 32. Postremum illud non leve commodum adfert, sic enim Propugnaculum G ex Cortinâ urbis validè defenditur, ipsa etiam urbis Cortina stringitur ex arce. Unde vehementer errant, qui arces longiùs semovent ab urbibus. 5. Portas habeant ad minimum binas unam versùs urbem, alteram versùs campum, per quam induci possint suppetiæ cùm opus fuerit. 6. Inter arcem & domos urbis planicies intercedat justæ magnitudinis. Exemplum arcis omnibus numeris absolutæ præbet Antverpiana. Hæc enim binis Propugnaculis urbem habet obnoxiam, binis Scaldim præterfluentem stringit, tribus campo dominatur. Cæteris quoque omnibus, sive ad formam, sive ad situm ea pertineant, instructa est. *Fig.* 32.

4. Urbium latera quæ fluvijs alluuntur, sufficiet levi opere munire, vel simplici nimirùm externo, internove angulo, vel defensionibus medijs quas terminant dimidiata Propugnacula. Latera rectè munies Operibus Cornutis loco accommodatis. Vide *figuram* 33. Portus non solùm ostia, sed etiam latera longiora munitionibus firmanda. Si urbs ab amne ad musqueti jactum distet, eum sibi arce structâ conjunget. *Fig.* 33.

5. Ri-

5. Ripa urbi opposita, si intra musqueti ictum distet, sitque in amico solo minùs operosè munienda, dimidiatâ nimirum stellâ sexangulâ, aut Propugnaculo plano. Si est in hostili solo; aut quamvis in amico extra tamen jactum musqueti, dimidiato hexagono regulari, cujus latera Cornutis proteguntur, aliisque operibus communies. *Exemplum* habes in *Fig.* 34. Huius rei neglectu perijt Neomagum. De his omnibus vide plura apud Dogenum *lib.2. cap.*8.

Fig. 34.

Finem Munitioni irregulari imponant sequentes regulæ, quarum magnus toto hoc in negotio usus.

I. Munitio irregularis ad regularem omninò aut quàm proximè reducatur.

II. Sit circumquaque quantum fieri poterit æqualis, seu æquè firma.

III. Munimentum eodem vallo seu ambitu capacius, præferatur minus capaci.

IV. Latera introrsum sinuata, hoc est angulum externum continentia, vitentur, quia locum minuunt & majori sumptu exstruuntur.

V. Propugnacula possunt esse irregularia & dissimilia. Ea enim munitio habenda est formosissima, quæ fortissima.

VI. Propugnaculorum distantia (juxta Dogen *pag.*188.) minima fit Pertic. Rhynl. 60, maxima 80.

VII. Angulus Decussationis quantum fieri potest, fit ex adverso medietatis Cortinæ.

VIII. Imminenti colliculo, aut flumini in fossam urbis illabenti, Cortinam potiùs objice quàm Propugnaculum, hoc enim illa fortior est.

PARS III.

DE OPPUGNATIONE ET DEFENSIONE.

Oppugnationis quinque sunt actus, Circumvallatio, Accessus & Suggesta Tormentorum, Perforatio Loricæ extimæ, Vinea, Valli per Cuniculos diffractio.

Primò igitur locus qui oppugnari debet, Vallo perpetuo omnis generis operibus communito ita clauditur, ut exitus vel introitus nullus pateat. 2. Per fossas infrà horizontem depressas variisque flexibus ita ductas, ut stringi è loco obsesso numquam possint, ad Loricam extimam penetratur. 3. Lorica extima ductu jam non amplius obliquo, sed brevissimo, hoc est directo, perfoditur. 4. Impletur fossa aggere per eam ad Vallum usque perducto cui deinde Vinea imponitur. Si fossa est sicca, Vinea nonnumquam subterranea ad locum Cuniculo destinatum dirigitur. 5. Per Vineam jam absolutam, absque periculo ad Vallum fossores accedunt, & scrobem effodiunt, pulverisque nitrici eam quantitatem deponunt quæ moli superstanti diffringendæ sufficiat. Quo deinde accenso, Valloque diffracto, milites per Vineam ad ruinam ducuntur ut in urbem jam patentem irrumpant. Hæc Oppugnationis est summa, cujus partes seorsim singulas & breviter exponam.

CAPUT XIX.

De Circumvallatione.

Circumvallatio constat Castris, Lineis, & Munitionibus omnis generis. Ipsa quoque Castra, quæ quasi minores quædam circumvallationes sunt, postrema duo complectuntur, Lineas nimirum & opera varia.

PROPOSITIO I.

Castrorum dispositio.

1. Castra (*Quarteria* vulgò appellant) ijs locis constituantur, ubi facilior externo hosti est aditus.

2. Ne sint eo loco ubi aquis possint inundari.

3. Tot sint, ot ex ijs in omnes Circumvallationis partes submitti facilè possint subsidia.

4. Sint extra jactum Tormenti Urbani, aut certè tantum distent, ut parùm damni à Tormentis metuant.

5. Statuantur si fieri potest ad flumen.

6. Castra ut & reliqua omnis Circumvallatio, Lineis (*Trencheis*) hoc est Vallo perpetuo varijsque operibus muniantur.

PROPOSITIO II.

De Lineis, vulgò Trencheis.

Lineæ obsidionales sunt Vallum quoddam perpetuum, quæ tam castra, quàm reliquum locum omnem circa urbem obsessam ambiunt, circa has observa.

1. Sint duplices, aliæ interiores quæ obsessis objiciuntur ne eruptionibus suis noceant obsessoribus, aliæ exteriores quæ hostem externum arcent. Exteriores sint validiores interioribus; imò cùm exiguum in urbe præsidium, interiores aut omitti planè possunt, aut certè leviter construendæ.

2. Ductu recto Lineæ præsertim exteriores non extendantur ultra 750 pedes. Post singulos 750 pedes varijs interpositis objectisque Munitionibus roborentur. Adhiberi solent, Reductus sive Turriculæ, Defensiones mediæ, Anguli Externi & Interni, Forcipulæ, Stellæ, Castella quadrata cum integris Propugnaculis. Castella varia cum Propugn. dimidijs, Propugnacula plana integra, & dimidiata, Ravelini, Semilunæ, Cornuta, Coronata. Hæc omnis tam varia, tamque multiplex Munitionum supellex nec aliàs, nec alibi magis quàm ætate nostrâ & in Belgio, in obsidionibus Sylvaducensi, Bredana utraque, Trajectensi, aliisque compluribus usurpata est. Horum pleraque in præcedentibus sunt tradita: quæ restant, propositionibus sequentibus exponemus.

3. Linearum Orthographia, & Ichnographia varia est pro locorum ac periculi ratione, triplicem subjungo, in obsidione Sylvaducensi usurpatam.

Basis Loricæ.	$7\frac{1}{2}$.	7.
Declivitas exterior.	$2\frac{1}{2}$.	3.
Declivitas interior.	1.	1.
Altitudo interior.	6.	6.
Altitudo exterior.	5.	5.
Pars superior.	4.	3.
Scabelli latitudo.	3.	3.
Scabelli altitudo.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$.
Margo.	3.	3.
Latitudo fossæ	12.	8.
Exterior decliv. fossæ.	4.	2.
Interior decliv. fossæ.	4.	2.
Profunditas fossæ.	5.	2.
Latitudo fundi.	4.	4.

Adventante regio exercitu, Batavi circumvallationem roborarunt magis, basim Loricæ auxerunt

ad

ad 9 pedes tribus Scabellis appositis, quorum latitudines junctæ 9 explebant pedes. Altitudo Loricæ erat pedum similiter 9, latitudo fossæ 15.

PROPOSITIO III.

Reductum sive Turriculam exstruere.

Res facillima est cùm eorum forma sit simpliciter quadrata. Describe igitur in terrâ Lineam 48 pedum, ac super eâ quadratum delinea, factumque est quod petebatur.

Orthographia & Ichnographia est hujusmodi.

Basis	14 aut 20.
Latitudo super:	4 aut 6.
Altitudo	8 aut 10.
Margo	2 aut 3.
Fossæ latitudo	15 aut 24.
Fossæ profund.	5 aut 6.

Loricæ duo aut tria adjiciuntur scabella gradatim suprà invicem exstructa.

PROPOSITIO IV.

Stellam delineare.

Fig. 35. Ut quadrangulam delinees, sic operare.

1. Describe in campo lineam pedum 48 aut 50, ac super ea quadratum describe.

2. Latus AB biseca in C, & ex C perpend. ducito CD parem ½ ipsius AC, sive ¼ totius AB.

3. Junge AD, DB, si hæc constructio in orbem fiat, habebis stellam quadrangulam.

Fig. 36. Pro quinquangulâ sic operare.

Describe pentagonum regulare ex latere AB bisecto in C perpendicularem excita CD parem ½ AC, sive ¼ AB. Et junge AD, DB, si ita construas in orbem, prodibit stella quinquangula.

Pro sexangulâ;

Fig. X. Describatur ACE &c. hexagonum regulare per *prop. 15. lib. 4. element. à nobis editorum & caput 6 Architect. Milit.* singulæ facies AC &c. adæquent passus circiter 104: ad extremitates autem C, A &c. fiant anguli DAC, DCA &c. singuli 30 grad. Et fient DA, DC singulæ 60 passuum circiter.

Ichnographia & Orthographia eadem quæ Reductuum.

Stellæ majores in usu non sunt.

PROPOSITIO V.

Castellum quadratum dimidiata habens Propugnacula delineare.

Fig. 37. 1. Describe quadratum ABCD, cujus latera nec minora sint 120 Pedibus, nec majora 180.

2. Triseca latera in E, F, L, M, Q, S, T, V.

3. Singulis lateribus adde ⅙ BI, DN, CO, AH. Pro lineis autem Colli sume ⅓ in ipsis lateribus nempè BL, DQ, CT, AE.

4. Ex terminis Linearum Colli erige normales LK, QR, TX, EG quæ singulæ sint ⅓ lateris.

5. Ducantur rectæ IK, NR, OX, HG.

Habes castellum cum 4 dimidiatis Propugnaculis.

PROPOSITIO VI.

Castellum alterâ parte longius, cum dimidiatis Propugnaculis delineare.

Fig. 38. 1. Unum è minoribus lateribus AB triseca, & abscinde ipsius ⅓ ex omnibus lateribus pro lineis Colli AF, BG, CO, DQ.

2. Singulis item lateribus adde AK, BL, CP, DS pares ⅙ lateris AB.

4. Ex terminis linearum Colli erige perpendiculares FI, GM, ON, QR pares ⅓ ipsius AB.

5. Junge KI, LM, PN, SR. Dico factum.

PROPOSITIO VII.

Aliud Castellum quadrilaterum cum dimidiatis Propugnaculis & duplici Forcipe delineare.

1. Sume laterum quadrati ABCD tertias partes pro lineis Colli CP, AM, BN, RD.

2. Lateri CD adde utrimque ⅙ CI, DK: lateribus autem CA, DB similiter adde partes tertias AS, BT. Fig. 39.

3. Ex terminis linearum Colli erige normales æquales; PX, ML, NV, RZ, & junge IX, SL, TV, KZ. Fig. 40.

4. Biseca CD latus in E, atque inde abscinde EG, EH pares ⅙ lateris; indidemque erige normalem EF parem quoque ⅙.

5. Junge EF, HF. Habes propositum.

Exstruuntur subinde etiam Castella quadrata quæ duo habeant Propugnacula integra, in latere autem adverso Forcipem duplicem. Vide *fig.* 40.

PROPOSITIO VIII.

Castellum trilaterum cum dimidiatis Propugnaculis delineare.

Fig. 41. 1. Describe triangulum æquilaterum ABC cujus latera convenit esse minora quam quadrati.

2. A lateribus abscinde tertias partes AI, BL, CK pro lineis Colli.

3. Ex terminis linearum Colli erige normaliter laterum partes sextas IH, LM, KG.

4. Lateribus adde partes tertias BD, CE, AF, & junge FH, DM, EG. Habes propositum.

Castella quatuor præcedentibus propositionibus descripta, non promiscuè & varietatis causâ exstrui debent, sed cum delectu pro locorum ratione. Quamvis autem robore multù cedant Castellis, quæ integra habeant Propugnacula; utiliter nihilominus adhibentur.

Orthographiam & Ichnographiam vel eamdem dabis quam Reductibus & Stellis, vel si majori sit opus, eam quæ in obsidione Sylvaducensi est adhibita; in quâ basis Valli erat 27 pedum, altitudo 6, latitudo Valli superior 18, basis Loricæ 8, altitudo 6, Loricæ latitudo superior 4. latitudo fossæ 30.

CAPUT XX.

De Suggestis Tormentorum & Accessibus.

Circumvallatione qui primus est Oppugnationis actus, absolutâ, ut traditum *præc. cap.* Suggesta Tormentorum certis locis eriguntur, & per fossas obliquas ad Loricam extimam itur. De his igitur præsenti capite.

PROPOSITIO I.

Suggestum offensivum & defensivum exstruere.

Fig. 42. Duplex est Suggestus Offensivus & Defensivus. Hic ad externum hostem, ille ad obsessos dirigitur. Offensivum sic construes.

1. Nu-

1. Numerum Tormentorum quæ in Suggestum subvehenda multiplica per 12. Productum dabit in pedibus longitudinem Suggestus. Tormenta enim distant à se mutuo pedibus 12 singula, duo autem extrema à latere Loricæ distant pedibus 6.

2. Latitudinem AD habebis si ad longitudinem Tormenti vehiculo suo impositi, addas spatium 10 aut 12 pedum AF, per quod Tormentum exoneratum possit retrocedere, & 5 insuper aut 6 pedes FD pro circuitu & transitu.

3. Planum Suggestus versùs hostem sit acclive ut Tormenta vi explosionis retrò acta, ad locum suum facilè reducantur. Retrò item sit aditus I, K, semita ad eum ducens modicè acclivis, ut subvehi Tormenta in Suggestum possint.

4. Quâ parte hostem Suggestus spectat Loricâ muniendus, cujus basis sit 12, 15, aut 18 pedum; altitudo 6. Ad latera AD, BE sufficiet latitudo minor.

5. In Loricâ fiant tot fenestræ, quot sunt Tormenta: altitudo sit pedum 3, latitudo exterior 4, interior 2. Est autem latitudo exterior major interiore ut Tormenta in plures dirigi partes possint.

6. Post Suggestum describatur spatium Suggestui æquale ac simile DSNE, & in eo fossa M quadrata fiat, longitudinem habens 10 aut 12 pedum: in quâ pulvis asservetur, ne scintilla aliqua possit incidere, orificium corio teges. Denique tam Suggestum ipsum AE, quàm spatium DN fossa ambiet lata pedes 8 vel 10, profunda 6.

7. Suggestus primi distare solent à loco obsesso jactu musqueti. Postmodò ad ipsas propè fossas eriguntur. Regula generalis sit quò propiores fuerint loco Tormentis concutiendo, eò effectum sortiri majorem.

Suggestus Defensivi minus sunt operosi, eorum Lorica si ex terrâ fiat, sit pedes 6 aut 7 crassa, altitudo ea ut Tormentum vehiculo impositum superemineat. Pro Loricâ terreâ constitui etiam solent corbes viminei ingentes terrâ repleti.

PROPOSITIO II.

Accessus sive Brachia ad locum Oppugnatione destinatum dirigere.

Fig. 43. 1. AD mille circiter pedum ab urbe distantiam fossa aperiatur αx versùs locum obsessum ductu sic obliquato, ut ex nullâ loci obsessi parte stringi possit. Quæ ubi ad spatium aliquod producta, nova in partem alteram linea effoditur xλ, simili obliquitate. Atque ita per varios flexus ad Loricam usque proceditur, ubi tandem duabus fossis longioribus θK, θI ad locum obsessum parallelis accessus perficiuntur. Ductus illi postremi obsessores instar Loricæ tegunt, ut cominus præsidiarios à Valli & fossæ defensione deterreant.

2. Quamvis ita institui accessus debeant ut nusquam stringi è Vallo hostili possint, sedulò tamen observabit Architectus ne obliquiores faciat quàm sit necesse cum temporis & expensarum dispendio. Existimo duobus flexibus ad Loricam semper penetrari posse viâ multò breviori quàm si plures obliqui ductus instituantur. Ducatur enim à puncto ubi accessuum principium statuis, recta linea αβ, quæ protracta cadat aliquantulum extra angulum Loricæ extimæ. Quod si linea producatur ex β quæ præter angulos Loricæ extimæ incedat, duobus flexibus αβ, βθ, ad Loricam pertinges. Cur tamen hæc accedendi forma minus usitata sit, hanc puto esse causam, quòd accessus longi faciliùs expugnentur quàm varijs flexibus intercisi.

3. Ad singulorum ductuum terminos Reductus exstruantur eâ ratione ut bini à Reductu uno stringantur. Hic enim commodissimus Reductuum situs est. Si autem ductus aliquis sit longior, etiam in medio Reductus ad defensionem possunt extrui, quæ omnia figura 43 satis exprimit.

4. Terra quæ egeritur versùs hostem egeritur, ut usum Loricæ fossoribus præbeat.

5. Latitudo inferior sit 6 pedum, superior 12 aut 15. Profunditas minima ea sit quæ hominem stantem junctâ altitudine Loricæ tegat. Quò propiùs acceditur, eò profunditas sit major. Latitudo etiam augeri debet, si materia Vineæ per fossas advehenda. Scabella subinde etiam terræ Loricæ apponuntur.

6. Ad tutelam accessuum Suggestus Tormentorum idoneis locis collocandi.

CAPUT XXI.

Perforatio Loricæ extimæ.

ACcessibus ad Loricam usque perductis, fossæ binæ longiores, ut suprà diximus, loco obsesso parallelæ duci debent, Loricâ versùs hostem præstructâ. In his collocandi Fistulatores, qui prohibeant obsessos capita suprà Vallum attollere. Fig. 43.

2. His peractis, quando fossas obliquare jam deinceps non licet, necesse est ut à ductu illo longiori ad locum impetendum parallelo Canalis rectus LH, Sappam appellant, per Loricam ad fossam usque Munimenti ducatur. Haud dubiè hoc opus periculosæ plenum est Aleæ, quando ex Vallo directis ictibus impeti fossores & sterni possunt. Periculum minuitur hisce modis. 1. Milites in fossâ θI, θK dispositi continuis explosionibus impediunt Propugnatores. 2. Tormentis Loricæ, Alæ, & Valli oppositi franguntur ut jam consistere in Vallo præsidiarij tutò nequeant. Canalis profundior fit reliquis accessibus. Et supernè ramis, stramine, virgultis, pellibus aliisque rebus tegitur, ut si vir glandibus intercludi nequeat, conspectui certè jaculantium fossores eripiantur. 4. Canalis hic dirigendus ad eam Munimenti partem, quæ Vineæ cuniculo destinata est. Quare si Munimentum suis numeris absolutum oppugnas, numquam ad Cortinam aut angulum Propugnaculi, sed ad alterutram Propugnaculi Faciem dirigatur. Nam qui Cortinam aggreditur ab utroque Propugnaculo & ex propinquo, qui Propugnaculi angulum ex binis itidem Propugnaculis licet remotioribus impetitur. Ubi interim qui Faciem sibi sumpsit expugnandam ab uno tantùm latere infestari potest. Quod si, ut in locis irregularibus non perfectè munitis sæpè accidit, Cortina non habeat plenam utrinque defensionem, potest transfossio & aggressio dirigi ad medium Cortinæ punctum.

CAPUT XXII.

De aggere & Vinea.

SAppâ LH per Loricam & viam coopertam ad fossam usque perductâ reliquum est, ut fossa compleatur aggere per eam ducto, & Vinea super aggerem construatur. Fig. 43.

1. Fossa sive sicca ea sit, sive aquea, completur saxis, ramis, fascibus arborum, truncis, saccis terrâ plenis. Sic autem materia quæ injicitur ordinanda,

ut agger per fossam exurgat ad usque Vallum eâ latitudine cui Vinea commodè imponi possit.

2. Aggere jam perfecto, tantum terræ per Sappam advectæ dejicitur in aggerem ut quendam quasi collem conficiat inter Propugnaculi Faciem & obsidentes interjectum. Imâ deinde molis terreæ illius parte ligonibus longioribus ultra superiorem projectâ, collis in gyrum agitur, & versùs Propugnaculi Faciem sensim provolvitur.

3. Colle ad spatium aliquod provoluto, eriguntur duæ portæ intervallo modico distantes, quæ asseribus confestim tam suprà quàm utrimque ita conjunguntur ut nihil pateat. Illi deinde lateri quod hostile Propugnaculum respicit, tantum affunditur terræ ut ictum Tormenti ferat; alterum latus minus operosè tegitur. Pars superior satis quoque adversùs ignes munietur, si terrâ pedem unum aut sesquialterum altâ insternatur. Pari modo reliqua Vineæ membra ad Vallum usque continuabuntur. Portarum latitudo (AB) est pedum 9 aut 10, altitudo 10, crassities trabium sex septémve pollicum, seu pedis medij.

4. Hæc Vinearum theoria est, quas haud paulò faciliùs descripseris quàm construxeris. Nihil in universo negotio obsidionali hac molitione periculosiùs. Discrimen nihilominus minuitur hisce modis. 1. A fronte tutos reddit mons ille volubilis inter operarios & Faciem Propugnaculi interjacens. 2. Tormentis Ala opposita tam quæ in Propugnaculo est quàm quæ in Cortinà, frangitur ut obsessorum Tormentis inde verberari nequeat Vineæ latus. Ex fossâ item θI, θK Sclopetarij in omnes Valli partes è quibus impeti possunt, structores Vineæ collimant. 3. Noctu plerumque laboratur. 4. latera claudunt fascibus quos bifidis lignis (candelabra vocitant) imponunt, quibus musquetorum ictus multos eludunt, seque conspectui hostium subducunt.

CAPUT XXIII.

De Cuniculo.

Fig. 43. CUniculis usi sunt etiam antiqui, sed fine & modo diverso. Hac ætate quando ea ars assecuta perfectionem suam videri potest, res in hunc ferè modum peragitur.

1. Vineâ AA ad inimici Propugnaculi Faciem perductâ, designatur locus cui pulverem vis supponere. Tum per duos trésve flexus CE, EF ad destinatum locum K fodiendo penetratur præsidio acus nauticæ. Inflectitur canalis CEFG ut pulveri imperditior sit exitus versùs C. Altus est pedes 4 aut $4\frac{1}{2}$, latus 4 aut $3\frac{1}{2}$: sit tamen eò angustior quò loco destinato propinquior.

2. Ubi perventum est in K locum designatum, effoditur ibidem receptaculum cujus altitudo plerumque 6, septémve est pedum: latus baseos pedes 4 aut 5. Huic vascula pulvere plena sic impones ut loco conjungas: sic enim breviori tempore pulvis totus accenditur, ac proindè fortiùs agit. Illud etiam experientia docuit terram molis diffractæ in eam partem decidere ad quam plus spatij relictum fuit inter vascula pulverea & receptaculi superficiem. Itaque si velis terram decidere versùs hostem, pulverem admovebis propiùs lateri φN, si versùs &c.

3. Unum vasculum nitrati pulveris 12 pedibus terræ infert ruinam. Hinc collige quantum pulveris receptaculo sit imponendum. Pulvis autem non diu ante inferendus quàm velis accendere, aliàs enim sensim humectatur & corrumpitur.

4. Diligentissimè obstruitur orificium C immisso per id solum tubulo pulveris pleno ad pulverem usque in K depositum pertingente, ut fomite admoto incendi cuniculus possit tempore destinato.

Porrò aggressionem ipsam quæ cuniculo incenso & aditu per ruinam patefacto, instituitur, Ducibus militibusque ad quos ea pertinet, relinquo.

CAPUT XXIV.

De Defensione.

1. PRimum principium sit hostem quàm longissimè ac diutissimè à Munimento arcere. Quidquid igitur extra Munimentum moram potest hosti injicere, occupare ac tueri quoad poterunt, debent obsessi.

2. Accessus hostiles omni conatu impediant: erumpant igitur crebrò (sed cautè ne ipsi cum irreparabili urbis damno in casses incidant) & fossores ac milites fugent aut sternant. Fossas inchoatas complanent. Tormenta si avehere nequeant, clavis infixis corrumpant.

3. Opera externa quæ tueri tota nequeunt ampliùs, rescindant (vide de rescissionibus dicta superius) omninò perdita, cuniculo, si pulvis suppetat, unà cum occupantibus diffringant.

4. Transfossio Loricæ contraria & transversâ fossione intercipienda.

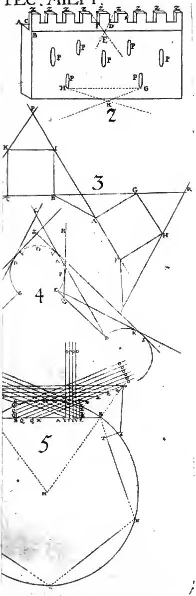
5. Aggeris & Vineæ structura continuis musquetorum ac Tormentorum explosionibus, pyrobolis, alijsque incendiarijs machinationibus eminùs impedienda, nequa alia restat via si fossa sit plena. Quod si fossa fuerit sicca, tum ijs omnibus quæ jam recensui, tum multò etiam magis consertà cominùs manu structores Aggeris Vineæque invadendi, Vineaque ipsa aut incendio absumetur, aut cuniculo evertetur.

6. Quod si nihilominus superante vi hostium ad Propugnaculum Vinea perducatur, ac Propugnaculum ipsum suffodiatur, adversùs hanc pestem non aliud remedium superest, quàm detegere cuniculi locum. Varijs utuntur praxibus. Alij ex pisorum super tympano fortiter tenso subsultantium motu locum suffossionis conjiciunt: alij terebram longissimam in solum suspectum adigentes, aure ad ejus extremitatem applicatâ fossionum pulsus venantur: alij alijs indagant modis. Modus certissimus est contrarijs ac pluribus fossionibus scrutari Propugnaculi fundamentum. Cuniculo reperto pulvis efferatur, si temporis hoc non sinant angustiæ, humectetur, & igni exitus aperiatur.

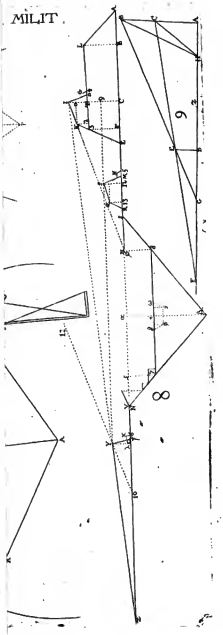
7. Propugnaculo everso, si nullæ obsessis internæ Munitiones restant reliquum est ut quando muris ac Vallo jam non possumus, armis ac manu hosti per ruinam irrumpenti aditus præcludatur: Quæ cùm Ducum potiùs militumque quàm Architecti sint partes, illis cætera relinquentes, huic tractatui finem imponemus.

FINIS ARCHITECTURÆ MILITARIS.

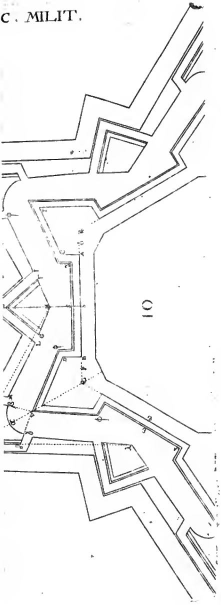
AN-


2
3
4
5

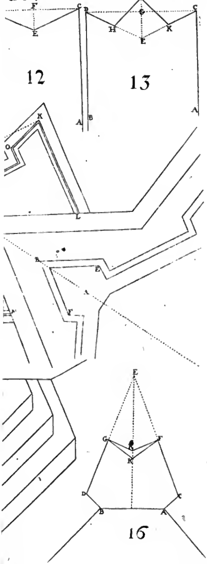
MILIT.



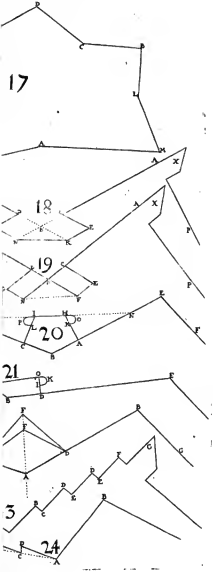
C. MILIT.

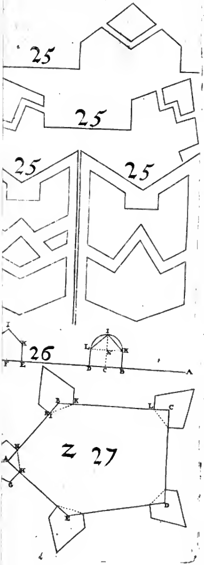


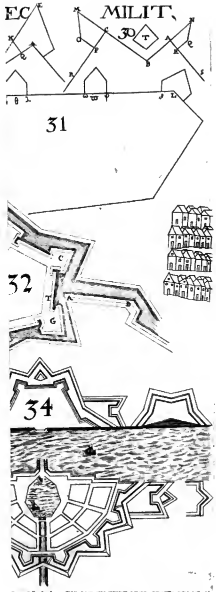
'EC . MILIT.

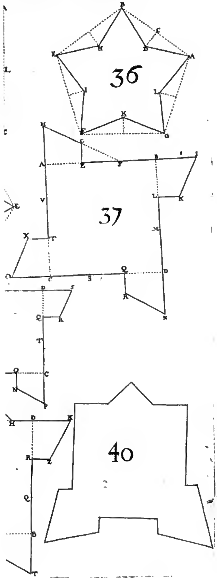


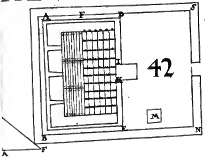
TEC . MILIT.

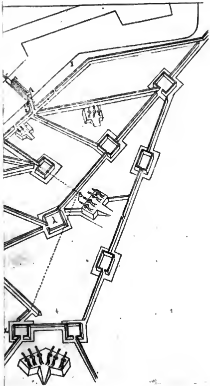



25
25
25
25
I
K
26
F
E
I
L
N
H
D
C
B
A
B
K
I
L
C
H
A
H
G
Z 27
E
D


EC
MILIT.
30
31
32
34


36
37
40


A
F
D
S
42
M
B
N
A
F



ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU CYLINDRICA ET ANNULARIA

QUINQUE LIBRIS COMPREHENSA.

DEFINITIONES AD LIBRUM PRIMUM ET SECUNDUM.

1. *Figura plana duci perpendiculariter, sive rectè*, dicitur, cùm ita movetur, ut rectam, quæ ipsi à principio perpendicularis fuit, ad rectos semper angulos, & in eodem sui puncto tangat.

Schematismus 1. Fig. 1.

Sit figura plana quævis B E D, ad quam perpendicularis erecta sit E K: si figura sic feratur per E K sibi à principio perpendicularem, ut eam perpetuò tangat ad rectos angulos secundùm idem sui punctum E; dicetur esse *perpendiculariter ducta*.

2. *Obliquus* verò *plana figura ductus* erit, cùm ita movetur, ut rectam, quæ sibi à principio obliqua fuit, sub eodem semper non recto angulo, & secundùm idem sui punctum tangat.

3. *Cylindrum* voco, solidum ex cujusvis planæ figuræ, sive perpendiculari, sive obliquo ductu procreatum.

Hinc intellige quid sint *Cylindri* non tantùm *Circulares*, sed etiam *Ellyptici*, *Parabolici*, *Hyperbolici*, &c. Sed quoniam singulis quædam insunt propria, eos sigillatim definiemus.

4. *Cylindrus circularis rectus* est, qui fit ex ductu recto circuli, vel, qui sectus plano ad axem recto, circulum exhibet.

Omnis igitur Circularis Cylindrus essentialiter rectus est: & Scalenus, licet basim habeat circulum Circularis non est: erit autem Circularis (tametsi basim habeat ellipsim) Scalenus ille, qui plano sectus recto ad axem, circulum exhibebit.

5. *Cylindrus Ellypticus*, est qui ex Ellipseos ductu recto producitur, vel, qui plano sectus recto ad axem, ellipsim exhibet.

Omnis igitur Cylindrus Ellipticus necessariò rectus est: & Scalenus, quamvis basim habeat Ellipsim, Ellipticus non erit, si sectus plano ad axem recto exhibeat circulum: erit autem Ellipticus (quamvis basim habeat circulum) Scalenus ille, qui plano sectus recto ad axem ellipsim exhibet.

Quamvis autem omnes tum Elliptici, tum Circulares Cylindri necessariò recti sint: illis tamen hanc vocem (rectus) *deinceps adjungemus, non quasi possint ulli esse non recti, sed ut hanc eorum naturam, quæ non omnibus ita statim sese offerat, indicemus.*

6. *Cylindri Parabolici & Hyperbolici* sunt qui producuntur ex ductu seu recto seu obliquo parabolæ, & hyperbolæ.

7. *Axis* horum Cylindrorum est recta C F, subtensarum D B, L H media puncta connectens. *Fig. 1.*

8. *Portionem Cylindri Circularis* voco, quæ per

centrum

centrum baseos, & punctum aliquod in latere abscinditur.

Fig. 2. Esto Cylindrus Circularis CH, basis centrum E, punctum in superficie, sive in latere aliquo, Cylindri, quodvis sit G. Per G punctum, & E centrum baseos. Cylindrus dividatur frustum solidum FCGH, quod semicirculo FCK, semiellipsi FGK, & superficie Cylindricâ GFCK continetur, *Portionem voco Cylindri Circularis, per centrum basis & punctum in latere abscissam.*

9. Similiter & *Elliptici Cylindri Portionem* voco, quæ per punctum in latere, & baseos centrum ab Elliptico Cylindro abscinditur.

Porrò, cùm in Elliptico Cylindro perinde ut in alio Cylindro quolibet, infinita sint latera; si sectiones fiant per centrum, & alia atque alia latera, infinitas portiones producentur, quæ omnes inter se (secus ac in Cylindro Circulari accidit) dissimiles sunt, ac nihilominùs, ut *prop. 29. lib. 1.* demonstrabimus æquales.

10. *Portionis basis*, est semicirculus, sive semiellipsis FCK.

11. *Altitudo Portionis* est recta CG, quæ ab extremitate diametri EC, basim FCK bifariam dividentis, quæ proinde alteri FK conjugata est, in Cylindricâ portionis superficie erigitur.

12. *Sectio maxima Portionis*, est triangulum EGC, quod producitur sectione factâ per baseos centrum E; & altitudinem Portionis CG. *Maximam* voco, non quia absolutè omnium sit maxima; sed quòd maxima sit sectionum basi FCK perpendicularium, quæ fiunt secundum rectas ad basis subtensam FK ordinatim applicatas.

13. Si Portio fuerit à Circulari Cylindro abscissa, *sphæra baseos* ea est, quæ à semicirculo, qui Portionis basis est, generatur.

14. Si Portio abscissa sit ab Elliptico Cylindro, per alterutrum axem baseos, *Sphæroïs baseos* ea erit, quæ fit à semiellipsi, basi nempe Portionis, circa axem (FK) à quo basis ipsa subtenditur, circumacta.

15. *Portionem Cylindri Parabolici*, aut *Hyperbolici* voco, quæ à recto Parabolico, aut Hyperbolico Cylindro, sive per axem, sive per ordinatim axi applicatam, & punctum in latere abscinditur.

Fig. 1. Esto rectus Cylindrus Parabolicus, aut Hyperbolicus DLEKHB; basis DEB; axis baseos EC, ordinatim axi applicata DB. In latere BH sumatur punctum H, perque illud, & baseos axem CE Cylindrus dividatur. Frustum solidum CBHE planis CHB, CBE, CHE, & curvâ superficie EHB comprehensum, voco *Cylindri Parabolici*, aut *Hyperbolici Portionem per axem baseos, & latus abscissam.*

16. Quod si ex termino axis E erigatur in Cylindri superficie recta EK, sumptoque in eâ puncto K, per id & ordinatim axi applicatam DB Cylindrus dividatur; frustum solidum DEKB planis DEB, DKB, & curvâ superficie DKEB comprehensum, voco *Portionem Parabolici*, aut *Hyperbolici Cylindri per ordinatim applicatam baseos, & latus abscissam.*

17. Altitudines harum Portionum sunt BH, EK.

18. Sectiones maximæ sunt triangula CHB, CKE.

Rursum voco *Maximas*, non absolutè omnium, sed eo sensu *supra defin. 12.*

19. *Solidum rotundum baseos* est, quod fit à basi Portionis circumactâ circa rectam, à qua basis subtenditur.

Sic in Portione CBHE, *Solidum rotundum baseos* est, quod fit à basi CBE, circa EC circumactâ. In portione autem DEKB, *Solidum rotundum baseos* est, quod fit à basi DEB circa DB in orbem versâ.

20. *Figura plana axem habere* dicitur, in quâ recta linea duci potest, quæ omnes rectas uni æquidistantes bifariam, & ad rectos angulos dividat. Tales præter circulum, ellipsim, parabolam, hyperbolam, dantur infinitæ.

Ex dictis, facilè Portiones à quibuscumque Cylindris abscissæ intelligentur.

21. *Cylindrum Portionis* eum voco à quo abscissa est Portio, & eamdem habet cum Portione altitudinem.

22. Cujuscumque Cylindri superficiem absque basibus voco *curvam*, sive *Cylindricam*.

Fig. 2. 23. Similiter Portionis superficiem, demptis planis FCK, FGK, *curvam*, sive *Cylindricam* voco.

24. *Cylindricus Cavus* [d] est solidum quod remanet, cùm minor Cylindrus à majori circa eumdem axem posito detrahitur.

25. *Annulus planus* est superficies duabus concentricis circulorum peripheriis [e] BH, CK comprehensa; vel est superficies, quæ remanet cùm minor concentricus à majori detrahitur.

d Schematismus 1. Fig. 6.

e Schematismus 6. Fig. 39.

26. *Centrum annuli* est A, centrum concentricorum.

27. *Latitudo* est BC pars diametri inter concentricas peripherias interjecta.

28. *Magnitudo quævis per inscriptas sibi magnitudines exhauriri* dicitur, cùm inscriptæ magnitudines ab ipsâ deficere tandem possunt, magnitudine datâ minori, hoc est quantumvis parvâ.

Similiter *magnitudo quævis per circumscriptas sibi magnitudines exhauritur*, cùm hæ ipsam denique superare excessu minori dato possunt.

CYLINDRICORUM ET ANNULARIUM LIBER PRIMUS.

a Defin. 1. 15. 16.

Hujus primi libri argumentum est a Portio Cylindri non Circularis tantùm, sed Elliptici etiam, Parabolici, Hyperbolici, quin etiam ex cujusvis figura planè recto ductu procreati. Ordinis gratiâ in quatuor partes distinguo.

SYNOPSIS.

PARS I.

b Defin. 19

Portiones cum b rotundis basium solidis comparantur, demonstratur igitur cujuscumque Cylindri non Circularis modò, sed Elliptici etiam, Parabolici, Hyperbolici, aut alterius cujuscumque Portionem, ad rotundum baseos solidum eam habere rationem, quam Portionis altitudo CB, ad circumferentiam circuli, cuius radius est AC basis trianguli ABC, quod Maxima est c sectio portionis. Decem prima theoremata apparatum solummodò continent ad sequentia.

Schematismus 2. & 4.

c Defin. 12. 19.

PARS II.

Portiones, & Portionum segmenta cum inscriptis sibi pyramidibus componuntur, & Cylindri quidem Circularis Portio ostenditur maximæ inscriptæ pyramidis esse dupla. Id ipsum de portionibus Cylindri Elliptici per quasvis diametros basis abscissis, demonstratur. Ad hæc ostendo Portionem Cylindri Parabolici inscriptæ Pyramidis maximæ sesquialteram esse: Cylindri autem Hyperbolici Portionem ita se habere ad maximam sibi inscriptam Pyramidem, ut est recta lateris transversi baseos sesquialtera una cum axe baseos, ad latus transversum cum axe. Ex his omnis generis Portiones non solùm à Circularibus Cylindris, sed etiam à quibuscumque aliis etiam hyperbolicis abscissæ cubantur. Exprimitur etiam segmentorum quæ à Portionibus resecantur planis sectioni maximæ parallelis ad inscriptas maximas pyramides proportio, & Portiones à Cylindris Ellipticis per quascumque basis diametros abscissæ omnes inter se demonstrantur æquales.

PARS III.

Cylindri Circularis Portio cum Elliptici Cylindri Portionibus; & harum singulæ cum suis quæque Cylindris comparantur. Demonstramus autem tam Circularis Cylindri Portionem ad Cylindrum suum Circularem, quàm Elliptici Cylindri Portionem ad suum Cylindrum Ellipticum eam habere rationem, quam duæ tertiæ diametri partes ad circuli circumferentiam: Portionem verò Cylindri Parabolici ad suum esse Parabolicum Cylindrum ut 3. ad 16.

PARS IV.

Portionis à Cylindro circulari abscissæ segmenta planis d $\beta\pi\omega\vartheta$, NRTPHGKL ad maximam sectionem ABC rectis, versùs BC abscissa esse ostendimus ad sphæras diametrorum $\beta\vartheta$, NP, HL, ut Portionis altitudo CB ad circumferentiam DCEY. Tum ipsa Portio cum segmento, quod ab ipsâ resecatur, plano ad basim parallelo confertur, atque inde circuli pendere quadraturam ostendo. His verò hoc præmittimus theorema: si quodvis circuli segmentum BTC e circa diametrum GH, subtensæ BC parallelam, in orbem duxerit, Portionem sphæricam ab ipso genitam æquari sphæræ, cujus diameter est ipsa BC.

d Fig. 41.

e Schematismus 6. Fig. 40.

PARS PRIMA.

PROPOSITIO I.

Datæ sunt binæ quantitates A & B, sive superficies, sive corpora: data sit item ratio quæcumque E ad F.

Schematismus 1. Fig. 1.

Si quantitatibus A & B; aliæ atque aliæ magnitudines sine termino inscribi possint, quæ & eam semper inter se rationem servent, quam E & F; &

quantitates ipsas A, B a exhauriant, hoc est ab ipsis deficiant defectu quantumvis parvo.

Erit quantitas A ad quantitatem B, ut E ad F.

a Defin. 18.

SI non; erit ratio A ad B major aut minor ratione E ad F, sit primo major. Aliqua igitur quantitas Z minor quàm A, erit ad B, ut E ad F. Inscribantur ipsis A & B magnitudines binæ M, N; M quidem ipsi A; N verò ipsi B, eâ lege, ut M & minus deficiat ab A, quàm Z, ac proinde sit majus quàm Z, & simul rationem talem habeat ad N, quam E ad F: hoc enim totum fieri poterit per hypothesim. Quoniam igitur M majus est quàm Z, erit M ad B in majori, quàm Z ad B. At Z erat ad B, ut E ad F. Ergo M est ad B in majori quàm E ad F; hoc est M est ad B in majori, quàm M ad N. Ergo N magnitudo inscripta ipsi B, major est quàm B, pars suo toto: quod fieri non potest. Non igitur ratio A ad B major ratione E ad F.

Ponatur deinde ratio A ad B minor ratione E ad F. Igitur ratio B ad A major erit ratione F ad E. Hoc verò fieri non posse eodem discursu ostendetur, quo jam demonstravi rationem A ad B non posse majorem esse ratione E ad F.

Quare cùm ratio A ad B neque major sit ratione E ad F, neque minor, æqualis erit: quod erat demonstrandum.

Idem lineis quadrat, si loco figurarum inscriptarum partes eâdem lege auferantur.

Corollarium.

Si quantitatibus A & B aliæ magnitudines inscribi possint, quæ & semper æquales sint inter se, & quantitates ipsas A, B exhauriant.

Erit quantitas A æqualis quantitati B.

Patet ex Propositione: nam ratio E ad F isthic data fuit quæcumque, ac proinde etiam ratio æqualitatis.

PROPOSITIO II.

Schematismus 1. Fig. 4.

Esto triangulum rectangulum A B D, & circulus B F A descriptus radio A B Triangulum est ad circulum, ut B D ad circumferentiam B F.

TRiangulum rectangulum B A C, cujus altitudo par est peripheriæ B F, æquatur a Circulo. Sed triangulum B A D est ad triangulum B A C, ut B D ad B C, hoc est ad peripheriam B F. Ergo etiam triangulum B A D est ad circulum, ut B D ad peripheriam B F: quod erat demonstrandum.

a Archim. dim. cir. p. 1.

Potuit hoc theorema inscriptione Archimedæâ immediatè demonstrari.

PROPOSITIO III.

Schematismus 1. Fig. 5.

Datus esto planus annulus B F G D; cuius latitudo B D. Super B D erectum sit trapezium rectangulum C B D E, bina latera B C, & D E babens parallela & proportionalia peripheriis B F, D G. Erit ut maximum trapezii perpendiculum C B ad circumferentiam extimam annuli B F, ita ipsum trapezium ad annulum.

QUoniam ex hypothesi C B est ad D E, ut peripheria B F ad peripheriam D G, hoc est ut a B A ad D A, patet C E productam cadere in A. Quia verò proportio tam circulorum B F A, D G A, quam similium triangulorum B C A, D E A, eadem est, quæ quadratorum B A, D A; erit triangulum B C A ad triangulum D E A, ut circulus B F A ad circulum D G A. Igitur permutando, ut triangulum B C A ad circulum B F A, ita triangulum D E A ad circulum D G A. Ergo & reliquum trapezium B C E D est ad reliquum annulum B F G D, ut triangulum B C A ad circulum B F A; hoc est ut b B C ad peripheriam B F, quod erat propositum.

a Pappus l. 5. p. 41.

b 2. huius.

Corollarium.

Hinc patet si perpendicula B C, D E æqualia fuerint peripheriis B F, D G, trapezium annulo plano esse æquale.

PROPOSITIO IV.

Datus sit circulus BFA, & alius ei concentricus DGA, radii sint AD, AB, ex eorum terminis erigantur perpendiculares DE, BC, quibus ex centro occurrat recta in E & C.

Schematismus 1. Fig. 5.

Ut BC est ad circumferentiam BE, sic DE est ad circumferentiam DG.

ESt enim B C ad D E, ut B A ad D A, hoc est ut circumferentia a B F ad circumferentiam D G. Igitur permutando liquet propositum.

a Pappus 6. l. 5. p. 41.

PROPOSITIO V.

Si Cylindrus, sive integer, sive a cavus AB, & prisma quodcumque CH, bases & altitudines babeant æquales, erunt æqualia.

Schematismus 1. Fig. 6.

a Defin. 24. huius.

PRopositio est manifesta, nam æqualia plana in eamdem vel æqualem altitudinem ducta, non nisi æqualia solida possunt producere, ulteriorem demonstrationem qui desiderat, facilè ex elem. 12. conficiet.

PROPOSITIO VI.

Si Cylindrus, sive integer, sive cavus AB, & prisma quodvis G H eamdem habeant altitudinem, erunt inter se ut bases.

Schematismus 1. Fig. 6.

PRisma C H basin habens parem Cylindrico solido, est ad prisma G H, ut planum CED, (hoc est ut circulus vel annulus A) ad planum G F E D. Sed prisma a C H æquatur Cylindrico solido A B. Ergo etiam hoc est ad prisma G H, ut basis A ad basim G F E D: quod erat demonstrandum.

a Præced.

PROPOSITIO VII.

[*Schematismus 1. Fig. 7.*]

Data sit cujuscumque Cylindri recti portio per punctum in latere, & per baseos centrum, sive per axem baseos, aut per ordinatim axi applicatam abscissa ADBCE, cuius maxima sectio ABC altitudo CB, basis DFCE. In Cylindricâ eius superficie ducta sit recta FG, & in basi FK parallela ad CA.

Dico GF esse ad circumferentiam radio KF descripram, ut BC est ad circumferentiam descriptam radio AC.

PRimò in portione Cylindri circularis ducantur in plano Elliptico DBE recta GH, parallela ad DA, in triangulo ABC recta HL, parallela ad BC; junganturque KG. Quoniam GF, BC sunt partes laterum Cylindri, ex quo sumpta est portio, erunt parallelæ. Quare cùm a HL sit parallela ad BC etiam ad GF parallela erit. Quoniam igitur GF, FK sunt parallelæ ad HL, LA. erunt plana KGF, AHL per illas ducta etiam parallela. Hæc autem secantur à plano DGBE, & communes sectiones sunt GK, HA. Ergo b GK, HA sunt parallelæ. Sunt autem & parallelæ FK, LA. Ergo anguli GKF & HAL c æquantur. Pari modo quoniam FG, GK æquidistant LH, HA, anguli KGF, AHL pares erunt. Jam autem ex demunstratis patet AKGH esse parallelogrammum, ac proinde KG æquari AH. Ergo d GF, HL æquales sunt, item KF, AL. Sed e HL est ad circumferentiam radij AL, sive KF, ut BC ad circumferentiam radij AC. Ergo etiam GF est ad circumferentiam radij KF, ut BC ad circumferentiam radij AC: quod erat demonstrandum.

[a *Per constr.* — b 16 *Elem.* 11. — c 11. *elem.* 11. — d 26. *Primi elem.* — e 4. *huius.*]

In portione Cylindri Elliptici, Parabolici, Hyperbolici demonstratio est eadem.

Corollarium.

Ex demonstratione patet 1. GF æqualem esse HL. quod si per puncta F, L recta ducatur circumferentiæ basis occurrens in N, & ex N erigatur in superficie Cylindricâ recta NP, hæc quoque erit æqualis ipsi HL, ac proinde etiam rectæ FG.

Patet 2. FLN esse parallelam ad diametrum DE; cùm enim FL, GH jungant æquales, & parallelas GF, LH, etiam FL parallela est ad GH; hoc est per constructionem ad DA.

Patet 3. Si ex puncto quovis O rectæ FN diametro DE parallelæ erigatur OM æquidistans rectæ BC, sive rectis FG, NP, occurrens Plano Elliptico DBE in M; hanc quoque ipsi LH, ac proinde & rectis FG, NP, æqualem fore.

Patet 4. puncta G, H, M, P, esse ad unam rectam quæ parallela est diametro DE.

PROPOSITIO VIII.

[*Schematismus 1. Fig. 8.* — a *Defin. 20. huius.*]

Rotundum solidum ex quacumque plana figura EZL, quæ, a axem habeat AZ, circa ordinatim axi applicatam EL in orbem ducta procreatum per inscripta Cylindrica corpora exhauritur.

AXis AZ in aliquot æquales partes dividatur, ductisque per divisionum puncta rectis γH, δK, βO, ad axem perpendicularibus, figuræ semissi EZA inscribe rectangula, & conscribe. Hæc si una cum figura EZA circa EA in orbem ducantur, semissi rotundi solidi dati inscribentur, & conscribentur Cylindrica solida: & ea quidem, quæ fient à rectangulis OA, EA, erunt Cylindri integri: reliqua Cylindri cavi, b quorum bases erunt plani annuli SS, QQ, PP. Per hæc Cylindrica corpora datum solidum rotundum exhauriri, sic ostendo.

[b *Defin. 24. huius.*]

Producantur αHI, MKR, in B & C. manifestum est priora Cylindrica solida inscripta, quæ fiebant à rectangulis Hδ, Kβ, OA, circa EA in orbem ductis, eadem esse cum aggregato Cylindrorum, qui fiunt à rectangulis HA, KB, OC, circa EA conversis, sicut rectangula ipsa sunt eadem. Similiter priora Cylindrica corpora conscripta, quæ fiebant à rectangulis αγ, Mδ, Gβ, FA eadem esse cum aggregato Cylindrorum genitorum à rectangulis αA, MB, GC, FD, Ergo priorum conscriptorum, & inscriptorum, eadem est differentia, quæ est posteriorum. Atqui posteriorum differentia est c Cylindrus αX. Ergo etiam priorum differentia erit Cylindrus αX. Sed Cylindrus αX, fit tandem quocumque dato minor: si enim AZ in plures semper, ac plures æquales partes dividatur, fiet tandem γH, sive Zα Cylindri altitudo datâ minor. Ergo differentia priorum conscriptorum, & inscriptorum, nimirum differentia aggregati Cylindricorum solidorum, à rectangulis αγ, Mδ, Gβ. FA genitorum, & aggregati Cylindricorum, quæ producta sunt à rectangulis Hδ, Kβ, OA, tandem erit minor dato. Ergo multò magis ipsius rotundi solidi & ipsi inscriptorum, tandem dato minor erit: quod erat demonstrandum.

[c *Vide Arà ch. 24 de conoid.*]

PROPOSITIO IX.

Cylindri recti circularis portio per centrum basis & latus secta per inscripta prismata exhauritur.

[*Schematismus 1. Fig. 9.*]

ESto Cylindri Circularis portio obliquè per centrum secta ADBCE, sectio maxima ABC, basis DCE semicirculus, altitudo BC.

Radio AC in aliquot æquales partes secto, per sectionum puncta MS, duc parallelas ad DE, & comple rectangula HI, RG semicirculo inscripta, item rectangula Dϖ, Kϱ, αγ eidem semicirculo circumscripta.

Ex punctis I, G, K, α, erigantur in Cylindricâ superficie rectæ IO, Gφ, KQ, αδ. Erunt hæ parallelæ ad altitudinem portionis BC, adeoque perpendiculares basi. Ex punctis quoque L, ϖ, ϱ, X, ξ γ, erige LN, ϖF pares ipsis KQ, IO; & Xβ, ϱψ pares ipsis αδ, Gφ; & ζω, γς pares ipsi βC; sintque omnes parallelæ ad BC, unde etiam rectis IO, Gφ,

K Q, αδ parallelæ erunt. Ex punctis quoque R, θ erige usque ad planum Ellipticum DBE rectas R.T, θλ paralelas ad KQ. LN, IO, ϖF, quæ ipsis proinde æquales a erunt. Erunt autem puncta N, Q, T, λ, O, F, item puncta β δ φ ψ; item puncta ω, B, ε, ad rectas lineas in plano Elliptico existentes. Per rectas ωζ, δα, TR, & ζαR; item per rectas ςγ, φG, λθ, & γGθ ducantur plana in plano Elliptico facientia sectiones ωδT, ςφλ. Rursum per rectas βX, QK, & XKH, item per ψϱ, OI & ϱIP ducantur plana, in plano Elliptico sectiones facientia βQH, ψOP. Denique per rectas LN, LD, & Fϖ ϖE due plana, quæ in plano Elliptieo sectiones faciant N D, F E.

a Corol. 7. huius.

His planorum sectionibus manifestum est portioni inscriptum esse corpus ex pluribus rectis compositum prismatibus. Primum est triangulare HQKIOP, cujus parallela plana sunt triangulo rectangula H Q K, POI. Alterum est prisma rectum quadrangulum RTδαGθλφ, cujus adversa plana parallela sunt RTδα, & θλφG trapezia, quorum bina latera TR, δα, & λθ, φG æquidistant. Reliqua solida si plura forent inscripta, quadrangula quoque prismata essent. Pari modo liquet portioni conscriptum esse corpus prismatibus constans, uno pluribus, quàm inscriptum. Quorum primum est rectum prisma triangulare, cujus parallela plana sunt DNL, EFϖ triangula rectangula. Reliqua KQβXϱIOψ, & αδωζγGφς sunt prismata recta quadrangula, quorum parallela plana sunt trapezia rectangula bina latera αδ, ζω, & Gφ, γς habentia parallela.

Dico primò si plura semper ac plura rectangula basi inscribantur & conscribantur, factisque per latera sectionibus ut priùs, plura semper ac plura portioni solida inscribantur ac conscribantur, fore ut tandem corpus conscriptum ab inscripto differat quantitate minori datâ.

Dico secundò inscriptum portioni corpus, portionem c exhauriet. Primum sic demonstro:

c defin. 28.

Si plura semper ac pluta rectangula semicirculo DCE inscribantur & conscribantur, rectangulum infimum DLϖE fiet tandem dato plano minus, sed differentia rectangulorum inscriptorum ac conscriptorum, plana nimirum HL, RX, ζG, θϱ, Pϖ, æquantur rectangulo DLϖE. Ergo plana HL, RX, ζG, θϱ, Pϖ fient dato plano minora. Ergo & parallelepipeda super his in altitudine BC erecta fient tandem dato solido minora. Atqui differentia corporis conscripti & inscripti semper minor manet parallelepipedis super illis planis in altitudine B C erectis; nam solida quibus inscriptum corpus ab conscripto exceditur, sunt partes dictorum parallelepipedorum. Ergo differentia inscripti & conscripti corporis multò magis tandem fiet dato solido minor. Quod erat primum.

Ex quo jam patet secunda pars: cùm enim corpus conscriptum majus sit portione; & inscriptum corpus ab conscripto tandem differat solido dato minori, multò magis inscriptum corpus tandem à portione ipsa differet solido dato minori, hoc est portionem exhauriet.

PROPOSITIO X.

Idem aliter efficitur.

Schematismi 1. Fig. 10.

ESto Cylindri circularis recti portio per centrum basis obliquè secta ADBCF, cujus basis DCE semicirculus, sectio maxima ABC, altitudo BC ad basim recta.

Radio AD in aliquot æquas partes secto, per FG sectionum puncta duc parallelas ad AC, & comple rectangula IA, OF, quadranti ADC inscripta; item rectangula HA, LF, MG, quadranti conscripta.

Ex punctis IO in superficie Cylindricâ erige rectas lineas IR, OT, erunt hæ parallelæ ad altitudinem portionis BC, ac proinde, quia per hyp. Cylindrus rectus est, basi perpendiculares. Deinde ex punctis H, L, M, erige rectas HQ, LS, MV æquales rectis CB, IR, OT, & parallelas ad BC, ac proinde etiam ad ipsas CB, IR, OT. Duc planum per rectas QH, RI, HIF; item per SL, TO, LOG. item per VM, MD; & communes sectiones in plano Elliptico DBC factæ sint QRF, STG, VD. Per rectas quoque QH, HC, item per SL, RI, & LIK; item per VM, OT, & MON plana ducito, quæ plana priora intersecent in rectis PK, XN.

His planorum mutuis sectionibus inscribetur portioni corpus ex pluribus prismatis triangularibus compositum, corpus item conscribetur ex triangularibus etiam prismatis constans, uno pluribus, quàm inscriptum. Prismata inscripta sunt KPAFRI; NXFGTO: conscripta verò CBAFQH; HQFGSL; OTGDVM.

Dico 1. si plura semper ac plura basi rectangula inscribantur & conscribantur, ac proinde factis per latera planorum sectionibus modo jam dicto inscribantur ac conscribantur solida plura semper ac plura: differentiam corporis inscripti & conscripti fore tandem dato solido minorem.

Dico 2. portionem ab inscripto corpore tandem a exhauriri. Primum ita demonstrabimus.

a Defin. 28.

Si plura semper ac plura rectangula basi inscribantur & conscribantur radio AD, in æquales partes in infinitum subdiviso; fiet rectangulum basi maximæ sectionis proximum AFHC tandem dato plano minus. Sed rectangulorum inscriptorum ac conscriptorum differentia, plana nimirùm KH, NL, GM æquantur rectangulo FCHA, quod maximæ sectionis basi proximum est. Hæc ergo plana tandem fient dato plano minora. Ergo parallelepipeda super dictis planis erecta in altitudine BC, tandem erunt dato solido minora. Sed differentia inscripti corporis & conscripti, minor est parallelepipedis super planis KH, NL, GM ad altitudinem BC erectis, solida enim quibus inscriptum corpus differt à conscripto, sunt partes horum parallelepipedorum. Ergo differentia corporis inscripti tandem erit dato solido minor: quod erat primum.

Ex quo jam patet secundum, cùm enim portio minor sit conscripto sibi corpore, multò magis tandem erit differentia corporis inscripti & portionis dato solido minor, hoc est portio ab inscripto sibi corpore tandem exhaurietur.

Corollarium.

ad duas præcedentes.

SImili methodo per inscripta prismata portiones à Cylindris Ellipticis, parabolicis & hyperbolicis sumptæ exhaurientur. Quod verbo insinuasse Geometris, quibus hæc scribo, erit satis.

Cæterùm non copiæ aut varietatis gratiâ duplex ista

ratis

ratio exhauriendi hac propositione & praecedenti allata est, sed quod utraque in sequentibus theorematibus usui futura sit.

PROPOSITIO XI.

Cylindri circularis recti portio, per punctum in latere & centrum baseos abscissa, altitudinem habens aequalem circumferentiae basis, aequalis est sphaerae baseos.

Schematismus 2. Fig. 11.

Esto Cylindri recti portio per B punctum in latere, & per A centrum baseos abscissa DBCE, cujus basis DCE, altitudinem CB aequalem habens circumferentiae DCEY. Demonstrandum est portionem DBCE aequari sphaerae, quae fit à circulo DCEY.

Radium AC seca in aliquot aequales partes, perque sectionum puncta ductis parallelis ad diametrum DE, comple rectangula HI, NO, βϑ. Ex punctis H, L, erige in superficie Cylindrica rectas HG, LK (erunt hae *a* aequales & rectae ad basim DCE) ducanturque in plano Elliptico DBE, rectae GF, KI, GK. His peractis, habes inscriptum portioni prisma rectum triangulare FGHIKL, cujus adversa plana sunt triangula FGH & IKL rectangula. Ex punctis N, P, erige in Cylindrica superficie rectas NR, PT, item ex M, O, rectas MQ, OS parallelas ad BC, & occurrentes plano Elliptico in Q, S: erunt hae *b* aequales ipsis GH, LK, & puncta G, Q, S, K, ad *c* unam rectam, ducantur rectae QR, ST. Atque ita inscriptum est portioni prisma rectum quadrangulum MQRNPOST, cujus parallela plana sunt rectangula trapezia MQRN, & OSTP, quorum bina latera MQ, NR, & OS, PT, aequidistant.

a Corol. 1. p. 7. huius.
b Corol. 3. p. 7. huius.
c Corol. 4. p. 7. huius.

Pari modo portioni inscribemus prisma quadrangulum ... Quod si radio AC in plures semper ac plures aequales partes subdiviso, plura semper ac plura rectangula semicirculo inscribantur, super his tanquam basibus eâdem methodo tot solida portioni inscribi poterunt, ut tandem *d* exhauriatur, quemadmodum *prop.* 9. demonstravimus.

d Defin. 28. huius.

Venio jam ad sphaeram baseos DCE. Manente diametro DE semicirculus DCE cum iisdem inscriptis sibi rectangulis circumagi intelligatur. Semicirculus describet sphaeram: Rectangulum verò HI sphaerae Cylindrum inscribet: reliqua rectangula NO, βϑ inscribent eidem sphaerae Cylindros, *e* quorum bases erunt annuli plani αβηλ, MN μψλV, ut cernere est in *Fig.* 12. quae circulum baseos cum inscriptis sibi rectangulis seorsim exhibet. Et si subdiviso ulterius radio AC, plura sine termino rectangula semicirculo DCE inscribantur, ac dein circa diametrum DE circumagantur, solida Cylindrica quae ex hac revolutione sphaerae inscribentur, sphaeram ipsam tandem *a* exhaurient.

e Defin. 24. huius.
a 8. huius.

Reliquum est ut solida quae tam portioni, quàm sphaerae inscripsimus, inter se comparemus. Atque ex eorum perpetuâ aequalitate, ipsius quoque portionis ac sphaerae aequalitatem concludamus. Quoniam per hypothesim portionis altitudo CB par est circumferentiae DCEY, etiam HN, seu LK par erit *b* circumferentia radio HF descriptae. Quia igitur rectangulum est triangulum GHF (cùm enim ex hypothesi Cylindrus sit rectus, recta GH in eius superficie ducta, erit ad basim, ac proinde ad FH in basi ductam, perpendicularis.) Ergo *c* triangulum FGH basis prismatis FGHLIK, aequatur circulo, cujus radius HF; nimirùm circulo HΦ, *d* qui basis est Cylindri facti à rectangulo FL, circa DE circumacto. Est autem communis etiam utriusque altitudo HL. Ergo prisma FGHLIK Cylindro rectanguli FL circa DE circumacti, aequale *e* est. Rursum quia BC aequalis ponitur peripheriae DCEY, etiam MQ, (hoc est per *corollar.* 3. *p.* 7. *hujus*, GH) & NR, parallela trapezii latera, aequantur circumferentiis, quarum radii sunt HF, sive MZ, & NZ. Ergo trapezium MQRN, basis prismatis MQRNPOST, aequatur *f* annulo plano, qui est differentia circulorum radiis NZ, MZ descriptorum, nimirùm annulo plano MNμψγV. qui basis est Cylindri cavi, à rectangulo NMOP producti. Quare, cùm Cylindri cavi & prismatis communis sit altitudo NP. erunt *g* aequalia. Non aliter ostendetur prisma ωλπϑβζω, aequari Cylindro cavo, qui producitur à rectangulo αβϑδ circa DE revoluto.

b 7. huius.
c Archim. dim. cir. p. 1.
d Fig. 12.
e 5. huius.
f Corol. p. 3. huius.
g 8. huius.

Totum igitur corpus inscriptum portioni, toti corpori inscripto sphaerae aequale est. Pari discursu demonstrabimus omnia prismata quocumque numero portioni fuerint inscripta, aequari solidis Cylindricis aequè multis sphaerae baseos inscriptis. Cùm igitur tam solida rectilinea portionem, *h* quàm Cylindrica *i* sphaeram denique exhauriant; ipsa etiam *k* portio sphaerae baseos aequalis erit. Quod erat demonstrandum.

h 9. huius.
i 8. huius.
k Corol. 1. huius.

Aliter.

Radio DA in aliquot aequales partes diviso, quadranti ADC inscribe rectangula HA, MI, RN. Ex punctis H, M, R, erige in Cylindricâ superficie rectas HK, MP, RV; erunt hae ad basim DCE rectae ac parallelae ad BC. Ex punctis quoque F, L, Q, erige FG, LO, QT parallelas ad BC, plano Elliptico DBE occurrentes in G, O, T; erunt etiam hae ad basim rectae & parallelae ac aequales *a* ipsis HK, MP, RV. His ita constitutis, inscripta sunt semissi portionis tria prismata HIAFGK, MNILOP, RSNQTV: quod sic ostendo. Quoniam FG, HK sunt aequales & parallelae, quae eas jungunt KG, HF, ac proinde etiam KG, IA, sunt aequales & parallelae. Igitur etiam KIGA aequales & parallelae erunt. Quoniam ergo latera AG, GF, FA sunt aequalia & parallela lateribus IK, KL, LI; patet opposita triangula esse aequalia, similia & parallela. Quare solidum HIAFGK prisma est. Eodem modo ostendam reliqua esse prismata. Quod si subdiviso ulteriùs radio DA, plura semper ac plura rectangula quadranti ADC inscripseris, super his tanquam basibus tot prismata semissi portionis inscribi eâdem methodo poterunt, ut semissis portionis tandem *b* exhauriatur; quemadmodum *prop.* 10. demonstratum est.

Schematismus 2. Fig. 13.
a Corol. 3. p. 7. huius.
b defin. 28. huius.

Intelligatur deinde quadrans ACD cum inscriptis sibi rectangulis manente radio AD circumagi. Hac revolutione quadrans describet hemisphaerium; rectangula verò HA, MI, RN, hemisphaerio inscribent Cylindros sibi mutuò superimpositos. Quod si subdiviso ulteriùs radio, & pluribus semper ac pluribus rectangulis quadranti inscriptis ac circa DA in orbem actis, inscripti hemisphaerio Cylindri sine fine multiplicentur, exhaurietur tandem *c* semissis portionis.

c Ex Archim. 21. conoid.

Restat

Restat ut solida tam semissi portionis quàm hemisphærio inscripta comparemus. Quoniam BC altitudo portionis per hypothesim par est circumferentiæ DCEY, etiam HK latus prismatis HIAFGK æquatur circumferentiæ, *a* cujus radius HI, sive FA. Est autem & angulus IHK rectus. Ergo triangulum IHK basis prismatis HIAFGK, æquatur *b* circulo, cujus radius HI sive FA, qui basis est Cylindri facti à rectangulo HA circa DA revoluto. Quare cùm utriusque solidi, Cylindri nimirum & prismatis, communis quoque sit altitudo HF, prisma Cylindro *a* æquale erit. Pari modo ostendam prisma MNILOP æquari Cylindro facto ab MI rectangulo circa DA rotato; & prisma RSNQTV, æquale esse Cylindro, quem producit rectangulum RN circumactum circa DA. Omnia igitur portionis semissi inscripta prismata æquantur omnibus Cylindris hemisphærio inscriptis. Atque hoc semper eveniet quotcumque tum prismata semissi portionis, tum Cylindros hemisphærio, æquali numero inscripserimus.

a 7. *hujus.* b *Archim. dim. cir. p.* 1. a 5. *lib.* 1. *hujus.*

Quare cùm prismata *c* semissem portionis, & Cylindri *d* hemisphærium tandem exhauriant, liquet semissem portionem *e* hemisphærio exæquari. Quod erat demonstrandum.

c 10. *hujus* d *Archim. conoid. p.* 21. e *Corol. p.* 1. *hujus.*

PROPOSITIO XII.

Præcedens theorema per indivisibilia sive per heterogenea demonstratur.

Schematismus 2. *Fig.* 13.

Esto Cylindri circularis recti portio per centrum baseos & punctum in latere abscissa DBCE, cujus basis sit DCE, maxima sectio ABC, altitudo CB.

Demonstrandum est, si altitudo CB par sit peripheriæ DCEY, portionem sphæræ baseos esse æqualem.

Secentur tum portio, tum sphæra baseos quotcumque planis sectioni maximæ ABC æquidistantibus. Sectiones in portione erunt triangula rectangula KHI, PMN, VRS: in sphærâ autem circuli erunt; quorum radij HI, MN, RS. Jam quia BC altitudo portionis æqualis ponitur peripheriæ DCEY, etiam KH, MP, RV peripheriis radiorum HI, MN, RS æquales *a* erunt. Ergo triangula KHI, PMN, VRS, circulis radiorum HI, MN, RS *b* sunt æqualia. Atque hoc semper eveniet quotcumque sectiones fiant per portionem & sphæram. Portio igitur sphæræ baseos æqualis est. Quod erat demonstrandum.

a 7. *hujus.* b *Archim. dim. circ. p.* 1.

Aliter.

Schematismus 2. *Fig.* 11.

Licebit eamdem veritatem per heterogenea hoc etiam modo demonstrare. In basi DCE ducantur quotvis rectæ HL, NP, βϑ, parallelæ diametro DE, per quas ducantur plana ad basim recta, quæ in portione sectiones producant rectangula HGKL, NRTP, βϖωϑ. Eædem deinde parallelæ HL, NP, βϑ unà cum semicirculo DCE circa DE circumactæ, inscribant sphæræ baseos Cylindricas superficies rectas, quæ erunt quasi quædam curvæ sectiones sphæræ respondentes totidem rectis sectionibus portionis. Quoniam igitur BC ponitur æqualis circumferentiæ DCEY, etiam HG, NR, βϖ, circumferentijs radiorum HF, NZ, βX *c* æquales erunt. Sed rectangula, quorum bases æquantur circumferentijs basium Cylindricarum, altitudines verò ipsis Cylindrorum altitudinibus, superficiebus Cylindricis æqualia *d* sunt. Ergo rectangula HGKL, NRTP, βϖωϑ æquantur superficiebus Cylindricis, quas producunt HL, NP, βϑ, circa DE revolutæ. Quod quia semper evenit, portio sphæræ baseos æqualis est. Quod erat demonstrandum.

c 7. *hujus.* d *Satis per se patet, vide nihilominus prop.* 4 *l.* 2 *hujus operis, quæ ab his non dependet.*

Corollarium I.

Ad duas præcedentes.

Schematismus 2. *Fig.* 11.

Si portio secetur planis HGKL, NRTP &c. rectis ad basim DCE, & transeuntibus per lineas HL, NP &c. diametro DE æquidistantes, erunt portionis segmenta HGBKL, NRBTP &c. æqualia segmentis sphæricis quæ à circularibus planis HCL, NCP, &c. circa axem DE in orbem ductis procreantur.

Item portionis segmenta HDGKEL, NHGRTPLK &c. æqualia sunt solidis sphæricis, quæ fiunt à Circularibus planis DHLE, HNPL &c. circa DE in axem ductis.

Demonstratio eadem est cum 1. & 4. *propositionu* 11. *hujus.*

Corollarium II.

Schematismus 2. *Fig.* 13.

Si portio altitudinem CB parem habens circumferentiæ DCEY, & sphæra baseos secentur planis ad maximam portionis sectionem parallelis IKH, NPM, SVR; erunt segmenta portionis æqualia segmentis sphæricis, quæ ab ijsdem planis circa DE revolutis, producuntur.

Demonstratio eadem cum secundâ & tertiâ, quæ pro ipso theoremate allatæ sunt.

Scholium.

Methodum demonstrandi per indivisibilia, vel (ut ego appellare soleo) per heterogenea, quam nobilis Geometra Bonaventura Cavallerius in lucem protulit, pro legitimâ ac Geometricâ admittendam non existimo. Procedit illa à lineis ad superficies, à superficiebus ad corpora, atque æqualitatem vel proportionem in lineis repertam, concludit de superficie; repertam in superficiebus traducit ad solida: quâ ratiocinandi formâ, nisi ad homogenea revocetur, conficitur omninò nihil. Nam, ut rem exemplo declaremus, quem convincat istheac ratiocinatio: triangulares omnes portionis Cylindricæ sectiones IKH, NPM &c. æquantur sectionibus sphæræ Circularibus, quarum radij HI, MN, &c. Ergo Cylindri portio sphæræ æqualis est. Nulla sanè est ista collectio; quando neque ex triangulis Cylindrica portio, neque ex circulis sphæra componitur. Admittunt quidem Geometræ lineam generari ex fluxu puncti; superficiem ex fluente lineâ; corpus ex superficie. Sed aliud longè est ex indivisibilium fluxu quantitatis species generari; aliud ex indivisibilibus componi. Primum omninò exploratæ veritatis est. Alterum cum Geometriâ sic pugnat, ut nisi illud ipsa destruat, ipsam destrui necesse sit. Absit tamen ut invento pulcherrimo debitam laudem cupiam detrahere. Hoc solum dico demonstrationes per heterogenea institutas ad assensum non cogere, nisi, quod fieri plerumque potest, ad homogenea reducantur. Ita in exemplo à me jam allato, ex eo quod omnia triangula portionis omnibus sphæræ circulis sint æqualia, non evincitur portionis ac sphæræ

Fig. 13.

sphæra æqualitas; evincetur autem, si ad homogenea revoces, hunc in modum: Quoniam triangula portionum & circuli sphæra æqualibus imò communibus distant intervallis HF, ML, &c. continuò apparet, portioni prismata, sphæra Cylindros inscribi posse, sic ut communes utrorumque sint altitudines, bases autem sint, prismatum quidem dicta triangula, Cylindrorum verò circuli. Ex horum autem Cylindrorum ac prismatum perpetua æqualitate tam necessario portionis ac sphæra æqualitas, ut in demonstratione secunda fecimus, concludetur. Quod si assertio proponatur, qua non aliter quàm indivisibilium methodo probetur, de illius veritate eo usque dubitabo, dum appareat quâ ratione possit ad homogenea revocari. Hoc vero efficere non aliud est, quàm more veterum per inscripta homogenea propositas quantitates exhaurire.

Vide quæ de eodem argumentandi modo dicturi sumus ad propositionem 2. lib. 2.

PROPOSITIO XIII.

Schematismus 2. Fig. 14.

Omnis portio Cylindri Circularis recti per centrum basis & punctum in latere abscissa, ad sphæram basis eam habet rationem quam altitudo portionis ad circumferentiam basis.

Esto DBCE portio per A centrum baseos & B punctum in latere abscissa, altitudinem habens BC. Demonstrandum est portionem esse ad sphæram à circulo ADCEY factam, ut BC ad peripheriam DCEY.

a 11. huius. Eàdem methodo, quâ suprà *a* usi in demonstratione fumus, portioni inscribe corpus ex pluribus prismatibus compositum, quorum primum erit triangulare, reliqua verò quadrilatera. Item sphæræ à rectangulis HI, NO, βϑ, circa DE in orbem ductis, inscribantur solida Cylindrica, quorum primum à rectangulo HI productum, erit Cylindrus integer, reliqua verò Cylindri cavi.

b 7. huius. c 2. huius. GH est ad peripheriam radij HF, ut *b* BC ad circumferentiam DCEY, sed ut GH est ad circumferentiam radij HF, sic *c* triangulum FGH est ad circulum radij HF. Ergo ut BC ad circumferentiam DCEY, sic triangulum FGH ad circulum radij FH. Sed prisma FGHLKI, & Cylindrus factus à rectangulo HI circa DE revoluto (quia eamdem habent altitudinem HL) sunt inter se *d* ut bases; hoc est ut *d 6. huius.* triangulum FGH ad circulum radij FH. Ergo prisma dictum ad dictum Cylindrum quoque est ut BC ad circumferentiam DCEY. Deinde quoniam tam GH (hoc est QM) est ad peripheriam radij FH, quàm NR ad peripheriam radij ZN, ut BC *e* ad peripheriam DCEY; erit QM ad peripheriam radij FH, *e 7. huius.* sive ZM, ut RN ad peripheriam radij ZN. Ergo *f* trapezium rectangulum RNMQ est ad planum *f 3. huius.* annulum, qui latitudinis MN, est differentia circulorum radijs ZM, ZN descriptorum; ut RN maximum trapezij perpendiculum ad extimam annuli circumferentiam, cujus nimirùm radius est ZN; hoc est ut BC *g* ad peripheriam DCEY. Sed prisma MQRNPOST est ad *h* ad Cylindrum cavum productum ab rectangulo MNPO, circa DE revoluto (quia communis est utriusque alti- *g 7. huius. h 6 huius.*

tudo NP) ut basis, trapezium nempè MQRN ad basim, scilicet ad annulum latitudinis MN. Ergo prisma MQRNPOST est ad Cylindrum cavum productum à rectangulo MNPO circa DE revoluto, ut BC ad peripheriam DCEY. Pari modo ostendam prisma κλνβϑζμ esse ad cavum Cylindrum, productum ab rectangulo βϑ circa DE circumacto, ut BC ad circumferentiam DCEY. Quoniam igitur singula prismata sunt ad singula Cylindrica solida, ut BC ad peripheriam DCEY; erunt *a* omnia prismata simul sumpta ad omnia Cylindrica solida simul sumpta, ut BC ad peripheriam DCEY. Atque hoc semper eveniet, quotcumque prismata portioni & Cylindrica solida sphæræ æquali numero inscribantur. Quare cùm tam prismata *b* portionem, quam *c* Cylindrica sphæram denique exhauriant; etiam *d* portio erit ad sphæram ut BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat demonstrandum. *a 12. huius. b 9. huius. c 8. huius. d 1. huius*

Aliter.

Schematismus 2. Fig. 15. c. 11. huius.

Esto Cylindri circularis portio DBCE, cujus altitudo BC, sectio maxima ABC. Oporteat demonstrare portionem esse ad sphæram baseos, ut BC ad circumferentiam DCEY.

Inscribatur portioni corpus ex pluribus triangularibus prismatis compositum, ut factum suprà *c* in secunda demonstratione. Similiter & sphæræ baseos Cylindri inscribantur, suprà se mutuo positi ex rectangulis HA, MI, RN, circa DA revolutis procreati.

Triangulum rectangulum IKH, sive AGF est ad *f* circulum radij IH, ut KH ad peripheriam radij IH; hoc est ut BC *g* ad circumferentiam DCEY. Sed *h* prisma HIAFGK est ad Cylindrum productum à rectangulo HA revolutio circa DA, ut basis, nempè triangulum IKH ad basim nempè, circulum radij IH, cùm utraque solida communem habeant HF altitudinem, constituta nimirùm inter duo parallela plana IKH, & AGF. Ergo prisma HIAFGK est ad Cylindrum factum à rectangulo HA, circa DA circumacto, ut BC ad circumferentiam DCEY. Eodem discursu ostendam prismata omnia reliqua MNILOP, RSNQTV singula esse ad reliquos Cylindros singulos, quos produeunt rectangula MI, RN circa DA circumacta, ut BC ad circumferentiam DCEY. Ergo *i* omnia prismata simul sumpta, sunt omnes Cylindros simul sumptos, ut BC ad peripheriam DCEY. Atque hoc semper eveniet, quotcumque prismata portioni DCEY, & Cylindros æquali numero sphæræ inscripserimus. Quare cùm ejusmodi inscriptionibus tam *a* portio quàm *b* sphæra tandem exhauriatur; ipsa quoque portio erit ad sphæram baseos, ut BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat demonstrandum. *f 2. huius. g 7 huius. h 6. huius. i Ex. 12 5. a 10. huius. b Archim. 21. conoid.*

Hoc theorema cùm universale sit, etiam ij, hujus complectitur: æqualitati nihilominus, qua suam semper in demonstrando facilitatem & elegantiam habet, visum fuit eam concedere prærogativam, ut seorsim exhiberetur.

PROPOSITIO XIV.

Præcedens theorema per heterogenea demonstratur.

Schematismus 2. Fig. 15.

PORtio & sphæra secentur quotcumque planis ad portionis sectionem maximam parallelis, in portione producentur triangula IKH, NPM, &c. in sphærâ circuli, quorum radij IH, NM, &c. Jam ostendi in præced. demonst. secundâ singula triangula esse ad singulos circulos ut BC ad peripheriam DCEY. Quare cùm hoc semper eveniat, erit portio ad sphæram, ut BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat demonstrandum.

Aliter.

Schematismus 2. Fig. 14.

Eadem veritas etiam sic probabitur. Ducantur quotcumque rectæ HL, NP, &c. ad diametrum DE parallelæ; per quas ductis planis ad basim DCE rectis, portionem seca. Sectiones in portione factæ, erunt rectangula HGKL, NRTP, &c. Eædem deinde parallelæ HL, NP, &c. circa DE circumactæ conficient in sphærâ superficies Cylindricas, quasi totidem curvas ipsius sphæræ sectiones, planis sectionibus portionis HGKL, NRTP, &c. respondentes. Quia verò rectangulorum ac superficierum Cylindricarum communes sunt altitudines HL, NP, &c. *e* erunt rectangula ad superficies Cylindricas, ut bases ad bases: hoc est ut GH, RN, &c. ad peripherias radiorum HF, NZ. &c. hoc est, ut BC ad *a* circumferentiam DCEY. Cùm igitur hoc semper eveniat, erit quoque portio ad sphæram ut BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat propositum.

e Demonstrabitur I. 1. prop. 4. independenter ab hoc theoremate.
a 27. huius.

Corollarium I.

Ad duas præcedentes.

Schematismus 2. Fig. 14.

Si portio secetur planis HGKL, NRTP, &c. rectis basi DCE, & transeuntibus per lineas HL, NP, æquidistantes diametro DE: erunt portionis segmenta HGBKLCH, NRBTPCN, &c. ad solida sphærica, quæ à planis circularibus HCL, NCP, &c. circa axem DE circumactis, procreantur, ut totius portionis altitudo BC ad circumferentiam DCEY.

Item portionis segmenta HDGKEL, NHGRTPLK, &c. sunt ad sphærica solida, quæ fiunt à planis DHLE, NHLP, &c. circa DE revolutis, ut BC ad circumferentiam DCEY.

Demonstratio eadem est cum 1. & 4. *prop.* 13.

Corollarium II.

Segmenta portionis & sphæræ abscissa planis ad maximam sectionem ABC parallelis, sunt etiam inter se, ut BC portionis altitudo ad basis peripheriam DCEY.

Demonstrabitur discursu demonstrationis secundæ ac tertiæ præcedentis huc translato.

PROPOSITIO XV.

Schematismus 2. Fig. 14. & 15.

Esto Cylindri Elliptici recti portio DBCE, per B punctum in latere, & per baseos axem alterutrum DE abscissa. Portio est ad sphæroïdem, quæ fit ab Ellipticâ base DCE circa axem DE circumacta, ut BC portionis altitudo est ad circuli circumferentiam, cuius diameter est axis alter CY.

DEmonstrabitur eodem modo, quo propositio 13. & 14. Figuræ quoque compendij gratiâ, eædem adhibentur plano DCEY, quod prius circulum referebat, jam Ellipsim repræsentante.

Corollarium I.

Schematismus 2. Fig. 14.

Si portio Cylindri Elliptici, & sphærois baseos secentur planis HGKL, NRTP, &c. rectis ad basim DCE, & transeuntibus per lineas HL, NP. &c. diametro DE parallelas: erunt portionis segmenta HGBKLCH, NRBTPCN, &c. ad sphæroidica solida, quæ procreantur à planis Ellipticis HCL, NCP circa DE in orbem ductis, ut BC altitudo portionis totius ad circularem circumferentiam axeos CY.

Similiter portionis segmenta DGHLEK, HGRNPLKT, &c. ad sphæroidica solida quæ fiunt à planis Ellipticis DHLE, HNPL, &c. circa DE in orbem ductis, sunt ut BC ad circumferentiam axeos CY.

Demonstrabitur discursu primæ & quartæ demonstrationis *prop.* 13. huc translato.

Corollarium II.

Schematismus 2. Fig. 15.

Segmenta portionis ac sphæroïdeos planis ad sectionem portionis maximam ABC parallelis abscissa, eam quoque inter se rationem habent, quam portionis altitudo BC ad circumferentiam circuli, cujus radius est axis alter CY.

Demonstratio eadem erit cum demonstratione 2. & 3. *prop.* 13.

PROPOSITIO XVI.

Schematismus 3. Fig. 16.

Cylindri recti parabolici, sive alterius cujuscumque ex DCE cujusvis planæ figuræ axem AC habentis, recto ductu procreati data sit portio DBCE per punctum B, & ordinatim axi applicatam DE abscissa. Portio DBCF est ad solidum rotundum baseos, quod nimirùm fit à basi DCE circa DE ordinatim applicatam in orbem ducta, ut BC portionis altitudo ad circumferentiam circuli, cujus semidiameter est axis AC.

DEmonstrabitur ut 13. & 14. *huius.*

Coroll-

Corollarium I.

Schematismus 3. Fig. 16. Si portio DBCE secetur planis HGKL, NRTP, &c. rectis basi DCE & transeuntibus per lineas HL; NP parallelas ad DE: erunt portionis segmenta HGBKLCH, NRBTPCN, &c. ad rotunda solida quæ à planis HCL, NCP, &c. circa DE revolutis, fiunt, ut BC portionis altitudo ad peripheriam radij AC.

Pari modo segmenta HDGKEL, NHGRTPLK, &c. sunt ad solida rotunda quæ fiunt à planis DH-I.E, HNPL, &c. circa DE circumactis, ut BC ad peripheriam radij AC.

Demonstratio eadem cum 1. & 4. *prop.* 13.

Corollarium II.

Schematismus 3. Fig. 16. Si portio & solidum rotundum baseos planis secentur Xπβ, ZRN, &c. ad maximam portionis sectionem ABC parallelis, erunt portionis segmenta ad segmenta rotundi solidi, ut BC portionis altitudo ad circumferentiam circuli, cujus radius est axis baseos AC.

Demonstratio eadem est cum demonstratione secundâ & tertiâ *prop.* 13.

PROPOSITIO XVII.

Schematismus 3. Fig. 17. **Cylindri recti Parabolici, aut hyperbolici, sive alterius cujuscumque, ex figuræ nimirùm cuiusvis curva & recta linea comprehensæ, YDC, recto ducto procreati, data sit portio ACBD, per figuræ axem AD & punctum B abscissa.**

Portio est ad solidum à basi CDA circa axem AD in orbem ducta genitum (quod quidem si basis parabola aut hyperbola est, conoïs erit parabolica aut hyperbolica) ut CB portionis altitudo ad peripheriam circuli, cuius radius est ordinatim ad axem posita AC.

Dividatur in aliquot æquales partes ordinatim axi applicata CA, perque sectionum puncta K, I, H ductis ad axem AD parallelis, inscribantur portionis basi rectangula ZI, VH, TA; super quibus portioni inscribantur prismata recta, ut factum *prop.* 11. *demonst. primâ*, quorum primi basis erit rectangulum triangulum AEH; reliquorum verò trapezia rectangula, HEFI, IFGK.

Deinde figura ADC cum inscriptis sibi rectangulis circa axem AD in orbem ducatur. Hac revolutione inscribentur solido rotundo baseos Cylindrica solida, quorum primum à rectangulo T A genitum erit Cylindrus; reliqua à rectangulis VH, ZI producta, Cylindri cavi, quorum bases sunt plani annuli RVα, SZβ, qui à rectis VR, ZS, sive ij qui à rectis IH, KI, revolutione supradictâ generantur.

Quoniam triangulum AEH, angulum habet rectū ad H, ita erit ad circulum radii AH, ut *a* EH ad circumferentiam radij AH. Quia verò prismatis AEH-TNQ, & Cylindri à rectangulo TA facti, communis est altitudo HT; erit prisma ad Cylindrum, ut *b* triangulum AEH basis prismaris, ad circulum radij AH, basim Cylindri; hoc est (quemadmodùm jam ostendi) ut EH ad circumferentiam radij AH; hoc est ut BC ad circumferentiam radij AC. Ulteriùs quoniam radiorum AH, AI peripheriæ sunt inter se, ut radij AH ad AI; sitque etiam EH ad FI, ut AH, AI; erunt trapezij rectanguli EFIH perpendicula EH, FI radiorum AH, AI peripheriis proportionales. Trapezium igitur HEFI est *c* ad planum annuli latitudinis HI (est hic par annulo RVα) ut maximum trapezij perpendiculum FI est ad maximam annuli peripheriam, cujus radius est AI; hoc est ut BC ad peripheriam radij AC. Quoniam verò prismatis HEFIVM-OR, & cavi Cylindri a rectangulo VH descripti, communis est altitudo IV; erit *b* prisma ad cavum Cylindrum, ut trapezium HEFI basis prismatis, ad annulum latitudinis HI, basim Cylindri cavi; hoc est (quemadmodùm jam demonstravi) ut BC ad peripheriam radij AC. Pari modo idipsum ostendam de reliquo prismate IFGKZLPS, & reliquo Cylindro cavo descripto à rectangulo ZI.

a 1. huius. b 6. huius. c 3 huius. h 6. lib. 1. huius.

Igitur omnia prismata portioni ACBD inscripta, simul sumpta, sunt ad omnes Cylindros cavos, rotundo baseos solido inscriptos, simul sumptos, ut BC ad circumferentiam radij AC. Atque hoc semper continget, quotcumque prismata portioni & Cylindrica pari numero solida, rotundo baseos solido inscripserimus. Quare cùm insuper tam *d* portio quàm rotundum *e* basis solidum per inscriptiones illas tandem exhauriantur; etiam portio erit ad rotundum basis solidum, ut BC ad peripheriam radij AC. Quod erat demonstrandum.

d 9 huius. e 8. huius. 11. huius.

Aliter.

Schematismus 3. Fig. 18. Axis DA baseos in partes aliquot æquales dividatur, & per sectionum puncta S, N, I, ductis parallelis ad ordinatim positam AC, basi rectangula HA, MI, RN, superque iis portioni triangularia prismata inscribantur AFGKHI, &c. ut factum *prop.* 11. *in secundâ demonstratione*. Eadem deinde rectangula circa axem AD in orbem ducta, inscribanr rotundo baseos solido Cylindros sibi mutuo superimpositos. Atque hæ inscriptiones in infinitum continuentur. Demonstrabimus eodem discursu, quo usi sumus *prop.* 11. *hujus in secundâ demonstratione*, omnia prismata portioni inscripta, quibus ipsa tandem *a* portio exhauritur, ad omnes Cylindros, quibus tandem *b* rotundum baseos solidum exhauritur, eam semper habere rationem, quàm BC ad circumferentiam circularem radii AC. Ergo portio est ad solidum rotundum baseos, *c* ut BC ad circularem peripheriam radij AC. Quod erat demonstrandum.

a 10 huius. b Archim. 21. conoid. c 1. huius.

Per indivisibilia, sive heterogenea id ipsum ostendemus eodem modo, quo id factum *prop.* 14.

Corollarium I.

Schematismus 3. Fig. 17. Iisdem positis si portio ACBD secetur planis ad basim rectis TNEH, VMFI, &c. transeuntibus per rectas TH, VI, &c. parallelas axi AD; erunt portionis segmenta TNBCHE, VMBCIF, &c. ad solida quæ fiunt à planis TCH, VCI, &c. circa AD in orbem ductis, ut BC ad circumferentiam radij AC. Demonstratio eadem erit cum demonstratione primâ.

Similiter segmenta DTNEHA, TNMVIFEH, &c. sunt ad solida quæ fiunt à planis DTH, TVIH, &c. circa AD in orbem ductis, ut BC ad circumferentiam radij AC. Demonstratio eadem cum primâ hujus propositionis.

Corollarium II.

Iisdem positis si portio ACBD & rotundum baseos solidum secentur planis ad sectionem maximam ABC parallelis IKH, NPM, &c. erunt segmenta portionis ad segmenta rotundi soli, ut BC ad circumferentiam radij AC. Demonstratio eadem cum demonstratione secundâ hujus propositionis.

Schematismus 3. Fig. 18.

PROPOSITIO XVIII.

Cylindricæ portiones, (ADFCE, ADBCE) eamdem habentes basim (DCE) ex quocumque recto Cylindro sint abscissæ; (sive is Circularis fuerit, sive Ellipticus, sive Parabolicus, sive hyperbolicus, sive quicumque alius, ex figuræ cujusvis planæ, axem habentis, recto ductu procreatus) eam inter se rationem habent quam altitudines (CB, CF.)

Schematismus 3. Fig. 19. 20.

Portio DFCE est ad solidum rotundum baseos (quod quidem, si Cylindrus Circularis fuerit, est sphæra; si Ellipticus, est spheroides; si Parabolicus aut hyperbolicus, est conoïs Parabolica aut hyperbolica) ut FC altitudo portionis ad circumferentiam radij AC, ut *prop.* 13. 15. 16. 17. demonstratum est. Rursum per easdem propositiones idem rotundum basis solidum est ad portionem DBCE, ut circumferentia radij dicta AC est ad portionis altitudinem CB. Igitur ex æquo portio DFCE, est ad portionem DBCE, ut altitudo FC ad altitudinem BC. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Segmenta igitur solida DCE2D, D2EFD, DF3D segmentis linearibus altitudinis C2, 2F, F3, sunt proportionalia.

PARS SECUNDA.

PROPOSITIO XIX.

Datus sit conus rectus CDF productus à triangulo rectangulo CAD, circa AD circumacto. Data item sit super eodem triangulo, ut basi pyramis CADB, unum latus BC rectum habens basi.

Pyramis est ad conum ut CB altitudo pyramidis ad baseos conicæ circumferentiam GMFN.

Schematismus 3. Fig. 21.

Ex triangulo CAD fac rectangulum CADK. Hoc circa DA circumactum efficiet Cylindrum rectum KF coni CDF *a* triplum. Ducatur BG parallela & æqualis ipsis AD, CK, jungaturque rectæ AB, DG, KG. Eritque factum prisma ADKCBG super rectangulo ADKC, cujus parallela plana sunt triangula DGK, ABC. Super triangulo CAD aliud constitue prisma ADCBHE, cujus adversa plana sint ADC & HEB. Quoniam triangulum ABC *b* rectangulum est, habetque pro basi radium AC, erit ad circulum ACMFN, ut BC, *c* altitudo trianguli ad circumferentiam CMFN. Atqui prisma AD KCBG est ad Cylindrum KF, ut *d* basis prismatis, triangulum nempè ABC, ad basim Cylindri circulum nempè ACMN, cùm eadem sit utriusque solidi altitudo CK. Ergo prisma ADKCBG est ad Cylindrum KF, ut BC ad circumferentiam CMFN. Est autem prisma ADCBEH æquale *e* prismati ADKCBG. Ergo & prisma ADCBEH est ad Cylindrum KF, ut BC ad circumferentiam CMFN. Quare cùm pyramis ADCB tertia sit *f* pars prismatis ADCBHE, & conus CDF pars quoque sit tertia Cylindri KF; etiam pyramis erit ad conum ut BC ad circumferentiam CMFN. Quod erat demonstrandum.

a 10. *elem* 12.
b *Ex hyp.*
c 2. *huius.*
d 6. *huius.*
e 40. *elem.* 11.
f *Corol.* 7. *undecimi.*

PROPOSITIO XX.

Omnis portio Cylindri circularis recti per centrum baseos & punctum in latere abscissa, maximæ pyramidis sibi inscriptæ dupla est.

Data sit portio DBCE; cujus basis DCE; sectio maxima ACB; altitudo CB. Inscriptum basi sit maximum triangulum DCE. Demonstrandum est portionem duplam esse pyramidis DECB, cujus basis est triangulum DCE, altitudo CB.

Schematismus 3. Fig. 22.

Si basis DCE cum inscripto sibi triangulo, quod ex duobus triangulis rectangulis CAD, CAE componitur circa diametrum DE in orbem ducatur, inscribentur sphæræ baseos duo coni recti CDF, CEF, communem habentes basim CMFN; quorum primus CDF fit à triangulo CAD, alter CEF à triangulo CAE, pyramis autem DECB à sectione maximâ ABC in duas secatur pyramides, quarum latus unum commune BC basi rectum est. Igitur pyramis DACB est ad *a* conum CDF, ut BC ad circumferentiam CMFN, sive circumferentiam DCEF. Pari modo *b* pyramis AECB est ad conum CEF, ut BC ad circumferentiam CMFN, sive DCEF. Tota igitur pyramis DECB, est ad totum rhombum conicum DCEF, ut BC ad circumferentiam DCEF. Atqui etiam portio ipsa DBCE est ad sphæram baseos DCEF, ut BC ad peripheriam DCEF. Ergo portio est ad sphæram, ut pyramis DECB ad rhombum: & alternatim portio est ad pyramidem, ut sphæra ad rhombum. Atqui *c* sphæra rhombi dupla est. Ergo & portio pyramidis dupla erit. Quod fuit demonstrandum.

a *Præced.*
b *Ibid.*
c *Archim. l.* 1. *sph.* p. 31.

Corollarium.

Ex hoc theoremate habetur cubatura portionis Cylindricæ FCGK. Qui reliquam igitur Cylindri partem FKBHG cubaverit, totum Cylindrum, ac proinde & sphæram ad rectilineum corpus revocabit.

Schematismus 1. *Fig.* 2.

PROPOSITIO XXI.

Esto sphæræ segmentum COED abscissum plano ad diametrum EG recto, altitudinem habens EB. Sit autem segmento inscriptus conus DEC.

Segmentum est ad conum, ut BG, cum radio AC ad BG.

Schematismus 4. Fig. 23.

Fiat BF ad BE, ut BG cum AG, est ad BG, conus CFD æquatur segmento *a* sphærico COED. Sed

a *Archim. l.* 2. *de sphæ.* p. 2.

b 14. elem. 11.

Sed *b* conus CFD est ad conum CED, ut altitudo BF ad altitudinem BE; hoc est, per constructionem ut BG cum AG ad BG. Ergo segmentum COED est ad conum CED, ut BG cum AG ad BG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Schematis- mus 4. Fig. 24.

Cylindri recti circularis portio DBCE & sphæra baseos sint plano ad maximam sectionem ABC parallelo sectæ, quod in portione produeat triangulum GHK; in sphæra circulum HILP.

Segmentum portionis minus GHODNKH est ad pyramidem sibi inscriptam (cujus nimirum basis est triangulum DHG, altitudo HK; eadem nempè quæ segmenti portionis) ut GE cum radio AE ad GE.

Pari modo segmentum portionis GHCEMBKGH est ad inscriptam sibi pyramidem (cuius basis triangulum AEG altitudo HK) ut GD cum AD est ad GD.

Primam partem sic demonstro.

Basis DOHG cum inscripto triangulo rectangulo DGH circa DG circumagatur. Hac revolutione basis DOHG efficiet segmentum sphæræ, cujus basis HILP recta est axi DE; Triangulum verò producet conum rectum HDL, segmento sphærico inscriptum. Per ea quæ suprà *a* demonstravimus, pyramis DGHK est ad conum HDL, ut KH est ad baseos circumferentiam HILP, cujus radius est GH; hoc est *b* ut BC altitudo portionis datæ ad circumferentiam DCEF radio AC descriptam; hoc est, *c* ut segmentum DNKHG ad segmentum sphæricum HODQL. Igitur permutando, ac invertendo segmentum DNKHG est ad pyramidem DGHK, ut segmentum sphæricum est ad conum. Atqui *d* segmentum sphæricum est ad conum, ut GE cum AE ad GE. Ergo etiam segmentum DNKHG est ad pyramidem DGHK, ut GE cum AE ad GE. Quod erat demonstrandum.

a 19. huius. b 7. huius c Corol. 2. p. 14. huius. d 21. huius.

Alteram verò partem sic demonstrabimus.

Tota portio DBC est ad totam basis sphæram, *e* ut BC ad circumferentiam DCEF: item portionis segmentum GHODNKH est ad segmentum sphæræ HODQL, ut *f* BC ad peripheriam DCEF. Ergo & segmentum portionis reliquum GHCEMBKGH est ad reliquum sphæræ segmentum LFECH, ut BC ad peripheriam DCEF. Post hæc totam primæ partis demonstrationem si huc transtuleris, propositum concludetur.

e 13 huius. f Corol. 2. p. 14. huius

Corollarium I.

Ex his habetur cubatura segmentorum portionis, quæ resecantur planis sectioni maximæ parallelis.

Corollarium II.

Ducatur in portionis basi recta quævis HL, per quam ducto plano HGKL abscindatur à portione DBCE solidum HGBKLCH. Etiam hoc cubabitur ex jam demonstratis. Cubata enim est tota portio DBCE, Cubata item *a* sunt segmenta DGHF, & IKLE. Ergo reliquum FHGBKLI cubatum etiam est; à quo si auferas solidum rectilineum FGHKIL, quod supererit, solidum HGBKLCH etiam innotescet.

a Schematismus 2. Fig. 14. a Corol. præced.

PROPOSITIO XXIII.

Sphæroïs longa (CLXM) ad sphæram ambientem (CAXB) duplicatam habet rationem minoris axis (LM) ad majorem (CX.)

Schematismus 4. Fig. 25.

Axes sint CX, LM, per quos sectione facta exhibeatur Ellipsis LCMX & circulus ABCX Axe CX majori in quotcumque æquales partes diviso in punctis Z, ductisque per ea rectis ER α β, GP α β, IN α β, parallelis axi alteri LM: quo producto in A & B, inscribantur circulo rectangula EF, GH, IK, Ellipsi autem rectangula RS, PQ, NO. Quibus in orbem actis circa axem CX, inscribetur tam sphæroidi, quàm sphæræ sphæroidem ambienti corpus ex multis Cylindris supra invicem positis conflatum. Jam verò quia AB, Iβ, Gβ, Eβ, sunt lineis LM, Nα. Pα, Rα. *b* proportionales, etiam quadrata AB, Iβ, Gβ, Eβ, quadratis LM, Nα, Pα, Rα; ac proinde & circuli diametrorum AB, Iβ, Gβ, Eβ, circulis diametrorum LM, Nα; Pα, Rα, proportionales sunt. Sed Cylindri sphæræ inscripti sunt ad Cylindros inscriptos sphæroidi, ut bases prædicti nimirùm circuli. Ergo Cylindri sphæræ inscripti, sunt Cylindris inscriptis sphæroidi proportionales. Quare ut unus Cylindrus IK ad unum NM; hoc est ut circulus Iβ ad circulum Nα; hoc est, ut circulus AB ad circulum LM, ita omnes Cylindri IK, GH, EF, simul sumpti, ad omnes Cylindros NO, PQ, RS, simul sumptos. Pari modo ostendam, quoteumque tandem Cylindros sphæroidi & sphæræ inscripseris, inscriptos sphæræ simul sumptos semper fore ad inscriptos sphæroidi simul sumptos, ut circulus AB ad circulum LM. Cùm igitur per hujusmodi Cylindrorum inscriptiones tam sphæra quàm sphæroides exhauriantur, liquet ipsam *b* quoque sphæram esse ad sphæroidem ut circulus ATB ad circulum LVM, hoc est in duplicata ratione AB, sive CX, ad LM. Quod erat demonstrandum.

b Demonst. Archim. de conoid. Archim. conoid. p. 21. b 1. huius.

Corollarium.

Sphæroïs longa est ad sphæram sibi inscriptam, cujus nimirum diameter est axis minor LM, ut axis maior CX, ad axem minorem

Schematismus 4. Fig. 25.

Ratio enim sphæræ ACBX sphæroidem ambientis ad sphæram diametri LM est triplicata rationis CX ad LM; & ratio sphæræ ACBX ad sphæroidem, ut jam ostendimus, est duplicata rationis CX ad LM. Ergo ratio sphæroidis ad sphæram, cujus diameter LM, ea est quæ CX ad LM.

PROPOSITIO XXIV.

Schematism. 4. Fig. 26.

Sphæroïs lata quæ nimirùm fit ab Ellipsi ACBX circa minorem axem CX circumducta, ad inscriptam sibi sphæram LCMX duplicatam habet rationem maioris axis ad minorem.

Constructio & Demonstratio eadem erit quæ præcedentis. Sunt enim rursus rectæ EZ, GZ, IZ, AD rectis RZ, PZ, NZ, LD proportionales.

Corollarium.

Schematism. 4. Fig. 26.

Sphæroïs lata XACB est ad sphæram se ambientem AYBθ ut minor axis CX ad majorem AB.

Sphæra AYBθ habet ad sphæram LCMX rationem triplicatam rationis AB ad LM, sive CX: & sphærois lata XACB habet ad sphæram LCMX rationem duplicatam rationis AB ad CX, ut in hac propositione ostensum est. Ergo sphæra ambiens AYBθ est ad sphæroidem latam ACBX, ut AB major axis ad CX axem minorem.

PROPOSITIO XXV.

Sphæroïs sive longa, sive lata maximi rhombi conici inscripti dupla est.

Est Archimedis 29. de Conoid. & sphæroidibus. Nos aliter & (nisi fallor) clariùs ac breviùs sic demonstramus.

Data primùm sit sphærois longa, quam genuerit Ellipsis XLNCM circa axem majorem CX in orbem ducta; cui inscriptus sit rhombus conicus maximus LCMX.

Schematism. 4. Fig. 25. a 23. huius.

Sphæroidi circumscribatur sphæra ACBX, cui maximus etiam inscribatur rhombus conicus ACBX. Sphæra est ad sphæroidem in ratione duplicatâ *a* ejus quam habet CX major axis, sive AB, ad minorem axem LM. Sed etiam conus ACB est ad conum LCM, ut circulus ATB ad circulum LVM, hoc est in duplicatâ ejus quam AB habet ad LM. Ergo sphæra est ad sphæroidem, ut ACB conus ad conum LCM. Igitur permutando, ut sphæra ACBX est ad conum ACB, sic sphærois est ad conum LCM. Ac proinde ut sphæra est ad rhombum ACBX, sic sphærois est ad rhombum LCMX. Quare cùm sphæra *a* rhombi ACBX sibi inscripti dupla sit, etiam sphærois rhombi LCMX sibi inscripti dupla erit. Quod erat demonstrandum.

Archim. sph. l. 1. prop. 13.

Schematism. 4. Fig. 26.

Data deinde sit lata sphærois genita ab Ellipsi AECBX circa minorem axem CX circumducta, cui inscriptus sit rhombus conicus ACBX.

Sphæroidi inscribatur sphæra LRCMX, & sphæræ rhombus conicus LCMX. His constructis ratiocinaberis, ut in primâ parte. Sed pro 23. *huius* citanda est propositio 24.

PROPOSITIO XXVI.

Omnis portio Cylindri Elliptici recti per alterutrum baseos axem & latus abscissa, maximæ pyramidis sibi inscriptæ dupla est.

Schematism. 4. Fig. 27.

Data sit quævis Cylindri Elliptici portio BECD, cujus altitudo DE: pyramidum autem ipsi inscriptarum maxima sit BDEC. Sphæroidi baseos, quam nimirùm producit Ellipsis BDCP circa axem BC in orbem ducta, inscriptus sit rhombus conicus maximus BPCD. Pyramis AECD, cujus basis est rectangulum triangulum CAD, altitudo DE, est ad conum PCD, qui ex ejusdem trianguli ADC circa AC in orbem acti revolutione producitur, *b* ut DE ad circumferentiam DRPQ. Tota igitur pyramis PDCE est ad totum rhombum, ut DE ad circumferentiam DRPQ. Atqui etiam Cylindri Elliptici portio BEDC est ad sphæroidem baseos, quam producit Ellipsis BPCD circa axem CB in orbem ducta, ut DE, *c* ad circumferentiam DRPQ radio AD descriptam. Portio igitur est ad sphæroidem, ut pyramis ad rhombum: & permutando, portio est ad pyramidem ut sphærois ad rhombum. Sed *a* sphærois rhombi dupla est. Ergo etiam portio pyramidis dupla est. Quod erat demonstrandum.

b 19. huius. c 15. huius. a præced.

Corollarium.

Ex hoc theoremate habetur cubatio portionis à Cylindro Elliptico abscissæ. Qui reliquam cubabit Elliptici Cylindri partem, dabit quadraturam.

PROPOSITIO XXVII.

Schematism. 4. Fig. 28.

Cylindri recti Elliptici portio per axem CB & E punctum in latere abscissa, CEDB, & baseos sphærois sectæ sint plano ad sectionem portionis maximam AED parallelo, quod in portione producat triangulum FHG; in sphæroïde circulum QGNK segmentum portionis unius CLHGF, cujus basis est pars Ellipseos FCOG, ita se habet ad pyramidem sibi inscriptam GHCF (cujus basis est triangulum CGF, altitudo GH eadem quæ segmenti CLHGF) ut FB cum radio AB ad FB.

Segmentum verò maius FGHEDMB, cuius basis est Ellipseos pars FGDB, se habet ad inscriptam sibi pyramidem BGAF, ut FC cum AC ad FC.

Rectangulum triangulum CFG cum Elliptico segmento COGF circumagi intelligatur circa CF. Segmentum Ellipticum COGF describet segmentum sphæroidicum, cujus basis GNKQ recta est axi CB; triangulum verò CFG conum rectum gignet GCK. Pyramis CFGH est ad conum GCK, ut *b* pyramidis altitudo HG est ad peripheriam GNKQ, cujus radius est FG; hoc est ut portionis *c* altitudo ED ad circumferentiam radij AD; hoc est ut *a* portionis seg-

b 19 huius. c 7 huius. a Coroll. 2. p. 15. huius.

segmentum CLHFGOC ad segmentum sphæroidicum GNKCOG. Igitur permutando pyramis CFGH est segmentum CLHFGOC, cui inscribitur, ut conus GCK est ad segmentum sphæroidicum GNKCOG. Atqui hoc *b* est ad conum ut FB cum AB ad FB. Ergo segmentum CLHFGOC est ad pyramidem, ut FB cum AB ad FB. Quod erat primum.

b *Archim. conoid. p.* 31.

Tota deinde portio CEDB est ad totam sphæroidem baseos *c* ut ED ad peripheriam diametri PD: Portionis quoque segmentum CLHGF est ad segmentum sphæroidicum GOCK, ut ED ad *d* peripheriam diametri PD. Ergo & segmentum reliquum FGHEMB est ad reliquum segmentum sphæroidicum GDBPK, ut ED ad peripheriam diametri PD. Tota deinde primæ partis demonstratio huc transferatur: sed pro Archimedis 31, jam assumetur 33.

c 15. *huius.*
d *Corol.* 2. *p.* 15. *huius.*

Corollarium.

Ex his habetur cubatura segmentorum portionis Ellipticæ resectorum planis sectioni maximæ parallelis.

PROPOSITIO XXVIII.

Schematismus 4. *Fig.* 29.

Data sit Ellipsis BCDZ, in qua binæ dentur diametrorum conjugationes BD, CZ, & HI, βP. Tum AB, AH in æquè multas æquales partes sectis, per sectionum puncta ordinatim applicentur EL, FM, GS, KX.

Dico: LE est ad GS, ut perpendicularis inter GS. AP interjecta est ad perpendicularem inter EL, AC; & FM, est ad KX, ut perpendicularis inter GS, KX, est ad perpendicularem inter EL, FM.

PRoducatur LE in R, SG in Y. Quoniam ex hyp. diametri AB, AH, proportionaliter sectæ sunt in E, & G, ab ordinatim RL, YS applicatis, erunt *a* segmenta Elliptica RBL, & YHS æqualia. Quare, cùm segmenta EBL, GHS sint *b* priorum semisses, æqualia erunt. Deinde ducantur ordinatim LOX, MT, SQD, XV. Quoniam ex hypothesi DB, IH, proportionaliter sunt in E, & G, item in A divisæ, patet *c* rectangulum DAB, esse ad rectangulum DEB ut rectangulum IAH ad rectangulum IGH. Sed ut DAB ad DEB, sic *d* quadratum AC ad quadratum EL, hoc est ad quadratum AO; & ut IAH, ad IGH, sic *e* quadratum AP ad quadratum GS, hoc est AQ. Ergo quadratum AC ad quadratum AO, ut quadratum AP ad quadratum AQ. Ergo etiam diametri AC & AP in O & Q, ab ordinatim applicatis LX, SD, proportionaliter secantur. Ergo segmenta *e* Elliptica LCX, SPD æquantur. Ergo etiam *f* eorum semisses LCO, SPQ, æquales sunt. Sunt autem etiam segmenta *g* tota ABC, AHP æqualia, cùm singula sint quarta pars Ellipseos. Ergo reliqua AOLB, AQSH æqualia sunt. Quare cùm etiam suprà ostensum sit segmenta EBL, GHS æquari; reliqua parallelogramma EO, GQ æqualia erunt. Igitur ut EL, ad GS, ita reciprocè altitudo parallelogrammi GQ ad altitudinem parallelogrammi EO, hoc est distantia ipsarum GS, AP, ad distantiam ipsarum EL, AC. Quod erat primum.

a *Greg. à S. Vincentio l.* 4 *p.* 53.
b *idem l.* 4. *p.* 45.
c *Ex.* 23. *sexti elem.*
d *Apollon. l.* 1. *consc. p.* 21.
e *Greg. à S. Vinc. l.* 4. *p.* 53.
f *idem l.* 4. 45.
g *Idem l.* 4. *p.* 46.

Ulteriùs quia DB, IH, proportionaliter secantur in A, F, & in A, K; erit DAB ad DFB, ut *h* IAH ad IKH. Sed ut DAB ad DFB, sic quadrat. AC ad quadrat. FM, hoc est AT; & ut IAH, ad IKH, sic quad. AP, ad quad. KX. hoc est AV. Ergo quad. AC est ad quadrat. AT, ut quad. AP, ad quadrat. AV. Ergo AT ad AC ut AV ad AP. Sed (ut ostendi suprà) AC, est ad AO, ut AP ad AQ, Ergo ex æquo AT est ad AO ut AV ad AQ. Ergo parallelogrammum OE, est ad parallelogr. TE, ut parallelogr. QG, est ad VG parallelogrammum.

h *Ex.* 23. *elem* 6.

Quare cùm OE, QG jam ostenderim æqualia esse, etiam TE, VG, æqualia erunt. Ergo quoniam per hypothesim AE, ipsi EF, & AG ipsi GK æquales sunt; TE ipsi EM, & VG ipsi GX sunt æqualia. Ergo rursum ut FM est ad KX, ita reciprocè altitudo ipsius GX est ad altitudinem ipsius EM; hoc est distantia ipsarum GS, KX, ad distantiam ipsarum EL, FM. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XX[illegible]X.

Portiones æquè altæ, quæ ab eodem Elliptico Cylindro recto per latera, & quascumque baseos diametros abscinduntur, omnes inter se æquales sunt.

Schematismus 4. *Fig.* 30.

DEtur portio ABCX (facilitatis causâ exhibentur portionum semisses) ab Elliptico Cylindro resecta per C punctum aliquod in latere BC, & baseos Ellipticæ diametrum Xζ. Item ab eodem Cylindro abscissa sit portio FEDNA, per punctum D, in ND latere Cylindri, & per diametrum quamvis aliam Fφ: sintque æquales portionum altitudines BC, ND.

Oportet ostendere æquales esse portiones.

Diametri AX, AF in æquè multas æquales portiones dividantur, perque divisionum puncta ad AX, & AF ordinatim applicentur βS, αL, ωQ, λP: item ad AB, & AN ordinatim applica SG, LKψ, QM, PRϱ. Quoniam autem ABCX, FEDNA sunt portionum semisses, earum bases XAB, ANF, erunt quadrantes ellipseos, ac proinde tam AX, AB, quàm AF, AN, diametri *a* conjugatæ. Ex punctis S, L, Q, P, erigantur in Cylindricâ superficie lineæ SV, LT, QH, PE, quæ erunt rectæ plano XBF, quia ex hypothesi Cylindrus rectus est: ducantur deinde βV, αT; ωH, λE. Rursum ex punctis G, K, M, R, erige GZ, Kδ; Mθ, RO, & junge VZ, Tδ, Hθ, OE. His ita constructis, utrique portioni inscripta sunt duo prismata triangularia, ut facilè ostendetur ex *corollar. propos.* 7. *huius,* quemadmodum in demonstratione *propos.* 11. factum est.

a *Greg. à S. Vincent l.* 4. *p.* 46.

Quoniam igitur SV, QH, sunt rectæ plano XBF, etiam lineis βS, ωQ rectæ erunt; ac proinde SV, QH, sunt triangulorum βVS, ωHQ, altitudines. Iam quia *a* BA est ad GA, ut NA ad MA; etiam CB est ad ZG ut DN, ad θM. Quare cùm per hyp. CB, DN, sint pares etiam ZG, θM; hoc est *b* VS, HQ triangulorum altitudines pares erunt. Ergo triangula VSβ, HQω sunt, ut bases βS, ωQ. Sed βS est ad ωQ, ut *c* reciprocè distantia parallelarum AN, ωQ, ad distantiam parallelorum AB, βS, ergo triangulum VSβ, quod basis est prismatis SβVZGA est ad triangulum

a *Demonstratum est in praced.*
b *Corol.* 7. *huius.*
c *praced.*

HQω,

HQω, basim prismatis QωHθMA, ut reciprocè distantia ipsarum ωQ, AN, hoc est altitudo prismatis QωHθMA, ad distantiam ipsarum βS, AB; hoc est altitudinem prismatis SβVZGA. Prismata igitur æqualia sunt.

Deinde producatur Tϑ in ϖ; & EO, in ξ & jungæ puncta ψ, ϖ, ϱ, ξ. Facilè *d* ostendetur ϖψ ξϱ esse parallelas ad CB, DN, coni latera. Unde ostendetur ut prius, TL, EP. æquari. Rursum igitur triangulum TLω erit ad triangulum EPλ, ut Lω ad λP; hoc est *e* reciprocè ut distantia ipsarum λP, ωQ, ad distantiam ipsarum Lω, βS. Prismata igitur LωTϑKβ, PλEORω quia bases, & altitudines reciprocantur æqualia sunt. Eodem discursu quotcumque fuerint utrique portioni inscripta prismata æquè multa ostendam omnia omnibus esse æqualia. Quare cùm insuper utraque portio *f* hisce inscriptionibus exhauriatur, hæc illi æqualis *g* erit. Quod erat demonstrandum.

d Ex coroll. 7. huius. *e præced.* *f 10. huius.* *g 1. huius.*

PROPOSITIO XXX.

Omnis portio à Cylindro recto Elliptico per latus, & quamvis baseos diametrum abscissa, maximæ pyramidis sibi inscriptæ dupla est.

Schematismus 5. Fig. 31.

DAta sit portio FKGE abscissa per baseos diametrum quamvis FG, cujus conjugata sit CE. Ex E erigatur in superficie Cylindricâ EK, erit hæc portionis altitudo. Jungantur FE, GE, FK, GK.

Demonstrandum est portionem esse duplam inscriptæ pyramidis cujus basis est triangulum FEG, altitudo EK, eadem quæ portionis.

Ab eodem Elliptico Cylindro abscindatur per alterutrum basis axem AB, portio AHDB, altitudinem habens DH, ab alterius axis CD termino erectam, & parem altitudini EK. Erit portio AHDB, portioni FKGE æqualis per præcedentem. Ductis rectis AD, BD, AH, BH, portioni AHDB inscribatur pyramis maxima, cujus basis erit triangulum ADB, altitudo DH. Nunc, quoniam triangulum ADB est æquale *a* triangulo FEG, & altitudines DH, EK ex constructione sunt æquales; etiam pyramides utrique portioni inscriptæ æquales erunt. Quare, cùm etiam portiones ipsæ æquales sint, erit ut portio ad portionem, sic pyramis ad pyramidem, & permutando, ut portio AHDB ad inscriptam sibi pyramidem, ita portio FKEG ad pyramidem sibi inscriptam. Quare *b* cùm portio AHDB inscriptæ sibi pyramidis dupla sit, etiam portio FKEG dupla erit pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

a Ex. 73 l. 4. Gregorij à S. Vincentio. *b 26. lib. 1. huius.*

Sequens theorema nullo negotio deduci potest ex 23. Archimedis de conoidibus. Sed quia ejus demonstratio verissima quidem, illa (quod affectare videtur plerumque ille princeps Geometra) subobscura est, nos aliâ planè via propositionem nostram demonstrabimus: ex qua deinde Archimedæam in corollario deducemus.

PROPOSITIO XXXI.

Cylindrus duplex est conoidis parabolicæ habentis eamdem basim & altitudinem.

Schematismus 5. Fig. 32.

ESto Cylindrus AΦB, & conois parabolica EΦBC huic inscripta axis communis CD, per quem ducto plano sectiones erunt in Cylindro quidem parallelogrammum AB, in conoide verò parabola ECB. Ducantur rectæ EC, BC; & axe DC in aliquot æquales partes secto, per sectionum puncta Z, Y, X, ductis lineis ad EB, baseos diametrum parallelis, tam parabolæ quàm triangulo ECB, parallelogramma æquè alta inscribantur, ut figura monstrat. Quod si parallelogramma parabolæ inscripta circa axem CD circumagantur, inscribentur conoidi parabolico Cylindri supra invicem positi, & æquè alti, quos deinceps litteris IR, KQ, LP, designabimus.

His ita constructis, Cylindrus IR, est ad Cylindrum LP, ut circulus diametri Iϑ ad circulum diametri Lθ (sunt enim æquè alti Cylindri per constructionem;) hoc est ut quadratum Iϑ ad quadrat. Lθ; hoc est ut *a* CX ad CZ; hoc est ut Mλ ad OQ, hoc est ut parallelogrammum MV ad parallelogram. OS, sunt enim æquè alta. A primo igitur ad ultimum Cylindrus IR est ad Cylindrum LP, ut parallelogrammum MV ad parallelogr. OS. Eodem discursu ostendam Cylindrum KQ, esse ad Cylindrum LP, ut parallelogrammum NT ad parallelogrammum OS. Ergo *b* Cylindri IR & KQ simul sumpti sunt ad Cylindrum LP, ut parallelogramma MV, NT simul sumpta, ad parallelogrammum OS. Igitur componendo, Cylindri IR, KQ, LP, sunt ad LP, Cylindrum, ut parallelogramma MV, NT, OS, sunt ad parallelogrammum OS. Sed Cylindrus LP, est ad Cylindrum HB, ut parallelogrammum OS ad parallelogrammum HB, (est enim Cylindrus L P, ad Cylindrum HB, ut circulus radij LZ ad circulum radij HZ; hoc est in ratione duplicata LZ, ad HZ; hoc est, quia OZ, LZ, HZ, *c* proportionales sunt, ut OZ ad HZ; hoc est ut parallelogrammum OS ad parallelogrammum HB,) Cylindrus verò HB est ad Cylindrum AB, ut parallelogrammum HB, ad parallelogrammum AB. Igitur ex æquo Cylindri IR, KQ, LP, sunt ad Cylindrum AB, ut parallelogramma MV, NT, OS, sunt ad parallelogrammum AB: & invertendo, Cylindrus AB est ad Cylindros IR, KQ, LP, conoidi inscriptos, ut parallelogrammum AB est ad dicta parallelogramma ECB, triangulo inscripta. Atque hoc semper continget, quotcumque Cylindros conoidi, & parallelogramma triangulo inscripserimus. Cùm ergo Cylindri, si plures semper ac plures conoidi inscribantur, tandem desinant in ipsum conoidem; parallelogramma verò in triangulum ECB; erit quoque Cylindrus AB ad conoidem, ut parallelogrammum AB ad triangulum ECB

a 10 primi Conic. *b 24 5.* *c Greg. à S. Vincentio prop 42. de parabola, aliisque.* *a per constr.*

Cui hoc non sufficit, reducat ad impossibile hunc in modum. Si negas Cylindrum AB, esse duplum conoidis EΦCB, sive ita se habere Cylindrum ad Conoidem ut parallelogrammum AB ad triangulum ECB, erit vel in majori ratione, vel in minori. Sit primum in majori. Erit igitur ut Cylindrus AB ad conoidem, sic parallelogrammum AB ad planum quodpiam F, minus triangulo EBC. Inscribantur triangulo ECB tot parallelogramma, ut eorum summa minus deficiat à triangulo ECB, quàm planum F, ac proinde ut major sit quàm F. Totidem quoque Cylindri æquè alti inscribantur conoidi. Erit igitur (ut suprà ostendimus) Cylindrus AB ad Cylindros inscriptos conoidi, ut parallelogrammum AB, ad parallelogramma inscripta triangulo. Sed parallelogramma inscripta triangulo per constructionem majora *a* sunt plano F. Ergo Cylindrus AB ad Cylindros conoidi inscriptos est in minori ratione quàm para-

parallelogrammum AB ad planum F. Sed ponebatur Cylindrum AB, ad conoidem esse ut parallelogrammum AB ad planum F, ergo Cylindrus AB est ad Cylindros conoidi inscriptos in minori ratione; quàm ad ipsam conoidem: quod est absurdum. Pari discursu ostendam Cylindrum AB ad conoidem non esse in minori ratione quàm parallelogrammum AB sit ad triangulum ECB, liquet igitur Cylindrum AB, esse ad conoidem ut parallelogrammum AB, ad triangulum ECB. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc efficitur (quod Archimedes demonstrat *prop. 23. de conoid.*) conoidem parabolicam inscripti sibi coni sesqui alteram esse. Cùm enim conus sit ad Cylindrum AB, ut 3. ad 6. Cylindrus autem ad conum ECB, ut 6. ad 2. Erit ex equo conus ad conum ECB, ut 3. ad 2.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis portio Cylindri parabolici per axem baseos, & punctum in latere abscissæ pyramidis sibi inscriptæ, sesquialtera est.

Schematismus 5. Fig. 33.

Esto Cylindri parabolici portio DHFBCK per axem baseos DC, & lateris BF punctum F abscissa, cui inscripta sit pyramis maxima DCBF. Demonstrandum est portionem pyramidis sesquialteram esse.

Pyramis *a* DCBF est ad conum ADB maximum basi inscriptum, ut altitudo pyramidis FB, ad circumferentiam circuli diametro AB descripti. Sed etiam portio DHFBCK est ad conoidem parabolicam genitam ex basi BDA, circa axem DC revolutâ, ut FB ad circumferentiam circuli diametro BA descripti. Ergo portio est ad conoidem ut pyramis ad conum. Igitur permutando portio est ad pyramidem ut conois ad conum. Sed *c* conus coni sesquialtera est. Ergo & portio sesquialtera est pyramidis. Quod erat Demonstrandum.

a 19. huius. b 17. huius. c Corol. præced.

Corollarium.

Ex hoc theoremate habetur cubatio portionis à Cylindro parabolico abscissæ.

PROPOSITIO XXXIII.

Schematismus 5. Fig. 34.

Esto Cylindri hyperbolici portio GNLDAM per AG axem baseos, & punctum F in latere abscissa. Sit autem baseos (quæ hyperbole est) latus transversum GF, cui adiuncta sit ipsius semissis FH. Portio GNLDAM est ad pyramidem maximam GADL sibi inscriptam, ut HA est ad FA.

Demonstratum est ab Archimede *prop. 27. de Conoid. & sphæroid.* conoidem hyperbolicam CPGMD esse ad conum maximum sibi inscriptum CGD, ut HA, ad FA. Sed portio GNLDAM est ad pyramidem GADL sibi inscriptam, ut conois hyperbolica CPGMD ad conum CGD (est enim, ut in præcedentibus demonstravimus tam *a* portio ad conoidem, quàm *b* pyramis ad conum, ut LD, altitudo ad circumferentiam circuli diametri CD; ac proinde permutando, portio ad pyramidem, ut conois ad conum.) Ergo etiam portio hyperbolica GNLDAM, est ad pyramidem GADL inscriptam, ut HA ad FA, quod erat demonstrandum.

a 17. huius. b 19. huius.

Corollarium.

Ex theoremate jam demonstrato habetur cubatura portionis à Cylindro hyperbolico per latus & axem baseos abscissæ.

PROPOSITIO XXXIV.

Pyramides (DFGE, DBCE) Cylindri cujuscumque portioni inscriptæ duplicatam habet inter se proportionem altitudinum FG, BC

Schematismus 5. Fig. 35.

Ducantur CA, GN perpendiculares ad diametrum DE, & junguntur puncta AB. Ex puncto F duc FH parallelam ad DE, & ex H demittatur HK parallela ad BC. Ostensum alibi est *a* FG, HK æquales esse. Sunt autem & parallelæ inter se, cùm *b* ambæ æquidistent BC. Ergo si ducatur GK, erunt GK, FH, quia æquales & parallelas jungunt, etiam ipsæ parallelæ. Cùm igitur FH æquidistet NA, etiam GK eidem NA parallela est. Quare cùm etiam GN, KA sunt parallelæ, erit AKGN parallelogrammum, ac proinde NG, AK æquantur.

a Corol. 11. b 7. huius.

His ostensis, proportio pyramidis DBCE ad pyramidem DFGE composita est ex proportionibus baseos DCE ad basim DGE, & altitudinis BC ad altitunem FG. Sed proportio baseos DCE ad basim DGE eadem est quæ *b* AC ad NG hoc est (ut jam ostendi) AC ad AK; hoc est (quia HK est parallela ad BC) BC ad HK; hoc est *c* BC ad FG altitudinis ad altitudinem. Ergo proportio pyramidis DBCE ad pyramidem DFGE est duplicata eius quam habet altitudo BC ad altitudinem FG. Quod fuit demonstrandum.

b 1. 6 E. lem. c Corol. 1. p. 7. huius.

PARS III.

PROPOSITIO XXXV.

Sphærois lata ad sphæroidem longam ab eadem Ellipsi genitam eam habet rationem quam maior axis ad minorem

Schematismus 4. Fig. 26.

Genitrix ellipsis sit ACBX, axis maior AB, minor CX. Ellipsis circumscribe circulum AYBθ, qui circumactus sphæram producat. Ratio sphæræ ambientis AYBθ ad sphæroidem longam est duplicata *d* rationis AB axis majoris ad CX axem minorem; item ratio sphæræ AYBθ ad sphæroidem latam eadem est *a* quæ AB ad CX. Ergo sphæra sphærois lata, & sphærois longa proportionales sunt. Ergo sphærois lata est ad longam ut CB ad CX. Quod erat demonstrandum.

d 23. huius. a Corol. p. 24. huius.

PROPOSITIO XXXVI.

Schematismus 4. Fig. 26.

Ellipsi ACBX circulum inscribe LCMX, & alium conscribe AYBϑ. Circuli producant sphæras, ellipsis verò sphæroïdem latam & longam.

Sphæra LCMX, sphæroïs longa, sphæroïs lata sphæra AYBϑ sunt continuè proportionales in ratione axium CX, AB.

Quod si circulo AYBϑ rursum conscribatur ellipsis, cujus minor axis sit AB, major verò ad AB, ut AB est ad CX; huic autem ellipsi conscribatur circulus, & sic deinceps sphærarum ac sphæroïdum, in ratione axium CX, AB, continuè proportionalium series sine termino continuabitur.

Sphæra LCMX est ad sphæroidem longam XACB, ut *b* CX ad AB, & sphæroïs longa *c* XACB est ad sphæroidem latam ACBX ut CX ad AB: similiter sphæroïs lata ACBX est ad sphæram *d* AYBϑ, ut CX AB, atque eâ deinceps serie in infinitum.

b Corol. p. 23 huius. c Præced. d Corol. p. 24 huius.

PROPOSITIO XXXVII.

Schematismus 5. Fig. 36.

Circulo BCDG inscripta sit Ellipsis superque his erecti intelligantur Cylindri recti, circularis & Ellipticus, in altitudine eadem communi CN. A Cylindro circulari abscindatur portio BCND, ab Elliptico autem resecetur per alterutrũ axem portio FCNE, sive portio CKEG.

Portio Cylindri circularis BCND, ad portionem Cylindri Elliptici per alterutrum axem abscissam, eam habet rationem quam CG maior axis ad minorem FE.

Portio BCND est ad sphæram baseos BCDG, ut altitudo *a* CN ad circumferentiam BCDG diametri CG. Item portio FCNE est ad sphæroidem, quæ fit ab ellipsi FCEG circa FE circumductâ, ut *b* altitudo CN ad circumferentiam, cujus diameter CG. Ergo portio BCND est ad sphæram baseos BCDG, ut portio FCNE ad sphæroidem latam baseos FCEG: & permutando, portio est ad portionem, ut sphæra ad sphæroidem latam, hoc est ut *c* CG axis major ad minorem FE. Idipsum convenit portioni CKEG, cùm hæc alteri BCND æqualis *d* sit.

a 13. huius. b 15 huius. c Corol. p. 24 huius. d 29 huius.

PROPOSITIO XXXVIII.

Schematismus 5. Fig. 36.

Ellipsi FCEG inscriptus sit circulus FQEM superque iis erecti sint Cylindri recti, ellipticus & Circularis in altitudine communi EK, sive in æquali. Ab elliptico per axem alterutrum CG, EF abscindatur portio CEKG, vel portio FCNE (sunt enim *e* æquales:) à Cylindro autem circulari portio resecetur QKME.

e 29. huius.

Elliptici Cylindri portio est ad Circularis Cylindri portionem, ut maior axis CG ad minorem EF.

Portio CKGE est ad longam sphæroidem genitam à basi CEGF circa CG majorem axem in orbem ductâ, ut KE *a* altitudo ad circumferentiam, cujus diameter EF. Similiter portio QKME est ad sphæram baseos cujus diameter EF, ut KE ad circumferentiam diametri FE. Ergo portio CKEG est ad sphæroidem longam suæ baseos; ut portio QME est ad sphæram baseos suæ. Igitur alternatim portio CKGE est ad portionem QKME, ut sphæroides longa CEGF ad sphæram QEMF; hoc est *b* ut major axis CG ad minorem EF. Quod erat Demonstrandum.

a 15. huius. b Corol. p. 23 huius.

PROPOSITIO XXXIX.

Schematismus 5. Fig. 36.

Circulo QEMF conscribatur Ellipsis CEGF, & ellipsi rursum circulus CDGB. Super circulis erecti sint Cylindri circulares; super Ellipsi, Ellipticus; & sint omnium æquales altitudines CN, EK. A Cylindro super circulo QEMF, abscissa sit portio QKME; ab elliptico per alterutrũ axem, portio CKGE, sive FCNE, à circulari super CDGB portio BCDN.

Portiones QKME, FCNE, sive CKGE, & BCND, sunt continuè proportionales in ratione axium EF, CG.

Quod si circulo CDGB, conscribatur ellipsis priori similis, atque huic circulus, & sic deinceps; super iis autem rursum Cylindri constituantur, & portiones ut prius resecentur; portionum alternis circularium, & Ellipticarum in ratione axium continuè proportionalium series continuabitur sine termino.

Portio QKME est ad portionem CKGE, sive *c* FCNE, ut *d* axis minor EF ad majorem CG: & portio FCNE, sive CKGE est ad portionẽ BCND, ut EF ad *e* CG. Ergo portiones QKME, FCNE, sive CKGE & BCND sunt in ratione axium continuè proportionales; atque eâ deinceps serie in infinitum. Quod erat propositum.

c 29 huius. d 38 huius. e 37 huius.

PROPOSITIO XL.

Schematismus 5. Fig. 37.

Omnis portio Cylindri circularis recti, per latus & centrum baseos abscissa, ad Cylindrum suum eam habet rationem, quam duæ tertiæ diametri partes ad circuli circumferentiam.

Data primùm sit portio CAFD altitudinem habens AF, parem baseos diametro AB, sive CD, cuius duæ tertiæ sint DP: Cylindro igitur AG, à quo sumpta est portio CAFD, poterit inscribi sphæra LEMN, quæ æqualis erit sphæræ à basi ADBC productæ. Jam verò portio CAFD est ad sphæram baseos ADBC, hoc est ad sphæram LEMN, ut *a* altitudo FA, hoc est diameter baseos CD ad circumferentiam ADBC: sphæra autem LEMN est ad Cylindrum AG, cui includitur, ut 2. *b* ad 3; hoc est ut DP, duæ tertiæ diametri CD ad diametrum CD. Ergo ex æqualitate perturbata portio CAFD est ad Cylindrum AG, ut DP duæ tertiæ diametri CD ad circumferentiam ADBC. Quod erat demonstrandum.

a 13 huius. b Archim. l. 1. sph. & cyl. consect. 9.

Porrò dictæ æqualitatis perturbatæ schema est hujusmodi.

	⅔ diametri CD
Portio CADF	FA. l. CD
sphæ. ADBC. l. LEMN	circumf. ADBC
Cylind. AG	

Detur

Detur deinde portio CAFD, cujuscumque altitudinis sumpta è Cylindro AH ostendam nihilominùs portionem esse ad Cylindrum ut ⅔ diametri CD ad circumferentiam ADBC. Portiones CAFD, & CAFD sunt inter se ut *a* altitudines AE, AF. Quare cùm etiam Cylindri AH, AG sint inter se ut altitudines AF, AF, erit portio CAED ad portionem CAFD ut Cylindrus AH ad Cylindrum AG: ergo permutando, portio CAED est ad Cylindrum AH, ut portio CAFD ad Cylindrum AG. Sed jam ostensum est portionem CAFD esse ad Cylindrum AG ut sunt ⅔ diametri ad circumferentiam. Ergo etiam portio CAED est ad Cylindrum AH, ut ⅔ diametri ad circumferentiam. Quod erat demonstrandum.

a 18. *huius.*

Corollarium.

Datâ igitur in rectis lineis ratione portionis ad Cylindrum, datur quadratura.

PROPOSITIO XLI.

Portio Cylindri recti Elliptici, per latus, & quamvis baseos diametrum abscissa, ad Cylindrum ipsum eam habet rationem, quam duæ tertiæ diametri partes ad circuli circumferentiam.

Schematism. 6. Fig. 38.

Datus sit Cylindrus Ellipticus AH cujusvis altitudinis AF, perque alterutrum baseos ADBC axem, exempli grat. per minorem CD, abscindatur portio CAFD. Tum ellipsi ADBC inscribe circulum MDPC; superque eo Cylindrus statuatur NK, ejusdem cum Cylindro AH altitudinis; & per CD abscindatur portio CNGD.

Ratio Cylindri Elliptici AH ad portionem CAFD composita est ex ratione Cylindri AH ad Cylindrum NK, & ex ratione Cylindri NK ad portionem CNGD, & ex ratione portionis CNGD ad portionem CAFD. Sed ratio Cylindri AH ad Cylindrum NK eadem est quæ ratio baseos Ellipticæ ADBC ad basim circularem CNDP; hoc est eadem *a* cum ratione majoris axis AB ad minorem DC: & ratio Cylindri NK ad portionem CNGD, est ratio *a* circumferentiæ ad duas tertias diametri. Item ratio portionis CNGD ad portionem CAFD est ratio *b* minoris axis DC ad majorem AB. Ergo ratio Cylindri AH ad portionem suam CAFD composita est ex ratione AB ad CD, & ex ratione circumferentiæ ad duas tertias diametri, & ex ratione CD ad AB. Quare cùm rationes AB ad DC, & DC ad AB se mutuo tollant, erit Cylindrus Ellipticus AH ad portionem CAFD, per minorem axem CD abscissam, ac proinde etiam ad reliquas portiones per quamvis diametrum resectas (æquantur enim inter *c* se omnes) ùt circumferentia circuli ad duas tertias diametri partes. Quod erat demonstrandum.

Archim. prop. 5. conoid. *a præced.* *b* 38. *huius.* *c* 19. *huius.*

PROPOSITIO XLII.

Omnis portio Cylindri Parabolici per latus & axem baseos abscissa ad ipsum suum Cylindrum eam habet rationem, quam 3. ad 16.

Schematism. 5. Fig. 33.

Esto portio DHFBCK à Cylindro Parabolico BADEFG per baseos axem CD, & punctum F, in latere BF, abscissa. Oportet ostendere eam esse ad Cylindrum ut 3. ad 16. Demonstratum est suprà *d* portionem esse ad pyramidem maximam inscriptam DCBF, ut 3. ad 2. Pyramis autem DCBF est ad pyramidem cujus basis triangulum BDA, altitudo eadem BF, ut 2. ad 4. atque hæc ipsa pyramis est ad prisma super basi eâdem BDA, & eâdem altitudine BF, ut 4. ad 12. Prisma verò est ad Cylindrum Parabolicum ut basis ad basim, ut triangulum nempè BDA ad Parabolam BFDA, hoc est ut 12. ad 16. in ratione nimirùm subsesquitertiâ. Igitur ex æquo portio DHFBCK est ad Cylindrum Parabolicum ut 3. ad 16. Quod erat demonstrandum.

d 32. *huius.*

Series proportionalium quantitatum in superiore argumentatione ex æquo institutæ, hæ sunt.

Portio DHFBCK	3
Pyramis DCBF	2
Pyramis BDAF	4
Prisma super BDA	12
Cylindrus parabol.	16

PARS QUARTA.

PROPOSITIO XLIII.

Planus annulus esto BCHK, cuius latitudo BC; centrum A: & circulus quivis EGF, cuius radius EF.

Schematism. 5. Fig. 39.

Annulus est ad circulum ut DBC, rectangulum ad quadratum radii EF.

Circulus BHA est ad circulum CKA, ut quadratum BA ad quadratum CA. Igitur dividendo, annulus planus BCHK est ad circulum CKA, ut rectangulum *a* BCA bis cum quadrato BC ad quadratum CA. Sed rectangulum BCA bis cum quadrato BC, est rectangulum *b* DBC. Ergo annulus planus BCKH est ad circulum CKA ut rectangulum DBC ad quadratum CA. Quare cùm circulus CKA sit ad circulum EGF, ut quadratum CA ad quadratum FE; erit ex æquo annulus BCKH ad circulum EFG ut rectangulum DBC ad quadratum EF. quod erat demonstrandum.

a 4 *elem.* 2. *b* 3. & 1. *elem.* 2.

PROPOSITIO XLIV.

Esto sphæræ circulus maximus HPGK & in eo recta quævis non per A centrum ducta BC, cui parallela sit diameter GH.

Schematism. 6. Fig. 40.

Solidum sphæricum quod fit à segmento circulari BKC, circa diametrum GH in in orbem ducto, æquale est sphæræ, cuius diameter BC.

Describatur circulus CNBR maximus sphæræ diametri BC: per utriusque circuli centra A, S, ducatur recta QR: hæc secabit utramque diametrum GH, BC ad rectos angulos. Tum radius SB in aliquot æquales partes dividatur, & per divisionum puncta E, ductis EKF, ad QSR parallelis (quæ proindè erunt perpendiculares ad BS) inscribantur rectangula tam segmento BKTS, quàm quadranti BFRS. Iam segmentum BKTS cum suis rectangulis in orbem ducito circa diametrum GH. Hac revolutione solido sphærico, quod fit à segmento BKTS inscribentur Cylindri cavi à rectangulis EX productis, quorum bases erunt plani annuli EKPO, altitudines KX, sive EE. Quod si quadrans BFRS cum in-

scriptis sibi rectangulis in orbem ducatur, circa diametrum BC; hemisphærio inscribentur à rectangulis EZ, Cylindri quorum bases erunt circuli diametrorum NF, altitudines verò FZ, sive EE.

Quoniam verò tam rectangula PEK, quàm rectangula NEF æquantur a rectangulis BEC, erunt rectangula PEK, id est OKE, æqualia rectangulis NEF, hoc est quadratis EF. Ergo plani annuli EKPO (qui cavorum Cylindrorum bases sunt) erunt æquales b circulis diametrorum NF, qui bases sunt Cylindrorum integrorum. Quoniam igitur cavorum Cylindrorum, qui inscripti sunt solido sphærico, genito à segmento BKTS, & Cylindrorum integrorum, qui hemisphærio quadrantis BFRS inscribuntur, tum bases, tum altitudines æquales sunt; omnes quoque cavi Cylindri c omnibus Cylindris integris æquales erunt. Atque hoc semper eveniet, etiamsi inscriptiones illæ in infinitum continuentur. Cùm igitur & inscriptionibus illis, tam d sphæricum solidum, productum à plano circulari BKTS, circa GH circumacto, quàm hemisphærium e à quadrante BFRS genitum exhauriantur: erit solidum sphæricum à segmento BKTS productum, æquale hemisphærio; ac proinde totum sphæricum solidum quod fit à plano BKC, circa GH revoluto, toti sphæræ diametri BC æquale erit. Quod erat demonstrandum.

a 35. elem. b præced. c 5. huius. d Colligitur ex discursu Archimed. 21. conoid. e Arch. 21. Conoid.

Per heterogenea.

Solidum sphæricum, quod fit à segmento circulari BTC, circa GH diametrum circumacto, & sphæra à semicirculo BRC producta secentur plano ad GH, & BC recto. In solido sphærico sectio erit annulus planus, cujus latitudo EK, sive OP; in sphæra autem sectio circulus est, cujus diameter NF. Ostensum verò jam est in demonstratione primâ annulum circulo æquari; idque evenire semper, quotcumque sectiones ejusmodi fiant. Ergo ex heterogeneorum regulâ solidum sphæricum sphæræ est æquale. Quod erat propositum.

Schematismus 6. Fig. 40.

Corollarium.

Igitur sphæricum solidum quod fit à circulari segmento GBCH, circa GH Diametrum circumacto, æquale est differentiæ sphærarum, quarum diametri sunt GH, BC.

Quod si duæ fuerint diametro GH parallelæ MY, BC, aut plures, erit sphæricum solidum genitum à circulari plano MBCY circa GH revoluto, æquale differentiæ sphærarum, quarum diametri MY, BC.

PROPOSITIO XLV.

Data sit Cylindri circularis recti Elliptica portio DBCE, per centrū baseos & punctum in latere abscissa, quæ planis secetur HGKL, NRTP, βϖωϑ, ad basim rectis, & transeuntibus per lineas HL, NP, βϑ diametro DE parallelas.

Si altitudo portionis BC, par fuerit circumferentiæ DCEY, erunt portio DBCE. Segmenta portionis HGBKLCH, GBKLCH, NRBTPCN, βϖBωCβ, æqualia sphæris, quarum diametri sunt parallelæ DE, HL, NP, βϑ.

Schematismus 6. Fig. 41.

Et universim jam dictæ portiones ad sphæras dictas eam habent proportionem, quam portionis altitudo BC, ad circumferentiam DCEY.

Segmentum HGBKLCH est ad sphæricum solidum quod fit à circulari plano HCL circa diametrum DE in orbem ducto, a ut BC ad circumferentiam DCEY. Atqui solidum sphæricum, quod fit à plano HCL circa DE circumacto, æquatur b sphæræ, cujus diameter HL. Ergo portionis segmentum HGBKLCH est ad sphæram diametri HL, ut BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat propositum.

De portione ipsa demonstratum est *prop. 13. huius.*

a Corol. 1. p. 14. huius. b Præced.

Corollarium I.

Portio igitur & portionis segmenta dicta, proportionalia sunt sphæris diametrorum DE, HL, NP, &c.

Schematismus 6. Fig. 41.

Corollarium II.

Portio, & portionis segmenta prædicta inter se rationem habent triplicatam parallelarum DE, HL, NP, &c. sunt enim portio, & segmenta sphæris proportionalia.

Corollarium III.

Segmenta portionis DGHKLE, & reliqua quæ inter ipsa parallela plana continentur; eam rationem habent ad differentias sphærarum, quarum diametri DE, HL, NP, &c. quam BC portionis altitudo ad peripheriam DCEY, ac proinde hæc illis proportionales sunt.

Demonstratur ex præsenti theoremate & 19. *quinti elem.*

PROPOSITIO XLVI.

Data sit Cylindri circularis recti portio DBCE, per A centrum baseos, & punctum in latere abscissa, cuius altitudo CB, sectio maxima ABC. In basi ducatur HL parallela diametro DE, secans AC in P, ex P ducta sit PS parallela ad AB occurrens BC in S, per HSL ducto plano abscindatur portio HSCL.

Erit portio DBCE ad portionem HSCL, ut sphæra genita à basi DCE ad rotundum solidum quod fit à circulari segmento circa HL revoluto.

Schematismus 6. Fig. 43.

Quoniam per constructionem PS est parallela ad AB, erit BC ad AC, ut SC est ad PC. Sed AC est ad circumferentiam radij AC, ut a PC ad circumferentiam radij PC. Igitur ex æqual. BC est ad circumferentiam radij PC. ut SC ad circumferentiam radij PC. Atqui demonstratum suprà in præcedentibus est portionem DBCE esse ad sphæram genitam à basi DCE, ut b BC altitudo est ad circumferentiam radij AC. Item demonstratum c est portionem HSCL esse ad rotundum solidum genitum à basi HCL circa HL revolutâ, ut altitudo SC ad circumferentiam radij PC. Ergo portio DBCE est ad sphæram suæ baseos ut portio HSCL est ad rotundum solidum baseos suæ. Ergo permutando portio DBCE est

a Patet & Pappus l. 5. b 13 huius. c 16 huius.

est ad portionem HSCL, ut sphæra baseos DCE ad rotundum solidum factum ex HCL. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Propositio vera est in omni portione, sive ea ex Cylindro Elliptico, Parabolico, Hyperbolico, sive alio quocumque sit desumpta, sed in demonstratione loco propositionis 13. citandæ erunt 15.16.17. *huius.* Reliqua demonstratio omnis conveniet.

PROPOSITIO XLVII.

Schematismus 6. Fig. 42. 43.

Esto Cylindri circularis recti portio DBCE, per B punctum in latere, & per A centrum baseos abscissa, quam secat plano GFT parallelo ad basim DCE.

Portio DBCE est ad segmentum GBFT, ut sphæra quæ fit à basi DCE ad solidum, quod fit à circulari segmento GFT circa GT in orbem ducto.

SEctio portionis maxima sit ABC; hujus & plani GFT, communis sectio sit recta KF. Per GT ducatur planum GHLT rectum basi DCE; producens in superficie Cylindricâ rectas GH, TL; in basi rectam HL, & in sectione maximâ ABC rectam KP. Quoniam KP est communis sectio planorum ABC, HGTL, quæ ambo recta sunt basi DCE, erit KP *a* perpendicularis basi DCE. Quare cùm BC sit ad eamdem basim recta (est enim recta linea in Cylindri recti superficie existens) erunt KP, BC *b* parallelæ. Iam verò quia eidem KP parallelæ ad BC æquantur *c* GH LT, erunt æquales inter se. Sunt autem & parallelæ, quia in Cylindri superficie existunt. Ergo GT, HL jungunt æquales, ac parallelas GH, TL, ac proinde etiam ipsæ æquales sunt. Quoniam igitur æqualium circulorum segmenta sunt HCL, GFT, & subtensæ HL, GT æquales; erunt segmenta HCL, GFT æqualia & similia.

a 19. elem. 11.
b 6. elem. 11.
c Corol. 1. p. 7 huius.

Deinde quia parallela plana GFT, DCE secantur plano ABC, erunt *a* sectiones KF, AC parallelæ. Ostendi autem suprà etiam parallelas esse KP, BC. Ergo PKFC est parallelogrammum. Ergo KF æquatur PC. Jam ex P ducatur PS parallela ad AB. Similia erunt triangula KBF, PSC. Quare cùm PC sit par KF, erit etiam CS ipsi EB æqualis. Quare si per HSL abscindatur portio HSCL; erit hæc *b* æqualis, & similis portioni GBFT, cùm bases GFT, HCL æquales ac similes, atque insuper altitudines BF, SC æquales sint.

a 16 elem. 11.
b Patet ex 18 huius.

Ulterius quoniam parallela plana GFT, DCE secantur plano DBE, erunt sectiones GT, DE parallelæ. Ostendi autem suprà etiam GTHL esse parallelas. Ergo HL est parallela DE diametro. Per constructionem verò PS est parallela ad AB. Ergo portio HSCL per rectam HL & punctum S abscissa, est ea de quâ actum est *propositione præcedenti.* Per eamdem igitur propositionem portio DBCE est ad portionem HSCL, ut sphæra genita à basi DCE ad solidum factum à circulari plano HCL circa HL revoluto. Atqui jam ostendimus portiones HSCL, GBFT æquales esse. Ostensum similiter est segmenta HCL, GFT, similia esse, & æqualia, ac proinde ex iis circa subtensas suas HL, GT revolutis, æqualia fient solida. Ergo portio DBCE est ad portionem GBFT, ut sphæra genita à basi DCE ad solidum factum à segmento circulari GFT circa GT revoluto. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Propositio vera est in omni portione, sive nimirum portio desumpta sit ex Cylindro Elliptico, Parabolico, Hyperbolico, sive alio quocumque. Demonstratio etiam omninò eadem, sed loco propositionis 46. assumatur corollarium ejusdem.

PROPOSITIO XLVIII.

Iisdem positis quæ tota præcedenti: circa HL, diametro DE parallelam describatur circulus HQLR.

Schematismus 6. Fig. 42. 43.

Solidum HGBTLCH est ad solidum GBFT, ut sphæra diametri HL, sive genita à semicirculo HQL est ad solidum, quod fit à segmento circulari HCL circa eamdem HL in orbem ducto.

SOlidum HGBTLCH est ad *a* portionem totam DBCE, ut sphæra diametri HL, ad sphæram diametri DE. Portio autem tota DBCE est ad segmentum GBFT, ut *b* sphæra diametri DE ad solidum genitum à segmento GFT circa GT, hoc est à segmento *c* HCL circa HL revoluto. Ergo ex æquali solidum HGBTLCH, est ad segmentum GBFT, ut sphæra diametri HL ad solidum quod fit à circulari segmento HCL, circa eamdem HL in orbem ducto. Quod erat demonstrandum.

a Corol. 1 p. 43 huius
b Præced.
c Ostensum in præced.

Corollarium.

Igitur dividendo, segmentum Cylindricum, inter æqualia, similia & parallela plana HCL, GFT contentum, est ad portionem Cylindricam GBFT, ut solidum factum à plano quod semiperipheria HQL, & arcu HCL continetur, circa HL revoluto ad solidum factum ex plano HCL, circa eamdem HL in orbem ducto.

PROPOSITIO XLIX.

Iisdem positis: Cylindricum segmentum parallelis circularibus planis HCL, GFT interjectum, erit ad solidum sphæricum quod fit à circulari plano HQLCH, circa HL in orbem ducto, ut BC ad circumferentiam DCEY,

Schematismus 6. Fig. 42. 43.

SEgmentum enim Cylindricum HCLTFG, est ad solidum GBFT, ut segmentum sphæricum factum ex plano HQLCH, circa HL revoluto, ad segmentum sphæricum factum ex HCL, circa eamdem HL in orbem ducto per *Corol. præced.* Igitur permutando, Cylindricum HCLTFG est ad segmentum sphæricum quod fit ex plano HQLCH circa HL revoluto, ut solidum GBFT, (hoc *a* est solidum HSCL) ad sphæricum segmentum genitum à plano HCL circà HL in orbem ducto; hoc est ut portio DBCE ad *b* sphæram baseos DCE; hoc est ut BC *c* ad circumferentiam DCEY. Quod erat propositum.

a Ostensum p. 47 huius.
b 46 huius.
c 13. huius

PROPOSITIO L.

Schematismus 6. Fig. 42. 43.

Iisdem positis quæ tribus præcedentibus. Erit ratio segmenti Cylindrici, quod fit ex plano circulari HCL in altitudinem CS ad portionem à se abscissam HSCL, composita ex ratione sphærici segmenti, quod fit à plano comprehenso à semiperipheria HQS, & arcu HCL, circa HL revoluto ad sphæricum segmentum quod fit à plano HCL, circa eamdem HL in orbem ducto; & ex ratione PC ad PA.

IN *prop.* 47. ostensum est PKFC esse parallelogrammum. Quare KP, FC sunt æquales. Quia verò triangula AKP, PSC similia sunt (sunt enim KP, CB, per demonstrat; *a* & AB, PS per *b* constructionem parallelæ) erit KP, id est ut jam ostendi) FC ad SC, ut AP ad PC. Jam verò ratio segmenti Cylindrici, quod fit ex plano HCL in altitudinem CS ad segmentum HSCL est composita ex ratione ipsius ad Cylindricum segmentum HCLTFG, & ex ratione segmenti Cylindrici HCLTFG ad segmentum HSCL. Atqui ratio Cylindrici, quod fit ex plano HCL ducto in altitudinem CS, ad Cylindricum HCLTFG, est ratio CS ad CF. hoc est (ut jam ostendi) ratio PC, ad PA: ratio autem Cylindrici HCLTFG ad segmentum HSCL, seu GBFT, (sunt enim *c* æqualia) est ratio *d* segmenti sphærici facti ex plano HQLCH circa HL revoluto, ad segmentum sphæricum factum ex plano HCL circa HL in orbem ducto. Ergò ratiò segmenti Cylindrici quod fit ex HCL in altitudinem CS. ad portionem suam HSCL composita est ex ratione PC ad AP, & ex ratione sphærici segmenti facti ex HQLCH circa HL revoluto ad sphæricum segmentú factum ex HCL. Quod erat demonstrandú.

a 47. huius.
b ibidem.
c Ostensum ibidem.
d Corol. 48 huius.

PROPOSITIO LI.

Schematismus 6. Fig. 42. 43.

Si portionis (DBCE) à Cylindro recto circulari per baseos diametrum DE, & punctum B in latere abscissæ, segmentum GBFT, resectum plano GFT ad DCE basim parallelo, cubetur, aut eius ratio ad portionem totam in rectis lineis exhibeatur, dabitur etiam circuli quadratura.

AUferatur à semicirculo DCE segmentum quodvis HCL per lineam HL diametro DE parallelam. Per HL Factâ sectione HGTL ad basim DCE rectâ à portione totâ resecetur portio HGBTLCH, erunt GT, HL, *a* parallelæ. Per GT fiat sectio GFT parallela basi DCE, erit hæc *b* æqualis & similis plano HCL; ac proinde HCLTFG Cylindri segmentum est inter parallela æqualia, & similia plana constitutum. Jam verò quia cubata est portio HGBTLCH, si cubetur etiam segmentum GBFT, cubabitur & reliquú segmentum Cylindricum HCLTFG. Segmentum igitur circulare HCL, ipsius Cylindrici basis, æquabitur plano rectilineo, quod basis erit solidi rectilinei ejusdem cum Cylindrico magnitudinis & altitudinis.

Pari modo si exhibeatur ratio portionis DBCE ad segmentum GBFT, quoniã nota est *d* ratio portionis DBCE ad solidum HGBTLCH, nota quoque erit ratio solidi HGBTLCH ad segmentum GBFT. Quare cùm *e* HGBTLCH cubatum sit; etiam GBFT cubabitur; ac proinde rursus & residuum Cylindricum HCLTFG. Unde iterum quadratura circularis plani HCL.

a Ostensum 74. huius.
b Ex discursu eiusdem.
c Corol. 2. p. 22. huius.
d Ex corol. p. 45. huius
e Corol. 2. p. 22. huius.

PROPOSITIO LII.

Schematismus 6. Fig. 42. 43.

Iisdem positis quæ in totâ præcedenti: si exhibeatur in rectis lineis ratio alicuius sphæræ ad sphæricum solidum factum ex circulari plano quopiam HCL, circa HL revoluto: datur quadratura circuli.

DEmonstratum est à nobis *f* supra portionem DBCE esse ad segmentum GBFT ut sphæra diametri DE ad sphæricum solidum factum à circulari segmento GFT, circa GT, hoc est *g* HCL, circa HL revoluto. Quare si detur ratio sphæræ ad sphæricum solidum, dabitur & ratio portionis DBCE ad segmentum GBFT.; atque hinc per præcedentem ipsa quoque circuli quadratura exhibebitur. Quod erat propositum.

f 47. huius.
g Ostensum est ibid.

Aliter.

Solidum HGBTLCH est ad segmentum *a* GBFT ut sphæra semicirculi HQL ad solidum sphæricum segmenti HCL. Quare si innotescat ratio sphæræ ad solidum sphæricum, innotescet quoque ratio solidi HGBTLCH ad segmentum GBFT. Atqui nota *b* etiam est ratio portionis DBCE ad solidum HGBTLCH. Ergo ex æquali nota erit ratio portionis DBCE, ad segmentum GBFT. Habetur igitur per 51. *huius* circuli quadratura.

a 48 huius. Fig. 42. 43.
b Ex. 45. huius.

PROPOSITIO LIII.

Schematismus 6. Fig. 42. 43.

Iisdem positis,
Si in rectis lineis exhibeatur ratio solidi facti ex circulari segmento HCL, circa HL, sive ex segmento GFT circa GT revoluto ad conúm maximum ei inscriptum, qui fit à triangulo rectangulo HPC, aut aliquemvis alium; dabitur circuli quadratura.

INscribatur semissi ipsi GBFT solidi pyramis GBFK, cujus basis sit triangulum rectangulum GKF, quod conum genuit. Quoniam portio DBCE abscissa est ex hypothesi à Cylindro recto, erit ejus altitudo BFC recta plano DEC. Quare cùm planum GFT sit parallelum plano DCE, etiam BF erit plano GFT recta. Pyramidis igitur GKFB altitudo est FB. Itaque pyramis GKFB est ad conum factum à triangulo GKF, ut *c* BF ad circumferentiam radij KF. Sed etiam segmentum GNBKF est ad *d* rotundum solidum factum à circulari segmento GOFK circa GK in orbem ducto, ut BF ad circumferentiam radij KF. Ergo segmentum GNBKF est ad rotundum solidum, factum ex GOFK, ut pyramis GKFB, ad conum factum ex triangulo GFK. Permutando igitur, segmentú GNBKF erit ad inscriptam sibi pyramidem GKFB, ut rotundum solidum plani GOFK ad inscriptum sibi conum. Quare si ratio rotundi solidi ad conum innotescat, ratio etiam segmenti GNBKF ad pyramidem innotescet.

c 19 huius.
d 16 huius.

Atque ita segmentum GNBKF, adeoque totum solidum GBFT ad corpus rectilineum reducetur. Unde rursum per 51. *huius* habetur circuli quadratura. Quod erat propositum.

FINIS LIBRI PRIMI.

CYLINDRICORUM ET. ANNULARIUM
LIBER SECUNDUS.

a Defin. 1.
ζ 1. hujus.

Superficies portionis abscissæ à Cylindro cuiuscumque figuræ planæ recto a ductu procreato, hujus secundi libri argumentum erit; quem qui cum primo contulerit, mirabilem ac propè perpetuam inter portionem soliditatem & superficiem analogiam reperiet.

SYNOPSIS.

PARS I.

b Defin. 22.
c Defin. 19.

Cylindrica portionum b superficies comparatur cum curvâ superficie rotundorum baseos solidorum. c Ostendo igitur Cylindricam superficiem portionis à Cylindro quovis non circulari modò, sed Elliptico etiam, Parabolico, hyperbolico, aut quocumque alio abscissæ, ad curvam superficiem solidi rotundi baseos eam habere rationem, quam portionis altitudo d DE ad peripheriam circuli, cujus radius est HD, basis trianguli AED, quod maxima est portionis sectio e.

d Fig. 52. 54. 15.
e Defin. 12. 18.
a Defin. 22.
b Fig. 52.

Demonstratur item quæ Cylindri circularis portioni insunt propria: Cylindricam nimirum ejus superficiem ad semicirculum b BDC, qui basis est portionis, eam habere rationem quàm portionis altitudo DE octies sumpta, ad totam habet baseos circumferentiam BDCX: & plura alia, quæ in libri decursu reperies.

PARRS II.

Conferuntur portionum Cylindricæ superficies cum duobus triangulis maximis, quæ iis inscribi possunt. Hæc igitur demonstrantur. Portionis à circulari Cylindro abscissæ Cylindrica superficies est ad duo maxima sibi inscripta triangula DBC, EBC c ut quadrati diametri ad latus. Quod si portio dirimatur plano GHK d sectioni maximæ ABC parallelo; superficies DNKH est ad inscriptum sibi triangulum DKH, ut diameter DE est ad subtensam HE: superficies verò EMBKH est ad inscriptum sibi triangulum HKE ut est diameter DE ad subtensam HD. Portionum ab aliis Cylindris desumptarum superficies Cylindricæ sunt ad inscripta sibi triangula maxima, ut rotundi baseos solidi curva superficies est ad conicas superficies, rotundis solidis inscriptas, quarum axes sunt subtensæ basium.

c Schematismus 3. Fig. 24.
Schematismus 4. Fig. 24.

PARS III.

Portionis à Cylindro circulari abscissæ Cylindrica superficies cum sectione portionis maximâ, cum sui Cylindri superficie, cum superficie curvâ segmenti plano ad basim parallelo abscissi (unde & circuli pendere quadraturam ostendo) comparatur. Et sectionis quidem maximæ e (ABC) Cylindrica portionis superficies ostenditur esse quadrupla. Ad Cylindri verò sui Cylindricam supeficiem eam rationem habet, quam diameter circuli ad circumferentiam, ad superficiem GBFT a plano GFT ad basim parallelo abscissæ, se habet ut superficies sphæræ baseos ad superficiem rotundi solidi, quod fit à circulari segmento GFT, circa GT in orbem ducto.

Schematismus 3. Fig. 22.
a Schematismus 6. Fig. 42.

PARS I.

PROPOSITIO I.

Datæ sint binæ quantitates A & B, sive superficies, sive corpora, data item sit, ratio E ad F.

Schematismus 6. Fig. 44.

Si quantitatibus A & B aliæ atque aliæ magnitudines sine termino & inscribi & conscribi possint, ea lege, ut quæ inscribuntur & conscribuntur ipsi A eam b exhauriant, hoc est ab A differant quantitate quantumvis parva; atque insuper ad inscriptas ipsi B eandem semper rationem servent, quam E ad F.

b Defin. 28.

Erit quantitas A ad quantitatem B, ut E ad F.

Si non; erit ratio A ad B major vel minor ratione E ad F. Sit primò major. Aliqua igitur quantitas X minor quàm A, erit ad B, ut E ad F. Inscribantur ipsis A & B magnitudines binæ M, & N: M quidem ipsi A; N verò ipsi B, eâ lege, ut M & minùs deficiat ab A; quàm X deficit (ac proindè major sit quàm X) & simul sit ad N, ut E ad F; utrumque enim possibile est per hypothesim. Quoniam igitur volebas X esse ad B, ut E est ad F, estque M major quàm

quàm X: erit M ad B in majori, quàm E ad F. Sed M per constr. est ad N, ut E ad F. Ergo M est ad B in majori quàm ad N. Ergo N inscripta magnitudo ipsi B, major est quàm B, quod est impossibile. Non igitur ratio A ad B major est ratione E ad F.

Ponatur deinde ratio A ad B minor ratione E ad F. Aliqua igitur quantitas Z major quàm A, erit ad B ut E ad F. Conscribantur ipsis A & B binæ magnitudines. O quidem ipsi A; P verò ipsi B, eâ lege ut O & minùs excedat A quàm Z (ac proinde minor sit quàm Z) & simul sit ad P, ut E ad F; utrumque enim per hypothesim licet. Quoniam igitur volebas Z esse ad B, ut E est ad F, estque O minor quàm Z; erit O ad B in minori ratione, quàm Z ad B; hoc est quàm E ad F. Sed O per constructionem est ad P, ut E ad F. Ergo O est ad B in minori quàm ad P. Itaque B. major est quàm conscripta ipsi magnitudo P. Quod est impossibile. Non igitur ratio A ad B est minor ratione E ad F. Quare cùm neque major sit, eadem ei necesse est. Quod demonstrandum fuit.

Corollarium.

Hinc patet si magnitudines, quæ quantitati A inscribuntur & conscribuntur, ipsam A possint exhaurire, & semper æquales sint iis quæ inscribuntur, & conscribuntur quantitati B; A & B æquales esse.

PROPOSITIO II.

Coni recti (ABNC) curva superficies est ad triangulum altitudinem habens (KL) parem (AB) lateri coni, ut circumferentia basis coni ad basim trianguli (LM)

Schematismus 6. Fig. 45. 46.

INscribatur cono pyramis quæcumque, & altera conscribatur. Facilè ostensa est inscriptæ ac conscriptæ pyramidis superficies à se mutuo, adeoque & ab ipsâ coni superficie differre posse quantitate quantumvis parvâ. Quod proinde brevitatis causa demonstrandum relinquo lectori Geometræ. Jam à coni vertice in latus unum baseos pyramidis demittatur perpendicularis AO; erit hæc minor latere coni AB, seu AD. Triangulum, cujus altitudo est AB, basis verò par rectis BD, DE, EC, est ad triangulum KLM, ut basis BD, DE, EC, ad basim LM: sunt enim ex hyp. altitudines AB, KL pares. Ergo triangulum habens altitudinem AO, basim verò parem rectis BD, DE, EC; hoc est *a* ipsa pyramidis inscriptæ superficies absque basi, est ad triangulum KLM in ratione minori, quàm BD, DE, EC, ad LM; hoc est adhuc in minori, quàm peripheria BNC ad LM. Quoniam igitur superficies inscriptæ pyramidis deficere potest à coni superficie quantitate quantumvis parvâ; patet omne minus coni superficie aliter se habere ad triangulum KLM, quàm peripheria BNC ad LM.

a Archim. l. 1. d. Cyl. prop. 7.

Pari modo triangulum, cujus altitudo est AB, basis verò BF, FG, GH, HC, hoc est ipsa *b* pyramidis conscriptæ superficies absque basi, est ad triangulum KLM, ut basis BF, FG, GH, HC ad LM: hoc est in majori quàm peripheria BNC ad LM. Igitur cùm superficies conscriptæ pyramidis possit coni superficiem excedere quantitate quantumvis parvâ. liquet omne maius coni superficie ad triangulum KLM

b idem prop. 8.

etiam aliter se habere, quàm peripheria BNC ad LM. Ipsa igitur coni superficies est ad triangulum KLM, ut peripheria DNC ad LM. Quod erat demonstrandum.

Ita malui hoc loco ratiocinari, quàm deducere ad impossibile: quod tamen facile efficiet, qui volet methodo Euclidis & Archimedis usitatâ uti.

Scholium.

Cùm theorema jam Geometricè demonstratum, probare aggredior per heterogenea, in discursum incido, quo omnis illa argumentandi ratio, quam etiam suprà c negavi esse Geometricam, errores & falsitatis argui videbatur.

c In scholio prop. 12 l. 1. huius.

Sit triangulum BAC ex coni per axem sectione natum: quod assumo, quia in figurâ ipsâ reperio. Secetur autem conus quotcumque planis basi BNC parallelis, quæ in coni superficie producant circulares circumferentias IMQ, basis circumferentia BNC parallelas; in triangulo autem ABC, rectas IQ parallelas itidem ad BC trianguli basim.

Schematismus 6. Fig. 45.

Peripheria BNC est ad peripheriam IMQ, ut diameter BC a ad diametrum IQ. Igitur permutando, peripheria BNC est ad BC, ut peripheria IMQ ad IQ. Quare cum hoc semper eveniat, erunt omnes b peripheriæ superficiei conicæ ad omnes rectas trianguli BAC, ut baseos peripheria BNC ad trianguli basim BC. Ergo si legitima est indivisibilium methodus, ipsa quoque superficies conica erit ad triangulum ABC, ut peripheria BNC ad basim trianguli BC.

a Pappus l. 5 p. 41.
b 12 elem. 5.

Hoc autem est manifestè falsum: nam conica superficies eam proportionem habet ad triangulum super basi BC exstructum in altitudine, quæ par sit lateri conicu BA: Quod in propositione suprà Geometricè demonstratum est.

Quin verò si isthac argumentandi ratio legitima est, sequitur omnis rotundi solidi superficiem ad sectionem suam maximam habere rationem, quam circumferentia circuli ad diametrum suam. Detur exempli gratiâ sphæra (eadem enim erit ratio in omnibus solidis rotundis) cujus sectio maxima AEBF: axis FGE. Sphæram seca planis quotcumque parallelis. Producentur in superficie sphæræ circumferentiæ circulorum ANBM; in sectione autem maxima AEBF, recta AB circulorum diametri, atque hoc semper eveniet. Ergo omnes c circumferentiæ, (hoc est ipsa sphæræ superficies) erunt ad omnes diametros, (hoc est ad sectionem maximam AEBF) ut circuli circumferentia ad diametrum.

Schematismus 6. Fig. 47.
c 12. elem. 5.

Subjungo, aliud, quod argumentandi per indivisibilia methodum non minùs videtur evertere.

Circulus FFCE sectus sit in quatuor quadrantes, & inscribantur rectæ BF, EB. Tum diametri BC productâ puncto A manente fixo, circulus in orbem ductus annulum describat, de quo quidem totis duobus libris sequentibus agetur. Manifestum est rectas FB, EB cum circulo circumactas, describere conicas superficies, quæ annulari superficie, quam subtendunt, evidenter sunt minores. Has verò, si valet indivisibilium regula, superficiei conicæ æquales esse ostendam hunc in modum.

Schematismus 6. Fig. 48.

Ducatur recta quævis GK parallela ad FE, secans circuli circumferentiam in G, & rectam BF in O. Si hæc cum circulo & inscriptis lineis in orbem ducatur circa punctum A. Puncta G & O, hoc in conicâ, illud in annulari superficie, describent peripherias inter se æquales: atque hoc semper eveniet. Omnes igitur peripheriæ

pheria annularis superficiei omnibus peripherijs superficiei conicæ æquales erunt. Quare si legitima est indivisibilium methodus, ipsa quoque annularis superficies superficiei conicæ æqualis erit.

Denique sic probabitur, quadrati diametrum lateri, & circuli circumferentiam diametro eiusdem, imò omnes lineas rectas inter se esse æquales.

Respondeo nihilominus ad instantias hactenùs allatas, in ijs non servari æqualia indivisibilium intervalla. Recta enim BI, II, circumferetiarum BNC, IMQ. IMQ intervalla, majora sunt sequentis axeos, quæ sunt intervalla rectarum BC, IQ, IQ. Quod ipsum in reliquis etiam instantijs minimè fuisse observatum, perspicuum erit consideranti. Manet nihilominus ex indivisibilibus seu heterogeneis per se nihil effici. Quod enim, dum intervalla servantur æqualia, ex ijs verum deducatur, inde fit quod tum revocari ad homogenea possint, ut in Scholio propositionis duodecimæ libri primi *notatum est. Quæ quidem reductio nisi fiat, aut via demonstretur, quâ possit fieri; dubia manebit conclusio.*

PROPOSITIO III.

A cono recto AEB abscissus sit truncus EDGBFA plano basi parallelo. Datum item sit trapezium rectangulum HKNM, cuius parallelæ HM, KN circumferentiis CGDO, AFBT sint proportionales: altitudo autem KH par AC lateri trunci.

Schematismus 7. Fig. 48. & 49.

Dico superficiem conicam trunci esse ad trapezium, ut maxima circumferentia AFB, ad maximam trapezii parallelam KN.

Quod si parallelæ HM, KN æquales sint peripheriis CGDO, AFBT: Dico superficiem conicam trunci æqualem esse trapezio.

Rectæ KH, NM productæ concurrant in P. KP est ad HP, ut KN ad HM; hoc est per hyp. ut circumferentia AFB ad circumferentiam CGD, hoc est ut a AB ad CD; hoc est ut latus coni AE ad latus CE. Ergo dividendo KH est ad HP, ut AC ad CE. Cùm ergo KH, AC per hypothesim æquales sint, etiam HP, CE, adeòque totæ KP, AE æquales erunt. Quare per *præcedentem* triangulũ KPN erit ad superficiem conicam AEB, ut KN ad circumferentiam AFB: & triangulum HPM erit ad superficiem conicam CED, ut HM ad circumferentiam CGD; hoc est rursum, ut KN ad circumferentiam AFB. Ergo & reliquum KHMN trapezium erit ad reliquam superficiem conicam CGDBFA, ut KN ad circumferentiam AFB. Quod erat demonstrandum.

a Pappus l. 5 p. 41.

Corollarium.

Iisdem positis: superficies conica CABD æquatur rectangulo cuius altitudo est par ipsi AC: basis verò semissis rectarum peripheriis CGDO, HFBT, æqualium.

Ponantur enim HM, KN (licet id figura non exprimat) æquales peripheriis CGDO, AFBT. Bisecetur MN in Q, & per Q ducta normali, comple KS rectangulum. Erit hoc æquale trapezio NH, hoc est superficiei conicæ CAFD: altitudo autem eius est KH, id est AC; basis verò KR, est semissis rectarum KN, HM; hoc est peripheriarum AFBT, CGDO.

PROPOSITIO IV.

Data sit Figura quæcumque plana in easdem partes curva, & super ea Cylindrus rectus IKFG.

Schematismus 7. Fig. 50.

Curva Cylindri superficies est ad rectangulum, cuius altitudo Cylindri latus, ut perimeter baseos AKF ad basim rectanguli.

Demonstratio similis est ei quæ allata fuit suprà a, per plana inscripta & conscripta superficiei conicæ.

a p. 2. l. 2. huius.

Per heterogenea sic probabitur. Rectangulum habens eandem cum Cylindro altitudinem esto FT. Fiat sectio basi parallela PRQ. Erit linea PRQ ad lineam VQ, ut perimeter basis AKF ad rectanguli basim SF, & hoc semper eveniet. Ergo &c.

Corollaria.

Ex theoremate habemus ea quæ de rectangulis sunt demonstrata, ad rectas quascumque Cylindricas superficies transferri posse.

Quare si duorum Cylindrorum rectorum quorumcumque latera & basium perimetri reciproceantur, superficies Cylindricæ æquales erunt. Et contra.

Et Cylindrorum rectorum quorumcumque b curvæ superficies rationē inter se habent compositam ex ratione laterum, & ex ratione perimetrorum basium.

b Defin. 11.

Et Cylindrorum quorumcumque rectorum æquè altorum superficies sunt, ut basium perimetri.

Et quorum perimetri basium æquantur, superficies sunt ut altitudines.

PROPOSITIO V.

Data sit portio Cylindri cujuscumque recti per A centrum baseos & punctum B in latere abscissa, DBCE, cuius altitudo BC, diameter baseos DE.

Schematismus 1. Fig. 7.

Datum item sit punctum Q in plano baseos, à quo duci possit diametro DE parallela, quæ basim secet. Ex Q erigatur recta QR, parallela BC, occurrens plano DBE elliptico, in R, item QD parallela ad AC, occurrens diametro in quovis puncto D. Recta RQ est ad peripheriam radij QD, ut BC ad peripheriam radij AC.

Ducatur ex Q recta QF parallela ad DE. Per hypothesim occurret hæc basi, putà in F. Ex F erige in Cylindricâ portionis superficie rectam FG, quæ occurrat plano Elliptico DBE in G. Ducatur item FK parallela ad AC. Demonstravi a GF esse ad peripheriam radij KF, ut BC, ad peripheriam radij AC. Sed ut FG est ad peripheriam radij FK, sic RQ est ad peripheriam radij DQ. Ergo RQ est ad peripheriam radij DQ, ut BC ad peripheriam radij AC. Quod erat demonstrandum.

a 7. l. 1. huius.

PROPOSITIO VI.

Schematismus 7. Fig. 51.

Esto sphæra, cuius diameter BC; maximus circulus BICQ; centrum A.

Semicirculo BIC inscribi & conscribi possunt semisses polygonorum regularium, habentium unum latus, ut GI, LM, diametro BC parallelum; quæ si circa diametrum BC circumagantur, sphæræ datæ inscribent & conscribent solida, quorum superficies à sphærica superficie differant quantitate quantumvis parva.

POlygono regulari OXGIZP. quod semicirculo BIC inscriptum est, potest inscribi alius circulus OFKP, qui omnia polygoni latera tangat, ac proinde superficies à perimetro polygoni generatæ, & superficiei sphæricæ conscriptæ erunt, quam producit circulus OFKP, & nihilominùs inscriptæ superficiei sphæricæ datæ BIZQ. Per ea igitur quæ demonstrat Pappus *libro* 5. *prop.* 24. superficies à perimetro XGIZ productæ, æquantur circulo, cuius radius sit diameter OP. Pari modo, quia ex hypothesi superficies, quas efficit perimeter HLMN conscriptæ sunt sphæræ datæ, etiam erunt æquales circulo, cujus radius sit diameter BC, per eandem Pappi *prop.* Ergo superficies genitæ à perimetro HLMN, sunt ad superficies genitas à perimetro XGIZ, ut circulus radij BC ad circulum radij OP; hoc est ut quadratum BC ad quadratum OP. Sed etiam circuli geniti à radiis HB, NC sunt ad circulos genitos à radiis XO, ZP, ut quadratum BC ad quadratum OP (nam HB. NC sunt ad XO. ZP. ut perimeter BHLMNC ad perimetrum OXGIZP; hoc est, quia polygona similia sunt, ut BC ad OP) ergo superficies genitæ à toto perimetro BHLMNC, quæ datæ sphæræ BIZQ sunt conscriptæ, sunt ad genitas à toto perimetro OXGIZP, quæ sphæræ datæ sunt inscriptæ, ut quadratum BC ad quadratum OP, hoc est ut polygonum conscriptum ad inscriptum. Sed hæc differre possunt à circulo BICQ quantitate quantumvis parvâ, ut colligitur ex *prop. 6. Archimedis l. 1. de sph. & Cyl.* Ergo etiam superficies, quæ datæ superficiei sphæricæ BICQ conscribuntur & inscribuntur, differre tandem a sphærica superficie possunt quantitate quantumvis parvâ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

a Defin. 12.

Cylindrica a superficies cujuscumque portionis à Cylindro circulari recto per centrum baseos & punctum in latere abscissa, altitudinem habentis æqualem circumferentiæ baseos, superficiei sphæræ baseos æqualis est.

Schematismus 7. Fig. 52.

ESto Cylindri recti portio BREDC per A, centrum basis BCD, & E punctum in latere abscissa, altitudinem DE parem habens circumferentiæ BDCX. Demonstrandum est superficiem curvam sive Cylindricam portionis æqualem esse superficiei sphæræ à circulo BCDX generatæ.

Semicirculo BDC inscribantur & conscribantur semisses polygonorum regularium latera KO, IL, habentium diametro BC parallela. Hæc si in orbem ducantur circa diametrum BC, latus KO sphæræ inscribet superficiem Cylindricam; latus verò IL conscribet latera KG, ON inscribent conorum truncorum superficies; latera IH, LV conscribent: latera demùm GF, NM inscribent superficies planas circulares; latera HB, VC conscribent.

Deinde ex punctis G, K erigantur rectæ in superficie Cylindrica: item ex puncto P recta ad DE parallela, quæ omnes plano Elliptico BEC occurrant in puncto R, S, ∂: ducanturque rectæ FR, RS, S∂. His peractis, semissi superficiei Cylindricæ portionis inscripta sunt plana FRG, GRSK, KS∂P: atque eadem methodo reliquæ semissi eadem plana inscribentur, omnia autem simul sumpta minora erunt Cylindricâ portionis superficie.

Ex punctis quoque H & I, erige rectas parallelas ad DE, occurrentes plano Elliptico BEC in Q & T. Ex puncto etiam contactus θ erigatur recta in superficie Cylindrica occurrens plano BEC in β. Erit hæc parallela rectæ DE, ac proinde etiam rectis HQ, IT. Unde cùm etiam eidem insistant rectæ HI, erunt HQ, θβ, IT in uno plano. Per tangentem igitur HI & tres jam dictas HQ θβ, IT: item per tangentem ID. ac rectas IT, DE; item per tangentem HB & rectam HQ, fiant planorum sectiones, quæ in plano Ellipseos BEC producent rectas ET, TQ, QB Ellipsim tangentes in E, β, B: circa semissem portionis autem tria plana efficient, triangulum nempè BQH, trapezium QHIT portionem tangens in rectâ θβ, & rectangulum ITED tangens portionem in rectâ ED. Eâdem methodo portionis semissi alteri eadem plana conscribentur, quæ omnia simul sumpta patet majora esse Cylindricâ portionis superficie.

Reliquum est ut superficies sphæræ inscriptas ac conscriptas cum planis inscriptis ac conscriptis portioni, comparemus, atque ex eorum perpetuâ æqualitate ipsius quoque portionis superficiei Cylindricæ cum sphæricâ superficie æqualitatem concludamus.

Quoniam Cylindrus portionis ex hyp. rectus est, erit RG ad basim BDC recta, ac proinde etiam a angulus RGF rectus est, & RG altitudo est trianguli FGR. Jam verò quia ex hypothesi altitudo portionis DE æquatur circumferentiæ radij AD, etiam b RG par erit peripheriæ radij FG; ac proinde triangulum c FGR æquatur circulo radij FG. Rursum quia DE par est peripheriæ diametri XD per hyp. etiã d SKRG, quæ sunt parallela latera trapezij rectanguli RGKS, æquantur peripherijs diametrorum φK, ωG. Est autem GK trapezij altitudo, ipsum trunci conici latus. Ergo trapezium RGKS æquatur e superficiei trunci conici à rectâ KG descriptæ.

a Defin. 3. elem. 11.
b 7. l. 1. huius.
c Archim. dim. circ. p. 1.
d 7. l. 1. huius.
e 3. l. 2. huius.

Denique quoniam KS, ut jam ostendi, æquatur perpheriæ diametri Kφ, & KP est altitudo communis tum rectanguli SKP∂, tum Cylindricæ superficiei à rectâ KP descriptæ; erit f rectangulum SKP∂ æquale Cylindricæ superficiei, per rectam KP descriptæ. Superficies igitur hemisphærio DBX inscriptæ, superficiebus portionis semissi inscriptis æquales sunt. Quod cùm eodem modo de altero hemisphærio; semisseque alterâ portionis ostendatur: omnes superficies sphæræ baseos inscriptæ omnibus planis portioni inscriptis æquales erunt. Atque hoc semper eveniet quotcumque fuerint tum sphæræ, tum basi inscriptæ superficies.

f 4. l. 2. huius.

Nunc

Nunc idipſum de conſcriptis ſuperficiebus oſtendamus. Quoniam DE *a* par eſt peripheriæ radij AD, etiam QH par erit *b* peripheriæ radij BH. Eſt autem & QH recta ad BH (eſt enim per conſt. QH parallela DE, quæ recta eſt ex hyp. plano BDC.) ergo *c* triangulum PQH par eſt circulo radii BH. Deinde, ut ſuprà, oſtendam ex 5. & 3. *huius* libri trapezium QHIT ſuperficiei trunci conici à rectâ HI deſcriptæ: Item ex 5. & 4. *huius libri* rectangulum TIDE ſuperficiei Cylindricæ à rectâ ID deſcriptæ exæquari; eademque omnia in altero hemiſphærio, reliquaque portionis ſemiſſe eodem diſcurſu concludemus. Omnes igitur ſuperficies ſphæram ambientes, omnibus planis portioni conſcriptæ æquales erunt. Atque hoc ſemper eveniet quocumque tandem numero ſuperficies tum ſphæræ, tum portioni conſcribamus. Quare cùm etiam iis inſcriptionibus ac conſcriptionibus ſphæram exhauriri demonſtratum *d* ſit, ipſa quoque ſphæræ baſeos ſuperficies, portionis ſuperficiei Cylindricæ æqualis *e* erit. Quod erat demonſtrandum.

a Hyp. b 5.l.2.huius. c Arch. dim. circ. p.1. d praced. e 1.l.2.huius.

Obſerva inſignem analogiam inter portionis ſoliditatem & ſuperficiem, quod enim libro primo prop. 11. de portione ipſa, hic idem prorſus de Cylindrica ejus ſuperficie demonſtratum eſt.

Per heterogenea.

Secentur tam ſphæra, quàm portio planis parallelis ſectioni maximæ portionis AED, ſive rectis plano BDCX, quæ forment in ſuperficie quidem Cylindricâ portionis, rectas SK, RG, &c. in ſuperficie verò ſphæricâ circumferentias producant, quarum diametri ϕK, ωG, &c.

Schematiſmus 7. Fig. 52.

Jam demonſtratum eſt in diſcurſu præcedenti, rectas SK, RG, æquales eſſe circumferentiis diametrorum ϕK, ωG. Quare cùm hoc ſemper eveniat, erit ſuperficies portionis Cylindrica æqualis ſphæricæ. Quod erat propoſitum.

Corollarium I.

Hinc patet primò; plana portioni inſcripta, portionis ſuperficiem exhaurire, plana enim illa *a* æquantur ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Sed hæc *a* exhauriunt ſuperficiem ſphæræ, hoc eſt ſuperficiem portionis. Ergo & illa.

a 6.huius.

Patet 2; ſi loco planorum FRG, OKSY, MNπ, ſubſtituantur plana BRG, KSED, OYED, CπN, portionis ſuperficiem à fortiori exhauſtum iri.

Corollarium II.

Si portio & ſphæra ſecentur planis ad ſectionem portionis maximam AED parallelis, erunt ſegmenta ſuperficiei Cylindricæ portionis æqualia ſegmentis ſuperficiei ſphæricæ inter eadem parallela conſtitutis. Demonſtrabitur diſcurſu eodem quo theorema.

PROPOSITIO VIII.

Cylindrica ſuperficies cujuſcumque portionis à Cylindro circulari recto per centrum baſeos & punctum latere abſciſſa, eam habet rationem ad ſuperficiem ſphæræ baſeos, quam portionis altitudo ad circumferentiam baſeos.

Demonſtratio.

Schematiſmus 7. Fig. 53.

Eſto Cylindri circularis recti portio BRSEDC, per centrum A baſeos BDCX, & E punctum in latere abſciſſa. Oſtendendum eſt ſuperficiem Cylindricam portionis eſſe ad ſuperficiem ſphæricam à peripheria BDCX generatam, ut DE altitudo portionis ad peripheriam BDCX.

Tacquet Cylind. & Annul.

Inſcribantur & conſcribantur tum ſphæræ tum portioni ſuperficies, uti factum in præcedenti, ut ED eſt ad peripheriam radij AD, ſic *a* RG eſt ad peripheriam radij FG. Quia verò triangulum FGR habet angulum ad G rectum, erit triangulum *b* FGR ad circulum radij FG ſive diametri ωG, ut RG ad circumferentiam diametri ωG; hoc eſt, uti jam oſtendi, ut ED ad circumferentiam diametri XD. Deinde quia tam RG eſt ad *c* peripheriam diametri ωG, quàm SK ad peripheriam diametri ϕK, ut ED eſt ad peripheriam diametri XD; erunt rectæ RG, SK (parallela latera trapezii rectanguli RGKS) peripherijs diametrorum ωG, ϕK proportionales. Eſt autem & GK altitudo trapezij, ipſum latus ſuperficiei trunci conici à rectâ KG productæ. Ergo *d* trapezium RGKS eſt ad ſuperficiem conicam à rectâ KG productam, ut SK maxima trapezii parallela ad maximam trunci conici circumferentiam, cuius nempè diameter eſt ϕK; hoc eſt (quemadmodum jam oſtendi) ut ED eſt ad peripheriam diametri XD. Denique rectangulum SKPϑ eſt ad Cylindricam ſuperficiem à rectâ KP factam, ut *e* SK ad circumferentiam diametri Kϕ, hoc eſt *f* rurſum ut ED ad peripheriam diametri XD. Singula igitur plana portionis ſemiſſi inſcripta ſunt ad ſingulas ſuperficies inſcriptas hemiſphærio DBX, ut ED eſt ad peripheriam diametri XD. Eodem modo idipſum in alterâ portionis ſemiſſe, reliquoque hemiſphærio oſtendemus. Omnia igitur plana portionis curvæ ſuperficiei inſcripta ſimul ſumpta ſunt ad omnes ſuperficies toti ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas etiam ſimul ſumptas, ut ED ad circumferentiam diametri XD, ſive ad circumferentiam baſeos BDCX. Atque hoc ſemper eveniet quotcumque ſuperficies portioni ac ſphæræ inſcribantur.

a 7.l.1.huius. b 2.l.1.huius. c 7.l.1.huius. d 3.l.2.huius. e 4.l.2.huius. f 7.l.1.huius.

Jam hoc ipſum de ſuperficiebus conſcriptis demonſtremus.

Triangulum QHB quia angulum ad H habet rectum, eſt *g* ad circulum radii BH ut QH eſt ad peripheriam radij HB; hoc eſt ut *a* ED ad peripheriam radij AD. Deinde (ut ſuprà) oſtendam ex 5 & 3. *huius libri* trapezium QHIT eſſe ad ſuperficiem conicam à recta IM deſcriptam ut ED ad peripheriam radij AD. Item ex 4 & 5 rectangulum TIDE habere ſe ad Cylindricam ſuperficiem à rectâ ID factam, ut rurſum ED ad peripheriam radii AD. Eademque omnia in ſemiſſe portionis alterâ, reliquoque hemiſphærio DCX demonſtrabimus. Cùm igitur plana ſingula portioni conſcripta, ſint ad ſingulas ſuperficies conſcriptas ſphæræ, ut ED ad peripheriam radij AD, hoc eſt peripheriam BDCX; etiam omnia plana ſimul ſumpta, erunt ad ſuperficies omnes ſimul ſumptas, ut ED ad peripheriam BDCX. Atque hoc ſemper eveniet, quotcumq; plana curvæ ſuperficiei portionis & ſuperficies ſphæricæ ſuperficiei circumſcripſerimus. Quare cùm inſcriptionibus illis ac conſcriptionibus ſphærica ſuperficies *b* exhauriatur, ipſa quoque portionis ſuperficies curva erit ad ſphæræ ſuperficiem *c* ut ED ad peripheriam BDCX. Quod erat demonſtrandum.

g 2.l.1.huius. a 5.l.2.huius. b 6.l.2.huius. c 1.l.2.huius.

Obſerva magnam hujus Theorematis analogiam cum p.13. libri 1. quod enim hic de ſuperficie oſtenditur, iſthic oſtenſum eſt de ſoliditate.

Per Heterogenea.

Schematismus 7. Fig. 53.

Secentur portio & sphæra planis, sectioni portionis maximæ AED parallelis, quæ in superficie curvâ portionis forment rectas SK, RG, &c. In superficie autem sphæricâ efficiant peripherias, quarum diametri Kφ, Gω, &c. Iam ostensum in demonstratione præcedenti est rectas SK, RG esse ad peripherias diametrorum Kφ, Gω, ut ED est ad peripheriam BDCX. Quare cùm hoc semper eveniat, ipsa quoque portionis superficies curva est ad sphæræ superficiem, ut ED est ad peripheriam BDCX. Quod erat propositum.

Hoc Theorema universale est; adeoque etiam rationem æqualitatis complectitur. Sed cùm hæc sibi propriis plerumque mediis demonstretur, seorsim illam à *prop*. 7. exequi visum est.

Corollarium I.

Si portio & sphæra secentur planis, ad sectionem portionis maximam AED parallelis, erunt quoque segmenta curvæ superficiei portionis ad segmenta superficiei sphæricæ, ut ED portionis altitudo ad baseos peripheriam BDCX. Eadem est demonstratio quæ Theorematis.

Corollarium II.

Cùm per corollarium 1. segmenta curvæ superficiei portionis proportionalia sint segmentis superficiei sphæricæ; hæc autem a proportionalia sint segmentis axeos BC: etiam segmenta curvæ superficiei portionis axeos BC segmentis proportionalia erunt.

a patet ex Archim. l. 2. de sph. p. 3.

PROPOSITIO IX.

Schematismus 7. Fig. 54.

Cylindrica superficies portionis, à Cylindro circulari recto per latus & centrum basis abscissæ, altitudinem habentis parem circumferentiæ baseos Cylindri, suæ baseos octupla est.

Sit portio BEDC; cujus altitudo ED par sit peripheriæ BDCX. Demonstrandum est Cylindricam portionis superficiem baseos portionis, nempè semicirculi BDC, octuplam esse.

Quoniam ED par est circumferentiæ BDCX, erit portionis Cylindrica superficies æqualis superficiei sphæræ à semicirculo BDC generatæ, ut *propositione 7. libri huius* demonstravimus. Atqui huius sphæræ superficies quadrupla b est circuli BDCX; hoc est octupla semicirculi BDC. Ergo etiam Cylindrica superficies portionis ejusdem semicirculi octupla est. Quod erat demonstrandum.

b Archim. l. 1. sph. p. 30.

PROPOSITIO X.

Cylindrica superficies portionis, à Cylindro circulari recto per latus & baseos centrum abscissæ, ad suam basim eam habet rationem, quam portionis altitudo octies sumpta ad circumferentiam basis Cylindri.

Sit portio BEDC, cujus altitudo ED, demonstrandum est Cylindricam portionis superficiem esse ad semicirculum BDC ut altitudo ED octies sumpta, est ad circumferentiam BDCX.

Cylindrica portionis superficies est ad superficiem sphæræ à portionis basi BDC generatæ, ut ED portionis altitudo ad baseos Cylindri circumferentiam BDCX, uti demonstravimus *prop. 8. huius libri*. Sed circulus ABDCX est pars quarta a superficiei sphæricæ jam dictæ, ac proinde semicirculus pars octava. Ergo Cylindrica portionis superficies est ad semicirculum, ut altitudo DE octies sumpta, est ad circumferentiam BDCX. Quod erat demonstrandum.

a Archim. l. 1. sph. le 30.

PROPOSITIO XI.

Schematismus 7. Fig. 54.

Cylindri circularis recti portio, per baseos centrum & latus abscissa BEDC, & sphæra ab ejusdem basi BDC generata, secentur planis ad sectionem portionis maximam AED parallelis, quæ in superficie Cylindrica portionis producant rectas FO, in sphæra basis circulos, quorum diametri OG; ducanturque rectæ BO.

Dico: si altitudo ED par sit circumferentiæ BDCX, superficiei Cylindricæ segmenta BFO æqualia sunt circulis, quorum radii BO; sive quadrupla circulorum, quorum diametri sunt BO.

Et universim segmenta BFO sunt ad circulos radiorum BO, ut ED portionis altitudo ad circumferentiam BDCX, sive segmenta BFO sunt ad circulos diametrorum BO, ut quadrupla altitudinis DE ad circumferentiam BDCX.

Cylindricæ superficiei segmenta BFO sunt ad superficiei sphæricæ segmenta OBG, ut a ED ad circumferentiam BDCX. Atqui circuli radiorum BO æquantur b superficiei sphæricæ segmentis OBG. Ergo Cylindricæ superficiei segmenta BFO sunt ad circulos radiorum BO, ut ED ad circumferentiam BDCX. Quod erat demonstrandum.

a Corol. p. 8. l. 2. huius
b Archim. l. 1. sph. p. 36 37.

Corollarium I.

Superficiei igitur Cylindricæ segmenta BFO circulis radiorum BO, & diametrorum BO proportionalia sunt.

Corollarium II.

Superficiei Cylindricæ segmenta OFFO, OFFO sunt ad circulorum radiis BO descriptorum differentias, ut portionis altitudo DE ad peripheriam BDCX; ac proinde hæc illis proportionalia sunt. Patet ex præsenti Theoremate & 19. quinti elementi.

PROPOSITIO XII.

Schematismus 7. Fig. 54.

Iisdem positis:

Si altitudo portionis DE par fuerit peripheriæ BDCX; Cylindricæ superficiei segmenta BFO æqualia sunt superficiebus sphæricis, quarum diametri BO.

Et universim segmenta BFO Cylindricæ superficiei sunt ad superficies sphæricas diametrorum BO, ut DE portionis altitudo ad peripheriam BDCX.

Manifesta est demonstratio ex præcedenti, & Archimedis *l. 1. de sph. & Cylind. p. 30.* circulis enim

a Archim. l. 1. sph. p. 30. b Praeced.

enim radiorum BO æquantur superficies a sphæricæ diametrorum BO. Atqui segmenta b BFO sunt ad circulos radiorum BO, ut DE ad peripheriam BDCX. Ergo etiam segmenta BFO sunt ad sphæricas superficies diametrorum BO, ut DE ad peripheriam BDCX. Quod erat propositum.

Corollarium I.

Igitur Cylindricæ superficiei segmenta BFO, superficiebus sphæricis diametrorum BO proportionalia sunt.

Corollarium II.

Superficiei Cylindricæ segmenta OFFO, OFFO sunt ad superficierum sphæricarum, quarum diametri BO, differentias, ut ED ad peripheriam BDCX, ac proinde hæ illis proportionales sunt, patet ex præsenti Theoremate, & 19. quinti Euclidis.

Corollarium III.

Quodlibet Cylindricæ superficiei segmentum OFFO, est ad totam portionis Cylindricam superficiem BEDC, ut differentia superficierum sphæricarum, quarum diametri BO, BO, ad superficiem sphæricam diametri BC.

Demonstratio patet ex Corollario secundo & ex p. 8. huius libri.

PROPOSITIO XIII.

Schematismus 7. Fig. 53. 52.

Esto Cylindri Elliptici recti portio BRSEDC, per alterutrum baseos axem, putà per BC, & E punctum in latere abscissa, altitudinem habens quamvis DE.

Curva, sive Cylindricæ portionis superficies est ad superficiem sphæroïdeos à basi BDC, circa axem BC revoluta generatæ, ut ED altitudo portionis est ad peripheriam circuli cuius diameter est axis alter DX.

Demonstrabitur eodem discursu, quo propositio 8. huius libri. Figurâ quoque compendii gratiâ, eâdem utimur quæ jam portionem repræsentat ab Elliptico Cylindro abscissam.

Corollarium I.

Et si portio ac sphærois secentur planis sectionis portionis maximæ AED parallelis: segmenta quoque superficiei portionis ita sunt ad segmenta superficiei sphæroidicæ, inter eadem parallela plana constituta, ut ED altitudo portionis ad circumferentiam diametri XD, hoc quoque eodem discursu demonstrabitur quo propositio.

Corollarium II.

Reliqua superficies GRED erit ad reliquam superficiem sphæroidicam genitam ab arcu GD circa BC revoluto, ut ED portionis altitudo ad peripheriam diametri XD. Patet ex *propositione & coroll. 1.*

Confer hoc theorema eiusq; corollaria cum 15. libri primi, & rursum observa mirabilem analogiam inter portionum soliditatem & superficiem.

PROPOSITIO XIV.

Schematismus 8. Fig. 55.

Esto Cylindri Parabolici, Hyperbolici aut cuiuscumque alterius ex figuræ cuiusvis planæ recto ductu procreati, portio BRSEDA, per E punctum in latere & BA axem baseos abscissa.

Curva portionis superficies, ea nimirùm quæ curvis lineis BRSE, BGD, & recta DE continetur, est ad curvam superficiem conoïdeos, aut rotundi solidi à basi circa AB circumacta generati, ut ED portionis altitudo est ad circumferentiam circuli; cuius diameter est ordinatim applicata XD.

Inscribantur basi Parabolicæ, seu Hyperbolicæ BθD, latera FG, CK, KP, sic ut KP sit parallela axi AB, & FG parallela ad AD. Conscribantur item latera BH, HI, ID, inscriptis parallela. Tum super inscriptis ac conscriptis lateribus superficiei curvæ portionis inscribantur & conscribantur plana, ut factum in *prop. 7.* Eadem deinde latera cum basi ipsâ circa axem AB in orbem acta inscribant & conscribant conoidi baseos superficies *prop.* item 7. explicatas.

His ita constructis, eodem prorsus, quo *prop. 8.* usi sumus, ratiocinio demonstrabimus triangulum FRG esse ad circulum diametri *a*G, ut ED est ad peripheriam radij AD: item trapezium GRSK esse ad conicam superficiem factam à latere KG circa AB circumacto, ut ED ad peripheriam radij AD: denique planum KS*a*P esse ad superficiem Cylindricam genitam à latere KP, ut ED est ad peripheriam radij AD. Omnia igitur plana portioni inscripta sunt ad omnes superficies conoidi baseos inscriptas ut ED ad circumferentiam radij AD: & hoc semper continget. Deinde eodem propositionis octavæ discursu ostendetur conscripta portioni plana, quotcumque ea fuerint, ad totidem conscriptas conoidi baseos superficies eamdem quoque semper habere rationem, quam ED ad circumferentiam radii AD. Sed & dictis inscriptionibus ac conscriptionibus conois exhauritur. Quare ipsa quoque portionis curva superficies, erit ad superficiem conoidis baseos, ut ED ad circumferentiam radii ED. Quod erat propositum.

1. l. 2. huius.

PROPOSITIO XV.

Schematismus 8. Fig. 56.

Esto rursum portio Cylindri recti Parabolici, aut Hyperbolici, vel alterius cuiusvis, non jam per axem AD, sed per ordinatim applicatam BC obliquè abscissa altitudinem habens, ED.

Etiam huius portionis superficies curva est ad superficiem rotundi solidi, à basi BDC circa ordinatim applicatam BC circumacta producti, ut ED Altitudo portionis ad circumferentiam circuli, huius diameter DX.

Demonstratio eadem erit, quæ propositionis octavæ huius libri.

Corollarium.

Ad duas praecedentes.

Et si portio ac rotundum solidum secentur planis sectioni maximae AED parallelis, erunt segmenta curvae superficiei portionis ad segmenta superficiei rotundi solidi, ut ED ad circumferentiam diametri XD.

Observa analogiam cum prop. 17. & 16. libri primi; istbic enim eadem omnia de portionum soliditate, quae hic in 14. & 15. de superficie demonstrantur.

PROPOSITIO XVI.

Schematismus 3. Fig. 19. 20.

Curvae superficies portionum (ADFCE, ADBCE) ab eodem Cylindro recto, sive circularis ille sit, sive Ellipticus, sive Parabolicus, sive Hyperbolicus, sive ex cuiusvis figurae planae recto ductu procreatus) dissectarum, eam inter se rationem habent, quam altitudines CF, CB.)

Curva superficies lineis DBE, DCE comprehensa, est ad superficiem curvam solidi rotundi baseos (quod quidem, si Cylindrus fuerit circularis, sphaera est; si Ellipticus est sphaeros; si Parabolicus, aut Hyperbolicus, est conois Parabolica, aut Hyperbolica) ut BC ad peripheriam radii AC; quemadmodum *prop.* 8. 13. 14. 15. *huius libri* demonstratum est. Superficies autem curva solidi rotundi baseos est ad superficiem curvam lineis DFE, & DCE comprehensam, ut circumferentia radij AC ad CF, quemadmodum locis jam citatis ostensum est. Igitur ex aequo superficies lineis DBE, DCE comprehensa, est ad superficiem comprehensam lineis DFE, DCE, ut CB ad CF. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Segmenta igitur superficiei curvae, inter lineas DCE, DB2E, DFE, DB3E interjecta, eam inter se rationem habent, quam altitudinis BC segmenta CB, 2BF, FB3.

Eadem reperies l. 1. prop. 18. demonstrata de portionum soliditate: rursum igitur analogia.

PARS II.

PROPOSITIO XVII.

Schematismus 3. Fig. 22.

Cujuscumque portionis à Cylindro circulari recto per centrum baseos & punctum in latere abscissae Cylindrica superficies ad duo maxima triangula sibi inscripta eam habet rationem, quam diameter quadrati ad latus eiusdem.

Esto Cylindri circularis recti portio DBCE per A baseos centrum & punctum in latere abscissa, quamcumque altitudinem habens BC. Ostendendum est Cylindricam portionis superficiem, quae nimirum curvis lineis DCE, DKBGE continetur, esse ad duo triangula maxima DBC, EBC sibi inscripta, ut diameter quadrati ad latus.

Quoniam Cylindrus portionis ex hypothesi rectus est, erit BC, recta plano baseos DCEF, ac proinde angulus DCB rectus, & DC altitudo erit trianguli BDC. Triangulum ergo BDC est *a* ad curvam superficiem maximi coni CDF, hemisphaerio CODF inscripti, ut BC ad circumferentiam CMFN. Sed etjam *b* Cylindrica portionis superficies est ad superficiem sphaerae baseos DCEF, ut BC ad circumferentiam CMFN, sive DCEF. Ergo Cylindrica portionis superficies est ad superficiem sphaerae baseos, ut triangulum BDC est ad superficiem coni curvam CDF. Igitur permutando, superficies portionis Cylindrica est ad triangulum DBC, ut superficies sphaerica est ad conicam CDF. Ergo Cylindrica portionis superficies est ad duo triangula inscripta aequalia DBC, & EBC, ut superficies sphaerica est ad duas aequales superficies conicas CDF & CEF.

a 2. l. 2. huius. *b* 8. l. 2. huius.

Jam verò quoniam *a* conica superficies CDF aequatur triangulo cuius altitudo CD; basis autem par est peripheriae CMFN; erit utraque simul conica superficies CDF & CEF, par triangulo, cujus altitudo CD, basis autem duae peripheriae CMFN. Deinde quia circulus CMFN par est triangulo, *b* cujus altitudo est radius AD, basis autem peripheria CMFN; erunt duo circuli CMFN aequales triangulo, cujus altitudo DE diameter tota, basis autem peripheria CMFN. Ergo quatuor circuli (hoc est ipsa *c* superficies sphaerica) aequantur triangulo cuius altitudo DE, basis autem duae circumferentiae CMFN.

a 2. l. 2. huius. *b* Archim. dim. cir. p. 1. *c* Archim. l. 1. sph. p. 30.

Atqui triangulum, cuius altitudo est DE, basis autem dupla peripheriae CMFN (hoc est, ut jam ostendi, sphaerica ipsa superficies) ita se habet ad triangulum, cuius altitudo CD, basis autem etiam dupla circumferentiae CMFN (hoc est, ut ostendi suprà, curva superficies utriusque conorum CDF, & CEF) ut ED ad CD. Ergo superficies sphaerica est ad utramque conicam ut ED ad CD. Quare cùm demonstratum supra jam sit superficiem Cylindricam portionis esse ad duo triangula DBC, EBC, ut superficies sphaerica ad utramque conicam; etiam Cylindrica portionis superficies erit ad duo triangula DBC, EBC, ut ED ad DC; hoc est ut quadrati diameter ad latus eiusdem. Quod erat demonstrandum.

Nota analogiam huius cum prop. 20. lib. 1. Ibi ostensum est rationem portionis ad pyramidem maximam esse duplam: hic verò ostenditur rationem superficiei Cylindricae portionis ad eam partem superficiei pyramidis maxima, quae portionis Cylindricam superficiem subtendit, eam esse, quae est diametri quadrati ad latus, hoc est dimidiatam duplae.

Corollarium.

Ex hoc theoremate (vide *fig.* 2. schematismo 1.) habetur quadratura superficiei Cylindricae, quae peripheriâ semicirculari KCF & peripheriâ semielliptica FGK continetur. Dabit igitur circuli quadraturam qui reliquam quadraverit Cylindricam superficiem GFKBH.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Cylindri circularis recti portio DBCE,& sphæra baseos sectæ sint plano sectioni portionis maximæ ABC parallelo, quod in portione faciat triangulum GHK, in sphæra circulum HILP.

Schematismus 4. Fig. 24.

Cylindrica superficies DNKH, quæ lineis DOH, HK, KND continetur, est ad inscriptum sibi triangulum DKH, ut diameter baseos DE est ad subtensam HE.

Superficies autem Cylindrica HKBCME, ea nempe, quæ comprehenditur lineis KH, HCE, EMBK, est ad triangulum EKH sibi inscriptum, ut diameter DE ad DH subtensam.

Primam partem sic demonstro.

Superficies Cylindrica DNKH est ad superficiem sphæricam HODL, factam ab arcu HOD, circa DE circumacto, ut *a* BC ad peripheriam DCEF, sive ad peripheriam radii AC; hoc est ut *a* KH ad HILP peripheriam radij GH. Sed etiam *b* triangulum KHD est ad curvam superficiem coni maximi HDL, portioni sphæricæ inscripti, ut KH ad peripheriam HILP.) nam cùm angulus KHD rectus sit, DH latus ipsum coni, erit altitudo trianguli KHD.) Ergo curva superficies DNKH est ad superficiem sphæricam HODL, ut triangulum KHD est ad curvam superficiem coni HDL. Igitur permutando, Cylindrica superficies DNHK est ad triangulum DKH, ut superficies sphærica HODQL est ad conicam HDL.

a Corol. 1. p 8 l. 2. huius. a 7 l. 1. huius. b 2 l. 2. huius.

Ponatur deinde SH media proportionalis inter DH & GH. Igitur *c* circulus radii SH æquatur superficiei conicæ HDL. Æquatur autem *d* & superficies sphærica HODQL, circulo radii DH. Ergo superficies sphærica HODQL est ad conicam HDL ut circulus radii DH ad circulum radii SH; hoc est in duplicata ratione DH ad SH; hoc est (quia DH,SH, HG sunt continuè *e* proportionales) ut DH ad GH; hoc *f* est ut DE ad EH.

c Archim. l. 1. sph. pro 14. d Arch l. 1 sph. pr 31. e Per const. f 8. Sexti elem.

Quare cùm ostensum suprà sit Cylindricam superficiem DNKH esse ad triangulum DKH, ut sphærica superficies HODQL est ad conicam; erit quoque Cylindrica superficies DNKH ad triangulum sibi inscriptum DKH, ut DE diameter ad subtensam EH. Quod erat demonstrandum.

Partem secundam ita demonstrabimus.

Tota *g* portionis DBCE Cylindrica superficie est ad totam superficiem sphæricam DCEF, ut BC ad circumferentiam DCEF. Pari modo segmenti GHKND Cylindrica superficies DNKH est ad superficiem sphæricam HODQL, ut *h* BC ad peripheriam DCEF. Ergo & reliqua Cylindrica superficies HKBCME est ad reliquam sphæricam superficiem HCEFL, ut BC ad circumferentiam DCEF; hoc est *i* ut KH ad circumferentiam HILP; hoc est *a* ut triangulum rectangulum KHE ad superficiem conicam HEL. Igitur permutando, superficies Cylindrica HKBCME est ad inscriptum sibi triangulum KHE ut superficies sphærica HCEFL ad inscriptam sibi conicam HEL. Est autem superficies sphærica HCEFL, par *b* circulo radij HE; conica verò HEL, par circulo cuius radius est media proportionalis inter HE & HG, puta HV. Quare cùm circulus radii HE, ad circulum radii HV sit, ut HE, prima proportionalium HE, HV, HG est ad tertiam HG, etiam sphærica superficies HCEFL est ad conicam HEL, ut HE ad tertiam HG; hoc est *d* ut diameter DE ad subtensam DH. Quare cùm Cylindrica HKBCME sit ad triangulum EKH, ut sphærica HCEFL ad conicam HEL; etiam Cylindrica HKBCME erit ad triangulum EKH, ut DE ad DH. Quod erat demonstrandum.

g 8. l. 2. huius. h Corol. 1. p. 8. l. 2. huius. i 7. l. 1. huius. a 2. l. 2. huius. b Archim. l. 1. sph. p. 31. c Archim. l. 1. de sph. p. 14. d 8. sexti elem.

Corollarium.

Ex his datur quadratura segmentorum superficiei Cylindricæ DNKH, & HKBCME.

PROPOSITIO XIX.

Esto Cylindri Elliptici recti portio CEDB per alterutrum axem CB, & E punctum in latere abscissa, altitudinem habens DE.

Schematismus 4. Fig. 27.

Cylindrica portionis superficies est ad duo triangula maxima sibi inscripta CED, BED, ut superficies sphæroïdis productæ à basi BDC circa axem CB circumactâ, est ad duas maximas superficies conicas sibi inscriptas DCP, & DBP.

Curva superficies portionis est ad superficiem sphæroidicam productam à perimetro baseos CDB circa CB revolutæ, *a* ut ED altitudo portionis ad DRPQ circumferentiam circuli, cuius diameter DP. Atqui etiam triangulum EDC est ad superficiem conicam DCP, *b* ut ED ad circumferentiam DRPQ (est enim angulus EDC rectus, ac proinde CD ipsum coni latus, est altitudo trianguli EDC.) Ergo superficies curva portionis est ad superficiem sphæroideos, ut triangulum CED est ad conicam superficiem DCP; hoc est ut duo triangula CED, BED sunt ad duas conicas superficies DCP, DBP. Igitur permutando, superficies curva portionis est ad duo triangula CED, BED sibi inscripta, ut superficies sphæroideos ad duas conicas superficies DCP, DBP sibi inscriptas. Quod erat demonstrandum.

a 13. l. 2. huius. b 2. l. 2. huius.

Confer cum demonstratione prop. 26. l. 1. huius. Et nota analogiam inter portionis superficiem ac soliditatem.

PROPOSITIO XX.

Cylindri recti Elliptici portio CEDB, & sphæroïs facta à basi circa axem CB circumacta, sectæ sint plano sectioni portionis maximæ AED parallelo, quod in portione faciat triangulum FHC. In sphæroïde autem circulum QGNK.

Schematismus 4. Fig. 28.

Curva superficies CLHG quæ lineis CO-G, GH, HLC continetur est ad inscriptum sibi triangulum CHG, ut sphæroïdica superficies GOCK est ad maximam superficiem conicam GCK sibi inscriptam.

Altera verò curvæ superficiei pars GHEDMB, quæ lineis GH, HEMB, BDG comprehenditur, est ad inscriptum sibi triangulum BHG, ut reliqua sphæroïdica superficies GDBPK est ad maximam conicam superficiem sibi inscriptam GBK.

Pri-

Primam partem sic ostendo.

Curva superficies CLGH est ad sphæroidicam GOCK superficiem, ut ED a ad peripheriam radij AD; hoc est ut HG ad b peripheriam QGNK hoc est ut triangulum c rectangulũ CGH ad superficiem conicam GCK. Igitur permutando curva superficies CLHG est ad triangulum CGH sibi inscriptum, ut sphæroidica superficies GOCK ad conicam sibi inscriptam GCK. Quod erat demonstrandum.

a Corol. 2. p. 13. l. 2. huius. b 7. l. 2. huius. c 2. l. 2. huius.

Secundam verò partem ita demonstrabimus.

Ellipticæ portionis CEDB curva superficies tota est ad superficiem sphæroideos factæ ab Ellipsi PCDB circa axem CB revolutâ, ut ED portionis altitudo est ad peripheriam circuli, cuius diameter est axis alter DP; quemadmodum *prop. 13. libri huius* demonstratum est. Per corollarium quoque primum ejusdem propositionis superficies curva CLHG est ad sphæroidicam superficiem GOCK, ut ED ad peripheriam diametri DP. Ergo & reliqua superficies curva GHEDMB est ad sphæroidicam reliquam GDBPK, ut ED ad peripheriam diametri DP; hoc est d ut HG ad peripheriam QGNK; hoc est ut e triangulum rectangulum HGB ad conicam superficiem GBK. Igitur permutando, curva superficies GHEDMB est ad triangulum sibi inscriptum HGB, ut sphæroidica superficies GDBPK est ad inscriptam sibi conicam GBK. Quod erat demonstrandum.

d 7. l. 1. huius. e 7. l. 1. huius.

Confer cum demonstratione prop. 27. lib. 1. huius. Et nota analogiam.

PROPOSITIO XXI.

Schematismus 5. Fig. 33.

Esto Cylindri recti Parabolici aut Hyperbolici, sive ex cuiusvis alterius figuræ planæ recto ductu procreati, portio CDHFB, per CD axem baseos, & quodvis in latere punctum F abscissa.

Portionis curva superficies, quæ lineis DKBBF, FHD, continetur, est ad triangulum maximum DFB sibi inscriptum, ut superficies conoïdeos Parabolicæ vel Hyperbolicæ, sive alterius rotundi solidi, quod fit à basi BKDA, circa axem CD revoluta, est ad curvam maximi coni BDA sibi inscripti superficiem.

Curva portionis superficies est ad curvam superficiem rotundi solidi generati à basi circa axem CD circumactâ, ut a FB portionis altitudo ad peripheriam circuli, cujus diameter AB; hoc est ut rectangulum b triangulum FBD ad conicam superficiem BDA. Quare permutando portionis curva superficies est ad triangulum sibi inscriptum FBD, ut rotundi solidi curva superficies ad superficiem conicam BDA sibi inscriptam. Quod erat demonstrandum.

a 14. l. 2. huius. b 2. l. 2. huius.

Hanc confer cum demonstratione propos. 32. & 33. libri 1. huius, & analogiam nota superficiem inter ac soliditatem: quam itidem reperies in duabus sequentibus.

PROPOSITIO XXII.

Schematismus 8. Fig. 57.

Esto Cylindri parabolici aut hyperbolici, aut ex cuiusvis alterius figuræ planæ axem habentis recto ductu procreati, portio CEDB, abscissa per B punctum in latere, & per CB ordinatim applicatam ad baseos axem AD: sitque altitudo portionis DE.

Erit nihilominus curva portionis superficies ad duo maxima triangula sibi inscripta CED, BBD, ut superficies rotundi solidi facti à basi CDB circa CB circumacta, ad duas conicas superficies maximas DCP, DBP, rotundo solido inscriptas.

Portionis curva superficies est ad a superficiem solidi rotundi, quod fit à basi CDB circumactâ circa CB, ut ED portionis altitudo ad peripheriam circuli, cuius radius AD; hoc est ut b rectangulum triangulum EDC ad conicam superficiem DCP. Quare permutando, curva superficies portionis est ad triangulum CED; ut superficies rotundi solidi baseos ad superficiem conicam DCP. Ergo & portionis curva superficies est ad duo triangula CED, BED sibi inscripta, ut rotundi solidi baseos superficies est ad duas conicas superficies DCP, DBP sibi inscriptas. Quod erat demonstrandum.

a 15. l. 2. huius. b 2. l. 2. huius.

PROPOSITIO XXIII.

Schematismus 8. Fig. 57.

Iisdem positis: tam portio, quàm solidum rotundum baseos plano secentur ad maximam portionis sectionem AED parallelo, quod in portione producat triangulum FHG, in solido rotundo baseos circulum GNKQ.

Curva superficies CLHG, quæ lineis COG, GH, HLC continetur, est ad inscriptum sibi triangulum CHG, GOCK curva superficies segmenti à rotundo solido abscissi, est ad curvã superficiem maximi coni GCK, segmento inscripti.

Reliqua item curva portionis superficies GHEDMB est ad inscriptum sibi triangulum BHG, ut reliqua rotundi solidi superficies GDBPK ad inscriptam superficiem coni maximi GBK.

Demonstrabitur eodem discursu quo *prop. 20. huius libri*, nisi quod loco propositionis 13. *libri huius*, isthic citatæ, hic citanda & adhibenda sit propositio 15.

PARS III.

PROPOSITIO XXIV.

Cylindrica superficies portionis à Cylindro circulari recto per punctum in latere & centrum baseos abscissæ sectionis maximæ quadrupla est.

Data sit portio DBCE à Cylindro circulari recto abscissa, cuius maxima sectio sit triangulum ABC. Demonstrandum est Cylindricam portionis superficiem, maximæ sectionis ABC quadruplam esse.

Schematismus 3. Fig. 22.

In-

Inscribantur superficiei Cylindricæ portionis duo triangula maxima DBC, EBC. Cylindrica superficies CBKD est ad triangulum DBC, ut *a* quadrati diameter ad latus, nempè ut ED ad DC. Sed triangulum DCB est ad triangulum ABC, ut DC ad AC, cùm eadem sit utriusque altitudo BC. Ergo ex æquo superficies Cylindrica CAKD est ad triangulum ABC, ut DE ad AC, ut diameter nempè ad semidiametrum. Superficies ergo CBKD, quæ totius Cylindricæ superficiei portionis est semissis, trianguli ABC dupla est. Quare tota portionis Cylindrica superficies trianguli ABC quadrupla est. Quod erat demonstrandum.

a 17. *l.* 2. *huius.*

Corollarium.

En Cylindricæ portionis superficiei quadraturam longè facillimam.

PROPOSITIO XXV.

Schematismus 5. *Fig.* 37.

Cylindrica superficies portionis, à Cylindro circulari recto abscissæ, ad totam Cylindri superficiem absque basibus, eam habet rationem, quam diameter circuli ad circumferentiam.

DAta primò sit portio CDFA, cujus altitudo AF par sit diametro baseos AB. Hujus igitur portionis Cylindro AG sphæra inscribi poterit LMEN. Portionis CDFA Cylindrica superficies est ad superficiem sphæræ baseos, hoc est ad superficiem sphæræ LEMN, ut AF ad circumferentiam ACBD; quemadmodum suprà *a* demonstratum est. Superficies autem sphæræ LMEN, quia Cylindricæ superficiei AG ipsam ambienti æqualis est (ut patet ex Archimedis *manifesto* 6. *lib.* 1. *de sph.*) est ad superficiem Cylindricam AG ut circumferentia ACBD ad seipsam. Igitur ex æquo superficies portionis CDFA est ad Cylindricam AG, ut FA; hoc est ex hyp. ut diameter AB ad circumferentiam ACBD. Quod erat demonstrandum.

a 8. *l.* 2. *huius.*

Detur deinde portio cujusvis altitudinis CDEA, à Cylindro HA abscissa. Superficies Cylindricæ portionum CDEA, CDFA, sunt inter se *b* ut altitudines EA, FA. Quare cùm Cylindricæ superficies AH, AG etiam sint inter se ut altitudines EA, FA, erunt hæ superficiebus portionum proportionales. Cùm igitur superficies portionis CDFA sit ad superficiem Cylindricam AG, ut diameter circuli ad circumferentiam, superficies quoque portionis CDEA, erit ad Cylindricam AH, ut diameter circuli ad circumferentiam.

b 16. *l.* 2. *huius.*

Nota analogiam hujus cum propos. 40. lib. 1. istbic enim ostensum est portionem esse ad Cylindrum suum, ut dua tertia diametri ad circumferentiam, hic verò demonstratur Cylindricam portionis superficiem esse ad Cylindri sui superficiem, ut diameter ad circumferentiam.

Corollarium.

Si igitur in rectis lineis exhibita fuerit ratio superficiei Cylindricæ portionem cingentis ad Cylindri, de quo sumpta est portio, superficiem absque basibus; habebitur quadratura circuli.

Tacquet Cylind. Annular.

PROPOSITIO XXVI.

Schematismus 6. *Fig.* 42. 43.

Data sit Cylindri circularis recti portio DBCE per latus & centrum baseos abscissa, cujus altitudo BC; sectio maxima ABC.

In basi ducatur HL parallela diametro DE, secans AC in P. Ex P ducatur SP parallela ad AB, occurrens BC in S. Per HSL ducto plano abscindatur portio HSCL.

Cylindrica superficies portionis DBCE est ad Cylindricam superficiem portionis HSCL, ut superficies sphæræ à semicirculo DCE productæ, ad superficiem sphærici solidi, quod fit à segmento circulari HCL circa HL in orbem ducto.

SUperficies Cylindrica, sive curva portionis DBCE est ad superficiem sphæræ à basi DCE generatæ, ut *a* BC ad circumferentiam DCEY, cujus radius est AC. Pari modo curva superficies portionis HSCL est ad superficiem sphærici solidi facti ex segmento HCL, circa HL in orbem ducto, ut *a* portionis HSCL altitudo SC, ad circumferentiam circuli, cujus radius PC. Deinde, quia SP, AB, æquidistant, erit BC ad SC, ut AC ad PC; hoc est ut circumferentia *b* radij AC ad circumferentiam radij PC. Igitur permutatim, BC est ad circumferentiam radij AC, ut SC ad circumferentiam radij PC. Quare etiam superficies curva portionis DBCE est ad superficiem sphæræ baseos DCE, ut curva superficies portionis HSCL ad superficiem sphærici solidi à plano HCL producti. Permutando igitur habetur propositum.

a 8. *l.* 2. *huius.*
a 15. *l.* 2. *huius.*
b Pappus l. 5. *p.* 41.

Notetur insignis analogia hujus cum prop. 46. lib. 1. quod enim isthic de soliditate, hic de superficie portionis ostensum est.

Corollarium.

Propositio vera est in omni portione, sive ex Cylindro circulari, Elliptico, parabolico, hyperbolico, sive alio quocumque desumpta sit. Sed in demonstratione loco propositionis 8. *l.* 2. *hujus*, citandæ erunt 13, 14, 15 *ejusdem libri*. Reliqua omnis demonstratio eadem.

Nota rursus analogiam cum Corollario 46. lib. 1.

PROPOSTIO XXVII.

Schematismus 6. *Fig.* 42. 43.

Cylindrici circularis recti portio DBCE per latus & A centrum baseos abscissa, sit divisa plano GFT, basi DCE parallelo. Cylindrica portionis DBCE superficies est ad Cylindricam superficiem segmenti GBFT, ut superficies sphæræ baseos DCE ad superficiem sphærici solidi, quod fit à segmento circulari GFT circa GT in orbem ducto.

SIt ABC maxima portionis sectio, & BC altitudo portionis. Per GT fiat sectio GHLT recta basi DCE, faciens in ea sectionem communem HL, quæ occurrat ipsi AC in P. Ex P ducatur PS parallela ad AB, ductoque per HSL plano, abscindatur portio

tio HSCL. Erit HL parallela ad DE, & CS æqualis FB, & segmenta circularia HCL, GFT æqualia (quæ omnia demonstrata sunt *prop.* 47. *lib.* 1. *hujus*) AC proinde portionum HSCL, GBFT curvæ *a* superficies sunt æquales. Et quia HL parallela est DE, & PS parallela ad AB; erit portio HSCL ipsa illa de qua in *præcedenti* actum est. Per eandem igitur propositionem, erit superficies curva portionis DBCE ad superficiem curvam portionis HSCL; hoc est, ut jam demonstravimus, ad superficiem curvam portionis GBFT, ut superficies sphæræ baseos DCE ad superficiem sphærici solidi facti à segmento HCL, hoe est, per jam demonstrata facti à segmento GFT. Quod erat demonstrandum.

a 16. *l.* 2. *hujus.*

Notetur mirabilis analogia hujus cum p. 47. *lib.* 1.

PROPOSITIO XXVIII.

Schematismus 6. *Fig.* 42. 43.

Iisdem positis, quæ totâ præcedenti; ducantur DH, DL. Superficies Cylindrica HGBTL (quam nimirum à totius portionis DBCE Cylindricâ superficie aufert planum HGTL) est ad Cylindricam superficiem GBFT, ut differentia superficierum sphæricarum, quarum diametri DH, DL, est ad superficiem sphærici solidi producti à segmento circulari HCL circa HL in orbem ducto.

Superficies Cylindrica HGBTL est ad superficiem curvam totam DBCE, ut *a* differentia superficierum sphæricarum, quarum diametri DH, DL, ad superficiem sphæricam diametri DE. Superficies autem curva DBCE est ad superficiem curvam GBFT, ut *b* sphærica superficies diametri DE est ad superficiem rotundi solidi, quod fit à plano GFT, circa GT; hoc est à plano HCL, circa HL in orbem ducto. Ergo ex æquali superficies Cylindrica HGBTL est ad superficiem Cylindricam GBFT, ut differentia sphæricarum superficierum, quarum diametri DH, DL est ad superficiem solidi facti à segmento HCL, circa HL in orbem ducto. Quod erat demonstrandum.

a Coroll. 3. *p.* 12. *l.* 2. *hujus.*
b Præced.

PROPOSITIO XXIX.

Schematismus 6. *Fig.* 42.

Data sit portio DBCE à Cylindro circulari recto per latus & baseos centrum abscissa, altitudinem habens CB; quæ dividatur plano GFT basi DCE parallelo.

Si quadretur Cylindrica superficies GBFT; aut ejus proportio ad totam superficiem DBCE innotescat, dabitur quadratura circuli.

Ducatur HL parallela ad DE, auferens à peripheriâ DCEY arcum HCL peripheriæ commensurabilem. Per HL fiat sectio HGTL recta ad basim DCE. Erit GT parallela ad HL. Per GT fiat sectio GFT parallela basi. Quoniam quadrata est tam *c* superficies DBCE, quàm superficies *d* DGH, & ETL; etiam reliqua superficies HGBTL quadrata est. Quare si quadretur etiam superficies GBFT, reliqua HCLTFG quadrabitur. Atqui hæc pars est superficiei Cylindricæ, cujus basis est DCEY, altitudo CF; & quidem nota pars, cùm superficies HCLTFG sit ad totam Cylindri superficiem curvam ut arcus HCL ad commensurabilem sibi ex constr. peripheriam DCEY. Ergo quadrabitur etiam tota Cylindri dicti curva superficies. Quæ cùm ad circulum *a* reducta jam sit, ipse etiam circulus quadrabitur.

c 17. & 24. *l.* 2. *hujus.*
d 18. *l.* 2. *hujus.*
a Ab Archimede.

Quod si innotescat saltem ratio superficiei GBFT ad superficiem DBCE. Quoniam quadrata est DBCE, quadrabitur etiam GBFT: unde rursum quadratura circuli, ut jam demonstravimus.

Hanc confer cum 51. *lib.* 2. *& miram observa inter portionum soliditatem, ac superficiem analogiam.*

PROPOSITIO XXX.

Schematismus 6. *Fig.* 42. 43.

Si innotescat ratio, quam habet superficies sphærici solidi, facti à circulari segmento aliquo HCL, circa chordam suam HL in orbem ducto ad superficiem sphæræ, dabitur quadratura circuli.

Ponantur eadem, quæ præcedenti propositione, Superficies sphærica diametri DE, est ad superficiem sphærici solidi facti à plano HCL, sive GFT, ut curva *b* portionis superficies DBCE est ad curvam superficiem GBFT. Quare si innotescat ratio superficiei sphærici diametri DE ad superficiem solidi facti ex HCL, etiam innotescet ratio superficiei DBCE ad superficiem GBFT: quâ cognitâ, habetur quadratura circuli, ut ostensum est *prop. præcedenti.*

b 37. *l.* 2. *hujus.*

Confer cum 52. *lib.* 1. *& mirabilis notetur inter utriusque analogia.*

PROPOSITIO XXXI.

Schematismus 6. *Fig.* 42. 43.

Si innotescat quam rationem habeat superficies solidi sphærici facti à segmento aliquo circulari GFT, circa chordam suam GT in orbem ducto, ad superficiem conicam sibi inscriptam, dabitur quadratura circuli.

Ponantur eadem, quæ in præcedentibus, & plani GFT ac maximæ sectionis ABC communis sectio sit KF. Ducantur rectæ, GF, TF, & GB, TB. Deinde segmentum GOFT cum triangulo GFT in orbem ducatur circa GT. Inscribentur sphæricali solido duo coni recti oppositi, communem habentes basim. Demonstratum est *a* curvam superficiem GBFT esse ad duo maxima triangula sibi inscripta GBF, & TBF, ut superficies solidi facti à plano GOFT, circa GT circumacto, ad superficies conicas à rectis GF, TF productas. Quare si innotescat ratio superficiei rotundi solidi ad superficiem conicam sibi inscriptam, etiam innotescet ratio superficiei GBFT ad duo inscripta triangula GBF, TBF; adeoque superficies GBFT quadrabitur. Atque inde *b* ipsius circuli dabitur quadratura.

a 12. *l.* 2. *hujus.*
b 29. *l.* 1. *hujus.*

Notetur etiam hic in portionibus, soliditatum ac superficierum analogia ex hac & 53. lib. 1.

FINIS LIBRI SECVNDI.

CYLINDRICORUM ET ANNULARIUM

LIBER TERTIUS.

Hic tandem aggredior potissimam operis hujus partem, annularia nimirùm corpora non circularia tantùm, sed Elliptica etiam, Parabolica, Hyperbolica, imò ex figuræ cujusvis planæ circulari ductu procreata. Hæc præcipuè conatus iste noster spectavit; atque horum maximè gratiâ priores libros conscripsi. Quòd enim portio per latus & basis diametrum abscissa est in Cylindro, hoc in circulari annulo sphæra genitoris circuli, in Elliptico, genitricis Ellipseos, sphæroïs in Parabolico & Hyperbolico, Parabolæ aut Hyperbolæ genitricis conois est.

DEFINITIONES
AD DUOS SEQUENTES LIBROS.

Schematismus 8. *Fig.* 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66.

1. Esto figura quævis plana CKB, axem habens EK, & subtensam CB, ordinatim axi applicatam. In subtensâ sumatur punctum aliquod A, quod vel extra figuram sit in subtensâ productâ, vel in ipso figuræ perimetro. Deinde puncto A immoto permanente, figura CKB in orbem circumducatur, sic ut recta ABC in uno feratur plano ad EK recto, & figura, dum circumducitur, EK sibi ipsi maneat parallela, solidum, quod à figurâ CKB sic in orbem ducta, describitur, *Annulum* voco.

Schematismus 8. *Fig.* 59. 61. 63. 65.

2. *Annulus clausus* est, cùm punctum immobile (A) in ipso perimetro figuræ statuitur. Ejusmodi repræsentant figuræ 59. 61. 63. 65.

3. *Annulus patens*, cùm immobile punctum (A) est extra figuram in subtensâ productâ. Exhibentur figuris 58. 60. 62. 64. 66.

Fig: 58. 60. 62. 64. 66.

4. *Figuram genitricem* voco CKB, quæ in orbem ducta annulum fecit.

Fig. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66.

5. *Polus annuli*, sive *centrum*, est punctum A, quod mansit immobile.

6. *Latitudo*, seu *spissitudo annuli* est BC, ipsa nimirum subtensa.

7. *Punctum medium figuræ* est E, in quo figuræ genitricis axis KE secat subtensam, seu latitudinem CB bifariam.

8. *Diameter revolutionis* est recta AE polum annuli cum puncto medio connectens.

9. *Peripheria annuli media* est ED, quam punctum medium E in revolutione describit.

Nota: In annulo clauso quem circulus genuit, peripheria media æqualis est peripheriæ genitrici.

Fig. 58. 60. 62. 64. 66.

10. *Peripheria annuli maxima* est CH, quæ in revolutione fit ab extremo subtensæ puncto C.

11. In patente annulo *peripheria minima* est BG, quæ describitur ab alterâ latitudinis, seu subtensæ extremitate B, inter polum A & medium E punctum constituta.

12. *Maxima annuli patentis sectio per polum facta*, est planus [a] annulus, quem in revolutione describit subtensa CB, maximâ & minimâ peripheriâ comprehensus.

[a] *Vide defin 25. ante l. 1. hujus.*

13. *Maxima per polum clausi annuli sectio* circulus est, cujus radius est annuli latitudo CB.

Fig. 59. 61. 63. 65.

14. *Maxima annuli sectio per figuræ genitricis axem* KF, est Cylindrica superficies in revolutione ab axe KE genita.

Fig. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66.

15. *Annuli pars exterior* ea est, quæ ab genitricis figuræ exteriori semisse EKC procreatur.

16. *Pars interior* quæ gignitur à figuræ genitricis semisse interiori EKB.

17. *Superficies annularis exterior* ea est, quam genitoris perimetri exterior semissis CK producit.

18. *Superficies annularis interior* est, quæ producitur à genitoris perimetri semisse interiori BK.

Porrò annuli à figuris genitricibus speciem ac denominationem sumunt.

19. Itaque *Circularis annulus* est, quem circulus, *Ellipticus* quem Ellipsis; *Parabolicus*, quem Parabola; *Hyperbolicus* quem Hyperbola genuit, & sic de cæteris.

Rursum quemadmodum sphæroidum aliæ longæ sunt, aliæ latæ; ita & annulorum ab Ellipsibus genitorum alij longi sunt, lati alij.

Schematismus 8. *Fig.* 62. 63.

20. *Annulus Ellipticus longus* est, qui fit ab Ellipsi ita positâ, ut major ejus axis KF sit revolutionis diametro AE perpendicularis.

21. *Annulus Ellipticus latus* est, qui gignitur ab Ellipsi ita positâ, ut minor ejus axis KF diametro revolutionis perpendiculariter insistat.

Fig. 60. 61.

22. Quemadmodum in Annulis ita & in Cylindris peripheriæ mediæ reperiuntur. *Mediam* igitur *in* Cy-

Cylindro integro peripheriam eam voco, quæ centro baseos per medium radij punctum describitur.

In cavo autem Cylindro *Peripheriam mediam* voco, quæ centro A descripta, bisecat CB latitudinem plani annuli qui cavi Cylindri basis est. *Schematismus 9. Fig. 69.*

SYNOPSIS

LIBRI TERTII.

PARS I.

Annulorum tum ad Cylindros, tum ad invicem comparatorum multiplices proprietates demonstrantur.

In primis autem hæ. Omnis annulus (hoc est à quâvis planâ figurâ genitus; atque ita semper intellige) ad Cylindrum, super figurâ genitrice erectum, eam habet rationem, quam peripheria annuli media ad Cylindri altitudinem: & omnis patens annulus sibi contigui annuli æquè crassi, & ab æquali figurâ geniti, triplus est. Et si a quotcumque fuerint æquè crassi contigui annuli, ab æqualibus figuris geniti, quorum primus clausus sit, eam inter se rationem habent, quam series numerorum imparium ab unitate: & clausi annuli, à similibus figuris geniti, triplicatam habent suarum latitudinum (AB, b AC) rationem: & clausus c annulus quotcumque annulos contiguos ab æqualibus & similibus figuris genitos complectens, eorum aggregatum toties continet, quot contigui erant annuli. Reliqua libri decursus dabit.

a *Vide fig. 79 Schematismus 11.* b *Vide fig. 80. Schematismus 11.* c *Vide fig. 79.*

PARS II.

Annulorum segmenta, planis ad revolutionis diametrum rectis abscissa, cum semissis Cylindricæ segmentis, etiam planis ad basim rectis divisæ, comparantur.

PARS III.

Annulorum exteriores partes a conferuntur cum b interioribus. Et quidem circularis annuli pars exterior exceedit interiorem genitoris circuli sphærà bis sumptâ.

a *Def. 15. l. 3. hujus.* b *Def. 16. l. 3. hujus.*

Universim autem annulorum à quibusvis figuris planis genitorum pars exterior interiorem superat rotundo solido bis sumpto, quod fit à genitrice figurâ circa axem suum c FD, qui revolutionis diametro AD perpendiculariter insistit, circumactâ. Quod si à circularis annuli genitore circulo rectæ ST, a R, axi FG parallelæ, æqualia abscindant segmenta SET, a CR; annulare segmentum exterius genitum à plano SET, excedet interius genitum à plano a CR, sphærà diametri ST bis sumptâ. Cætera vide in libri decursu.

c *Vide Schematismus 13. Fig. 89. 90. 91. 92.*

PARS IV.

Quam proportionem habet circuli circumferentia ad duas tertias suæ diametri partes, eam omnis clausus circularis annulus habet ad circuli genitoris sphæram; & omnis Ellipticus clausus annulus ad sphæroidem genitricis Ellipseos, longus quidem ad longam, ad latam latus. Quam deinde rationem habet peripheria media ad duas tertias latitudinis annuli, eam annulus circularis patens ad sphæram habet genitoris circuli, & annulus patens Ellipticus ad genitricis Ellipseos sphæroidem; ad longam longus, latus ad latam. Ad hæc clausus annulus Parabolicus ad conoidem genitricis Parabolæ est ut 16 ad 3. Annulus autem Parabolicus patens ad genitricis Parabolæ conoidem rationem habet compositam ex ratione diametri revolutionis d (AC) ad (BC) semissem latitudinis annuli, & ex ratione 16 ad 3. At Parabolici clausi annuli pars exterior est ad interiorem, ut 11 ad 5. Tandem qui partium exterioris ac interioris rationem in annulo circulari, vel Elliptico exhibuerit, is circuli quadraturam dabit.

d *Schematismus 16. Fig. 117.*

PROPOSITIO I.

Esto planus annulus, cujus latitudo CD, centrum A; sit autem latitudo CD bisecta in B; & centro A, per B, fiat circumferentia BH. Sit tandem DG rectangulum cujusvis altitudinis CG.

Rectangulum DG est ad annulum planum; ut rectanguli altitudo CG ad peripheriam BH.

Schematismus 9. Fig. 67.

Ex B ducatur BF parallela ad CG, occurrens GM in F, ex A quoque per F ducatur AF, occurrens DM in K, & CG in E. Trapezium CEKD est ad planum annulum datum, ut a EC, ad circumferentiam CP; hoc est ut b FB ad circumferentiam BH. Atqui rectangulum DG æquatur trapezio CEKD. Ergo rectangulum DG est ad annulum planum ut FB, sive CG, ad peripheriam BH. Quod erat demonstrandum.

a 3 *l. 1. hujus.* b 4 *l. 1. hujus.*

Corollarium I.

Similiter circulus ACK erit ad rectangulum AG, ut peripheria BZ centro A per medium radij AC punctum ducta, ad BF, seu CG. Nam CM æquatur triangulo AEC, ad quod ita se habet circulus c ACK, ut peripheria CK ad CE; hoc est ut peripheria BZ ad BF, sive CG.

Schematismus 9. Fig. 68. c 2 *l. 1. hujus.*

Corollarium II.

Reducuntur igitur circuli, planique annuli ad rectangula, quorum bases sunt annulorum latitudines, seu diametri circulorum; altitudo autem peripheria media.

PROPOSITIO II.

Esto Cylindrus cavus productus à rectangulo CBHG circa axem AP circumacto; ejusque peripheria a media sit DZ; quæ nimirum centro A per D medium ipsius CB punctum describitur. Datum quoque sit parallelepipedum CN, cujus basis sit ipsum illud CBHG, rectangulum quod cavum Cylindrum genuit; altitudo autem CK.

Schematismus 9. Fig. 69. 70. a *defin. 22. l. 3. hujus.*

Pa-

Parallelepipedum est ad cavum Cylindrum, ut altitudo CK ad peripheriam mediam DZ.

ACcipiatur BK pro basi ipsius KN parallelepipedi. Tunc parallelepipedi altitudo erit CG, eadem nimirum quæ Cylindri cavi. Ergo parallelepipedum CN erit ad Cylindrum cavum, ut *b* basis ad basim, hoc est ut rectangulum BK ad planum annulum BCZ; hoc est ut altitudo CK *c* ad peripheriam DZ. Ergo parallelepipedum CN est ad cavum Cylindrum, ut CK altitudo ad peripheriam mediam DZ. Quod erat demonstrandum.

b 6 l. 1. hujus.
c 1 l. 1. hujus.

Corollarium.

Similiter parallelepipedum, cujus basis est rectangulum describens Cylindrum, est ad Cylindrum, ut parallelepipedi altitudo ad peripheriam mediam Cylindri.

PROPOSITIO III.

Annulare solidum inscriptionibus Cylindricorum corporum exhauritur.

Schematismus 9. Fig. 71.

ESto quodvis annulare solidum genitum à figurâ DEC; centrum sit A; crassities DC; peripheria media BA, axis figuræ genitricis EB.

Assignetur solidum ζ quantumvis parvum, clarum est super annulo plano latitudinis DC fieri posse cavum Cylindrum minorem solido ζ. Sit hujus Cylindri altitudo ψ. Dividatur axis BE in tot partes æquales Bγ, γπ, πρ, ρε; donec una particula Bγ sit minor altitudine Cylindri ψ. Erit ergo Cylindrus cavus super annulo latitudinis DC erectus, altitudinem habens Bγ, minor Cylindro cavo priori, altitudinis ψ, ac proinde multò minor solido dato ζ. Per divisionum puncta γ, π, ρ, ductis lineis ad DC parallelis inscribantur, & conscribantur figuræ genitrici rectangula, hæc si unà cum figurâ genitrice, suprà datum planum perpendiculariter erectâ, centro A in orbem ducantur, sic ut semper maneant dato plano perpendicularia; solido annulari inscribent, & conscribent Cylindros cavos suprà invicem positos: eritque inscriptorum, ac conscriptorum corporum differentia par Cylindro, quem descripsit rectangulum DΦVC, quod sic ostendo.

Rectæ KSG, LM protrahantur in y & Z, item IQH, RN, in X & ω. Constat Cylindros cavos à rectangulis KM, Zω centro A descriptos, æquari; nam altitudines EργB per const. sunt pares, item Cylindri unius basis, annulus nempè planus à rectâ SM descriptus, æquatur annulo plano descripto per æqualem ipsi SM rectam, y Z, qui basis est Cylindri alterius cavi.

Pari ratione demonstrabitur Cylindros cavos à rectangulis IG, θH, ΦF, MN, NP, PC genitos, æquari Cylindris cavis, quos produxerunt rectangula ωx, HF, OD, YZ, Pω, Vβ. Cavi igitur Cylindri à dictis rectangulis KM, IG, θH, ΦF, MN, NP, CP descripti, simul sumpti, hoc est ipsa inscriptorum, ac conscriptorum differentia, æquantur Cylindro cavo, descripto à rectangulo DΦVC. Atqui Cylindrus cavus descriptus à rectangulo DΦVC suprà ostensus est minor esse solido ζ. Igitur inscriptorum ac conscriptorum corporum differentia etiam minor est quàm ζ. Multò igitur magis ipsius annularis solidi, & inscriptorum sibi corporum differentia, erit dato solido ζ minor; hoc est annulare solidum per inscripta sibi corpora *a* exhauritur. Quod erat demonstrandum.

a Defin. 28 l. 1. hujus.

Demonstratio in clausis annulis hoc solum habet diversum, quod solidum ab infimo rectangulo genitrici figuræ conscripto productum, Cylindrus sit integer.

PROPOSITIO IV.

Cylindrus ex cujusvis planæ figuræ recto ductu procreatus, per inscripta solida exhauritur.

Schematismus 7. Fig. 72.

CYlindri basis esto figura quævis DEC, cujus axis BE, altitudo Cδ: ad axem ordinatim posita sit DC; & solidum quantumvis parvum sit ζ. Manifestum est exhiberi posse parallelepipedum altitudinis Cδ, quod minus sit solido ζ. Hujus parallelepipedi basis esto rectangulum ξ. Axis BE dividatur in tot æquales partes donec una Bγ cum DC faciat rectangulum minus quàm ξ. Erit ergo parallelepipedum super rectangulo ex γ B & DC, altitudinis Cδ, minus parallelepipedo baseos ξ, altitudinis ejusdem Cδ, ac proinde multò minus quàm ζ solidum. Jam per divisionum puncta γ, π, ρ, ductis parallelis ad DC, basi DEC inscribantur, & conscribantur rectangula, superque ijs erigantur parallelepipeda Cylindro inscripta, & conscripta. Manifestum est rectangulorum inscriptorum, ac conscriptorum differentias KM, IG, θH, ΦF, MN, NP, PC, æquari rectangulo DΦVC. Igitur parallelepipeda super differentijs illis in altitudine communi Cδ erecta, æquantur parallelepipedo altitudinis Cδ super rectangulo DΦVC, sive γB, DC rectangulo; ac proinde minora sunt dato solido ζ. Atqui parallelepipeda super rectangulorum inscriptorum ac conscriptorum differentijs in altitudine Cδ erecta, sunt differentia parallelepipedorum Cylindro inscriptorum, & conscriptorum. Ergo etiam hæc minor est solido ζ. Ergo multò magis ipsius Cylindri, & inscriptorum ipsi parallelepipedorum differentia minor est dato solido ζ; hoc est *a* Cylindrus per inscripta sibi parallelepipeda exhauritur. Quod erat demonstrandum.

a Defin. 28. l. 1. hujus.

PROPOSITIO V.

Omnis annulus, qui à figurâ planâ, quæcumque, axem *b* habente diametro revolutionis perpendicularem, producitur, æqualis est Cylindro cujus basis est figura, annulum describens, altitudo autem par circumferentiæ *c* mediæ.

b Defin. 20. l. 1. hujus.
c Defin 9. l. 3. hujus.

Schematismus 10. Fig. 73. 74. 75.

ANnularis solidi genitrix figura esto quævis figura plana DEC; sive ea circulus sit, sive Ellipsis, sive Parabola, aut Hyperbola, sive alia quæcumque; modò axem habeat; qui sit BE; latitudo annuli CD sit ad axem ordinatim posita; centrum A; peripheria media BS, sit etiam Cylindrus DR erectus super eâdem figurâ genitrice DEC, cujus altitudo CR par sit circumferentiæ mediæ BS. Demonstrandum est Cylindrum annulo æqualem esse.

Axe BE per lineas ad DC parallelas in æquales aliquot partes diviso, inscribantur figuræ DEC re-

rectangula MQ, NO, PK: quæ si unà cum figurâ genitrice DEC, centro A ducantur in orbem, inscribent annulo Cylindros cavos sibi mutuò superimpositos, quorum bases erunt annuli plani à rectis QR, OX, KL, descripti, altitudines verò HG, GF, FB. Tunc super iisdem rectangulis Cylindro DR parallelepipeda ejusdem cum Cylindro altitudinis inscribantur.

a Ex defin. 20. l. 1. hujus.
b Defin. 22. l. 3. hujus.

Quoniam yM bisecta est in H, ab axe *a* EB, etiam QR bisecta erit in G. Ergo peripheria, quam punctum, H, describit, dum figura genitrix cum inscriptis rectangulis centro A circumagitur, est peripheria media *b* cavi Cylindri ab rectangulo MQ dicto jam moto descripti. Atqui peripheria à puncto H descripta, æqualis est ipsius dati annuli peripheriæ mediæ BS, descriptæ à puncto medio B. Ergo peripheria media Cylindri cavi à rectangulo MQ descripti, æquatur mediæ peripheriæ dati annuli BS; hoc est altitudini Cylindri dati DR; ac proinde etiam *c* altitudini parallelepipedi suprà rectangulum MQ, ipsi Cylindro inscripti. Igitur cavus Cylindrus à rectangulo MQ descriptus, æquatur *d* parallelepipedo, quod super eodem MQ rectangulo, DR Cylindro inscriptum est.

c Per hypoth.
d 2. l. 3. hujus.

Eodem prorsus discursu ostendam Cylindros cavos à rectangulis, NO, PK, descriptos æquari parallelepipedis, quæ super iisdem rectangulis Cylindro DR fuere inscripta. Omnes igitur cavi Cylindri annulo inscripti, æquantur omnibus parallelepipedis DR Cylindro inscriptis. Atque hoc semper eveniet, quotcumque Cylindros cavos annulo, & parallelepipeda Cylindro DR inscripserimus. Quare cùm insuper per Cylindros *e* cavos datus annulus; & per parallelepipeda Cylindrus DR *f* exhauriatur; Annulus Cylindro *g* æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

e 3. l. 3. hujus.
f 4. l. 3. hujus.
g 1. l. 1. hujus.

Per Heterogenea.

Schematismus 10. Fig. 73. 74. 75.
h Defin. 12 & 13. l. 3. hujus.

In figurâ genitrice CED, ducatur recta yM ad figuræ axem EB perpendicularis; perque hanc annulus secetur plano ad sectionem *h* maximam per polum factam parallelo. Sectio erit annulus planus, comprehensus peripherijs yΔ, Mω, & latitudinem habens yM, à figuræ axe BE bisectam in H, hujus autem media plani annuli peripheria à puncto H descripta, par est peripheriæ mediæ BS solidi annuli dati. Deinde per eamdem rectam yM, seca Cylindrum plano ad Cylindri axem parallelo, sectio erit rectangulum sub yM & Cylindri altitudine CR comprehensum. Jam verò planus annulus, qui sectio solidi annuli est, *a* æquatur rectangulo (quod sectio Cylindri est) contento sub yM & peripheria à puncto H in revolutione descriptâ, hoc est contento sub yM, & peripheriâ media BS; hoc est ex hypothesi sub yM, & CR Cylindri altitudine. Igitur sectio solidi annuli dati, & Cylindri sectio æquales sunt. Quod cùm semper eveniat; ex heterogeneorum regula solidus annulus Cylindro æqualis erit. Quod erat propositum.

a 1. l. 3. hujus.

Aliter.

In figurâ genitrice ducantur rectæ IK, PL parallela ad axem EB, & æqualiter ab eo remotæ, ac proinde inter se æquales. Hæ cum figurâ genitrice in orbem ductæ, describent intra annulum Cylindricas superficies rectas: ea, quam describit IK, æquatur *b* rectangulo contento sub IK, & peripheria radij AK: quam facit PL, æquatur rectangulo ex PL, & peripheriâ radij AL. Quare cùm peripheriæ radiorum AK, AL, simul sumptæ, duplæ sint peripheriæ mediæ BS; ac proinde & rectangula ex IK, & peripheria radij AK, ex PL, & peripheriâ radij AL, simul sumpta, rectanguli ex IK, sive PL, & peripheriâ media BS sint dupla, etiam Cylindricæ superficies à rectis IK, PL factæ, erunt duplæ rectanguli ex IK, seu PL & peripheriâ BS; hoc est (quia ex hypot. peripheriâ media BS æquatur altitudini Cylindri CR) æquales erunt duobus rectangulis, quæ producuntur intra Cylindrum, factis sectionibus per easdem lineas IK, PL, ad basim rectis. Quare cùm hoc semper contingat; ex heterogeneorum regulâ annulus Cylindro æqualis erit. Quod erat propositum.

b 4. l. 2. hujus.

PROPOSITIO VI.

Omnis annulus à quacumque plana figura (DEC) procreatus, axem (EB) habente revolutionis diametro (DA) perpendicularem, est ad Cylindrum DT, cujus basis est figura eadem (DEC) ut media annuli peripheria (BS) ad Cylindri altitudinem (BZ, sive CT.)

Schematismus 10. Fig. 73. 74. 75.

INtelligatur super eâdem basi Cylindrus DR altitudinem habens CR, mediæ peripheriæ BS æqualem. Cylindrus DT est ad Cylindrum DR, ut CT ad CR. Quare cùm Cylindrus DR par sit *a* annulo, & ex hypothesi CR sit par peripheriæ mediæ BS; erit quoque Cylindrus DT ad annulum, ut CT ad BS peripheriam mediam. Quod erat demonstrandum.

a Præced.

Hoc Theorema independenter à præcedenti per inscriptiones cavorum Cylindrorum etiam poterat demonstrari.

PROPOSITIO VII.

Si figura genitrix cujuscumque annuli sit ad basim cujusvis Cylindri, ut reciprocè Cylindri altitudo est ad peripheriam annuli mediam: annulus Cylindro æqualis est. Et è converso.

SUper figurâ genitrice intelligatur Cylindrus (quem vocemus Z,) altitudinem habens peripheriæ mediæ parem. Quia Cylindrus Z, & Cylindrus datus habent bases & altitudines reciprocè proportionales, erit Cylindrus datus par *b* Cylindro Z, hoc est *c* annulo dato. Quod erat propositum. Similis est demonstratio conversæ.

b 11. Elem. 12.
c 5. l. 3. hujus.

PROPOSITIO VIII.

Omnis annulus ad omnem Cylindrum rationem habet compositam ex ratione figuræ genitricis ad basim Cylindri, & ex ratione peripheriæ mediæ ad Cylindri altitudinem.

SUper figurâ genitrice intelligatur Cylindrus (quem vocemus Z) in altitudine peripheriæ mediæ. Habebit Cylindrus Z ad datum Cylindrum, rationem compositam ex ratione altitudinis sive (hoc est

est peripheriæ mediæ) ad altitudinem alterius, & ex ratione suæ baseos, quæ est figura genitrix, ad basim alterius. Atque Cylindrus Z, æquatur annulo dato. Ergo &c.

PROPOSITIO IX.

Schematismus 11. Fig. 76.

Annuli circulares à concentricis (BG, OH) circulis geniti, eam inter se rationem habent, quam circuli genitores.

Et omnes annuli geniti à figuris planis, positis circa eundem axem, qui revolutionis diametro (AC) sit perpendicularis, eandem inter se rationem habent, quam figuræ genitrices.

Super genitoribus circulis, aut figuris genitricibus intelligantur Cylindri altitudinem habentes parem peripheriæ mediæ CF, quæ annulis datis est communis, cùm ex hyp. punctum medium omnibus commune sit C. Erunt hi Cylindri æquales *b* annulis. Atqui Cylindri, cùm altitudinem habeant eandem, erunt inter se ut bases; hoc est per const. ut figuræ genitrices. Ergo & annuli. Quod erat propositum.

b 5 l. 3. hujus.

PROPOSITIO X.

Omnes annuli, quorum reciprocantur figuræ genitrices & peripheriæ mediæ, sive revolutionum diametri, æquales sunt, & è converso.

a Schematismus 11. Fig. 77.

Super figuris genitricibus BFO, CGE, intelligantur Cylindri (quos vocemus X & Z) quorum altitudines sint peripherijs medijs PN, QK æquales. Quoniam ex hypothesi est ut figura BFO ad figuram CGE, ita QA, ad PA; hoc est *a* peripheria media QK ad peripheriam mediam PN; hoc est per const. latitudo Cylindri super CGE erecti ad altitudinem Cylindri super BFO, patet Cylindrorum bases, & altitudines reciprocari, ac proinde eos esse æquales. Sed annuli his *b* Cylindris æquantur. Ergo etiam annuli inter se æquales sunt. Quòd erat demonstrandum.

a Pappus l. 5. p. 41.

b 5 l. 3. hujus.

Similis est demonstratio conversæ.

PROPOSITIO XI.

Omnes annuli à similibus figuris geniti, quorum latitudines & sectiones per polos *c* maximæ reciprocantur, æquales sunt, & è converso.

c Defin. 12 & 13. l. 3. hujus.

Schematismus 11. Fig. 77.

Annulorum latitudines sint BO, & CE; sectiones per polos maximæ sint annuli plani BON, CEK. Ostendere oportet, si ut CE est ad BO, ita reciprocè sectio maxima BON, ad maximam sectionem CEK, annulos æquari.

Plani annuli BON, CEK *d* æquantur rectangulis, quorum bases sunt BO, CE; altitudines verò peripheriæ mediæ PN, QK. Sed horum rectangulorum ratio composita est ex ratione altitudinis ad altitudinem (hoc est ex ratione peripheriæ PN ad peripheriam QK; hoc est ex *e* ratione PA, ad QA) & ex ratione BO ad CE. Ergo & annulorum planorum BON, CEK ratio composita est ex ratione PA ad QA, & ratione BO ad CE. Quare cùm ex hypothesi CE sit ad BO, ut reciprocè annulus planus BON, ad annulum planum CEK; etiam ratio CE, ad BO composita erit ex ratione PA, ad QA, & ratione BO ad CE. Unde cùm ratio CE ad BO sit majoris inæqualitatis, ut ostendam infrà, erit ratio PA, ad QA duplicata *a* rationis CE ad BO. Sed quoniam ex hypothesi similes sunt figuræ genitrices BFO, CGE, erit ratio figuræ CGE, ad figuram BFO duplicata rationis CE ad BO. Ergo PA est ad QA, ut reciprocè figura CGE ad figuram BFO. Ergo dati solidi annuli *b* æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

d 1 l. 3. hujus.

e Pappus l. 5. p. 41.

a Per lemma inferius.

b Præced.

Quod autem ratio CE ad BO sit majoris inæqualitatis, sic ostendo. Si negatur CE esse major, quàm BO, sit par, aut minor. Igitur planus annulus CEK minor est plano annulo BON. Jam verò ex hypothesi est ut CE ad BO, sic annulus BON, ad annulum CEK, ac proinde cùm CE ponatur par aut minor BO; annulus BON est par, aut minor annulo CEK: quod est absurdum, cùm ostensus etiam sit esse major.

Demonstratio conversæ fiet ex primâ parte per reductionem ad impossibile.

Lemma.

Schematismus 11. Fig. 77.

Dentur rationes majoris inæqualitatis AB ad CB, & DE ad FE. Sitque ratio AB ad CB composita ex ratione DE ad FE, & ex ratione CB, ad AB.

Dico rationem DE ad FE duplicatam esse rationis AB ad CB.

Fiat ut CB ad AB, sic FE ad GE. Ratio DE, ad GE componitur ex ratione DE, ad FE, & ex ratione FE ad GE; hoc est per constructionem CB, ad AB. Sed ex hypothesi ratio AB, ad CB componitur ex iisdem rationibus. Ergo rationes DE ad GE, & AB, ad CB sunt æquales. Quare cùm per constructionem rationes GE ad FE, & AB, ad CB, etiam æquales sint; patet rationem DE ad FE duplicatam esse rationis AB ad CB.

PROPOSITIO XII.

Omnes annuli à similibus figuris geniti, quorum diametri revolutionum duplicatam habent rationem latitudinum sumptarum reciprocè, sunt æquales. Et è converso.

Schematismus 11. Fig. 77.

Annulorum latitudines sint BO, & CE; revolutionum diametri PA, QA.

Si ratio PA ad QA est duplicata rationis CE ad BO, annuli æquales erunt: & si annuli æquales sunt, erit ratio PA ad QA, duplicata rationis CE ad BO.

Quoniam ratio PA ad QA ponitur duplicata rationis CE ad BO, erit ratio CE ad BO composita *a* ex ratione PA, ad QA, & ratione BO ad CE. Sed

a Per lemma inferius.

Sed ratio sectionis maximæ BON, ad sectionem maximam CEK, componitur ex iisdem *b* rationibus. Ergo ratio CE ad BO æquatur rationi sectionis maximæ BON, ad sectionem maximam CEK. Ergo dati annuli *c* æquales sunt. Quod erat demonstr.

b Demonst. præced. *c Præced.*

Demonstratio conversæ deducetur ex prima parte per reductionem ad impossibile.

Lemma.

Schematismus 11. Fig. 77.

Sit ratio DE ad FE, duplicata rationis AB ad CB. Dico rationem AB ad CB componi ex ratione DE ad FE, & ratione CB ad AB.

Fiat ut AB, ad CB, sic DE, ad GE.

Quoniam ratio DE, ad FE, ponitur duplicata rationis AB ad CB, estque per const. ratio DE ad GE par rationi AB, ad CB; etiam ratio GE ad FE rationi AB ad CB, æqualis erit. Sed ratio GE ad FE componitur ex ratione GE ad DE, (hoc est ratione *a* CB ad AB) & ex ratione DE ad FE. Ergo etiam ratio AB ad CB, componitur ex ratione CB, ad AB, & ratione DE, ad FE. Quod erat demonstr.

a per const.

PROPOSITIO XIII.

Omnes annuli rationem inter se habent compositam ex ratione diametrorum revolutionis (PA, QA,) & ex ratione figurarum genitricium (BFO, CGE.)

Schematismus 11. Fig. 77.

Super figuris genitricibus BFO, & CGE erecti intelligantur Cylindri altitudinem habentes parem peripherijs medijs PN, QK, erunt hi annulis *b* æquales. Quare cùm horum Cylindrorum ratio composita sit ex ratione basiū, nempè ex ratione BFO, ad CGE; & ex ratione altitudinum, hoc est ratione peripheriæ PN, ad peripheriam QK, hoc est, ratione PA, ad QA; etiam ratio annulorum ex iisdem rationibus BFO, ad CGE, & PA ad QA, composita erit. Quod erat demonstrandum.

b 5. l. 3. huius. *c Pappus l. 5. p. 41.*

PROPOSITIO XIV.

Omnes annuli à similibus figuris geniti rationem inter se habent compositam ex ratione latitudinum (BO, CE) & sectionum per polos *d* maximarum (BON, CEK)

Schematismus 11. Fig. 77. d defin. 12. & 13. l. 3. huius.

Ratio plani BON, ad planum annulum CEK composita *a* est ex ratione PA, ad QA, & ratione BO, ad CE. Ergo ratio quæ componitur ex rationibus BON ad CEK, & BO, ad CE eadem est cum eâ, quæ composita est ex ratione PA ad QA, & ratione BO, ad CE, bis, sive duplicatâ. Sed quoniam ex hyp. figuræ genitrices BFO, CGE, similes sunt, ratio BFO, ad CGE est duplicata rationis BO, ad CE. Ergo ratio composita ex rationibus BON, ad CEK, & BO, ad CE, eadem est cum composita ex rationibus PA, ad QA, & BFO ad CGE. Atqui ratio datorum annulorum composita est ex ratione *b* PA ad QA. & ratione BFO, ad CGE. Ergo ratio annulorum datorum etiam est composita ex ratione BO ad CE, & BON ad CEK. Quod erat demonstrandum.

a Ostensum 11. l. 3 huius. *b Præced.*

PROPOSITIO XV.

Annuli à similibus (CGE, RSV) figuris geniti qui latitudines habent (CE, RV) revolutionum diametris (QA, IA) proportionales, triplicatam inter se habent latitudinum rationem.

Schematismus 11. Fig. 77.

Annuli à similibus figuris geniti rationem habent compositam ex ratione sectionum per polos maximarum *c* CEK, RVL, & ex ratione latitudinum CE, RV. Sed ratio CEK ad RVL, est ratio composita *d* ex ratione CE ad RV, & ex ratione QA ad IA, hoc est *e* CE ad RV: ac proinde ratio composita ex rationibus CE ad RV, & CEK ad RVL, est ratio triplicata rationis CE ad RV. Ergo ratio annulorum à similibus figuris CGE, RSV genitorum, qui latitudines habent revolutionum diametris proportionales, triplicatam habent latitudinum rationem. Quod erat demonst.

c Præced. *d Ostensum p. 11. l. 3. huius.* *e hypoth.*

PROPOSITIO XVI.

Omnes annuli ab æqualibus figuris (BNE, DPF,) geniti, inter se rationem habent quam revolutionum diametri (OA, CA)

Et annuli, qui eam inter se rationem habent, quam revolutionum diametri, geniti sunt à figuris æqualibus.

Schematismus 11. Fig. 78.

Super figuris genitricibus æqualibus intelligantur Cylindri, quorum altitudines sint peripheriæ mediæ OH, CG. Erunt hi annulis *a* æquales. Sed hi Cylindri eam inter se rationem *b* habent, quam altitudines; hoc est quam *c* peripheriæ mediæ; hoc est quam *d* OA, ad CA. Ergo & annuli eam inter se rationem habent, quam OA ad CA. Quod erat primum.

Alterum ex prima parte demonstrabitur per reductionem ad impossibile.

a 5. l. 3. huius. *b Ex 13. undec. elem.* *c per const.* *d Pappus l. 5. p. 41.*

PROPOSITIO XVII.

Annulus patens sibi contigui clausi annuli ejusdem crassitudinis, & ab æquali figurâ geniti, triplus est.

Schematismus 11. Fig. 79.

Figuræ genitrices æquales, & æqualibus basibus impositæ, & contiguæ sint QGR, RFA; quæ polo A in orbem ductæ annulos describant. Dico annulum patentem à figura QGR descriptum, esse triplum clausi annuli; quem genuit figura RFA.

Puncta media *e* sunt C, & B; ac proinde revolutionum diametri *f* CA, & BA. Quoniam latitudines QR, RA æquales ex hypothesi, sunt in *a* B, & C bisectæ: patet CA esse triplam BA. Sed ut CA ab AB, sic annulus *b* ad annulum. Ergo annulus annuli triplus est. Quod erat demonstrandum.

e Defin. 7. l. 3 huius. *f Defin. 8. l. 3 huius.* *a Defin. 7. l. 3. huius.* *b Præced.*

A fortiori verum est theorema si figuræ genitrices æquales ac similes fuerint.

Propositione 14. libri sequentis etiam superficiem patentis annuli esse triplam superficiei clausi annuli contigui demonstravimus. Quod inter admiranda Geometriæ numerari potest.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Schematismus 11. Fig. 79.

Annuli contigui æquè crassi quorum primus sit clausus, ab æqualibus figuris (AFR, RGQ, QHP, PKO) procreati, eam inter se rationem habent, quam imparium numerorum series ab unitate, 1, 3, 5, 7, & eo deinceps ordine in infinitum.

PUncta annulorum media sint B, C, D, E, &c. revolutionum diametri BA, CA, DA, EA &c. Quoniam ex hypothesi æquales sunt latitudines annulorum OP, PQ, QR, RA, & omnes bisectæ sunt *c* in E, D, C, B, punctis medijs: patet omnes AB, BR, RC, CQ, QD, DP, PE, EO æquales esse. Itaque revolutionum diametri BA, CA, DA, EA, eam inter se rationem habent quam 1, 3, 5, 7, & reliqui impares. Atqui annuli dati, cùm à figuris æqualibus describantur, eam inter se rationem habent, *d* quam revolutionum diametri BA, CA, DA, EA. Ergo etiam annuli sunt inter se, ut impares numeri 1, 3, 5, 7, & eâ deinceps serie in infinitum. Quod erat demonstrandum.

c Defin 7. l. 3. hujus. *d 16. l. 3. hujus.*

PROPOSITIO XIX.

Schematismus 11. Fig. 80.

Clausi annuli à figuris similibus geniti triplicatam inter se habent latitudinum rationem.

FIguræ similes genitrices sint AEB, AFC quæ polo A in orbem ductæ clausos describant annulos, quorum latitudines sint AB, AC: his bisectis in O, & K revolutionum diametri sint OA, KA.

Ratio annuli geniti à figurâ AEF ad annulum genitum à figurâ AEB, composita *a* est ex ratione figuræ AFC ad figuram AEB, & ex ratione diametrorum revolutionis KA, OA. Sed, quia per hypothesim figuræ AFC, AEB, similes sunt, earum ratio duplicata est rationis latitudinum CA, BA; & ratio KA ad OA, eadem est eum ratione latitudinum CA, BA, cùm CA, BA ipsarum KA, OA, sint duplæ. Ergo ratio annuli clausi, geniti à figurâ AFC, ad annulum clausum, genitum a figurâ AEB, est triplicata rationis latitudinum CA, BA. Quod erat demonstrandum.

a 13. l. 3. hujus.

PROPOSITIO XX.

Schematismus 11. Fig. 97.

Dati sint quotcumque annuli contigui, quorum primus sit clausus, geniti à figuris æqualibus & similibus AFR, RGQ, QHP, PKO, OLN, circa polum A in orbem actis. Datus item sit annulus clausus, genitus à figurâ AZN prioribus simili, polo item A, priores omnes complectens.

Dico hunc toties continere aggregatum annulorum contiguorum, quot sunt contigui annuli.

PRimus annulus, quem polo A gignit figura AFR, sive unitas, sit α. Multitudo annulorum contiguorum sit β. Eorumdem aggregatum esto γ, annulus clausus omnes complectens sit δ.

Quoniam ex hypothesi figuræ genitrices sunt æquales & similes, patet latitudines AR, RQ, QP, PO, ON æquales esse. Itaque dati annuli contigui sunt inter se, ut numeri *a* impares, 1, 3, 5, 7, 9. Sed horum aggregatum est ad unitatem in duplicatâ ratione ejus, quam habet *b* multitudo numerorum imparium, (sive annulorum contiguorum) ad unitatem. Ergo & annulorum contiguorum aggregatum γ ad primum annulum α rationem habet duplicatam ejus, quam habet ipsorum annulorum multitudo β ad unitatem α. Atqui annulus clausus δ, genitus à figurâ AZN polo A, ad annulum primum α genitum ab RFA polo A, triplicatam *c* habet rationem ejus, quam habet latitudo NA ad latitudinem RA; hoc est ejus quam habet β multitudo contiguorum annulorum ad unitatem α. Ergo clausus annulus δ, à figurâ NZA genitus, ad annulorum contiguorum aggregatum γ eam habet rationem, quam contiguorum annulorum multitudo β, ad unitatem α. Si enim fuerint quatuor quantitates α, β, γ, δ; & γ sit α in ratione duplicatâ ipsius β ad α; δ verò ad eandem α sit in triplicatâ, erunt α, β, γ, δ proportionales, ac proinde δ est ad γ, ut β ad α. Liquet ergo propositum.

a 18. l. 3. hujus. *b Lemma.* *c præcedens.*

Lemma.

Data sit series imparium numerorum 1, 3, 5, 7, 9, &c. Dico eorum summam æquari numero terminorum in se ducto, ac proinde summam esse ad unitatem in ratione duplicati, ejus quam habet numerus terminorum ad unitatem.

Quoniam singuli termini excedunt invicem binario, patet contineri in ultimo termino exemp. gr. in 9, unitatem semel atque insuper toties 2, quot dempta unitate sunt termini. Quare si ultimus terminus (9) augetur unitate, continebit binarium toties, quot sunt termini: ac proinde ultimus terminus auctus unitate (hoc est summa primi & ultimi termini) duplus est numeri terminorum. Ergo semissis summæ primi & ultimi termini æquatur numero terminorum. Atqui semissis summæ primi & ultimi termini ducta in numerum terminorum *a* producit summam omnium terminorum. Ergo etiam numerus terminorum ductus in se ipsum, producit summam omnium terminorum. Quod erat demonstrandum.

a Notum est ex Arith. vulg.

PROPOSITIO XXI.

Schematismus 11. Fig. 81.

Si annuli patens (BCF) & clausus (BCPE) eandem figuram genitricem habeant BHE; patens annulus excedit clausum Cylindro, cujus basis est figura genitrix, altitudo par minimæ patentis annuli peripheriæ EN.

PAtenti annuli polus sit A; peripheria media OF; annuli clausi polus E; peripheria media OD. Patens annulus æquatur *b* Cylindro cujus basis BHE, & altitudo par est peripheriæ mediæ OF. Similiter clausus annulus æquatur *c* Cylindro, cujus basis BHE, & alti-

b 5. l. 3. hujus. *c Ibidem.*

altitudo fit æqualis peripheriæ mediæ OD. Sed quia (ut ostendam in lemmate) peripheria OF æqualis est peripheriæ utrique EN, & OD simul sumptæ, Cylindrus super BHE, in altitudine peripheriæ OF æquatur Cylindris super BHE, in altitudinibus peripheriæ EN, & peripheriæ OD. Ergo etiam patens annulus æquatur Cylindro super BHE in altitudine OD (hoc est, ut jam ostendi, annulo clauso) & Cylindro super BHE in altitudine peripheriæ EN; ac proinde patens superat clausum Cylindro suprà BHE in altitudine peripheriæ EN. Quod erat demonstrandum.

Lemma.

Schematismus 11. Fig. 81.

Datæ sint peripheriæ concentricæ BM, EN, radijs AB, AE descriptæ. Dico earum differentiam esse peripheriam BP, quæ describitur radio BE.

a Pappus l.5 p.41.

Peripheria BM est ad *a* peripheriam EN, ut radius AB ad radium AE. Igitur dividendo peripheriarum BM, EN differentia est peripheriam EN, ut BE ad EA. Sed ut *a* BE ad EA, sic peripheria BP radio BE descripta, est ad peripheriam EN. Ergo peripheria BP, ipsarum BM, EN differentia est. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XXII.

Schematismus 12. Fig. 82.

Annulorum concentricorum ab æqualibus figuris (BFE, CGD) genitorum, qui latitudinum semissem (CE) habent communem, differentia est clausus annulus, ab alterutra figurarum genitricum procreatus.

b Præced. e.5.l.3. hujus.

Annulus patens genitus à figurâ BFE, polo A, in orbem ductâ, æquatur *b* annulo clauso, qui fit ab eâdem figurâ BFE, polo E, in orbem ductâ; & Cylindro, cujus basis est BFE, (sive CGD,) altitudo peripheria EK. Atqui annulus factus à figurâ CGD, polo A in orbem actâ, æquatur *c* Cylindro, cujus basis CGD, altitudo peripheria EK, quæ annuli media est. Ergo annulus genitus à figura BFE, polo A, æquatur annulo clauso qui ab eâdem fit figura unà cum annulo, qui fit ab CGD, polo A. Ergo concentricorum annulorum ab æqualibus figuris BFECGD, polo A genitorum, & communem habentium latitudinum semissem CE, differentia est annulus clausus BFE, sive CGD, procreatus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Schematismus 12. Fig. 83. 84.

Datæ sint figuræ planæ æquales BQD, NPO, sive contiguæ, sive disiitæ, sive mutuo secantes, (duos primos casus figuræ exprimunt) quæ polo A in orbem ductæ describant annulos quorum mediæ peripheriæ sint CF, & EG.

Dico: eorum differentiam est annulus CQDH genitus à figurâ BQD, polo E, cujus nimirum diameter revolutionis est peripheriarum mediarum CF, EG, intervallum CE.

Centro E, per C describatur peripheria CH. Erit hæc peripheria media annuli à figurâ BQD, polo E, geniti. Ostensum *a* est suprà CF peripheriam æquari peripherijs EG, & CA. Ergo Cylindrus super BQD in altitudine peripheriæ CF æquatur Cylindris super BQD in altitudine peripheriæ CH, & super NPO (hoc est BQD ex hyp.) in altitudine peripheriæ EG. Atqui Cylindro super BQD in altitudine CF æquatur annulus *b* genitus à BQD, polo A; & Cylindro super BQD in altitudine *c* CH æquatur annulus genitus à BQD, polo E. Similiter Cylindro super NPO in altitudine EG æquatur annulus *d* genitus ab NPO, polo A. Ergo annulus genitus à BQD polo A æquatur annulo genito à BQD, polo E, & annulo genito ab NPO polo A. Ergo annulus genitus à BQD polo E, reliquorum differentia est. Quod erat demonstrandum.

a Lemma post 21.l.3. hujus.

b 5.l.3. hujus.

c Ibidem.

d Ibidem.

PARS II.

PROPOSITIO XXIV.

Schematismus 12. Fig. 85.

Cylindrus esto rectus EFCω, ex cujuscumque figuræ EFC ductu recto procreatus. Secetur autem plano per axem EVωC; jungaturque recta VC, per quam fiat sectio VTRC ad planum EVωC recta. Ex puncto D medio ipsius EC, duc DF perpendicularem ad EC. Tandem per DF, & Cylindri axem Dδ fiat sectio DδRF.

Dico solidum Cylindricum EVRFDE, quod nimirum planis VEDδ, DδRF, δRTV, & superficiei Cylindricæ segmento continetur, per inscripta prismata exhauriri. *a*

a Defin.28 l.1.hujus.

Assignetur solidum quantumvis parvum Y, cujus dimidium sit ζ. per punctum δ fiat sectio βRα ad basim DFC parallela. Hac sectione dividitur Cylindricum solidum EVδRFDE in duo segmenta, quorum alterum est Cylindrus EβRFDδ, alterum βδRV, est illa portio Cylindri de quâ duobus jam libris egimus, radio ED in aliquot æquales partes secto, ductisque per sectionum puncta lineis ad FD parallelis, basi EFD inscribe rectangula, superque ijs Cylindro EβRFD prismata inscribantur. Demonstravimus *b* per hujusmodi inscripta prismata Cylindrum EβRFD exhauriri. Statuamus igitur Cylindro tot jam inscripta esse prismata, ut Cylindri ac prismatum differentia sit minor solido ζ. Deinde prismata Cylindro sic inscripta producantur usque ad planum Ellipticum VTRδ, quo facto ipsi etiam portioni βVRδ, atque adeò toti Cylindrico solido EVRFD inscripta erunt prismata. Tum verò, quia & portio βVRδ minor est Cylindro EβRFD, & inscripta portioni prismata minora sunt ijs quæ inscripta sunt Cylindro portionis ac prismatum portioni inscriptorum differentia minor erit, quàm differentia Cylindri EβRFD, & inscriptorum ipsi prismatum; hoc est, ut jam ostendimus, minor solido ζ, quod semissis est solidi Y. Ergo differentia Cylindri EβRFD, ad inscriptorum sibi prismatum, & differentia portionis βVRD, ac prismatum illi inscriptorum, simul junctæ, hoc est differentia totius Cylindrici solidi EβRFD. & inscriptorum illi prismatum, est minor solido dato Y. Datum igitur Cylindricum solidum per

b 4.l.3. hujus.

per inscripta prismata exhauritur. Quod erat demonstrandum.

Schematismus 12. Fig. 86. Quod si solidum Cylindricum EVRFD fuerit à Cylindro E abscissum plano VR, non pertingente ad basim EFC, sed unum Cylindri latus secante in : nihilominus per inscripta prismata eodem prorsus modo exhaurietur; eritque omninò eadem demonstratio.

PROPOSITIO XXV.

a Defin. 25 l. 3. hujus. b Defin. 28 l. 1. hujus. Schematismus 12. Fig. 87. 88.

Cujusvis annularis solidi pars a exterior per inscripta Cylindrica solida exhauritur. b

Genitrix figura dati annuli sit EFC; axis ejus FD; annuli centrum A; latitudo EC, ad axem ordinatim posita.

Dividatur FD in aliquot partes æquales DS, SL, LG, GF; inscribanturque figuræ genitricis semissi EFD rectangula GQ, MP, NO, sic ut latera IM, KN, si protrahantur, transeant per puncta L, S.

Si hæc rectangula unà cum figurâ, cui inscripta sunt, centro A, in orbem ducantur, manifestum est parti exteriori annularis solidi inscriptum iri Cylindros excavatos juxta invicem positos, quorum bases erunt plani annuli à rectis DQ, QP, PO, descripti; altitudines verò QH, PI, OK. Atqui aggregatum horum cavorum Cylindrorum, idem est eum aggregato eorum, quos producunt rectangula LH, SI, DK. Quare cùm Cylindri cavi à rectangulis LH, SI, DK, geniti, a exhauriant annulare solidum; etiam ij qui à rectangulis GQ, MP, NO producuntur, exhaurient. Quod erat demonstrandum. *a 3. l. 3. hujus.*

Eadem est constructio, & demonstratio, sive annulus sit patens, sive clausus.

Exterioris partis segmenta, quæ nimirum fiunt à segmentis figuræ EHQ &c. pari modo exhauriuntur.

PROPOSITIO XXVI.

Schematismus 12. Fig. 87. & 85. Qua alternis inspicienda. b Defin. 10 l. 3. hujus.

Datus sit annulus clausus à figura quacumque plana EFC, axem DF habente diametro revolutionis perpendicularem genitus; latitudo AE, sive CE ad axem ordinatim posita; centrum A; peripheria media DZ; maxima b Eγ.

Datus item sit Cylindrus rectus EFCω, cujus basis sit figura EFC quæ annulum genuit; altitudo autem EV, in plano EVωC per Cylindri axem transeunte duc rectam VC, occurrentem axi in , per quam fiat sectio VRC ad planum EVωC recta. Deinde per DF axem figuræ genitricis, & D axem Cylindri fiat sectio DRF.

c Defin. 25 l. 3. hujus.

Dico: Pars clausi annuli c exterior eam habet rationem ad Cylindricum solidum EVRFD (id nempè quod planis EVD, DRFRV, & segmento superficiei Cylindricæ continetur,) quam maxima annuli circumferentia Eγ, ad altitudinem EV.

Tacquet Cylind. Annular.

Fig. 87. Axe DF in partes aliquot æquales diviso, inscribantur figuræ genitricis semissi EFD rectangula GQ, MP, NO, sic ut latera IM, KN protracta transeant per puncta L, S. Hæc rectangula si cum figurâ, cui inscripta sunt, centro A, in orbem ducantur exteriori parti annularis solidi inscribent Cylindros cavos, quorum bases erunt plani annuli, qui à rectis DQ, QP, PO, centro A, in orbem ductis producuntur; altitudines verò QH, PI, OK.

Fig. 85. Deinde super iisdem rectangulis GQ, MP, NO (est enim per hypothesim una eademque figura EFD, & genitrix segmenti exterioris annularis, & basis Cylindrici solidi EVRFD) inscribantur Cylindrico solido EVRFD prismata rectangula Q2THG7D, P6SIM92Q, OGXKNP.

a Figuram utramque inspice n. 87. & 85. b Pappus. l. 5. p. 41.

His ita constructis; quoniam a est ut QA, sive QC ad DA, sive DC, sic b peripheria QBB ad peripheriam DZ: & ut QC ad DC, sic quoque Q2 ad D; erit peripheria QBB ad peripheriam DZ, ut Q2 ad D. Quoniam igitur rectanguli trapezij Q2D bina parallela latera Q2, D sunt proportionalia circumferentijs QBB, DZ annulum planum comprehendentibus; eademque recta QD est & basis trapezij, & latitudo plani annuli erit c planus annulus D, Q, BB, Z trapezium Q2D, ut maxima annuli plani peripheria QBB ad maximum trapezij parallelum latus Q2. Rursum cùm sit ut ED ad QC, sic peripheria d Eγ ad peripheriam QBB; & ut EC ad QC, sic quoque EV, ad Q2; erit ut peripheria Eγ ad peripheriam QBB, sic EV est ad Q2: igitur permutando, peripheria Eγ est ad EV, ut peripheria QBB est ad Q2. Atqui jam ostendi annulum planum Q, BB, Z, D esse ad trapezium Q2, ut peripheria QBB est ad Q2. Ergo annulus planus Q, BB, Z, D est ad trapezium Q2D, ut peripheria Eγ est ad EV. Jam verò si prismatis Q2THG7D, basis statuatur esse Q2D, tunc altitudo prismatis QH, eadem nimirum cum altitudine cavi Cylindri producti à rectangulo GQ, cujus basis est planus annulus Q, BB, Z, D. Ergo Cylindrus cavus e ab GQ productus, est ad prisma Q2TH7GD, super eodem GQ rectangulo consistens, ut basis ad basim, ut annulus nimirum planus Q, BB, Z, D ad trapezium Q2D; hoc est (quemadmodum jam demonstravimus) ut dari annuli solidi peripheria maxima Eγ ad altitudinem EV. *c 3. l. 1. hujus. d Pappus l. 5. p. 41. e 6. l. 1. hujus.*

Eodem prorsus discursu ostendam singulos reliquos cavos Cylindros à rectangulis MP, NO genitos, ita se habere ad reliqua solidi Cylindrici prismata singula, iisdem rectangulis MP, NO insistentia, ut Eγ peripheria est ad EV. Omnes igitur cavi Cylindri exteriori segmento annulari inscripti simul sumpti, sunt ad omnia prismata inscripta Cylindrico solido EVRFD, ut peripheria Eγ ad EV. Atque hoc semper eveniet quoteumque Cylindros cavos parti annulari, & prismata pari numero Cylindrico solido inscripseris. Quare cum insuper & per Cylindros cavos a pars exterior annuli, & per prismata solidum b Cylindricum exhauriatur; pars annuli exterior erit ad Cylindricum solidum ut c Eγ maxima annuli peripheria ad altitudinem EV. Quod erat demonstrandum. *a 25. l. 3. hujus. b 24. l. 3. hujus. c 1. l. 1. hujus. Schematismus 12.*

Per heterogenea.

Fig. 87. 85. In genitrice figurâ ducatur recta HQ parallela axi FD, quæ unà cum figurâ, polo A, in orbem ducta describet Cylindri recti superficiem intra annu-

lum. Per eamdem rectam HQ Cylindricum solidum EV♁DFR seca plano ad planum D♁RF parallelo. Sectio erit rectangulum Q2TH. Jam verò superficies Cylindrica ab QH descripta, æquatur *d* rectangulo sub HQ, & peripheriâ QBB comprehensò. Ergo est ad rectangulum Q2TH, contentum sub HQ & Q2, ut peripheria QBB ad Q2; hoc est (quemadmodum in demonstratione primâ ostensum est) ut peripheria Eγ ad EV. Quod cùm semper fiat; *e*erit juxta Heterogeneorum regulam exterior annuli pars ad Cylindricum solidum EV♁DFR, ut peripheria Eγ ad EV.

d 4. l. 2. *hujus.*

Eodem discursu (quod *sequenti proposit.* fiet Geometricè) ostendam annuli interiorem partem esse ad Cylindricum solidum reliquum D♁R5C, ut maxima annuli peripheria E ad altitudinem EV.

Corollarium.

Ex his consequenter erit totum annulum esse ad semicylindrum totum ECRV; hoc est ad Cylindrum ERα, ut Eγ peripheria est ad EV; hoc est ut peripheria media DZ est ad D♁, seu Cα: atque ita habetur alia propositionum 5 & 6 *hujus libri* per Heterogenea demonstratio.

Per Heterogenea aliter.

In genitrice figurâ ducatur quævis HG parallela ad EC, perque hanc seca annulum plano ad sectionem *a* maximam per polum factam parallelo. Sectio erit planus annulus æqualis plano annulo Q, BB, ZD. *e* Deinde per rectam HG seca Cylindricum solidum plano parallelo ad planum EVC, sectio erit trapezium THG7, æquale trapezio Q2♁D. Quare cùm jam ostensum sit in demonstratione primâ, & Geometricâ annulum planum Q, BB, Z, D esse ad trapezium Q2♁D, ut peripheria Fγ est ad EV; etiam planus annulus descriptus à rectâ HG priori æqualis, erit ad trapezium TAG7, ut peripheria Fγ est ad EV. Quod quia semper evenit, erit annuli solidi pars exterior ad Cylindricum EV♁DFR; imò & pars interior annuli, ad reliquum Cylindricum FD♁R5C, & totus annulus ad totum semicylindrum ECRV, ut peripheria Eγ est ad EV.

Schematismus 7. *Fig.* 87. 85. *e Defin* 12 13. l. 3. *hujus.*

PROPOSITIO XXVII.

Iisdem positis.
Interior clausi annuli pars, ea nimirum, quæ ab alterâ figuræ genitricis semisse DFC producitur, ad reliquum Cylindricum solidum D♁R5CF, planis D♁RF, D♁C, CDF & superficie Cylindrica R5CF comprehensum, eam quoque habet proportionem, quam maxima annuli circumferentia Eγ ad altitudinem EV.

Schematismus 12. *Fig.* 87. 85.

Quia per hypothesim FD est perpendicularis ad EC, ac proinde (quod Cylindrus ponatur rectus) etiam ad planum EVαC; erit *a* planum RFD♁ quod per ipsam ducitur rectum plano EVαC. Sed etiam per *b* hypothesim planum VRC est plano EVαC rectum. Ergo ♁R, quæ communis sectio est planorum RFD♁, VRC, recta *c* plano EVαC erit. Ergo cùm & FD sit eidem plano recta, erunt R♁, FD parallelæ. *d* Quare si per punctum ♁ ducatur βα parallela ad EC, perque rectas βα, ♁R ducatur planum; erit sectio βRα parallela basi EFC, & plano EVαC recta; ac proinde Cylindrus rectus EFCα in duos rectos Cylindros plano βRα dividitur. Quare solida β♁RTV, α♁R5C, sunt portiones à Cylindris rectis βRCE, βRαV abscissæ per axem baseos ♁R, de quibus actum duobus libris præcedentibus.

a 18. *elem.* 11. *b Vide præced.* *c* 19. *elem.* 11. *d Ex* 8. *elem.*

Nunc autem quia per hyp. EC bisecta est in D; estque per hyp. D♁ parallela VE; etiam VC bisecatur in ♁, æquanturque Vβ, αC. Quare cùm portionum β♁RTV, α♁R5C, altitudines Vβ, αC, itemque bases βR♁, αR♁ æquales sint, etiam ipsæ æquales *e* erunt. Addito igitur communi solido Eβ♁R5C♁, erit solidum EVRC æquale Cylindro EFCαRβ. Atqui datus clausus annulus genitus à figurâ EFC est ad *f* Cylindrum EFCαRβ, ut peripheria media DZ ad D♁, seu Fβ. Ergo datus annulus est quoque ad solidum EVRC ut peripheria media DZ ad D♁; hoc est ut peripheria Eγ est ad EV. Sed pars annuli exterior ad solidi EVRC partem EVRFD♁, etiam est ut peripheria Fγ ad EV. Ergo & reliqua annuli pars interior erit ad reliquam solidi EVRC partem D♁R5C, ut peripheria Eγ ad EV. Quod erat demonstrandum.

e 18. l. 5. *hujus.* *f* 6. l. 3. *hujus.*

PROPOSITIO XXVIII.

Iisdem positis; in figura genitrice ducantur rectæ HQ, φ4, axi FD parallelæ. Per easdem rectas in solido Cylindro ducantur plana QHT2, 4, 8 5, φ, recta ad figuram, sive basim CFE.

Schematismus 12. *Fig.* 87. 85.

Dico singula annularia solida à genitricis figuræ segmentis EHQ, QHFD, DFφ4, 4φC descripta, ad singula eodem ordine segmenta Cylindrica EHTV2Q, QHFRT2♁D, D♁R584φF, φ485C, eam habent rationem quam maxima annuli peripheria Eγ ad Cylindri altitudinem EV.

Pro tribus primis partibus eadem erit demonstratio, quæ *prop.* 26. Pars quarta sic ostenditur. Interior annuli pars, genita à DFC, est ad Cylindricum solidum FD♁R5C, ut *a* peripheria Eγ est ad EV: & segmentum annuli genitum ab DFφ4, est ad Cylindricum segmentum D♁R58φF4, ut peripheria Eγ ad EV; quod jam diximus liquere ex discursu *prop.* 26. Ergo segmentum annulare reliquum quod fit ab 4φC, est ad reliquum Cylindricum φ485C, ut peripheria Eγ est ad EV.

a Præced.

PROPOSITIO XXIX.

Esto patens annulus à quacumque genitus figura plana EFC, axem habente revolutionis diametro perpendicularem; axis sit DF, latitudo CE, ad axem ordinatim posita; centrum A; peripheria media DZ; minima Cξ; maxima Eγ.

Schematismus 12. *Fig.* 88. & 86. *Alteris inspiciendæ.*

Datus

Datus item sit Cylindrus rectus E8, cujus basis sit figura EFC, quæ annulum genuit; altitudo autem EV; sitque ut maxima peripheria Eγ ad altitudinem EV, ita minima Cξ ad Cθ. Tum per V & θ fiat sectio VRθ plano EVαC per axem Dδ ducto, recta. Tandem per DF axem figuræ genitricis, & Dδ axem Cylindri fiat sectio DδRF.

a Defin. 15 l. 3. hujus

Dico: pars annuli patentis a exterior, ad solidum Cylindricum EVRFDδ, eam haber rationem, quam peripheria annuli maxima Eγ ad altitudinem EV.

b Fig. 86.

c Fig. 88.

d Pappus l. 5. p. 41.

EXteriori parti dati annuli inscribantur cavi Cylindri, & solido Cylindrico EVRFDδ inscribantur prismata, eo prorsus modo quo id factum *propositione 26*. Deinde b EC, Vθ protrahantur, donec concurrant in A. Erit EA ad CA, ut EV, ad Cθ; hoc est per hypothesim, ut peripheria c maxima Eγ ad minimam Cξ; hoc est ut (in annulo) EA est d ad CA. Quoniam igitur in Cylindro EA, est ad CA, ut in annulo EA, ad CA; erit dividendo EC ad CA, ut EC ad CA. Quare cùm EC in Cylindro, & EC in annulo sint per hypothesim æquales, imò eædem; etiam CA, CA, ac proinde & EA, EA æquales; imò eædem utrobique rectæ sunt. Unde etiam consequens erit rectas QA, PA, OA easdem in Cylindro atque annulo rectas esse.

Fig. 87. 88. Inspice utramque.

c 3. l. 1. hujus.

a 6 l. 1. hujus.

His præmissis, quoniam est ut radius QA ad DA radium, sic peripheria QBB ad peripheriam DZ; & rursum ut QA ad DA, sic Q2 ad Dδ; erit peripheria QBB ad peripheriam DZ, ut Q2 ad Dδ. Igitur quoniam & QD utrobique communis est; erit e planus annulus Q, BB, ZD ad trapezium rectangulum Q2δD, ut circumferentia major QBB ad maximum trapezij perpendiculum Q2; hoc est ut maxima annuli peripheria Eγ ad altitudinem EV (cùm enim sit ut EA ad QA, sic Eγ ad QBB: & ut EA ad QA, sic EV ad Q2: erit Eγ ad QBB, ut EV ad Q2; & permutando Eγ ad EV ut QBB ad Q2.) Cùm igitur Cylindri cavi à rectangulo GQ producti, & prismatis Q2THG7δD communis sit altitudo QH; erit Cylindrus cavus ad prisma ut a basis ad basim, hoc est ut planus annulus Q, BB, Z, D ad trapezium Q2δD; hoc est (quemadmodum jam ostendi) ut annuli peripheria maxima Eγ ad EV.

b 25. l. 3. hujus.

c 24. l. 3. hujus.

d 1. l. 1. hujus.

Pari modo ostendam singulos reliquos Cylindros cavos, à rectangulis MP, NO productos, esse ad singula prismata, quæ insistunt rectangulis ijsdem MP, NO in Cylindrico solido, ut peripheria Eγ ad EV. Omnes igitur cavi Cylindri simul sumpti, sunt ad omnia prismata simul sumpta, ut peripheria Eγ ad EV. Atque hoc semper evenit, quotcumque tam Cylindros cavos parti annulari, quàm solido Cylindrico prismata, æquali numero inscripserimus. Quare, cùm insuper & Cylindri cavi b partem annularem, & prismata c Cylindricum solidum exhauriant; erit pars annularis exterior ad Cylindricum solidum, ut d peripheria Eγ ad EV. Quod erat demonstrandum.

Per Heterogenea.

Similis erit demonstratio ei, quæ data est *prop. 26. hujus libri.*

PROPOSITIO XXX.

Schematismus 12. Fig. 88. 86.

Ijsdem positis:

Interior annuli patentis pars ad reliquum Cylindricum solidum DδR5θCF, eam quoque habet proportionem, quam annuli maxima peripheria Eγ ad altitudinem EV.

PEr rectam δR & βδα parallelam EC ducatur planum βRα: quod erit rectum plano EVαC, & parallelum basi EFC (ut ostendi *propos. 27.*) ac proinde Cylindrum rectum E8 partietur in duos Cylindros rectos ER, β8; & solida, quæ sectione illâ determinantur, βVTRδ, αRδθ, erunt portiones à Cylindris rectis per baseos βRα axem δR abscissa: de quibus duobus libris prioribus actum est.

a 18. l. 1. hujus.

b 6. l. 3. hujus.

c Præced.

Quoniam verò EC ex hyp. in D, ac proinde & Vθ in δ bisecatur, etiam θα, Vβ æquales sunt. Ergo portiones βVTRδ. αθ5Rδ a æquantur. Quare, adjecto communi solido EFCθ5Rβδ, Cylindrus ERα solido EVR5θCFE æqualis est. Quoniam igitur annulus datus est ad Cylindrum ERα, ut b peripheria media DZ ad Dδ; idem quoque annulus erit ad solidum EVR5θCFE, sicut peripheria DZ ad Dδ; hoc est (quemadmodum *prop. precedenti* ostensum est) ut peripheria Eγ ad EV. Atqui etiam annuli pars exterior à figuræ genitricis semisse EFD producta, est ad solidi Cylindrici prioris partem EVRFDδ, ut c peripheria Eγ ad EV. Ergo etiam reliqua annuli pars, ab alterâ figuræ genitricis semisse EFC genita, est ad reliquum Cylindricum solidum, ut peripheria Eγ ad EV. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXI.

Schematismus 12. Fig. 88. 86.

Ijsdem positis: in figura genitrice ducantur QH, 4φ parallelæ axi FD. Per easdem rectas in solido Cylindrico plana ducantur Q2TH, 4λ5φ.

Dico singula solida annularia, à segmentis EHQ, QHFD, DFφ4, 4φC producta, esse ad singula eodem ordine segmenta Cylindrica EVTHQ2, Q2THFRδD, DδRFφ5λ4, 4λ5φCθ, ut maxima annuli peripheria Eγ est ad altitudinem EV.

a Præced.

PRo tribus partibus demonstratio eadem erit, quæ *propositione 29*. Postrema sic ostenditur. Annulare solidum factum à plano DFC est ad solidum Cylindricum DδR5θCF, ut a peripheria Eγ ad EV: & per partem primam solidum annulare, quod fit à plano DFφ4, est ad Cylindricum DδR5φ4λ, ut peripheria Eγ ad EV. Ergo & reliquum annulare solidum, quod fit à plano 4φC, est ad reliquum Cylindricum φ4λ5θC, ut peripheria Eγ ad EV. Quod erat demonstrandum.

PARS III.

Schematismus 13. Fig. 89. 90. Alternis conspicienda

PROPOSITIO XXXII.

b Def 15. l.3.hujus.

Annuli circularis clausi pars *b* exterior excedit interiorem, sphærâ circuli genitoris bis sumpta.

c Defin.7. l.3. hujus. d Defin. 9. l.3.hujus. e Defin.10 l.3 hujus. f Defin 6. l.3.hujus.

GEnitor circulus sit EFCG, centrum, sive polus annuli A; medium *c* punctum D (quod ipsum erit circuli genitoris centrum;) peripheria *d* media DZ, peripheria *e* maxima EH; latitudo *f* annuli EC: huic perpendicularis sit FG, transiens per D punctum medium, genitorem circulum in duos partiens semicirculos.

Oportet ostendere, quod exterior clausi annuli pars, ea nimirum quæ producitur a semicirculo FEG, excedat interiorem, quæ fit à semicirculo FAG, sphærâ, quæ à genitore circulo EFCG producitur, ipsique annulo inscripta est, bis sumptâ.

g Alternis utramque inspice figuram.

Super genitore circulo *g* EFCG intelligatur erigi rectus Cylindrus EV, cujus altitudo EN par sit maximæ annuli peripheriæ EH. Cylindrum hunc seca per axem plano ENVC, ductâque rectâ NC, quæ occurrat axi in K. Per hanc fiat sectio Elliptica NICL, plano ENVC recta. Per FG, & axem Cylindri fiat deinde sectio GILF, occurrens Ellipsi NICL secundùm rectam IKL, erit hæc *h* parallela ad GF. Igitur per IKL fiat sectio PIOL parallela basi.

h Ostensum est 27.l.3. hujus. a 18 l.1. hujus.

His eum in modum constitutis portio IPNL, *a* portioni LOCI æqualis est (altitudines enim PN, OC æquantur, bases verò LPI, LOI æquales & similes sunt:) solida quoque GILFEP, GILFCO æqualia sunt, semisses nimirum Cylindri EO: unde Cylindricum solidum GIENLF æquatur solido GILFCO & portioni IPNL; hoc est solido LYCMILFG, & portionibus IPNL, LOCI; hoc est (quia portiones illas jam ostendi esse æquales) solido LYCMILFG, & portioni IPNL bis sumptæ. Atqui exterior dati annuli clausi pars æquatur *b* Cylindrico solido GIENLF, cùm EN par sit ex hypothesi maximæ annuli peripheriæ EH. Exterior igitur dati annuli pars etiam æquatur solido LYCMILFG, & portioni IPNL bis sumptæ.

b 26 l.3. hujus.

Quia verò NC, EC bisecantur ab axe DK, estque DK axis parallelus ad EN, Cylindri latus, erit EN, (hoc est per hypothesim peripheria EH) dupla ipsius DK. Quare, cùm etiam peripheria *c* EH dupla sit peripheriæ mediæ DZ; erit DK par peripheriæ mediæ DZ; hoc est par peripheriæ *d* circuli, cujus diameter est EC, ipsius nempè circuli genitoris peripheriæ EFCG. Est autem recta PN æqualis rectæ OC, sive DK. Ergo etiam PN æquatur peripheriæ cujus diameter est EC, hoc est PO. Ergo portio IPNL æqualis est sphæræ, cujus diameter PO, hoc est sphæræ, quæ à basi PLOI, sive à genitore circulo EFCG producitur, ut demonstravimus *lib. 1. prop. 11.* est enim portionis altitudo PN æqualis peripheriæ baseos IPLO, sive EFCG.

c Patet ex Papp.l.5. p.41. d Vide defin.9 l.3. hujus.

Insuper, quia EN par est peripheriæ EH; solidum LYCMILFG æquatur parti interiori annuli. Quoniam igitur ostensum suprà est, exteriorem annuli partem æquari solido LYCMILFG, & portioni IPNL bis sumptæ; eadem illa annuli pars exterior æquabitur parti interiori, & sphæræ genitoris circuli bis sumptæ; ac proinde exterior interiorem superat circuli genitoris sphærâ bis sumptâ. Quod erat demonstrandum.

e 27.l.3. hujus.

Scholium.

Potest hoc theorema demonstrari assumpto Cylindro altitudinem habente quamcumque, hunc in modum.

Quoniam ut EN est ad peripheriam EH, sic solidum a *GIENLF ad exteriorem partem annuli: & solidum* b *ILCGF ad annuli partem interiorem; patet solida GIENLF, ILCFG esse partibus annuli proportionalia. Unde dividendo excessus solidi GIENLF supra ILCFG, est ad ILCFG, ut excessus partis annuli exterioris suprà interiorem, ad interiorem: & permutando, excessus solidi GIENLF supra ILCFG, est ad excessum partis exterioris annularis supra interiorem, ut ILCFG ad interiorem annuli partem, hoc est ut EN ad peripheriam EH. Sed portio IPNL bis, est excessus solidi GIENLF supra ILCFG, ut patet ex demonstratione priori. Ergo portio IPNL bis sumpta, est ad excessum partis exterioris annuli supra interiorem, ut EN, ad peripheriam EH.*

a 26 l.3. hujus. b 27 l.3. hujus.

Deinde, quoniam EN, est ad DK, ut peripheria c *EH ad peripheriam DZ estque PN differentia ipsarum EN, DK, peripheria verò EFCG, diametrum habens EC, ipsarum EH, DZ differentia est; patet NP esse ad EN, ut EFCG ad EH. Quare permutando, NP est ad EFCG, sive PLOI circumferentiam, ut EN ad EH. Atqui portio IPNL est ad sphæram circuli PLOI, hoc est circuli EFCG, ut* d *PN ad peripheriam PLOI, adeoq; portio IPNL bis, est ad sphæram circuli IPLO, sive EFCG bis, ut PN, ad PLOI. Ergo portio IPNL bis, est ad sphæram EFCG bis, ut EN ad EH. Atqui jam demonstratum est portionem IPNL sumptam bis, ad excessum quoque partis exterioris annuli supra interiorem eandem habere proportionem EN ad EH. Ergo sphæra EFCG bis par est excessui partis exterioris supra interiorem. Quod erat demonstrandum.*

c Ex demonstr. priori. d 13.l.1. hujus.

Malui tamen assumere tum hic, tum deinceps Cylindri altitudinem peripheriæ mediæ æqualem, quod demonstratio sic expeditior & elegantior videretur. Hoc ipsum observa in libri hujus tertij propositionibus 33. 34. 35. 37. 38. 40. 41; in libri item quarti propositionibus 32. 33. 34. 35. 37. 38. 40. 41. Quæ omnes juxta ratiocinij tam propositi formam demonstrari possunt, licet non assumatur Cylindri altitudo par circumferentiæ mediæ, illud tantùm meminisse oportebit in libro 3, loco propositionis 11. l. 1. assumendam esse p. 13. ejusd. 1. libri. In libro autem 4, loco propositionis 7. l. 2. adhibendam esse p. 8. ejusd. libri.

PROPOSITIO XXXIII.

Schematismus 13. Fig. 91. 92.

Exterior *a* patentis annuli circularis pars excedit *b* interiorem, circuli genitoris sphærâ bis sumptâ.

a Defin 15 l.3. hujus. b Defin.16 l.3.hujus. c Defin 9. l.3 hujus. d Defin 10 l.3 hujus. e Defin 11 l.3 hujus.

DAti patentis annuli circulus genitor sit EFCG; polus A; peripheria media *c* DZ; maxima *d* EH; *e* minima CM. Oportet ostendere exteriorem annuli partem excedere interiorem sphærâ genitoris circuli EFCG bis sumptâ.

Super circulo genitore EFCG Cylindrus rectus EV, altitudinem habens EN maximæ annuli peripheriæ EH parem, constitutus intelligatur. Quem per axem seca plano ENVC; & ex latere CV sumpta intel-

f Alternis utramque inspice figuram. intelligatur CQ, par *f* Minimæ annuli peripheriæ CM: ductâque rectâ NQ, quæ occurrat axi in K, per NKQ fiat sectio Elliptica NIQI, rectaplano ENVC. Rursum per genitoris circuli axem FG, & per Cylindri axem fiat sectio GILF, Ellipsi occurrens secundùm rectam IKL. Erit IKL *g* parallela ad FG. *g Ostensum 27.l.3. hujus.* Igitur per IKL fiat sectio PIOL parallela basi EFCG.

Cylindricum solidum GIENLF æquatur semicylindro GILFCO, & portioni IPNL; hoc est Cylindrico solido LYQCMIGFL, & duabus portionibus IPNL, LOQI. Sed portiones IPNL, LOQI æquales *h* sunt: æquantur enim altitudines NP, OQ, & bases IOL, IPL, æquales ac similes sunt. *h 18. & 1. hujus.* Ergo solidum GIENLF æquatur solido LYQCMIGFL, & portioni IPNL bis sumptæ. Atqui exterior annuli pars à semicirculo FEG producta, eò quod EN ponatur æqualis peripheriæ maximæ EH, & CQ peripheriæ minimæ CM, æquatur *a* solido GIENLF. *a 29.l.3. hujus.* Ergo exterior dati annuli pars æquatur solido LYQCMIGFL, & portioni IPNL bis sumptæ.

Deinde recta NQ producatur, donec occurrat *b* ipsi EC in A. Erunt *b* in utraque figurâ EA, DA, CA eædem rectæ. *b Ostensum ibidem.* Quare cùm ex hypothesi, CQ æqualis sit peripheriæ CM, etiam DK *c* peripheriæ DZ æqualis erit. *c 4.l.1. hujus.* Est autem & EN ex hyp. par peripheriæ EH. Igitur PN erit differentia peripheriarum EH & DZ. Sed etiam peripheria diametri EC, sive circuli genitoris peripheria EFCG, est differentia peripheriarum *d* EH, DZ. *d Lemma post 21.l.3. hujus.* Ergo PN, portionis IPNL altitudo, peripheriæ EFCG, hoc est PIOL, cujus nimirùm diameter PO, æqualis est. Ergo portio IPNL *e* æquatur sphæræ baseos PLOI; hoc est genitoris circuli EFCG. *e 11.l.1. hujus.* Insuper quoniam ex hyp. EN æquatur peripheriæ annuli maximæ EH, & CQ peripheriæ minimæ DZ ejusdem annuli; erit annuli pars interior, à semicirculo FCG producta, *f* æqualis Cylindrico solido LYQCMIGFL. *f 30.l.3. hujus.*

Quare cùm suprà demonstraverim exteriorem annuli partem æquari solido LYQCMIGFL, & portioni IPNL bis sumptæ, erit quoque eadem illa exterior pars annuli æqualis parti interiori annuli & sphæræ genitoris circuli bis sumptæ; ac proinde exterior interiorem superat genitoris circuli sphærâ bis sumptâ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSTIO XXXIV.

Schematismus 13. Fig. 89. 90.

Datus sit annulus circularis clausus, generatus à circulo EFCG; in quo utrimque ducantur rectæ ST, ωR æquales, & axi FG parallelæ, abscindentes segmenta utrimque æqualia SET, ωCR.

Alternis inspiciendo.

Segmentum annulare exterius quod fit à plano SET, excedit annulare segmentum interius genitum à plano ωCR, sphærâ diametri ST, sive ωR, bis sumptâ.

Super genitore circulo intelligatur erigi Cylindrus EV altitudinem habens EN, parem peripheriæ EH annuli maximæ; atque eadem construantur omnia, quæ *prop.* 32. Præterea per rectas Rφ, & TS (quæ ex hypothesi æquidistant FG) ducantur plana æquidistantia plano GILF, quæ in superficie Cylindricâ producant rectas RΔ, ωβ, TXSω: in circulo LPIO, rectas Δβ, θφ (quæ diametro *a* IL æquidistabunt) in Ellipsi rectas MY, Xω. *a 16. Elem. 12.*

Quoniam sectiones TθφS, RΔβω sunt parallelogramma, & TS, Rω ex hypothesi sunt æquales, etiam θφ, Δβ æquales erunt. Deinde quia planum GILF est rectum *b* plano EFCG, ac proinde & parallelo huic plano OIPL; plana quoque θXωφ, MΔβY, per constructionem ipsi GILF parallela, erunt recta plano PIOL. *b per const. p. 32. l. 3. hujus.* Quoniam igitur portiones IPNL, LOCI, sectæ sunt planis θXωφ, ΔMYβ, rectis basi PLOI, occurrentibus basi secundùm lineas θφ, & Δβ diametro IL parallelas; & propositione 32. demonstratum jam sit rectas PNOC, æquari singulas peripheriæ PLOI; liquet ex 45. *lib.* 1. *hujus*, segmenta XθPNωφ, & YβΔMCO, æquari sphæris diametrorum θφ, Δβ æqualium. Atqui Cylindricum segmentum θTEPφS æquale est segmento ΔRCOβω, ac proinde solidum XTENωS æquatur solido YωCMR, & segmentis XθPNωφ, YβΔMCO. Ergo etiam solidum XTENωS æquatur solido YωCMR & sphæris diametrorum θφΔβ, hoc est & sphæræ diametri θφ bis sumptæ.

Jam verò quia ex hypothesi altitudo Cylindri EN æquatur *c* maximæ annuli peripheriæ EH, erit solidum XTENωS, æquale *d* segmento annulari quod fit à plano SET: & solidum YωCMR *e* æquale annulari segmento, quod fit à plano ωCR. *c Vide 32. l. 3. hujus. d 28. l. 3. hujus. e Ibidem.* Ergo segmentum annulare factum à plano SET æquatur facto à plano ωCR & sphæræ θφ bis sumptæ; ac proinde segmentum annulare genitum à plano SET, excedit genitum à plano ωCR, sphærâ diametri θφ, sive ST, bis sumptâ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Schematismus 13. Fig. 91. 92. Alternis inspiciendo.

Datus sit annulus circularis patens, genitus à circulo EFCG, polo A in orbem ducto; in quo utrimque ducantur lineæ ST, ωR æquales, & axi FG parallelæ, resecantes segmenta utrimque æqualia SET, ωCR.

Rursus annulare segmentum exterius, quod fit à plano SET, excedit annulare segmentum interius genitum à plano ωCR, sphæra diametri ST, sive ωR, bis sumpta.

Super genitore circulo EFCG, intelligatur Cylindrus erigi EV, altitudinem habens EN parem peripheriæ annuli maximæ EH; cæteraque omnia construantur, quæ *prop.* 33. *libri hujus*. Deinde per rectas Rω & TS, quæ ex hypothesi sunt parallelæ GF, ducantur plana RΔβω, & TXωS, plano GILF parallela, quæ Ellipsim NIQL, secent secundùm rectas MY, Xω, circulum verò PIOL secundùm rectas Δβ, θφ, quæ diametro IL *a* æquidistabunt. *a 16. elem. 12.*

Quoniam planum GILF est *b* rectum plano EFCG, etiam plana TXωS, RΔβω per constructionem plano GILF parallela, erunt recta plano EFCG, ac proinde & plano PIOL, quod ipsi EFCG *c* æquidistat. *b per const. 33. l. 3. hujus. c Ibidem.* Quoniam igitur portiones IPNL, & LOQI secantur planis θXωφ, & βYMΔ rectis basi PIOL, & occurrentibus basi eidem secundùm rectas lineas θφ, Δβ, diametro IL æquidistantes; & demonstratum jam sit *prop.* 33. *lib.* 3. PN, OQ æquari singulas peripheriæ

ripheriæ PIOL; patet ex 45. *lib.* 1. segmenta XθPNαφ, YβδMQO æquari sphæris æqualium diametrorum θφ, δβ. Atqui solidum Cylindricum segmentum θTLPφS æquatur segmento Cylindrico δRCOβω; ac proinde solidum XTENωS æquatur segmento ωCRMYQ & segmentis XθPNαφ, YβδMQO. Ergo solidum XTNωS æquatur segmento ωCRMYQ, & sphæris diametrorum θφ, δβ æqualium, hoc est ipsi ωCRMYQ, & sphæræ diametri θφ bis sumptæ. Sed quia ex hyp. EN æquatur maximæ annuli peripheriæ EH, solido XTENωS æquatur *a* annulare segmentum, genitum à plano SET; & solido ωCRMYQ æquatur *b* annulare segmentum, quod fit à plano ωCR. Ergo segmentum annulare genitum à plano SET, æquatur annulari segmento facto à plano ωCR & sphæræ diametri θφ bis sumptæ, ac proinde segmentum annulare genitum à plano SET, excedit genitum à plano ωCR, sphærâ θφ bis sumptâ. Quod erat demonstrandum.

a 31. *l.* 3. *huius.*
b Ibidem.

PROPOSITIO XXXVI.

Schematis-mus 13.
Fig. 89. 91.

Datus sit annulus circularis, sive patens, sive clausus, in hujus genitore circulo EFCG ducantur rectæ ST, ωR, diametro FG parallelæ, quæ inter se sint æquales.

Annulare segmentum quod fit à plano SFGT, excedit segmentum annulare genitum à plano ωFGR, sphærarum diametris FG, ST, descriptarum differentia bis sumpta.

Et segmentum annulare factum à plano STTS excedit factum à plano ωRRω, differentia sphærarum, quarum diametri ST, ST, sive ωR, ωR etiam bis sumpta.

c 31 & 33. *l.* 3. *huius.*
a 34 & 35. *l.* 1. *huius.*

Demonstratum est *c* segmentum annulare, factum à semicirculo FEG excedere factum à semicirculo FCG, sphærâ genitoris circuli bis sumptâ, hoc est sphærâ diametri FG bis sumptâ. Demonstratum item est *a* segmentum annulare factum à plano SET, excedere factum à plano ωCR, sphærâ diametri ST, sive ωR, bis sumptâ. Ergo reliquum annulare solidum, quod fit à plano SFGT, excedit solidum annulare reliquum, factum à plano ωFGR, differentiâ sphærarum, quarum FG, ST diametri sunt, bis sumptâ. Quod erat demonstrandum.

De reliquis segmentis demonstrabitur eodem modo.

a Schematis-mus 13.
Fig. pro annulo elliptico longo 93. 94. 95. 96. *Fig. pro lato* 89. 90. 91. 92. *quæ prius referebant annulos circulares.*
b Defin. 20 *l.* 3. *huius.*
c Defin. 21 *l.* 3. *huius.*

PROPOSITIO XXXVII.

Omnis annuli *b* Elliptici longi, sive patentis, sive clausi, pars exterior excedit interiorem Ellipseos genitricis sphæroide longa bis sumpta.

Et omnis annuli Elliptici *c* lati pars exterior excedit interiorem genitricis Ellipseos sphæroide lata bis sumpta.

Datus sit quicumque Ellipticus annulus, sive clausus, sive patens, genitus ab Ellipsi EFCG; latitudo annuli sit EC alteruter axis Ellipseos; axis alter sit FG, polus A; peripheria media DZ. Dico exteriorem annuli partem, quæ fit à semiellipsi FEG, excedere interiorem genitam ab alterâ semisse FCG, bis sumptâ sphæroide, quæ à genitrice Ellipsi producitur, circa axem FG, qui revolutionis diametro insistit, in orbem ductâ.

Super Ellipsi genitrice concipiatur Ellipticus Cylindrus erigi, cujus altitudo EN par sit peripheriæ annuli maximæ EH (non exprimunt figuræ 96 & 94 eam longitudinem ob laminæ angustias) cæteraque omnis constructio & demonstratio propositionum 32 pro annulo clauso, & 33, pro patente (convenient enim omnia) huc transferantur; hoc solùm immutato, ut loco *pro* 11. *l.* 1. *huius*, citetur & adhibeatur *prop.* 15. *ejusdem libri*.

PROPOSITIO XXXVIII.

Schematis-mus 13.
Fig. 93. 94. 95. 96. *pro annulo Elliptico longo, pro lato autem Fig.* 89. 90. 91. 92.

In Ellipsi genitrice, sive patentis annuli, sive clausi, ducantur æquales utrimque rectæ ST, ωR, segmenta auferentes Elliptica utrimque æqualia SET, ωCR.

Ellipticum annulare segmentum, quod fit à plano SET, excedit annulare segmentum factum à plano ωCR, sphæroidico segmento cavo bis sumpto, quod fit à plano SET, sive ωCR circa axem FG in orbem ducto.

Schematis-mus 13.
Fig. 95. 96. 89. 90.

In annulo clauso, sive longo, sive lato sic demonstrabitur.

Super Ellipsi genitrice EFCG intelligatur erigi Cylindrus Ellipticus, cujus altitudo EN par sit maximæ annuli peripheriæ EH *fig.* 96. non exprimit eam altitudinem ob angustias laminæ, cæteraque omnia construantur quæ *prop.* 32. & 34. Solùm memineris PIOL jam non esse circulum, sed Ellipsim.

a Vide constr. 34. *l.* 3. *huius.*
b Ostensum 34. *l.* 3. *huius.*
c Ostensum 32. *l.* 3. *huius.*
d Coroll. 14. *p.* 15. *l.* 1. *huius.*
e Ibidem.

Quoniam θφ, δβ sunt *a* parallelæ axi IK; & plana θXαφ, δMδβY recta *b* sunt basi POIL: & altitudo PN, (ac proinde & OQ) æqualis *c* est circumferentiæ cujus diameter est PO; erit *d* segmentum XθPNαφ par sphæroidico segmento genito à plano φPθ, circa LI circumacto; & segmentum YβδMCO *e* æquabitur sphæroidico segmento facto à plano βOδ circa IL in orbem ducto. Quare cùm sphæroidica solida illa sint æqualia (fiunt enim ab æqualibus, & similibus planis φPθ; βOδ, & æqualiter ab axe IL distantibus;) etiã segmenta XθPNAαφ & YβδMCO æqualia erunt. Est autem & segmentum θTEPφS æquale segmento δRCOβω. Ergo solidum XTENωS æquatur solido ωCRMY, & segmento XθPNαφ bis sumpto; hoc est solido ωCRMY, & segmento sphæroidico bis sumpto, quod fit à plano φPθ circa IL, sive à plano SET circa GF in orbem ducto. Sed, quia EN ex constr. æquatur maximæ annuli peripheriæ EH, solido XTENωS æquatur *a* Ellipticum annulare segmentum, quod fit à plano SET; & solido ωCRMY æquatur *b* segmentum annulare, factum à plano ωCR. Ergo segmentum annulare factum ab SET æquatur annulari segmento facto ab ωCR, & sphæroidico solido bis sumpto, quod fit à plano SET, circa FG circumacto. Quod erat demonstrandum.

a 28. *l.* 5. *huius.*
b Ibidem.
Schematis-mus 13.
Fig. 93.

Pro annulo patente construantur eadem quæ *prop.* 33. & 35. Reliqua demonstratio omnis eadem erit, 94. 91. 92.

quo

quæ pro annulo clauso, hoc solum immutato, ut cum in præcedenti demonstratione citantur *prop.* 34. & 28. *hujus libri*, citentur earum loco 35. & 31. *ejusdem libri*.

PROPOSITIO XXXIX.

Schematismus 13. *Fig. pro longo* 93. 94. 95. 96. *Fig. pro lato* 89. 90. 91. 92.

Ijsdem positis, quæ in præcedenti, Ellipticum annulare segmentum, quod fit à plano SFGT, excedit segmentum annulare genitum à plano ωFGR sphæroidico segmento bis sumpto, quod producitur ab eodem plano SFGT, vel ωFGR, circa FG in orbem ducto.

c 37. *l.* 3. *hujus.* *d Præced.*

Segmentum annuli factum à genitricis Ellipseos semisse FEG excedit *c* segmentum annuli factum à semisse alterâ FCG, sphæroide bis sumptâ, quæ fit ab Ellipsi FCGE circa FG circumactâ. Item annuli segmentum factum à plano SET *d* excedit factum à plano ωCR, sphæroidico segmento bis sumpto, quod à plano SET, circa FG circumacto. Ergo reliquum segmentum annuli genitum à plano SFGT excedit reliquum, quod fit à plano ωFGR, circa FG circumacto, segmento reliquo sphæroidico bis sumpto, quod fit à plano SFGT circa FG circumacto. Quod erat demonstrandum.

Ex his facilè concludetur de segmentis reliquis.

PROPOSITIO XL.

Schematismus 14. *Fig.* 97. 98. 99. 100. *a Defin.* 19 *l.* 3. *hujus.* *b Defin.* 15 *l.* 3. *hujus.* *c Defin.* 16 *l.* 3. *hujus.*

Omnis annuli *a* Parabolici & Hyperbolici pars *b* exterior excedit *c* interiorem, Parabolæ, vel Hyperbolæ genitricis conoide bis sumptâ.

Et omnis annuli geniti à quavis plana figura, axem FD habente diametro revolutionis AD perpendicularem, pars exterior excedit interiorem, rotundo solido bis sumpto, quod fit à figura genitrice EFC circa figuræ axem FD, revolutionis diametro AD insistentem, in orbem ducta.

Schematismus 14. *Fig.* 99. 100. *d Defin.* 3. *l.* 3. *hujus.* *e Ostensum est* 27. *l.* 3. *hujus.* *f* 18. *l.* 1. *hujus.*

In annulo patente sic demonstrabitur.

Super figurâ genitrice EFC intelligatur erigi Cylindrus EFV, (Cylindrum enim voco *d* omne solidum quod fit ex quacumque figurâ planâ in aliquam altitudinem ductâ) altitudinem habens EN æqualem maximæ annuli peripheriæ EH. Hunc seca per axem plano ENVC, sumptâque ex latere CV rectâ CQ, æquali minimæ annuli peripheriæ CM, ductâque NQ, quæ occurrat axi Cylindri in K, fiat sectio NLQ, recta plano ENVC. Rursum per DF, & axem DK fiat sectio DKLF; occurrens sectioni NLQ, secundùm lineam KL, seu IL. Erit hæc *e* parallela ipsi DF. Igitur per KL fiat sectio PLO, parallela basi EFC. Solidum EDFLPK æquatur solido CDFLOK (sunt enim utriusque bases EFD, CFD, & altitudines æquales) hoc est solido QYLKDCF, & portioni OLKQ, cujus basis est OLK, altitudo OQ. Atqui portiones OLKQ & PLNK sunt *f* æquales, cùm & altitudines OQ, PN, & bases OLK, PLK sint æquales ac similes. Ergo solidum ENLKDF æquatur solido QYLKDCF, & portioni PNLK bis sumptæ.

a Demonst. 29. *l.* 3. *hujus.* *b* 4. *l.* 1. *hujus.* *c Lemma post* 21. *l.* 3. *hujus.* *d* 17. *l.* 1. *hujus.*

Jam NQ protrahatur, donec occurrat EC in A. In utraque figurâ EA, DA, CA erunt *a* eædem rectæ. Quare cùm ex hyp. CQ sit par peripheriæ CM, etiam DK peripheriæ DZ *b* æqualis erit. Ponitur autem & EN par peripheriæ EH. Ergo PN peripheriarum EH, & DZ differentia est. Atqui etiam *c* peripheria diametri EC, earumdem circumferentiarum differentia est. Ergo PN portionis PNLK altitudo æquatur peripheriæ, cujus diameter EC, sive PO. Ergo portio PNLK æqualis *d* est solido rotundo quod fit à basi PLK circa KL in orbem ductâ; hoc est rotundo solido quod fit à figurâ genitrice EFC circa DF circumactâ.

e 29. *l.* 3. *hujus.* *f* 30. *l.* 3. *hujus.*

Ulterius quia CQ, EN peripherijs CM & EH, minimæ, & maximæ æquales sunt; erit solido ENLKDF æqualis *e* pars annuli exterior à figuræ genitricis semisse EFD producta; & solido QYLKDCF æquabitur pars *f* annuli interior, quæ fit à semisse alterâ CFD. Quare cùm suprà ostensum sit solidum ENLKDF æquari solido QYLKDCF, & portioni PNLK bis-sumptæ; erit quoque pars annuli exterior æqualis interiori, & rotundo solido bis sumpto, quod fit à figurâ genitrice circa axem FD in orbem ducta. Quod erat demonstrandum.

Schematismus 14. *Fig.* 97. 98.

Demonstratio pro annulo clauso similis est præcedenti. Pro 29. & 30. *lib.* 3. *hujus* in demonstratione præcedenti citatis, citandæ hic erunt 26, & 27 *Ejusdem libri*.

PROPOSITIO XLI.

Schematismus 14. *Fig.* 97. 98. 99. 100.

Ijsdem positis: ducantur in figurâ genitrice rectæ ST, ωR inter se æquales, & parallelæ axi DF, æqualia utrimque auferentes segmenta SET, ωCR.

Annulare segmentum quod fit à plano SET, excedit annulare segmentum factum à plano ωCR cavo rotundo solido bis sumpto, quod fit ab eodem plano SET circa axem DF circumacto.

Reliqua similiter annularia segmenta singula, quæ fiunt à planis STTS, STDF excedunt singula facta à planis ωRRω, ωRDF, singulis eodem ordine rotundis solidis, quæ fiunt ab ijsdem planis circa DF circumactis.

Schematismus 14. *Fig.* 99. 100. *a* 16. *elem.* 11. *b Ostensum in præced.*

In annulo patente sic demonstro.

Constructis ijsdem quæ in demonstratione præcedenti, in basi Cylindri eædem ducantur parallelæ ST, ωR, perque eas fiant sectiones TXωS, & Rϑβω parallelæ plano per axem DKLF, quæ planum NLQ secent in rectis Xω, MY; planum verò PLO in rectis θφ, ϑβ, quæ ipsi KL *a* parallelæ erunt.

Quoniam planum DKLF est rectum plano EFC, etiam plana TXωS, Rϑβω ipsi DKLF per const. parallela, erunt recta plano EFC; ac proinde & plano PLO, quod ipsi EFC æquidistat. Cùm igitur plana θXωφ, MϑβY sint recta basi PLO, eamque secent in rectis θφ, ϑβ, axi KL parallelis; sitque insuper *b* PN, adeoque etiam OQ æqualis peripheriæ, cujus diameter EC, seu PO; erit segmentum φθXωNP

æquale *c* rotundo solido cavo quod fit à plano φPθ, circa KL circumacto: & segmentum MYδβOQ æquale *d* cavo solido quod fit à plano δβO, circa KL circumacto. Quare cùm rotunda illa solida cava sunt æqualia, utpote genita à planis φPθ, δβO similibus, & æqualibus, & æqualiter ab axe KL distantibus, etiam segmenta φθXωNP, & MYδβOQ æqualia erunt. Quoniam igitur solidum PφθSTE æquatur solido δβOCωR; erit solidum ωXNETS par solido MQYωRC, & φθXωNP bis sumpto; hoc est solido MQYωRC, & cavo solido bis sumpto, quod fit à plano Pφθ circa KL circumducto. Sed quia LN, CQ peripherijs annuli, maximæ EH, & minimæ CM æquales sunt, segmentum annuli genitum à plano SET, æquatur *a* solido ωXNETS, & segmentum annulare genitum à plano ωCR æquatur *b* solido MQYωRC. Ergo segmentum annuli genitum à plano SET, æquatur segmento annuli genito à plano ωCR, & rotundo solido cavo bis sumpto, quod fit à plano Pφθ circa KL, hoc est à plano SET circa DF circumacto. Quod erat demonstrandum.

c *Coroll.* 1. *p.* 17 *l.* 1. *hujus.*
d *Ibidem.*
a 31. *l.* 5. *hujus.*
b *Ibidem.*

Secundæ partis demonstratio ex jam dictis facilè elicietur.

Demonstratio pro annulo clauso similis est præcedenti; sed pro 31 illic citatâ hic citabitur *prop.* 28.

Schematismus 14. *Fig.* 97: 98.

PARS IV.

PROPOSITIO XLII.

Annulus circularis clausus ad sphæram circuli genitoris eam rationem habet, quam circuli circumferentia ad duas tertias partes suæ diametri.

Schematismus 15. *Fig.* 109. 110.

DAtus sit clausus annulus à circulo FCKA generatus; latitudo sit AC; polus A; peripheria media ED. Fiat super genitore circulo FCKB Cylindrus rectus CH, & per diametrum FK, ac punctum G abscindatur portio FCGK: cùm annulus & Cylindrus eumdem habeant circulum genitorem FCKB, erit annulus ad Cylindrum, ut *c* peripheria annuli media ED ad altitudinem Cylindri CG. Similiter sphæra à circulo FCKB genita, est ad portionem FCGK, ut *d* peripheria FCKB (hoc est ut peripheria *e* media ED) ad altitudinem CG. Ergo annulus est ad Cylindrum, ut sphæra ad portionem. Ergo permutando annulus est ad sphæram, ut Cylindrus ad portionem. Atqui Cylindrus est ad portionem ut *f* circumferentia circuli ad duas tertias partes diametri, quemadmodum libro primo *prop.* 40. demonstravimus. Ergo etiam annulus est ad sphæram circuli genitoris, ut circumferentia circuli ad duas diametri tertias. Quod erat demonstrandum.

c 6. *l.* 3. *hujus.*
d 13. *l.* 1. *hujus.*
e *Vide defin* 9 *l.* 3. *hujus.*
f 40. *l.* 1. *hujus.*

Scholium.

Quod in Cylindro circulari est portio per latus & centrum basis abscissa, hoc est in annulo circulari clauso sphæra genitoris circuli ipsi annulo inscripta, uti ex hac prop. 42. *& totâ* hujus libri *parte tertia manifestum est.*

PROPOSITIO XLIII.

Annulus circularis patens ad sphæram genitoris circuli eam habet proportionem, quam media annuli peripheria (ED) ad duas tertias partes latitudinis annuli (CB)

Schematismus 15. *Fig.* 108.

DAtus sit patens annulus à circulo FCKB generatus; latitudo annuli sit BC; polus A; peripheria media ED. Ab eodem circulo FCKB, circa polum B in orbem ducto, producatur clausus annulus CQ, cujus peripheria media sit EN. Quia patens, & clausus annuli ab eodem circulo sunt geniti, erit patens ad clausum, ut *a* AE ad BE; hoc est ut *b* peripheria ED ad peripheriam EN, sive *c* FCKB. Sed annulus clausus est ad sphæram genitoris circuli FCKB, ut *d* peripheria FCKB ad duas tertias diametri CB. Igitur ex æquo annulus patens est ad sphæram genitoris circuli FCKB, ut peripheria media ED ad duas tertias ipsius CB, quæ est latitudo annuli. Quod erat demonstrandum.

a 16. *l.* 3. *hujus.*
b *Pappus* *l.* 5 *p.* 41.
c *Vide def.* 9 *l.* 3. *hujus.*
d *Praeced.*

Corollarium.

Inventâ igitur ratione annuli, seu patentis, seu clausi ad sphæram annulo inscriptam, exhibebitur quadratura circuli. Cur autem inveniri ea proportio, hoc est in rectis lineis exhiberi, nequeat, cùm annulus & sphæra motibus homogeneis, nimirum à circulo circulariter utrobique moto generentur? Sanè vel etiam hinc clarissimè cernitur possibilitas quadraturæ.

PROPOSITIO XLIV.

Annulus longus Ellipticus clausus ad longam sphæroidem genitricis Ellipseos eam habet rationem, quam circuli circumferentia ad duas tertias suæ diametri partes.

Similiter annulus latus Ellipticus clausus est ad sphæroidem latam genitricis Ellipseos, ut circuli circumferentia ad duas tertias partes suæ diametri.

Schematismus 16. *Fig. pro annulo Elliptico longo* 115. 114. *Fig. pro lato* 111. 113

DAtus sit clausus annulus procreatus ab Ellipsi CKBF. circa polum A in orbem ductâ; latitudo annuli sit CB; peripheria media ED. Ellipsis deinde CKBF circa axem KF, qui revolutionis diametro AE perpendiculariter insistit, in orbem acta, producat sphæroidem.

Demonstrandum est annulum esse ad sphæroidem, ut circumferentia circuli est ad duas tertias partes diametri. Super Ellipsi genitrice CKBF fiat Cylindrus Ellipticus rectus CH, à quo per axem KF abscindatur portio FCGK. Quoniam annulus & Cylindrus eamdem Ellipsim habent genitricem, annulus est ad Cylindrum, ut *a* peripheria annuli media ED ad altitudinem Cylindri CG. Pari modo sphærois genita ab Ellipsi CKBF circa axem FK circumactâ, est ad portionem FCGK, ut circumferentia *a* descripta radio EC, sive EA, (hoc est ut circumferentia media ED) ad portionis altitudinem CG; quemadmodum *prop.* 15. *lib.* 1. demonstratum est. Ergo annulus est ad Cylindrum, ut sphærois ad portionem; & permutando, annulus est ad sphæroidem, ut Cylindrus est ad portionem. Sed Cylindrus est ad portionem ut circumferentia circuli ad duas *b* tertias partes diametri; quemadmodum demonstravimus *prop.* 41. *lib.* 1. *hujus.* Ergo etiam annulus est ad genitricis Ellipseos sphæroidem

a 6. *l.* 3. *hujus.*
a 15. *l.* 1. *hujus.*
b 41. *l.* 1. *hujus.*

roidem, ut circumferentia circuli ad duas tertias diametri partes. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Quod in Elliptico Cylindro est portio per latus & alterutrum baseos axem abscissa, hoc in clauso Elliptico annulo est sphæroïs genitricis Ellipseos; quæ ab Ellipsi genitrice circa axem KE circumactam fit; quemadmodum ex duabus præc. & hujus libri totâ parte 3. *constat.*

PROPOSITIO XLV.

Annulus longus Ellipticus patens ad longam sphæroidem genitricis Ellipseos eam habet rationem, quam media annuli peripheria ad duas tertias partes latitudinis annuli.

Similiter annulus latus Ellipticus patens est ad sphæroidem latam Ellipseos genitricis, ut peripheria annuli media est ad duas tertias partes latitudinis.

Schematismus 16. Fig. pro annulo Elliptico longo 116. Fig. pro lato 112.

Esto patens annulus productus ab Ellipsi CKBF, polo A, in orbem ductâ; sitque annuli latitudo CB; peripheria media ED. Tum Ellipsis CKBF circa axem KF circumacta producat sphæroidem.

Oportet ostendere annulum esse ad sphæroidem, ut peripheria annuli media ED ad duas tertias partes latitudinis CB. Ab eâdem Ellipsi CKBF, polo B circumductâ, describatur annulus clausus CQ. Quoniam annuli patens & clausus ab eâdem Ellipsi sunt geniti, erit patens ad clausum, ut *a* AE ad BE; hoc est *b* ut peripheriam ED, ad peripheriam EO, sive peripheriam diametri CB. Sed annulus clausus Ellipticus CQ est ad sphæroidem genitam ab Ellipsi CKBF, circa axem FK circumactâ, ut *c* circumferentia diametri CB ad duas tertias diametri CB. Igitur ex æquo annulus patens Ellipticus est ad sphæroidem genitam ab Ellipsi CKBF circa axem KF circumactâ, ut peripheria annuli media ED, ad duas tertias ipsius CB, quæ est annuli latitudo. Quod erat demonstrandum.

a 16.l.3. hujus. b Pappus l.5.p.41. c Præced.

Corollarium.

Dabit igitur quadraturam circuli, qui rationem annuli Elliptici ad sphæroidem genitricis Ellipseos fecerit notam. Quod fieri posse perspicuum est, cùm utrumque corpus ab Ellipsi circulariter motâ producatur, ac proinde homogeneum sit.

PROPOSITIO XLVI.

Omnis annulus clausus Parabolicus ad genitricis Parabolæ conoidem, eam habet rationem, quam 16 ad 3.

Schematismus 16. Fig. 119. 118.

Data sit Parabola DEB, axem habens CE ordinatim axi applicatam DCB; quæ polo B, sive A, in orbem ducta describat annulum, cujus latitudo sit DB; peripheria verò media CF. Eadem deinde Parabola circa axem EC circumacta describat conoidem.

Oportet ostendere annulum esse ad conoidem, ut 16 ad 3. Super genitrice Parabolâ DEB constituatur Cylindrus Parabolicus DBK; perque H, punctum in latere BH, & axem EC abscindatur portio CEHB.

Tacquet Cylind. Annular.

Quoniam ab eadem Parabolâ geniti sunt annulus & Cylindrus, erit *a* annulus ad Cylindrum, ut peripheria annuli media CF ad Cylindri altitudinem BH. Conois quoque genita à Parabolâ circa axem EC circumactâ, est ad portionem EHBC, ut est *b* peripheria radio BC descripta, hoc est ut peripheria media CF, ad altitudinem BH, quemadmodum *prop.* 17. *lib.* 1. ostensum est. Ergo annulus est ad Cylindrum, ut conois ad portionem. Quare permutando, annulus est ad conoidem, ut Cylindrus ad portionem. Atqui demonstratum est *c* Cylindrum esse ad portionem CEHB ut 16 ad 3. Ergo etiam annulus est ad conoidem ut 16 ad 3. Quod erat demonstrandum.

a 6.l.3. hujus. b 17.l.1. hujus. c 42.l.1. hujus.

Scholium.

Ex hoc theoremate, quin & ex totâ parte tertiâ hujus libri patet, quod in Parabolico Cylindro est portio per latus, & baseos axem abscissa, hoc in clauso Parabolico annulo esse genitricis Parabolæ conoidem.

PROPOSITIO XLVII.

Omnis patens annulus Parabolicus ad conoidem genitricis Parabolæ rationem habet compositam ex ratione diametri revolutionis ad semissem latitudinis annuli, & ex ratione 16 ad 3.

Esto Parabola DEB, axem habens EC, & ordinatim axi applicatam DB; quæ polo A in orbem ducta, describat patentem annulum Parabolicum, cujus latitudo sit BD; diameter revolutionis AC; peripheria media CF. Eadem deinde Parabola circa axem EC circumacta formet conoidem.

Schematismus 16. Fig. 117.

Demonstrandum est annulum ad conoidem rationem habere compositam ex ratione AC ad CB, & ex ratione 16 ad 3.

Parabola DEB, polo B, in orbem ducta producat annulum clausum Parabolicum DN, cujus peripheria media sit CP. Patens annulus DG ad conoidem, compositam habet rationem ex ratione annuli patentis DG ad clausum DN, & ex ratione clausi DN ad conoidem. Sed ratio patentis DG ad clausum DN, quoniam ab eâdem ambo Parabolâ sunt procreati, est eadem cum *a* ratione AC ad BC: ratio autem annuli clausi DN ad conoidem, est ratio 16 ad 3, per præcedentem. Ergo ratio patentis annuli DG ad conoidem, est composita ex ratione AC ad BC, & ex ratione 16 ad 3. Quod erat demonstrandum.

a 16.l.3. hujus.

Corollarium I.

Exhibuimus hoc theoremate & præcedenti rationem Parabolici annuli ad conoidem genitricis Parabolæ. Utrùm igitur hæc solida magis homogenea sunt quàm circularis annulus & sphæra? neutiquam profectò. Quemadmodum enim Parabolicus annulus & conois ab eâdem Parabolâ circulariter motâ gignuntur, ita planè circularis annulus & sphæra producuntur ab eodem circulo, etiam circulariter utrobique moto. Quare si illorum proportio jam fuit à nobis data, poterit exhiberi etiam horum; proindeque fit evidens possibilitas quadraturæ.

Corollarium II.

Schematismus 16. Fig. 119. 118. 117.

Omnis annulus clausus à quâcumque figurâ planâ genitus, axem habente revolutionis metro perpendicularem ad rotundum solidum, quod fit à genitrice figurâ circa axem circumacta, eam habet rationem quam Cylindrus rectus, super figurâ genitrice factus, ad portionem per latus & axem figuræ genitricis abscissam.

Patet ex demonstratione propositionis 46.

PROPOSITIO XLVIII.

Annuli clausi Parabolici pars exterior est ad interiorem ut 11 ad 5.

Schematismus 16. Fig. 119.

DAta sit Parabola DEB, axem habens CE, quæ polo A, sine B, in orbem acta describat annulum clausum Parabolicum.

Demonstrandum est exteriorem annuli partem, quæ à Parabolæ genitricis semisse DEC producitur esse ad interiorem, quæ fit à semisse alterâ BEC, ut 11 ad 5.

a 46. l. 3. hujus. b Patet ex 40. l. 3. hujus.

Ostensum est [a] annulum clausum esse ad conoïdem genitricis Parabolæ DEB, ut 16 ad 3. Atqui annulus æquatur [b] parti interiori bis, & conoidi genitricis Parabolæ etiam bis. Ergo pars interior bis cum conoide bis, est ad conoidem ut 16 ad 3. Ergo pars exterior bis cum conoide bis est ad conoidem bis, ut 16 ad 6. Ergo dividendo, pars interior bis est ad conoidem bis, ut 10 ad 6: ac proinde etiam pars interior semel est ad conoidem semel, ut 10, ad 6. Sed pars exterior æquatur [c] interiori & conoidi bis sumptæ. Ergo pars exterior est ad interiorem ut 22 ad 10; hoc est, ut 11 ad 5. Quod erat demonstrandum.

c 40. l. 3. hujus.

PROPOSITIO XLIX.

Si innotescat ratio, quam habet pars exterior circularis aut Elliptici annuli ad interiorem, habebitur circuli quadratura.

Schematismus 17. Fig. 120. 122.

DAtus esto clausus annulus à circulo CKBF polo A productus. Sit autem ratio partis exterioris ad interiorem, quæ est AB ad BC. Ex AB sume BF parem ipsi BC (erit enim AB major quàm BC, eò quod annuli pars exterior major sit interiori:) seceturr autem reliqua AF bifariam in D.

Dico circumferentiam circuli esse ad duas tertias suæ diametri, ut CA est ad DA.

Cùm pars exterior sit ad interiorem ut recta AB ad rectam BC; erit componendo annulus totus ad partem interiorem, ut AC ad BC. Sed totus annulus æquatur [a] sphæræ circuli genitoris bis sumptæ unà cum parte interiori bis sumptâ. Ergo sphæra genitoris circuli bis, cum parte interiore bis est ad partem interiorem, ut AC ad BC. Ergo sphæra bis cum parte interiori bis est ad partem interiorem bis, ut AC est ad CF duplam BC. Ergo dividendo & invertendo CF est ad FA, ut pars interior bis ad sphæram bis. Ergo pars interior bis est ad sphæram semel, ut CF est ad DF, dimidiam ipsius FA. Ergo componendo, pars interior bis cum sphærâ est ad sphæram, ut CD est ad DF. Rursum igitur componendo pars interior bis cum sphærâ bis est ad sphæram, ut CD cum DF est ad DF. Quare cùm pars interior bis cum sphærâ genitoris circuli bis [b] conficiant ipsum annulum; erit annulus ad sphæram genitoris circuli ut CD cum DF est ad DF. Sed clausus annulus est ad genitoris circuli sphæram, [c] ut peripheria circuli ad duas tertias diametri. Ergo peripheria circuli est ad duas tertias diametri ut recta constans ex CD; & DF, hoc est ut recta CA est ad rectam DF, sive DA.

a Patet ex 32. l. 3. hujus. b Ibidem. c 42. l. 3. hujus.

Eodem modo id ipsum deducetur assumpto Elliptico annulo, sed loco *prop.* 32. & 42. citandæ erunt *prop.* 37 & 44 *ejusdem libri.*

Corollarium.

Nequit igitur esse dubia possibilitas quadraturæ, quæ rursum à duorum homogenorum corporum proportione rectis lineis exponendâ dependeat.

FINIS LIBRI TERTII.

CYLINDRICORUM ET ANNULARIUM

LIBER QUARTUS.

Ab Annulorum ſoliditate gradum facio ad ſuperficiem. Hîc (quod ad Lectorem præfatus ſum) mirabilis annulares inter ſuperficies ac corpora hunc cum libro conferenti analogia ſeſe offeret. Quod ſi Archimedes tanti fecit Cylindrum inſcriptæ ſibi ſphæræ non ſoliditate tantùm, ſed etiam ſuperficie ſeſquialteram eſſe , ut ejus inventi ſymbolum tumulo opponi ſuo voluerit; erit fortaſsè, quod in annulis admiremur magis, in quibus ſoliditatem inter ac ſuperficiem non una ſed multiplex, ac propè perpetua proprietatum analogia, ſubinde etiam abſoluta identitas reperietur.

PARS PRIMA.

ANnulares ſuperficies comparo tum cum Cylindricâ ſuperficie , tum inter ſe : atque inde multiplices earum proprietates patefacio : è multis paucas hîc recenſeo. Omnis annuli (hoc eſt à quacumque planâ figurâ geniti; quod deinceps ſemper intellige) ſuperficies eſt ad ſuperficiem abſque baſibus Cylindri recti, ſuper figurâ genitrice erecti, ut peripheria annuli media, ad Cylindri altitudinem : & circularis annuli ſuperficies æquatur circulo, cujus radius eſt media proportionalis inter genitoris circuli diametrum , & mediam annuli peripheriam. Deinde omnium annulorum ab æqualibus & ſimilibus figuris genitorum , tum ſoliditates , tum ſuperficies ſunt inter ſe, ut revolutionum diametri a BA, CA, DA: & omnis patens annulus CG ſibi contigui b clauſi annuli BF tam ſoliditate, quàm ſuperficie, triplus eſt : & annulorum quotcumque c contiguorum ab æqualibus, & ſimilibus figuris genitorum , tam ſoliditates quàm ſuperficies, eam inter ſe rationem habent, quam numerorum imparium ſeries ab unitate : omnis clauſi annuli contiguos annulos quotcumque ab æqualibus & ſimilibus ſibi figuris genitos complexi ſuperficies, omnibus contiguorum annulorum ſuperficiebus æqualis eſt : & circularis annuli maxima per polum d ſectio ejuſdem maximæ per figuræ genitricis axem ſectioni æqualis eſt : & alia plura, quæ vide in libri decurſu.

a *Schematiſmus* 11. *Fig.* 79.
b *Ibidem.*
c *Ibidem.*
d *Defin.* 12 & 13 *l.* 3. *hujus.*

PARS II.

ANnularium ſuperficierum ſegmenta planis ad revolutionis diametrum rectis abſciſſa conferuntur cum ſegmentis ſuperficiei ſemiſſeos Cylindricæ, planis itidem ad baſim rectis diviſæ.

PARS III.

ANnulorum e exterior ſuperficies cum f interiori confertur. Igitur præter alia complura hæc demonſtrantur. Circularis annuli exterior ſuperficies interiorem excedit genitore circulo octies ſumpto: & ſi rectæ g ST, ωR axi FG parallelæ, æquales utrimque auferant arcus FS, GT, Fω, GR; exteriora annularis ſuperficiei ſegmenta genita ab arcubus FS, GT, excedunt interiora ab arcubus Fω, GR producta, ſedecim circulis, quorum diameter eſt GT, unius æqualium arcuum ſubtenſa. Univerſa autem annuli à quâcumque planâ figurâ geniti exterior ſuperficies interiorem ſuperat bis ſumptâ curvâ ſuperficie rotundi ſolidi, producti à figurâ genitrice circa axem, qui revolutionis diametro rectus eſt, circumactâ. Reliqua vide in decurſu libri.

e *Defin.* 17. *l.* 3. *hujus.*
f *Defin* 18. *l.* 3. *hujus.*
g *Schematiſmus* 13. *Fig.* 89. 91.

PARS IV.

HÆc poſtremò Theoremata demonſtramus.

Annuli circularis clauſi ſuperficies eſt ad ſphæræ genitoris circuli ſuperficiem, ut circumferentia circuli ad ſuam diametrum; ad ipſum verò genitorem circulum, ut circumferentia ad quartam diametri partem. Superficies circularis annuli patentis eſt ad ſuperficiem ſphæræ circuli genitoris, ut peripheria annuli media ad latitudinem annuli; ad ipſum verò genitorem circulum , ut peripheria media ad quartam latitudinis partem. Omnis circularis annuli ſive patentis ſive clauſi ſuperficies ad a maximam annuli per polum ſectionem eam rationem habet, quam circuli peripheria ad diametrum. Quod ſi innoteſcat ratio, quam habet circularis annuli exterior ſuperficies ad interiorem, circuli quadratura exhibebitur.

a *Defin.* 12 & 13. *l.* 3. *hujus.*

PARS I.

PROPOSITIO I.

Schematismus 15. Fig. 106. 107.

Datus sit annulus à quacumque figura plana BED, axem habente CE revolutionis diametro AC perpendicularem, productus, polo A. Sint autem genitrici figuræ inscripta quotcumque æqualia latera, quæ binarius metiatur, exem. gra. DF, FE, EH, HB, conscripta verò DG, GI, IK, KO, OB, figuram tangentia in punctis D, F, E, H, B. Deinde omnia cum genitrice figura, polo A, ducantur in orbem. Hac ratione annulo superficies curvæ inscribentur, & conscribentur.

Oporteat exponere quales eæ futuræ sint.

Fig. 106. DEtur primùm patens annulus. At revolutionis diametrum AC per A ducatur perpendicularis infinita, cum quâ producta latera HB, EH deorsum producta, & DF, FE producta sursum concurrent. Cum eâdem concurrant rectæ FH, IK in V, T, quæ parallelæ sunt ipsi AD. Patet igitur, dum figura cum adscriptis sibi lineis circumagitur, rectas HBL, EHM describere superficies conicas integras, quarum vertices L, & M deorsum tendant: ipsas verò HB, EH describere harum superficierum conicarum segmenta, constituta inter parallelos circulos, quorum radij sunt parallelæ HV, BA, & parallelæ, ET, HV. Liquet similiter rectas DFR, FEN eâdem rotatione formare integras superficies conicas, vertices sursum habentes; ipsas verò DF, FE producere harum superficierum conicarum segmenta existentia inter parallelos circulos quorum radij sunt parallelæ DA, FV, & FV, ET.

Fig. 107. In annulo clauso ea sola occurrit diversitas, quod HB describat integram superficiem conicam.

Fig. 106. Venio ad latera conscripta, in annulo primùm patente. Manifestum est latera BO, DC, si genitrix figura circulus, aut Ellipsis est, describere Cylindricas superficies; si est hyperbola aut parabola, conicarum superficierum segmenta efformabunt ut prius. Similiter manifestum est, IK planum annulum efficere. Media latera, quotcumque ea fuerint, superficierum conicarum segmenta, ut suprà progignent.

Fig. 107. In annulo clauso hoc tantum contingit diversum, quod si figura genitrix Ellipsis, aut circulus est, BO nihil efficiat; si parabola aut hyperbola, describat integram superficiem conicam.

PROPOSITIO II.

Schematismus 15. Fig. 106. 107.

Iisdem positis:

Superficies conicæ à quotcumque lateribus BH, HE, EF, FD annulo inscriptæ, æquantur rectangulo, cujus basim conficiunt inscripta latera, altitudo verò peripheriæ annuli mediæ CP æqualis est.

Fig. 106. DUcantur Hζ, Fδ parallelæ ad figuræ axem EC: & dividantur bifariam Bζ, Dδ in π ac β, & δC, ζC in ω ac λ. Erunt quoque βπ, & ωλ in C divisæ bifariam. Quoniam igitur Bζ bisecta est in π, erit Aπ semissis rectarum Aζ, AB. Quare cùm *a* peripheriæ sint, ut radij etiam peripheria radij Aπ semissis erit peripheriarum, quarum radij Aζ, AB, sive VH, AB. Ergo segmentum superficiei conicæ quam descripsit HB, æquatur *b* rectangulo basim habenti HB, altitudinem verò parem peripheriæ radij Aπ.

a Pappus l. 3 p. 41.
b Corol. p. 3 l. 2. hujus.

Pari modo quoniam δD bisecta est in β, erit Aβ semissis ipsarum AD, Aδ. Quare etiam peripheria radij Aβ semissis est peripheriarum, quarum radij AD, Aδ; hoc est quarum radij AD, VF. Ergo segmentum superficiei conicæ, quod genuit recta DF, æquatur *c* rectangulo basim habenti DF, altitudinem verò parem peripheriæ radij Aβ.

c Corol. p. 3 l. 2. hujus.

Utræque igitur superficies ab æqualibus lateribus HB, DF productæ æquantur rectangulo sub alterutrâ ipsarum HB, DF & summâ peripheriarum radijs Aπ, Aβ descriptarum; hoc est rectangulo sub summâ laterum HB, DF, & peripheriarum dictarum semisse comprehenso. Atqui peripheria media CP dictarum peripheriarum semissis est; cùm enim βπ bisecta sit in C, patet radium AC semissem esse radiorum Aβ, Aπ. Ergo superficies à lateribus HB, DF genitæ, æquantur rectangulo sub laterum HB, DF summâ, & peripheriâ mediâ contento.

Eodem discursu ostendemus superficies à lateribus FE, EH descriptas, æquari rectangulo sub summâ laterum FE, EH & mediâ peripheriâ comprehenso. Atque hoc in hypothesi datâ semper eveniet. Omnes igitur superficies conicæ annulo inscriptæ æquantur rectangulo sub omnium inscriptorum laterum summâ, & peripheriâ mediâ comprehenso. Quod erat Demonstrandum.

Fig. 107. In annulo clauso varianda nonnihil demonstratio erit. Nam HB describit integram coni superficiem, quæ æqualis est *a* triangulo, cujus altitudo HB, basis verò peripheriâ radij VH, sive Bζ; hoc est rectangulo contento sub HB, & peripheriâ radij Bπ sive Aπ. Reliqua demonstratio ut prius instituetur.

a 2. l. 2. hujus.

PROPOSITIO III.

Schematismus 15. Fig. 106. 107.

Iisdem positis:

Superficies à quotcumque lateribus DG, GI, IK, KO, OB annulo conscriptis genitæ, æquantur rectangulo, cujus basim conficiunt conscripta latera, altitudo verò par est peripheriæ mediæ CP.

Fig. 106. DEtur primò annulus patens. Cylindricæ superficies, quas DG, *b* BO, cùm genitrix figura circulus, vel Ellipsis est, producunt, æquantur *c* rectangulis quorum altitudines DG, BO. Bases verò peripheriæ Dω, BS radiorum AD, AB; hoc est ambæ simul æquantur rectangulo sub alterutrâ æqualium DG, BO, & summâ peripheriarum Dω, BS comprehenso; hoc est rectangulo sub summâ laterum DG, BO, & peripheriarum Dω, BS semisse contento; hoc est rectangulo contento sub summâ laterum DG, BO, & peripheriâ mediâ CP; peripheria enim media ipsarum Dω, BS semissis est.

b 1. l. 4. hujus.
c 4. l. 2. hujus.

Deinde annulus planus, quem producit parallelum latus IK, æquatur rectangulo *a*, cujus basis IK, altitudo autem peripheria radij TE, hoc est rursum peripheria media CP.

a 1 l. 1. hujus.

Dé-

Denique superficies conicas ab intermedijs lateribus GI, OK, vel alijs quotcumque; productas æquari rectangulo sub summâ laterum GI, OK, & peripheriâ mediâ comprehenso demonstrabitur, ut in præcedenti. Omnes igitur superficies annulo conscriptæ æquantur rectangulo, sub laterum conscriptorum summâ, & mediâ peripheriâ comprehenso. Quod erat demonstrandum.

In clauso annulo sic variabitur demonstratio; ostensum est Cylindricam superficiem à DG productam, æquari rectangulo sub DG & peripheriâ Dα contento; hoc est rectangulo sub summâ laterum DG, BO æqualium, & semisse peripheriæ δα, quæ ipsa est peripheria media CP. Tum cætera ut prius.

Postulatum.

Superficies annulari superficiei conscriptas (de quibus hactenus) majores esse annulari superficie; inscriptas verò eâdem minores existere.

PROPOSITIO IV.

Iisdem positis:

Annularis superficies exhauritur tam per conscriptas superficies, quàm per inscriptas.

Schematismus 14. Fig. 106. 107.

SUperficies inscriptæ *b* æquantur rectangulo, cujus basis est summa laterum inscriptorum, altitudo peripheria media: conscriptæ verò æquantur *c* rectangulo cujus basis est conscriptorum laterum summa, altitudo etiam peripheria media. Ergo superficies conscriptæ sunt ad inscriptas, ut latera conscripta ad inscripta. Sed horum laterum differentia tandem fit datâ minor. Ergo etiam differentia conscriptarum, superficierum, & inscriptarum fit tandem datâ minor. Atqui *a* annularis superficies est minor superficiebus conscriptis, major autem inscriptis. Ergo differentiæ conscriptarum, & inscriptarum superficierum respectu superficiei annularis multò magis tandem evadent minores data. Quod erat demonstrandum.

b 2. l. 4. hujus. c 3. l. 4. hujus. a Postulat.

Corollarium.

Ex his satis colligitur id, quod posteà usui erit, superficies quæ parti exteriori annularis superficiei, seu à perimetro DFE generatæ, inscribuntur, eandem superficiem exhaurire.

PROPOSITIO V.

Superficies annuli, quem figura genuit curvilinea plana quæcumque (DEB) axem habens (CE) revolutionis diametro (AC) perpendicularem, æqualis est rectangulo sub genitore perimetro (DFEHB) & peripheria annuli media (CP) comprehenso.

Schematismus 15. Fig. 106. 107.

ANnulo superficies inscribantur, & conscribantur, ut *propositione 1 hujus libri* factum. Annuli superficies nequit major esse rectangulo sub genitore perimetro DFEHB, & peripheriâ mediâ CP comprehenso. Omnes enim conscriptæ superficies, quæ superficiem annuli possunt *b* excedere quantitate quantumvis parvâ, hoc est minori ac minori in infinitum, semper æquantur rectangulo sub lateribus genitori perimetro conscriptis; & peripheriâ mediâ comprehenso, ideoque majores sunt semper rectangulo contento sub perimetro genitore, & peripheriâ mediâ. Neque etiam poterit annuli superficies esse minor rectangulo contento sub perimetro genitore, & mediâ peripheriâ: nam omnes superficies annulo inscriptæ semper æquales sunt rectangulo facto sub lateribus genitori perimetro inscriptis, & mediâ peripheriâ, ac proinde semper minores sunt rectangulo sub genitore perimetro, & peripheriâ mediâ contento. Ergo annuli superficies rectangulo sub perimetro genitore, & peripheriâ mediâ comprehenso, æqualis est. Quod erat demonstrandum.

b Præced.

Ad impossibile reducat, qui volet, hunc in modum. Si negas superficiem annularem esse parem dicto rectangulo, aut major erit, aut minor. Ponatur primò minor defectu Z. Superficiei annulari conscribi superficies possunt, quæ ipsam excedant *a* excessu minori quàm Z. Ergo etiam hæ minores erunt dicto rectangulo, nimirum peripheriâ mediâ & genitore perimetro comprehenso. Quod est absurdum; demonstratum *b* quippe est superficies illas conscriptas æquari rectangulo facto ex lateribus genitori perimetro conscriptis & peripheriâ mediâ contento, quod majus est rectangulo facto sub genitore perimetro & peripheriâ mediâ.

a Præced. b 3 l. 4. hujus.

Ponatur deinde esse major excessu X. Superficiei annulari inscribi possunt conicæ superficies, quæ ab ipsa deficiant defectu *c* minori quam X. Erunt igitur etiam hæ majores dicto rectangulo nempè sub perimetro genitore & peripheriâ mediâ comprehenso: quod est absurdum; cùm inscriptæ illæ superficies æquentur *d* rectangulo facto sub lateribus inscriptis genitori perimetro, & peripheriâ mediâ, quod minus est rectangulo facto sub perimetro genitore & peripheriâ mediâ. Quoniam igitur annuli superficies, nec major nec minor est, rectangulo sub genitore perimetro, & peripheriâ mediâ comprehenso, eidem æqualis erit.

c Præced. d 2 l. 4. hujus.

PROPOSITIO VI.

Superficies annuli, quem figura curvilinea plana quæcumque (DEB) genuit, æqualis est curvæ superficiei Cylindri recti, cujus basis est genitrix annuli figura (DEB) altitudo verò æqualis peripheriæ mediæ (CP.)

Schematismus 15. Fig. 106. 107. 105.

SUperficies annuli æquatur *a* rectangulo sub genitore perimetro, & mediâ CP peripheriâ comprehenso. Sed hoc æquatur *b* superficiei Cylindri dati. Ergo &c.

a Præced. b 4. l. 2. hujus.

Per heterogenea.

Ducantur in figura genitrice duæ rectæ δF, ζH figuræ axem CE, parallelæ & æqualiter ab eo distantes. Cùm figurâ in orbem ductâ annulum generat, puncta F & H in annuli superficie producunt peripherias Fθ, Hφ, æquales peripherijs radiorum Aδ, Aζ. Sed peripheriæ radiorum Aδ, Aζ simul sumptæ, duplæ sunt peripheriæ mediæ CP: sunt enim peripheriæ mediæ ut radij;

radij

radij autem Aδ, Aζ simul sumpti, dupli sunt radij AC. Ergo peripheriæ Fθ, Hφ simul sumptæ æquantur peripheriæ mediæ bis; hoc est, duabus rectis c lineis FY, HQ in superficie Cylindricâ per puncta F, & H descriptis. Quare cùm hoc semper in quotcumque peripherijs, & lineis rectis eveniat, superficies annuli, & curva superficies Cylindri æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

c *Colligitur ex hyp. vide. Fig. 105.*

Confer cùm propos. 5. lib. 3. & nota annularium corporum ac superficierum analogiam. Quod enim hic de superficie circulari annuli, isthic de soliditate ostensum est.

PROPOSITIO VII.

Schematismus 15. Fig. 106. 107. 105.

Omnis annuli à quacumque figurâ (DEB) geniti superficies ad curvam superficiem Cylindri, qui pro basi habet figuram (DEB) annuli genitricem, eam habet rationem, quam peripheria media (CP) ad altitudinem Cylindri (BZ.)

Super eâdem basi intelligatur Cylindrus DQ, altitudinem habens BQ parem peripheriæ mediæ CP. Hujus curva superficies hoc est superficies a annuli, est ad superficiem curvam Cylindri DZ, ut BQ ad BZ, hoc est b ut peripheria media CP ad BZ. Quod erat propositum.

a *Præced.* b *Ex hypothesi constructionis.*

Poterit etiam hoc theorema demonstrari non assumptâ altitudine æquali peripheriæ mediæ, ut patebit discursus propositionum 5, & 6 consideranti.

Confer cum propos. 6. lib. 3. & nota annularium superficierum ac corporum analogiam.

PROPOSITIO VIII.

Schematismus 15. Fig. 106. 107.

Si cujusvis annuli genitrix peripheria ita sit ad peripheriam baseos Cylindri, ut reciprocè Cylindri altitudo est ad peripheriam annuli mediam; superficies annuli, & curva Cylindri æqualis erunt: & è converso.

Super figurâ genitrice annuli intelligatur Cylindrus Z, altitudinem habens parem peripheriæ mediæ CP. Hujus Z Cylindri superficies curva c æqualis erit superficiei annulari: & quia peripheria baseos Cylindri Z (ipsa nempè peripheria genitrix) est ad peripheriam baseos Cylindri dati, ut reciprocè altitudo Cylindri dati est ad peripheriam mediam annuli, hoc est a ad altitudinem Cylindri Z, erit superficies b Cylindri Z (hoc est superficies annuli) æqualis superficiei Cylindri dati. Quod erat demonstrandum.

c *9. l. 4. hujus.* d *Ex hyp.* a *Ex hyp.* b *Corol. p. 4. l. 2. hujus.*

Confer cum prop. 7. l. 3. & nota analogiam.

PROPOSITIO IX.

Schematismus 11. Fig. 106. 107.

Omnis annuli à quacumque figura geniti superficies ad superficiem curvam cujusvis Cylindri, rationem habet compositam ex ratione peripheriæ genitricis ad peripheriam baseos Cylindri, & ex ratione peripheriæ mediæ ad Cylindri altitudinem.

Super figurâ genitrice annuli intelligatur erigi Cylindrus Z, altitudinem habens parem peripheriæ mediæ. Erit Z Cylindri superficies superficiei annuli c æqualis. Sed ejus superficies ad superficiem dati Cylindri rationem d habet compositam ex ratione peripheriæ baseos (hoc est e peripheriæ genitricis) ad peripheriam baseos Cylindri dati, & ex ratione altitudinis suæ (hoc est f peripheriæ mediæ) ad altitudinem Cylindri dati. Ergo &c.

c *6. l. 4. hujus.* d *Corol. p. 4. l. 2. hujus.* e *Hyp.* f *Hyp.*

Nota analogiam hujus cum prop. 8. l. 3.

PROPOSITIO X.

Schematismus 11. Fig. 76.

Superficies annulorum à concentricis (BG, OH) circulis genitorum, eam inter se rationem habent, quam circulorum diametri (BD, OE.)

Et superficies annulorum à quibusvis planis figuris genitorum, positis circa eundem axem, qui revolutionis diametro (AC) perpendicularis sit, eandem inter se rationem habent, quam genitricum figurarum perimetri.

Super figuris genitricibus statuantur Cylindri, altitudinem habentes parem peripheriæ mediæ CF, quæ annulis datis omnibus communis erit. Horum Cylindrorum curvæ superficies a æquantur superficiebus annulorum; & sunt b inter se, ut genitricum figurarum perimetri; hoc est in annulis c circularibus, ut diametri BD, OE. Ergo liquet propositum.

a *6. l. 4. hujus.* b *Corol. p. 4. l. 2. hujus.* c *2. l. 4. hujus.*

Confer cum prop. 9. lib. 3.

PROPOSITIO XI.

Schematismus 11. Fig. 77.

Omnium annulorum superficies, quarum reciprocantur genitores perimetri (BFO, CGE) & revolutionum diametri (QA, PA) æquales sunt: & è converso.

Super figuris genitricibus constituantur Cylindri X, & Z, quorum altitudines sint peripheriæ mediæ PN, QK. Quoniam est ut BFO perimeter baseos Cylindri X, ad CGE perimetrum baseos Cylindri Z, ita reciprocè d QA ad PA, hoc est peripheria media QK, Cylindri Z altitudo, ad peripheriam mediam PN altitudinem Cylindri X: erunt Cylindrorum X & Z superficies inter se e æquales. Sed horum Cylindrorum f superficies æquantur superficiebus annulorum. Ergo & annulorum superficies æquales erunt.

d *Hypoth.* e *Corol. p. 4. l. 2. hujus.* f *6. l. 4. hujus.*

Similis demonstratio conversæ.

Hanc confer cum prop. 10. lib. 3.

PROPOSITIO XII.

Schematismus 11. Fig. 77.

Omnium annulorum superficies rationem inter se habent compositam ex ratione perimetrorum genitorum (BFO, CGE) & ex ratione diametrorum revolutionis (PA, QA.)

Cylindricæ superficies quarum bases sunt genitores perimetri, altitudines verò peripheriæ mediæ PN, QK, æquantur a superficiebus annulorum; & rationem inter se habent b compositam ex ratione perimetrorum basium BFO, CGE, & altitudinum PN, QK, hoc est c PA ad QA, Ergo &c.

a *6. l. 4. hujus* b *Corol. p. 4. l. 2. hujus.* c *Pap. l. 5. p. 41.*

Nota analogiam cum 13. lib. 3.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Schematismus 11. Fig. 78. Annulorum ab æqualibus, & similibus figuris (BNE, DPF) genitorum, & soliditas & superficies, eam inter se rationem habent, quam revolutionum diametri (OA, CA:) & è converso.

De soliditate ostensum *prop. 16. l. 3.* nunc de superficie. Superficies Cylindrorum, quorum bases sunt figuræ BNE, DPF; altitudines verò peripheriæ mediæ OH, CG, cùm per hyp. perimetros basium BNE, DPF æquales habeant, sunt inter *d* se, ut altitudines OH, CG, hoc est *e* ut OA, CA. Sed hæ Cylindricæ superficies *f* æquantur superficiebus annularibus, quas producunt perimetri BNE, DPF polo A. Ergo etiam annulares superficies sunt inter se, ut OA ad CA. Quod erat demonstrandum.

d *Corol. p. 4. l. 2. hujus.* e *Pap. l. 5. p. 41.* f *6. l. 4. hujus.*

Hic enimverò inter annulorum soliditatem ac superficiem proprietatum non tam analogia, sed identitas est.

PROPOSITIO XIV.

Schematismus 11. Fig. 79. Annulus patens, sibi contigui clausi annuli, ab æquali & simili figura geniti, tam superficie quàm soliditate triplus est.

De soliditate ostensum 17. *l. 3.* nunc de superficie. Æquales ac similes figuræ genitrices sint QGR, RFA æqualibus basibus QR, RA impositæ, & sibi contiguæ; quæ polo A in orbem ductæ, annulo describant. Oportet ostendere superficiem patentis annuli à figurâ QGR procreati, esse triplam superficiei annuli clausi, producti à figurâ RFA.

Puncta media sint C & B, ac proinde *a* revolutionum diametri CA, BA. Quoniam ex hyp. latitudines QR, AR æquales sunt, & bifariam divisæ *b* in C & B, patet CA esse triplam BA. Atqui datorum annulorum ab æqualibus & similibus figuris genitorum superficies *b* sunt inter se, ut revolutionum diametri CA, BA. Ergo annulus patens sibi contigui clausi ab æquali & simili figurâ geniti, etiam quoad superficiem triplus est. Quod erat demonstrandum.

a *Defin. 7. & 8. l. 3. hujus.* b *Ibidem.*

En rursum non modò analogia proprietatum, sed absoluta identitas, inter soliditates ac superficies annulorum.

PROPOSITIO XV.

Schematismus 11. Fig. 79. Annuli contigui, quorum primus sit clausus, ab æqualibus, & similibus geniti figuris (AFR, RGQ, QHP, PKO &c.) tam quoad superficiem, quàm soliditatem, eam inter se rationem habent quam imparium ab unitate numerorum series, 1, 3, 5, 7, & eo deinceps ordine in infinitum.

De soliditate ostensum *prop. 18. l. 3. hujus*, nunc de superficie. Puncta annulorum media sint B, C, D, E &c. & revolutionum diametri BA, CA, DA, EA &c. Quoniam annulorum æquales *a* sunt latitudines AR, RQ, QP, PO; & omnes bifariam secantur *b* in B, C, D, E punctis medijs; patet revolutionum diametros BA, CA, DA, EA &c. constituere progressionem imparium ab unitate numerorum 1, 3, 5, 7, &c. Sed datorum annulorum ab æqualibus & similibus figuris genitorum superficies *c* sunt inter se, ut revolutionum diametri. Ergo & annularium superficierum datarum ratio eadem est, quæ numerorum ab unitate imparium. Quod erat propositum.

a *Colig. ex hyp.* b *Defin. 7. l. 3. hujus.* c *13. l. 4. hujus.*

Tacquet Cylind. & Hunal.

Scholium.

Erunt fortasse quibus videbitur, ea quæ tribus præcedentibus theorematis demonstravimus, inter Geometriæ admiranda reponi posse. Demonstraverat Archimedes Cylindrum inscripta sibi sphæra & soliditate & superficie sesquialterum esse. Atque hoc suum inventum tanti fecit, ut ob eam utriusque dimensionis adæquatam analogiam, Plutarcho teste, sphæram Cylindro inscriptam sepulchro suo apponi jusserit. Atqui hic omnino etiam adæquata, & plena analogia est, ut eadem proprietates & corpori, & toti superficiei corporis, conveniant. Cujus quidem rei utrum alij alia habeant exempla, ignoro: ego certè aliud hactenus in Geometria universa vix ullum reperio.

PROPOSITIO XVI.

Clausorum annulorum à similibus figuris (CFA, BEA) genitorum superficies, duplicatam habent latitudinum (CA, BA) rationem. *Schematismus 11. Fig. 80.*

Polus sit A; & CA, BA bifariam divisis in K & O, revolutionum diametri sint KA, OA. Annulorum clausorum datorum ratio composita *a* est ex ratione perimetri CFA, ad perimetrum BEA, & ex ratione KA ad OA. Sed quia genitrices figuræ *b* similes sunt, ratio perimetri CFA ad perimetrum BEA, est ratio CA ad BA; & ratio KA ad OA est etiam ratio CA ad BA. Ergo ratio datorum annulorum clausorum composita est ex ratione CA ad BA bis sumptâ: hoc est, duplicata est rationis CA ad BA. Quod erat demonstrandum.

a *12. l. 4. hujus.* b *Hyp.*

Confer cum 19. lib. 3.

PROPOSITIO XVII.

Dati sint quotcumque annuli contigui quorum primus sit clausus, geniti à figuris æqualibus & similibus AFR, RGQ, QHP &c. circa polum A in orbem ductis. Datus item sit annulus clausus polo etiam A productus à figura AZN prioribus simili, contiguos annulos omnes complectens. *Schematismus 11. Fig. 79.*

Hujus annuli superficies omnibus contiguorum annulorum superficiebus æqualis erit: &, si intra eundem annulum Millies fuerint plures contigui annuli, ab æqualibus, & similibus figuris geniti, hujus nihilominùs superficies illorum omnium superficiebus æqualis erit.

Quoniam figuræ genitrices ponuntur æquales & similes, latitudines annulorum AR, RQ, &c. æquales erunt. Ergo datorum annulorum superficies

c 15. l. 4. hujus. d Lemma post 20. l. 3. hujus.

perficies sunt inter se, c ut numeri totidem impares 1, 3, 5, 7, &c. quot dati sunt annuli. Sed horum aggregatum numerorum est ad unitatem in ratione duplicatâ ejus, quam d habet ipsa multitudo numerorum imparium (sive annulorum contiguorum) ad unitatem. Ergo etiam contiguarum annularium superficierum aggregatum ad primam F annularem superficiem, rationem habet duplicatam ejus, quam habet multitudo annulorum ad unitatem; hoc est, ejus quam habet NA ad RA. Sed etiam a superficies annuli clausi à figurâ AZN producti, ad primam F annularem superficiem duplicatam habet rationem ejus, quam habet NA ad RA. Ergo superficies annuli clausi à figurâ AZN producti, annulorum contiguorum intra ipsum descriptorum superficiebus æqualis est. Quod erat demonstrandum.

a 16. l. 4. hujus.

Schematismus 11. Fig. 79.

Vera est propositio licet nec contiguorum annulorum primus, nec ille qui contiguos complectitur, sit clausus. Sint enim contigui annuli ab æqualibus, & similibus PKO, OLN figuris geniti, polo A, eosque complectens annulus, polo item A productus à figurâ prioribus simili NSP. Puncta media contiguorum sint M, & E. Superficies annuli geniti ab OKP æquatur rectangulo contento sub OKP perimetro & peripheriâ mediâ puncti E per 5. l. 4, hujus similiter superficies annuli geniti ab OLN æquatur rectangulo sub peripheriâ mediâ puncti M & perimetro NLO contento. Sed hæc duo rectangula æquantur rectangulo quod fit sub summâ perimetrorum NLO, OKP, & semisse peripheriarum per M, & E transeuntium. Ergo superficies annulares genitæ ab NLO, OKP æquantur rectangulo quod fit ex perimetrorum NLO, OKP summâ, & semisse peripheriarum per M & E. Atqui perimetri NLO, OKP conficiunt perimetrum NSP (cùm enim similes omnes sint, erit NLO ad NSP, ut NO ad NP, & OKP ad NSP ut OP ad NP, adeoque ut NO cum OP ad NP, sic NLO cum OKP ad NSP) & peripheriarum per M & E semissis est peripheria per O. Ergo superficies annulares genitæ ab NLO, OKP polo A æquantur rectangulo sub NSP, & peripheriâ per O transeunte comprehenso; hoc est per 5. lib. 4. superficiei annulari genitæ ab NSP polo A. Quod erat propositum. Similis erit demonstratio si annuli essent impares.

Conferatur cum prop. 20. lib. 3.

PROPOSTIO XVIII.

Schematismus 11. Fig. 79.

Dati sint quotcumque annuli contigui; quorum primus sit clausus geniti à figuris similibus AXP, PSN circa polum in orbem actis, & latitudines annulorum AP, PN commensurabiles sint. Datus item sit clausus annulus à figurâ prioribus simili AZN, polo item A, procreatus, contiguos annulos comprehendens.

Hujus annuli superficies contiguorum annulorum superficiebus æqualis erit: & si millies fuerint plures contigui annuli latitudine commensurabiles, à similibus figuris geniti, nihilominus annuli Z superficies, illorum omnium superficiebus æqualis erit.

DAtorum annulorum latitudines AP, PN in partes AR, RQ, QP, PO, ON communi mensuræ æquales resolvantur; superque ijs constituantur figuræ, datis similes AFR, RGQ, QHP, PKO, OLN, quæ polo A circumactæ producant annulos. Superficies annuli à figurâ AXP geniti polo A æquatur b superficiebus annulorum à figuris AFR, RGQ, QHP eodem A polo genitorum. Similiter c superficies annuli producti à figurâ PSN, polo A, æquatur superficiebus annulorum genitorum à figuris PKO, OLN. Igitur simul sumptæ annulorum X & S superficies, superficiebus annulorum F, G, H, K, L simul sumptis, hoc est superficiei a annulari Z, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

b Præced. c Ibidem.

a Ibidem.

Vera erit propositio, licet neque primus contiguorum, neque is qui complectitur contiguos, sit clausus. Patet ex secundâ parte præcedentis.

PROPOSITIO XIX.

Schematismus 11. Fig. 81.

Si annuli patens (BCF) & clausus (BCPE) eandem habeant genitricem figuram EHE; patentis annuli superficies, superficiem clausi excedit Cylindricâ superficie, cujus basis est figura genitrix, altitudo minimâ patentis annuli peripheria EN.

PAtentis annuli polus sit A; peripheria media OF; annuli clausi polus E; peripheria media ED. Quoniam peripheria OF æquatur b peripherijs OD, EN; etiam superficies c Cylindri super BHE in altitudine peripheriæ mediæ OF superficiebus Cylindrorum, quorum altitudines peripheriæ OD, & EN, basis verò BHE, æqualis erit. Sed superficies Cylindri super basi BHE, in altitudine OF, æquatur d superficiei annuli polo A, à figurâ BHE producti; & superficies Cylindri cujus altitudo OD, basis verò BHE æquatur e superficiei annuli, cujus peripheria media OD, figura autem genitrix BHE. Ergo superficies annuli geniti à BHE polo A, æquatur superficiei annuli clausi, quem genuit figura BHE polo E unà cum Cylindricâ superficie, cujus basis BHE, altitudo EN. Quod erat propositum.

b Lem post 21. l. 3. hujus. c Corol p. 4 l. 2 hujus. d 6. l. 4. hujus. e Ibidem.

Notetur analogia cum 21. lib. 3. hujus.

PROPOSITIO XX.

Schematismus 12. Fig. 82.

Annulorum (BFEMK, CGDHN) ab æqualibus & similibus figuris BFE, CGD genitorum, & CE semissem latitudinis communem habentium, superficies differunt superficie clausi annuli, ab genitricum figurarum alterutrâ producti.

SUperficies annuli geniti à figura BFE polo A excedit a superficiem clausi annuli geniti ab eadem BFE, seu CGD polo E, curva superficie Cylindri, cujus basis BFE, altitudo peripheria EK. Ergo superficies annuli à BFE polo A geniti, excedit superficiem Cylindri super CGD in altitudine EK, clausi superficie annuli geniti à BFE, polo E. Sed superficies Cylindri super CGD in altitudine EK æquatur b superficiei annuli geniti à CGD polo A.

a Præced. b 6. l. 4. hujus.

A. Ergo superficies annuli geniti à BFB polo A, excedit superficiem annuli geniti à CGD polo A, superficie annuli clausi geniti à BFE polo E. Quod erat demonstrandum.

Notetur analogia cum 22. lib. 3.

PROPOSITIO XXI.

Schematismus 12. Fig. 83. 84.

Dati sint perimetri æquales BQD, NPO, sive contigui sive dissiti, sive invicem secantes (duos primos casus figuræ exprimunt) qui polo A circumacti annulares describant superficies; quarum peripheriæ mediæ sint CF, EG.

Harum superficierum differentia est superficies annuli BDQA, à figura BQD polo E producti; cujus nimirum revolutionis diameter est CE peripheriarum mediarum intervallum.

Centro E spatio EC describatur peripheria CH; erit hæc peripheria media annuli polo E, à figurâ BQD descripta. Quoniam peripheria CF peripherijs a CH, EG æqualis est; suntque item æquales perimetri BQD, NPO; erit superficies Cylindrica, cujus basis est perimeter BQD, altitudo peripheria media CF, æqualis superficiebus b Cylindricis, quarum bases perimetri BQD, NPO, altitudines peripheriæ mediæ CH, EG. Sed Cylindrica superficies, cujus basis BQD altitudo CF peripheria media, æquatur c superficiei annulari à BQD, polo A productæ: & superficies Cylindricæ, cujus basis BQD, altitudo peripheria media CH, æquatur superficiei d annulari, genitæ à BQD polo E: tandem Cylindrica superficies, cujus basis NPO, altitudo peripheria media EG, æquatur annulari e superficiei genitæ ab NPO polo A. Ergo superficies annularis genita à BQD polo A, annularibus genitis à BQD polo E, & ab NPO polo A æqualis est; ideoque quæ fit à BQD polo E, reliquarum differentia est. Quod erat demonstrandum.

a Lem. post 21. l. 3. hujus. b Corol. p. 4. l. 2. hujus. c 6. l. 4. hujus. d Ibidem. e Ibidem.

Notetur analogia cum 23. lib. 3.

PROPOSITIO XXII.

Schematismus 13. Fig. 89. 91.

Omnis annuli circularis superficies æqualis est circulo, cujus radius media proportionalis est inter (EC) genitoris circuli diametrum, & peripheriam annuli mediam (DZ)

Superficies annuli circularis cujuscumque æquatur rectæ superficiei f Cylindricæ, cujus altitudo par est peripheriæ mediæ ipsius annuli DZ; basis autem est genitoris circuli perimeter EFCG. Sed Cylindrica ea superficies æquatur g circulo, cujus radius est media proportionalis inter baseos diametrum EC, & altitudinem, hoc est peripheriam mediam DZ. Ergo etiam superficies circularis annuli æquatur circulo, cujus radius est media proportionalis inter EC genitoris circuli diametrum, & peripheriam mediam DZ. Quod fuit demonstrandum.

f 6. l. 4. hujus. g Arch. l. 1. de sph. & cyl. p. 13.

Tacquet Cylind. & Annular.

PROPOSITIO XXIII.

Schematismus 13. Fig. 89. a Defin. 14 l. 3. hujus.

Annuli circularis clausi sectio a per circuli genitoris axem FG, genitoris circuli quadrupla est.

Sectio annuli clausi per axem genitoris circuli facta est Cylindrica superficies, cujus basis par est peripheriæ mediæ DZ, ejusque radius est æqualis revolutionis diametro AD; altitudo autem illius est axis FG. Atqui ea superficies Cylindrica æquatur b rectangulo, quod superficiei Cylindricæ basi (hoc est peripheriâ mediâ DZ; hoc est perimetro genitore, æquales enim sunt, utpote communem habentes radium DC) & altitudine FG continetur. Sectio igitur clausi annuli per axem FG æquatur rectangulo sub peripheriâ EFCG, & FG axe seu diametro comprehenso, ac proinde quadrupla est rectanguli contenti sub radio DF, & circumferentiæ semisse EFC, hoc est c ipsius circuli genitoris EFCG. Quod erat demonstrandum.

b 4. l. 4. hujus. c Patet ex Arch. p. 1. dimens. cir.

PROPOSITIO XXIV.

Schematismus 13. Fig. 89. 91. d Defin. 13 l. 3. hujus. e Defin. 14 l. 3. hujus.

Omnis annuli circularis maxima d per polum sectio æqualis est ejusdem sectioni e maximæ per axem genitoris circuli.

Genitor circulus esto EFCG; ejus axis FG; polus A; diameter revolutionis AD; latitudo annuli CE. Superficies curva Cylindri, cujus basis est circulus radij AD, altitudo autem genitoris circuli axis FG, est annuli maxima sectio per axem FG. Sed ea Cylindrica superficies æquatur a rectangulo, contento sub peripheriâ radij AD, ac altitudine FG, sive EC. Ergo annuli per FG Cylindrica sectio æquatur rectangulo sub peripheriâ radij AD sive mediâ DZ, & sub diametro EC comprehenso. Sed in patente annulo planus annulus ECHM peripherijs radiorum AC, AE comprehensus, in clauso autem circulus CAEH descriptus radio CE, æquatur b etiam rectangulo contento sub EC, & peripheria media DZ. Ergo in patente annulo planus annulus ECHM maxima patentis annuli sectio per polum, in clauso verò circulus CAEH maxima annuli clausi per polum sectio, æquatur sectioni maximæ Cylindricæ per FG axem genitoris circuli. Quod erat demonstrandum.

a 4. l. 4. hujus. b p. 1. & Coroll. 1. l. 3. hujus.

PARS II.

PROPOSITIO XXV.

Schematismus 15. Fig. 105.

Datus sit Cylindrus DQ, cujus basis esto circulus DEB. Ducantur diametri DB, EC ad angulos rectos, & quatuor æqualia latera semicirculo inscribantur. Ducantur deinde tangentes quinque in punctis D, F, E, H, B. Super his lateribus semicirculo jam inscriptis, & conscriptis superficiei Cylindricæ plana inscribantur, & conscribantur.

Dico: si talis inscriptio sine termino multiplicetur, plana tam inscripta,

 quàm

quàm conscripta à Cylindricâ superficie tandem different quantitate minori datâ.

Omnia simul plana conscripta sunt ad omnia simul plana inscripta, ut *a* aggregatum linearum DG, GI, IK, KO, OB conscriptarum, est ad aggregatum inscriptarum DF, FE, EH, HB. Sed lineæ conscriptæ ad inscriptas tandem *b* habebunt rationem datâ minorem. Ergo & plana conscripta ad inscripta rationem habebunt tandem minorem datâ: ac proinde tandem etiam different quantitate minori datâ. A fortiori igitur plana tam conscripta, quàm inscripta à superficie Cylindricâ tandem different quantitate minori datâ. Quod erat demonstrandum.

a Collig. ex hyp. & ex 4. elem. 6.
b Archim. de sph. & Cyl. l. 1. p. 2.

Corollarium.

Similiter Cylindricis superficiebus Ellipticis, parabolicis, & hyperbolicis, & alijs quibuscumque inscribi poterunt plana, & conscribi, quæ ab ipsâ superficie differunt quantitate minori datâ. Quod demonstrare supersedeo studio brevitatis.

PROPOSITIO XXVI.

Schematismus 14. Fig. 104. 103. alternis inspicienda.

Datus sit annulus clausus, genitus à figura plana quacumque EDC, axem habente DB revolutionis diametro AB perpendicularem; latitudo annuli sit, EC, ordinatim posita ad axem DB; peripheria media BP; maxima CQ.

Detur item Cylindrus rectus CDδ, basim habens EDC figuram genitricem annuli; altitudinem verò CM quamcumque. In plano CMδE per axem transeunte, ducatur MI occurrens Cylindrico axi in H, & per hanc fiat sectio MIB recta plano CMδE. Tum per BD axem figuræ genitricis, & axem ipsius Cylindri fiat sectio BDIH, formans in plano MIE rectam HI. Erit hæc *a* parallela ad DB.

a Ostensum 27. l. 3. huius.

Dico partem exteriorem QCC superficiei annularis, quæ fit nimirùm à perimetro CFD, ad superficiem Cylindricam CFDINM, quæ lineis curvis CFD, INM, ac rectis DI, CM continetur, eam habere proportionem, quam maxima annuli peripheria CQ ad Cylindri altitudinem MC.

Figuræ genitrici inscribantur latera CF, FD. Hæc cum ipsâ figurâ circa polum A in orbem ducta, inscribent annulo *b* conicas superficies. Super ijsdem lateribus superficiei Cylindricæ CFDINM inscribantur plana CMNF, & FNID. Fiat deinde per HI sectio LIO parallela basi; & ducantur FT, Kα, NZ parallelæ ad BD, HI. Tum ex Z demittatur parallela ad MC: transibit hæc per *c* α; ac proinde protracta ulterius incidet in T: eritque Zα æqualis *d* NK; adeoque & ZT æqualis NF. Superficiei conicæ segmentum descriptum à latere CF continetur inter *e* parallelos circulos, quorum radij EC, βF; sive EC, ET. Est autem peripheria CQ, ad peripheriam radij ET five ad peripheriam FAA, cujus radius βF, ut *f* EC radius ad radium ET; hoc est ut *g* MC ad ZT; hoc est *h* ut MC ad NF. Igitur MC, NF paralelæ latera trapezij CMNF, circulorum, quibus conica superficies à latere CF producta continetur, peripherijs proportionalia sunt. Quare cùm etiam trapezij altitudo CF eadem sit cum latere superficiei conicæ, erit superficies conica ad trapezium, ut maxima *i* peripheria CQ ad maximum trapezij parallelum latus CN. Pari modo ostendam superficiem conicam descriptam à latere FD esse planum trapezium FNID ut peripheria FAA radij βF, sive ET, ad maximum trapezij latus parallelum NF; hoc est rursum *k* ut peripheria CQ, ad MC. Ergo omnes superficies conicæ superficiei QCC annulari inscriptæ, sunt ad omnia plana inscripta Cylindricæ, ut peripheria CQ ad MC. Atque hoc semper eveniet, licet in infinitum inscriptiones multiplicentur. Quare cùm insuper tam annularis *a* superficies QCC, quàm Cylindrica *b* per inscriptiones dictas exhauriantur, erit annularis ad Cylindricam, ut *c* peripheria CQ ad MC. Quod erat demonstrandum.

b 1. l. 4. huius.
c Corol. p. 7. l. 1. huius.
d Ibidem.
e Vide 1. l. 4. huius.
f Pappus l. 5 p. 41.
g 2. Elem. 6
h Demonstratum paulò ante l. 3 l 3. huius.
i
k Ostensum est 27. l. 2. huius & alibi sæpius.
a Corol. p. 4. l. 4. huius.
b Lem. infer.
c 1. l. 1. huius.

In hac, & 5 sequentibus observa utriusque quantitatis analogiam: quæ enim hic de partium annularium curva superficie; ea ipsa lib. 3. prop. 26 & 5 sequentibus, de partium annularium soliditate demonstrantur.

Lemma.

Superficiem Cylindricam CFDINM per inscripta plana exhauriri, sic ostenditur. Per tectam HI, quæ est ostensa *d* parallela esse ad BD, & axi occurrit in H, facta est sectio parallela basi OILH. Unde LHINM est portio recti Cylindri per punctum M in latere, & diametrum baseos HI (vel si Cylindrus est parabolicus, aut hyperbolicus, per HI axem figuræ LIO) abscissa. Hujus autem Cylindricæ superficies LKINM *e* per inscripta trapezia LMNK &c. exhauritur. Sed & Cylindricam superficiem CFDIKL per plana inscripta CLKF &c. exhauriri supra *f* demonstravimus. Igitur tota superficies Cylindrica CFDINM per tota trapezia inscripta CMNF &c. exhaurietur. Quod erat propositum.

d 37. l. 3. huius.
e Coroll. p. 7. l. 2. huius.
f 25. l. 4. huius.

Per Heterogenea.

Fig. eadem

Sumatur in exteriori genitoris perimetri semisse CFD quodvis punctum F, perque illud in annulari quidem superficie transeat peripheria FAA, cujus radius βF; in superficie autem Cylindricâ FN recta erigatur linea. Jam ostensum est in demonstratione præcedenti peripheriam radij ET, sive FAA, peripheriam esse ad CQ peripheriam, ut FN est ad CM. Igitur permutando peripheria FAA, est ad FN, ut peripheria CQ annuli maxima, ad CM altitudinem Cylindri. Et hoc semper accidet. Igitur omnes peripheriæ superficiei à perimetri semisse CFD generatæ, sunt ad omnes tectas lineas superficiei Cylindricæ CFDINM, ut peripheria CQ est ad CM. Ergo ipsa annularis superficiei pars exterior QCC à perimetri semisse genita, est ad Cylindricam superficiem CFDINM, ut peripheria CQ ad CM. Quod erat propositum.

Eodem discursu probabitur omnes peripherias reliquæ superficiei annularis, genitæ à perimetri genitoris semisse alterâ DE, esse ad omnes lineas rectas super-

ſuperficiei Cylindricæ EπIDφE, ut peripheria CQ ad CM: ac proinde (quod ſequenti *prop.* Geometricè demonſtrabimus) ipſam reliquam annularem ſuperficiem eſſe ad reliquam ſuperficiem Cylindricam EπIDφE, ut peripheria CQ ad CM.

Corollarium.

Ex his conſequens erit totam annuli clauſi ſuperficiem, eſſe ad totam Cylindricam ſuperficiem CDEπIM, hoc eſt ad ſuperficiem Cylindricam CDEOIL, ut peripheria CQ eſt ad CM; hoc eſt ut peripheria media BP ad BH altitudinem Cylindri Cζ. Atque ita habetur alia propoſitionum 6 & 7 *hujus libri* per heterogenea demonſtratio.

PROPOSITIO XXVII.

Schematiſmus 14. Fig. 104. 103. Alternis inſpicienda.

Iiſdem poſitis:
Annularis clauſæ ſuperficiei pars interior quam genuit perimetri ſemiſſis altera ED; eſt ad Cylindricam ſuperficiem EπIDφE, ut CQ maxima clauſi annuli peripheria eſt ad Cylindri altitudinem CM.

a Ex datis.

Superficies Cylindrica EπIMC ſemiſſis eſt ſuperficiei Cylindricæ CDEδφM. Sed ejuſdem dimidia quoque eſt ſuperficies CDEOIL: cùm enim *a* CE dupla ſit BE, etiam MC dupla eſt HB; ſive LC. Ergo ſuperficies EπIMC, & CDEOIL æquales ſunt. Sed tota annuli ſuperficies eſt ad ſuperficiem Cylindricam CDEOIL, ut peripheria *b* media BP, eſt ad BH; hoc eſt ut *c* peripheria CQ ad CM. Ergo etiam ſuperficies annuli eſt ad ſuperficiem EπIMC, ut CQ eſt ad CM. Atqui etiam *d* exterior annularis ſuperficiei pars eſt ad ſuperficiei illius Cylindricæ partem CFDINM, ut CQ peripheria eſt ad CM. Ergo & reliqua annularis ſuperficiei pars, nempè interior, erit ad reliquam Cylindri ſuperficiem EπIDφE, ut CQ peripheria eſt ad CM. Quod fuit demonſtrandum.

b 7. l. 4. hujus.
c Oſtenſum eſt prop. 27. l. 3. hujus. & alibi.
d 26. l. 4. hujus.

Confer cum 27 lib. 3. Et nota ſuperficiei ac corporis analogiam.

PROPOSITIO XXVIII.

Schematiſmus 14. Fig. 104. 103. Alternis inſpicienda.

Iiſdem poſitis: ſuperficies annuli clauſi tam exterior QCC, quàm interior CCE, ſumptis in perimetro genitore punctis quibuſcumque F, φ, dividatur per peripherias FAA, BB. Tum ex punctis iiſdem F & φ ductis in Cylindrica ſuperficie rectis FN, φπ, illa ſimiliter dividatur.
Dico annularis ſuperficiei partes ſingulas QAA, AACC, CCBB, BBEφ ſunt ad ſingulas eodem ordine Cylindricas ſuperficies CFNM, FDIN, DφπI, Eπφ, ut peripheria annuli maxima CQ eſt ad CM Cylindri altitudinem.

Pro tribus primis partibus demonſtratio eadem erit, quæ *prop. 26. l. 4. hujus.* Reliqua ſic oſtenditur. Interior ſuperficiei annularis pars E, BB, CC eſt ad Cylindri ſuperficiem EπIDφE, ut *a* peripheria CQ eſt ad CM. Item annularis ſuperficies CCBB eſt ad Cylindricam DφπI, ut *b* peripheria CQ eſt ad CM. Ergo reliqua ſuperficies annularis EφBB eſt ad reliquam Cylindricam Eπφ, ut peripheria CQ eſt ad CM.

a Præced.
b Per 3. partem hujus propoſ.

Confer cum 28. lib. 3, & nota ſuperficiei ac corporis analogiam.

PROPOSITIO XXIX.

Schematiſmus 14. Fig. 101. 102. alternis inſpiciendæ.

Datus ſit annulus patens, genitus à quacumque planâ figurâ EDC, habente axem DB revolutionis diametro AB perpendicularem; latitudo annuli ſit EC, ordinatim poſita ad axem DB; peripheria annuli media BP; maxima CQ; minima ER.
Erigatur item ſuper figura genitrice EDC Cylindrus rectus Cζ & fiat ut maxima annuli peripheria CQ, ad minimam ER (hoc eſt *c* ut AC, ad AE) ſic CM altitudo dati Cylindri ad ES; ducaturque recta MS, quæ erit in plano CMδB per Cylindri axem ducto, & occurret axi in H. Per MS, fiat ſectio MIS, plano CMδB recta. Denique per BD axem figuræ ſive baſeos, & per Cylindri axem fiat ſectio BHID, efficiens in plano MIS rectam, HI quæ parallela erit ad BD *d*.
Dico partem exteriorem QCC ſuperficiei annularis patentis, à perimetri ſemiſſe CFD productæ, ad ſuperficiem Cylindricam CFDINM eam habere rationem, quam maxima annuli peripheria CQ ad altitudinem CM.

c Pap. l. 5. p. 41.
d Oſtenſum 27 l. 3. hujus.

Perimetri genitoris ſemiſſi CFD inſcribantur duo latera CF, FD; quæ cum ipſo circa polum A in orbem acta, annulari ſuperficiei *a* inſcribent conicas ſuperficies. Super iiſdem lateribus inſcribantur ſuperficiei Cylindricæ CFDINM plana trapezia CMNF, FNID. Fiat deinde per HI ſectio LIO parallela baſi EDC: ducanturque FT, Kω, NZ parallelæ ad BD ſeu HI. Tum ex Z demittatur parallela ad MC; incidet *b* hæc in ω, ac proinde ulterius protracta cadet in T; eritque Zω par *c* NK, ideoque, & ZT par NF. Denique producatur MS donec occurrat ipſi CE in A. Quoniam CA eſt ad EA in Cylindro, ut CM ad ES; hoc eſt ex hypotheſi, ut CA ad EA in annulo; etiam dividendo erit CE ad EA in Cylindro, ut CE ad EA in annulo. Cùm igitur ex hyp. CE in Cylindro, & annulo eadem ſit recta, erit & EA. Quare etiam CA, TA, BA, eædem utrobique ſunt lineæ.

a Vide p. 1. l. 4. hujus.
b Corol. p. 7 l. 1. hujus.
c Ibidem.

His ita conſtitutis, manifeſtum eſt ſuperficiei conicæ ſegmentum ab FD genitum contineri inter parallelas peripherias FAA, & DCC, quarum radii βF, λD. Sed peripheria FAA eſt ad peripheriam DCC, ut peripheria radii AT eſt ad peripheriam BP, radii nempè AB; hoc eſt ut *d* TA ad BA, hoc eſt ut TZ ad BH; hoc eſt ut NF ad ID. Ergo parallelæ peripheriæ, inter quas conica ſuperficies lateris FD continetur,

d Pappus l. 5. p. 41.

trapezij FNID parallelis lateribus FN, ID proportionales sunt. Quare cùm etiam FD conicæ superficiei latus, sit altitudo trapezij; erit *c* superficies conica ad trapezium, ut peripheria FAA conicæ superficiei maxima, est ad NF maximum trapezij FNID parallelum latus; hoc est ut peripheria radij AT ad NF, sive ZT; hoc est ut *f* peripheria CQ ad CM.

c 3. l. 2. hujus.

f Ostensum est 29 l. 3 hujus & alibi.

Pari discursu ostendam superficiem à latere CF generatam, esse ad planum CMNF, ut peripheria CQ est ad CM. Ergo omnes superficies annulari superficiei QCC inscriptæ, sunt ad omnia plana inscripta superficiei Cylindricæ, ut peripheria CQ, ad CM. Atque hoc semper continget, licet inscriptiones in infinitum multiplicentur. Quare cùm insuper inscriptionibus illis, & Cylindrica *g* superficies CFDINM, & pars superficiei annularis exterior *n* QCC exhauriantur; hæc erit ad illam, ut *b* peripheria CQ ad CM. Quod erat demonstrandum.

g Lemma post 26. l. 4 hujus.
n Coroll. p. 4. l. 4. hujus.
b 1. l. 1. hujus.

Confer cum 29. lib. 3. & nota superficiei ac corporis analogiam.

Per Heterogenea.

Fig. 101. 102.

Jàm ostensum est peripheriam FAA esse ad rectam FN, ut peripheria CQ est ad CM: atque ita quælibet in annularis superficiei parte exteriori QCC, peripheria erit ad rectam in superficie Cylindricâ CFDINM ei respondentem, ut CQ peripheria est ad CM. Ergo omnes peripheriæ superficiei annularis QCC (hoc est ipsa QCC annularis superficies) sunt ad omnes rectas superficiei Cylindricæ CFDINM, hoc est ad ipsam superficiem Cylindricam; ut peripheria CQ est ad CM.

Eodem discursu etiam interior superficiei annularis pars CCR (quod sequenti *prop.* ostendam Geometricè) est ad reliquam Cylindricam IπSEφD, ut peripheria CQ ad CM.

Corollarium.

Unde tota superficies annuli patentis erit ad totam Cylindricam CDESIM, CDEOIL, ut CQ peripheria ad CM: sicque aliter per Heterogenea demonstrantur propositiones *6. & 7. lib. 4. hujus.*

PROPOSITIO XXX.

Iisdem positis:

Dico superficiei annularis patentis partem interiorem CCR ad Cylindricam IπSEφD eam habere rationem, quam maxima patentis annuli peripheria CQ ad altitudinem CM.

Schematismus 14. Fig. 101. 102. alternis inspiciendæ.

Quoniam portiones Cylindricæ LHMI, OIHS æquales habent altitudines OS, LM (cùm enim CB, BE *a.* æquales sint, etiam LH, HO, ideoque & LM, OS æquales erunt) bases quoque LIH, HIO æquales habent ac similes; erunt *b* portionum Cylindricæ superficies inter se æquales. Ex quo patet superficiem Cylindricam CDEOIL. superficiei Cylindricæ CDESIM æqualem esse. Atqui tota superficies annuli est ad superficiem Cylindricam CDEOIL, ut peripheria *c* media BP ad altitudinem CL, seu BH. Ergo etiam superficies annuli, est ad superficiem Cylindricam CDESIM, ut peripheria BP, ad BH; hoc est *d* ut peripheria CQ ad CM. Quare cùm etiam annularis superficiei pars QCC sit ad Cylindricæ partem CFDINM, ut *e* peripheria CQ ad CM; erit quoque annularis reliqua CCR ad reliquam Cylindricam IπSEφD, ut peripheria CQ ad CM. Quod erat demonstrandum.

a Hyp.
b 16. l. 2. hujus.
c 7. l. 4. hujus.
d ut Ostensum est 29 l. 3. hujus & alibi.
e Præced.

Confer cùm 30. lib. 3. & nota superficiei ac corporis analogiam.

PROPOSITIO XXXI.

Iisdem positis: superficies patentis annuli, sumptis in genitore perimetro punctis F, & φ. perque ea ductis peripherijs FAA, φBB, dividatur. Similiter per rectas FN, φπ ab iisdem punctis ductas dividatur Cylindrica superficies CDESIM.

Schematismus 14. Fig. 101. 102. alternis inspiciendæ.

Dico: annularis superficiei segmenta singula QAA, AACC, CCBB, BBR sunt ad singula eodem ordine Cylindricæ superficiei segmenta CMNF, NFDI, DIπφ, φπSE, ut maxima annuli peripheria CQ est ad CM.

Demonstratio pro tribus primis partibus eadem erit, quæ *propositionis 29. lib. 4. hujus.* Postrema pars sic ostenditur: Annularis superficies CCR est ad Cylindricam DφESπI, *a* ut peripheria CQ ad CM: & superficies annularis CCBB est ad Cylindricam DIπφ, ut *b* peripheria CQ ad CM. Ergo & reliqua annularis BBR est ad Cylindricam reliquam, ut peripheria CQ, est ad CM. Quod erat propositum.

a Præced.
b Per 3. partem hujus propos.

Confer cum 31. lib. 3. & nota superficiei ac corporis analogiam.

PARS III.

PROPOSITIO XXXII.

Superficies annuli circularis clausi exterior, quam efficit genitoris perimetri exterior semissis GEF, interiorem productam ab genitoris perimetri interiore semisse GCF excedit ipso genitore circulo octies sumpto.

Schematismus 13. Fig. 89. 90 alternis inspiciendæ.

Genitor circulus esto CFEG; latitudo annuli EA; polus A; axis FDG; peripheria media DZ; maxima EH.

Super genitore circulo erigatur Cylindrus rectus, altitudinem habens EN, parem maximæ annuli peripheriæ EH. Hunc seca per suum axem plano ENVC; in quo duc rectam NC; per quam fiat sectio Elliptica NLCI, recta plano ENVC. Deinde per circuli genitoris axem GF, & per axem Cylindri fiat sectio GILF. Fiat IL in plano Elliptico producta *c* parallela ad GF. Igitur per IK denuò sectio fiat PIOL parallela basi EGCF.

c Ostensum 27 l. 3. hujus.

Quoniam Cylindricæ portiones IPNL, LOCI, bases habent æquales ac similes, & altitudines PN, OC æquales (cùm enim ED, DC, hoc est PK, KO æquentur, etiam PN, OC ob triangulorum similitudinem æquales erunt) earum *d* Cylindricæ superficies æquales erunt. Quare cùm superficies Cylindrica GEFLPI (utpotè par superficiei GCFLOI) superficiem GIMCYLF excedat superficie portionis

d 16. l. 2. hujus.

LOCI;

LOCI; superficies GIENLF superficiem GIMCYLF excedet superficie LOCI, hoc est IPNL, bis sumptâ.

Sed, quia ex hypothesi EN par est maximæ annuli peripheriæ EH, superficies Cylindrica GIENLF par est superficiei annularis *a* parti exteriori HAA; & Cylindrica GIMCYLF æquatur superficiei *b* annularis parti interiori AAC: Cylindricæ demùm superficiei IPNL æqualis est superficies sphærica à genitore circulo procreata (quod sic ostendo cùm tam EN, DK, quàm peripheriæ EH, DZ ipsis EC, DC proportionales sint, erunt & inter se; ac proinde quia EN ponitur par peripheriæ EH, etiam DK; hoc est CO, hoc est PN, æqualis erit peripheriæ DZ mediæ; hoc est peripheriæ genitrici EFCG, cujus radius est DC, sive peripheriæ PLOI, cujus radius KO. Unde cùm PN altitudo portionis par sit circumferentiæ PLOI. superficies Cylindrica *c* portionis IPNL æquatur superficiei sphæricæ, à circulo PLOI; hoc est EFCG, procreatæ.)

a 26.l.4. hujus.
b 27.l.4. hujus.
c 7.l.2. hujus.

Ergo superficiei annularis pars exterior HAA excedit partem interiorem AAC superficie sphæricâ, à genitore perimetro EFCG factæ, bis sumptâ; hoc est *d* genitore circulo EFCG octies sumpto. Quod erat demonstrandum.

d Arch.l.1. sph.p. 30.

In hac & 10 sequentibus observa planè mirabilem annularium corporum, & superficierum analogiam. Quæ enim hic de superficierum annularium differentiis, ea ipsa lib.3. prop. 32. *& sequentibus de differentiis partium annularium solidarum demonstrantur.*

PROPOSITIO XXXIII.

Schematismus 13. Fig. 91. 92. alternè inspicienda.

Superficies patentis annuli exterior à genitoris perimetri semisse GEF producta, interiorem genitam à perimetri semisse alteram FCG excedit ipso genitore circulo octies sumpto.

Circulus genitor esto CFEG; latitudo annuli EC; diameter revolutionis AD; polus A circuli genitoris axis FG; peripheria media DZ; maxima EH; minima CM.

Super genitore circulo erigatur Cylindrus rectus, cujus altitudo EN par sit peripheriæ annuli maximæ EH. Hunc seca per suum axem plano ENVC. Ex CV latere sumpto intelligatur CQ par minimæ annuli peripheriæ CM, & ducatur recta NQ: per quam fiat sectio Elliptica NLQI, plano ENVC recta. Deinde per genitoris circuli axem GF, & per Cylindri axem fiat sectio GILF, faciens in Elliptico plano rectam IKL. Erit hæc *a* parallela ad GF. Per hanc igitur fiat sectio PIOL parallela basi EGCF. Producatur demùm NQ, donec in A concurrat cum EC.

a Ostensum 27.l.3. hujus.
b Ostensum 29.l.3. & 4. hujus.

Rectæ EA, DA, CA in annulo & Cylindro sunt *b* eædem lineæ. Quare cùm peripheria CM ponatur par rectæ CQ, etiam peripheria DZ rectæ DK *c* æqualis erit. Cùm igitur & EN ponatur par peripheriæ EH, erit PN peripheriarum EH & DZ differentia. Est autem etiam peripheria diametri EC, ipsa nimirum genitoris circuli peripheria EFCG, *d* differentia peripheriarum EH, DZ. Ergo PN altitudo portionis IPNL æqualis est peripheriæ EFCG, cujus nimirum diameter est EC, sive PO. Ergo portionis Cylindrica superficies IPNL æquatur *e* superficiei sphæræ à circulo PLOI, hoc est à genito è circulo EFCG productæ. Cylindrica verò superficies GIENLF, eò quòd *f* altitudo EN par sit maximæ annuli peripheriæ EH, æquatur superficiei *g* annularis parti exteriori HAA: superficies autem Cylindrica *h* GIMQCYLF æquatur annularis superficiei parti interiori AAM.

c 4.l.1. hujus.
d Lem.post 21.l.4. hujus.
e 7.l.2. hujus.
f Ex Hyp.
g 29.l.4. hujus.
h 30.l.4. hujus.
i 16.l.2. hujus.

Deinde quoniam portiones Cylindricæ IPNL, LOQI, æquales habent altitudines PN, OQ, bases item LIP, LOI æquales ac similes, earum Cylindricæ superficies, æquales erunt. Quare cùm Cylindrica superficies GEFLPI (utpotè æqualis ipsi FCGIOL) superficiem GIMQCYLF excedat superficie Cylindricâ LOQI, superficies Cylindrica GIENLF excedet Cylindricam GIMQCYLF, bis sumptâ Cylindricâ superficie LOQI, hoc est IPNL.

Atqui Cylindrica superficies GIENLF est superficiei annularis pars exterior HAA: & Cylindrica GIMQCYLF, est annularis interior AAM: & superficies Cylindrica IPNL est superficies sphæræ circuli genitoris; quæ omnia jam demonstravi suprà. Ergo superficies annularis exterior excedit interiorem superficie sphæræ genitoris circuli bis sumptâ; hoc est *a* ipso genitore circulo octies sumpto. Quod erat demonstrandum.

a Arch.l.1. sph.

Confer cum 33.*lib.*3. *quod hîc de superficie annulari, illîc ostensum reperies de corpore.*

PROPOSITIO XXXIV.

Schematismus 13. Fig. 89. 90. alternis inspicienda.

Datus sit annulus circularis clausus generatus à circulo EFCG: quo ducantur utrimque STωR, parallelæ axi FG, & æquales inter se, quæ à genitori perimetro abscindant æquales arcus FS, Fω, GT, GR; & ducantur recta GT, seu FS.

Dico: annularis superficiei exteriora segmenta genita ab arcubus FS, GT, excedunt interiora ab arcubus Fω, GR producta, circulo, cujus diameter GT, sive FS, decies sexties sumpto.

Super genitore circulo EFCG erigatur Cylindrus rectus, cujus altitudo EN par sit maximæ annuli peripheriæ EH; & construantur cætera, ut *prop.* 32. Præterea per rectas ST, ωR, quæ ex hypothesi æquidistant FG, ducantur plana TXωS, RδβΩ parallela plano GILF. Quæ in Cylindricâ superficie producant rectas TθX, Sφα, Rδ, ωβ: in circulo PLOI rectas θφ, δβ; quæ parallelæ *b* erunt ad IL; in plano autem Elliptico efficiant rectas Xα, MY. Ducantur tandem rectæ Iθ, IP, Iδ, IO.

b 16. elem. 11.

Quoniam PN altitudo portionis Cylindricæ IPNL æquatur *a* circumferentiæ PLOI, erit superficies Cylindrica IXθ æqualis *b* circulo radij Iθ. Similiter *c* Cylindrica superficies IMδ circulo radij Iδ æqualis erit. Sed radij Iθ Iδ æquales sunt (subtendunt enim arcus æquales arcubus TG, RG ex hypothesi æqualibus) ac proinde æquantur & circuli ijs radijs descripti. Ergo superficies Cylindricæ IXT, IMD æquales sunt.

a Ostensum 32.l.4. hujus.
b 11.l.2. hujus.
c Ibidem.

Cùm igitur superficies TθIG (utpote par ipsi GIδR) excedat superficiem IGRM superficie IMδ; superficies TXIG excedet superficiem GIMR, superficie IMδ, hoc est IXθ, bis sumptâ. Sed, quia

EN

EN altitudo æquatur ex hypothesi peripheriæ annuli maximæ EH; superficies TXIG est par superficiei *d* annulari genitæ ab arcu GT: & superficies GIMR est par *e* annulari genitæ ab arcu GR: & superficies IXθ est *f* quadrupla circuli cujus diameter est Iθ, sive GT, ac proinde sumpta bis est ejus circuli octupla. Ergo superficies annularis genita ab arcu GT excedit genitam ab arcu GR, circulo diametri GT octies sumpto. Ergo annulares superficies genitæ ab arcubus GT, FS, excedunt genitas ab arcubus GR, Fω, circulo diametri GT decies septies sumpto. Quod erat demonstrandum.

d 28.4. *hujus.* *e* *Ibidem.* *f* 11.2. *hujus.*

PROPOSITIO XXXV.

Schematismus 13. *Fig.* 91. 92. *alternis inspiciendæ, quod etiam in plerisque sequentibus observa.*

Datus sit annulus patens genitus polo A ab circulo EFCG. Hunc dividant rectæ ST, ωR, axi FG parallelæ & inter se æquales, quæ æquales utrimque abscindant arcus FS, Fω, & GT, GR ducaturque recta GT, sive FS.

Dico: exterioris superficiei annularis segmenta genita ab arcubus FS, GT, excedunt interiora, quæ fiunt ab arcubus Fω, GR, sedecim circulis diametri GT, seu FS.

Super genitore circulo Cylindrus rectus erigatur altitudinem habens EN parem peripheriæ annuli maximæ EH. Cætera construantur ut *prop.* 33. & 34.

Quoniam *a* ostensum est PN altitudinem portionis IPNL æquari peripheriæ PLOI, erit rursum superficies Cylindrica IXθ æqualis circulo *b* radij Iθ; hoc est circulo radij Iθ; hoc est quia etiam OQ par est peripheriæ PLOI, superficiei Cylindricæ *c* IMD. Quare cùm superficies Cylindrica TθIG superficiem GIMR excedat superficie IMD (hoc est IXθ) patet superficiem TXIG excedere superficiem GIMR, superficie IXθ bis sumptâ. Sed quia EN par est peripheriæ annuli maximæ EH, superficies TXIG par est superficiei *d* annulari genitæ ab arcu GT; & superficies *e* GIMR æquatur annulari genitæ ab arcu GR: & superficies IXθ est quadrupla *f* circuli, cujus diameter GT; ac proinde bis sumpta circuli octupla est. Ergo superficies annularis genita ab arcu GT, excedit genitam ab arcu GR, circulo diametri GT octies sumpto. Ergo superficies genitæ ab arcubus GT & FS excedunt genitas ab arcubus GR, & Fω, circulo diametri GT sumpto decies septies. Quod erat demonstrandum.

a 32.*l*.4. *hujus.* *b* 11 *l*.2. *hujus.* *c* *Ibidem.* *d* 31.*l*.5. *hujus.* *e* *Ibidem.* *f* 11.*l*.2. *hujus.*

PROPOSITIO XXXVI.

Schematismus 13. *Fig.* 89. 91.

Datus sit circularis annulus, sive patens, sive clausus, in cujus circulo genitore ducantur rectæ ST, ωR, axi FG parallelæ & inter se æquales, quæ æquales abscindant arcus SET, ωCR, & ducantur rectæ GT, GE, sive ES, FE.

Dico: exterius annularis superficiei segmentum ab arcu SET procreatum, excedit interius genitum ab arcu ωCR, differentia circulorum diametri GE, GT, sive FE, FS descriptorum sedecies sumpta.

Superficies annularis genita à semicirculo FEG, excedit genitam à semicirculo FCG, *a* genitore circulo EFCG octies sumpto; hoc est circulo diametri GE sumpto sedecies; est enim circulus EFCG, diametri nempè EC, duplus circuli cujus diameter GE. Superficies autem annulares genitæ ab arcubus FS, GT excedunt *b* superficies genitas ab arcubus Fω, GR, circulo diametri GT sedecies sumpto. Ergo annularis reliqua genita ab arcu SET excedit reliquam ab arcu ωCR productam, differentiâ circulorum diametris GE, GT descriptorum decies sexies sumptâ. Quod erat demonstrandum.

a 32 & 33 *l*.4. *hujus.* *b* 34 & 35 *l*.4. *hujus.*

Tres præcedentes confer cum 34, 35, 36, lib. 3.

Corollarium.

Pari ratione demonstrabitur annulares superficies genitas ab arcubus SS, TT, excedere genitas ab arcubus ωω, RR, differentiâ circulorum diametris GT, GT, sive FS, FS descriptorum sedecies sumptâ.

PROPOSITIO XXXVII.

Schematismus 13. *Figuræ pro annulo Elliptico longo* 90. 96 93 94. *Pro lato.* 89. 90 91. 92, *quæ prius exhibebant annulos & Cylindros circulares.*

Omnis longi Elliptici annuli, sive patentis, sive clausi exterior superficies excedit interiorem superficie sphæroidens longæ ab Ellipsi genitrice productâ bis sumpta.

Et omnis annuli lati Elliptici exterior superficies excedit interiorem superficie sphæroidens latæ ab Ellipsi genitrice productâ, bis sumpta.

Genitrix annuli Ellipsis esto EFCG; latitudo annuli EC alteruter axium Ellipticorum; axis alter FG; polus A; diameter revolutionis AD; peripheria media DZ; maxima EH.

Dico: superficiem ab exteriori genitricis Ellipseos semisse FEG productam excedere interiorem genitam à semisse alterâ FCG, superficie bis sumptâ ejus sphæroidis, quæ fit ab Ellipsi genitrice, circa axem FG, revolutionis diametro AD insistentem, circumactâ.

Super genitrice Ellipsi EFCG constituatur rectus Cylindrus Ellipticus, altitudinem habens parem peripheriæ annuli maximæ EH (non exprimunt figuræ 94 & 96 eam longitudinem ob loci angustias) cætera omnis constructio, ac demonstratio ex *prop.* 32. & 33. *libri hujus* huc transferetur: ex 32 quidem pro annulo Elliptico clauso; ex 33 verò pro patente: eo solùm immutato, ut pro *prop.* 7. *l.* 2. *hujus* citetur & adhibeatur 13. *ejusdem libri.*

Confer cum 37. lib. 3. quod hic de annulari superficie, isthic demonstratum reperies de corpore.

PROPOSITIO XXXVIII.

Schematismus 13. *Fig.* 93. 94. 95. 96. *pro annulo longo ell. pro lato* 89. 90. 91. 92.

Datus sit Ellipticus annulus sive patens sive clausus, genitus ab Ellipsi EFCG; ac præter ea, quæ posita sunt in præcedenti, in Ellipsi genitrice ducantur rectæ axi FG parallelæ, & inter se æquales, quæ proinde arcus abscindant æquales, & similes GT, GR & FS, Fω.

Dico

Dico superficiei annularis Ellipticæ segmenta ab arcubus GT, FS producta, excedunt genita ab arcubus GR, Fω superficie sphæroidicâ, quæ fit ab Elliptico arcu GT, sive FS, circa axem FG circumacto, quater sumptâ.

SUper Ellipsi genitrice erigatur Cylindrus altitudinem habens parem maximæ annuli peripheriæ EH, & cætera pro annulo clauso construantur ut *prop.* 32. & 34: pro patente ut *prop.* 33. & 35.

Ostendemus in annulo quidem clauso ut *prop.* 32. in patente autem ut *prop.* 33. *l.* 4. PN altitudinem portionis Elliptico Cylindricæ IPNL, æquari circumferentiæ circuli, cujus diameter PO sive EC. Quare superficies Cylindrica portionis IPNL æquatur *a* superficiei sphæroidis genitæ ab Ellipsi PLOI circa axem LI; hoc est ab Ellipsi EFCG circa axem FG circumactâ: superficies quoque IXϑ, *b* superficiei sphæroidicæ genitæ ab arcu Iϑ circa LI circumacto æqualis erit. Et quoniam OQ æquatur PN: hoc est (ut jam diximus) peripheriæ diametri PO, etiam superficies IMϑ, sphæroidicæ genitæ ab arcu ϑI, circumacto circa LI, æqualis erit. Quare cùm superficies sphæroidicæ ab arcubus Iϑ, Iϑ, æqualibus & similibus generatæ, æquales sint, etiam Cylindricæ superficies ϑXI, IMϑ æquales erunt.

a 13. *l.* 2. *hujus.* *b* *Coroll.* 1. *p.* 13. *l.* 2. *hujus.*

Cùm igitur superficies TϑIG (utpotè par ipsi GIϑR) excedat superficiem GIMR superficie IMD; patet superficiem TXIG ipsam GIMR excedere bis sumptâ superficie IMϑ, hoc est ϑXI bis sumptâ. Sed quoniam altitudo EN par est maximæ annuli peripheriæ EH; superficies TXIG par est *c* annulari Ellipticæ ab arcu GT productæ, & superficies GIMR par est annulari *d* genitæ ab arcu GR: & superficiem IXϑ jam ostendi suprà esse parem sphæroidicæ superficiei genitæ ab arcu Iϑ, circa LI; hoc est ab arcu GT circa FG in orbem ducto. Ergo superficies annularis genita ab arcu GT excedit genitam ab arcu GR, sphæroidicâ superficie genitâ ab arcu GT rotato circa FG, bis sumptâ. Ergo ambæ annulares superficies ab arcubus GT, & FS genitæ, excedunt ambas genitas ab arcubus GR, Fω, superficie sphæroidicâ arcus GT, sive FS, quater sumptâ. Quod erat demonstrandum.

c 28. & 31 *l.* 4. *hujus.* *d* *Ibidem.*

PROPOSITIO XXXIX.

Schematismus 13. *Fig.* 93. 95. 89. 91.

Iisdem positis, sive in patente annulo Elliptico sive clauso segmentum superficiei annularis Ellipticæ genitæ ab arcu SET excedit genitam ab arcu ωCR sphæroidica superficie, quæ fit ab arcu SET, seu ωCR, circa axem GF in orbem ducto, bis sumptâ.

Et Annulares superficies, genitæ ab Ellipticis arcubus SS, TT, excedunt genitas ab arcubus ωωRR sphæroidica superficie, quæ fit ab arcu TT, seu SS, circa axem FG in orbe ducto, quater sumptâ.

ANnulares superficies genitæ ab arcubus FSGT, excedunt *a* genitas ab arcubus GR, Fω superficie sphæroidicâ ab arcu FS descriptâ, quater sumptâ, sive superficiebus sphæroidicis descriptis ab utroque arcu FS, GT bis sumptis: & superficies annularis totà à perimetri semisse FEG productâ, excedit genitam à totâ semisse alterâ FCG, *b* sphæroidicâ superficie, quæ fit à semisse FEG bis sumptâ. Ergo annularis reliqua, quæ fit ab arcu SET, excedit reliquam ab arcu ωCR genitam, sphæroidicâ superficie reliquâ, quæ fit ab arcu SET rotato circa axem FG, bis sumptâ. Quod erat demonstrandum.

a *Præced.* *b* 37. *l.* 4. *hujus.*

Altera pars simili discursu demonstrabitur.

Confer cum 39. *lib.* 3.

PROPOSITIO XL.

Schematismus 14. *Fig.* 97. 98. 99. 100.

Omnis annuli parabolici & hyperbolici sive patentis sive clausi superficies exterior, quæ nimirum fit à genitoris perimetri exteriori semisse FSE, excedit interiorem, genitam à semisse altera FωC, superficie conoidis, quæ fit à genitrice parabola, aut hyperbola EFC circa axem FG in orbem ducta, bis sumptâ.

Et omnis annuli, geniti à quacumque figura plana, habente axem FD revolutionis diametro AD perpendicularem, exterior superficies excedit interiorem, superficie rotundi solidi, quod fit à genitrice figura circa axem revolutionis diametro insistentem revolutâ, bis sumptâ.

PRo annulo clauso demonstratio similis erit demonstrationi propositionis 32 *hujus libri*: sed loco propositionis 7. *l.* 2. *hujus* citanda erit propositio 14. *ejusdem libri.*

Pro annulo patente demonstratio non absimilis demonstrationi propositionis 33. Sed loco prop. 7. *l.* 2. *hujus*, iterum citanda erit 14 *ejusdem libri.*

Confer cum 40. *lib.* 3. *Quod hic ostensum de superficie, illhic demonstratum habes de corpore.*

PROPOSITIO XLI.

Schematismus 14. *Fig.* 97. 98. 99. 100.

Datus sit annulus genitus à quacumque figura plana EFC, axem FD habente revolutionis diametro AD perpendicularem. Sit autem genitrix figura secta per rectas ST, ωR parallelas axi FD, & inter se æquales, quæ æquales utrimque ac similes arcus abscindant.

Dico superficies annulares singulæ genitæ ab arcubus FS, SS, SE, excedunt singulas genitas ab arcubus Fω, ωω, ωC, singulis eodem ordine superficiebus rotundis, quæ fiunt ab arcubus iisdem FS, SS, SE circa axem FD in orbem ductis, bis sumptis.

DEmonstrabitur ut propositio 38 & 39. Sed loco *Corollarij* 1. *propos.* 13. *l.* 2. citabitur *Coroll. p.* 15. *l.* 2. & *pro* 38, ac 37, citabitur hanc præcedens. *Confer cum* 41. *lib.* 3, & *nota analogiam.*

PARS IV.

PROPOSITIO XLII.

Schematismus 15. Fig. 109. 110. alternis inspicienda.

Annuli circularis clausi superficies ad superficiem sphæræ, à genitore circulo productæ, eam habet rationem, quam circumferentia circuli ad diametrum.

CIrculus annuli genitor esto BKCF; polus A; latitudo annuli AC; genitoris circuli axis KF; peripheria media ED. Super genitore circulo Cylindrus erigatur rectus CH, in cujus superficie ex puncto C erigatur recta CG: perque diametrum FK, & punctum G abscindatur portio FCGK. Cùm annulus & Cylindrus eundem habeant circulum genitorem erit annuli superficies ad superficiem Cylindricam HC, ut *a* peripheria media ED ad Cylindri altitudinem GC. Similiter sphæræ à circulo BKCF, generatæ superficies est ad portionis FCGK Cylindricam superficiem ut *b* peripheria FCKB est ad CG, hoc est ut peripheria media ED est ad CG, sunt enim peripheriæ FCKB, & ED æquales, utpote eundem habentes radium AE. Ergò superficies annuli est ad superficiem Cylindricam CH, ut superficies sphæræ, à circulo BKCF genitæ, ad superficiem portionis. Permutatim igitur superficies annuli est ad superficiem sphæræ, ut superficies Cylindrica CH est ad superficiem portionis Cylindricam. Arqui Cylindrica superficies CH *c* est ad superficiem Cylindricam portionis, ut circuli circumferentia ad diametrum. Ergo etiam superficies annuli est ad superficiem sphæræ genitoris circuli, ut circuli circumferentia ad diametrum. Quod erat demonstrandum.

a 7.l.4. huius.
b 8.l.2. huius.
c 25.l.2. huius.

Conferatur cum 42. lib. 3. & notetur analogia superficiei ac corporis.

Scholium.

Ex hac & 42. lib. 3. patet, quod in Cylindro circulari est portio per latus, & basis centrum abscissa, hoc in clauso circulari annulo, & quoad soliditatem, & quoad superficiem, esse sphæram genitoris circuli ipsi annulo inscriptam. Quod ipsum, & totâ quoque tertiâ parte hujus 4. libri, & ex parte similiter tertia libri 3. manifestum est.

PROPOSITIO XLIII.

Schematismus 15. Fig. 108.

Annuli circularis patentis superficies ad superficiem sphæræ à genitore circulo productæ, eam habet rationem, quam peripheria annuli media (ED) ad annuli latitudinem (BC.)

ANnuli polus esto A; circulus genitor BKCF; latitudo BC; revolutionis diameter AE; peripheria media ED. Ab eodem circulo BKCF in orbem ducto circa B polum, clausus generetur annulus; cujus media peripheria sit EN. Quia patens annulus datus & clausus eundem habent circulum genitorem, erit patentis *a* superficies ad clausi superficiem ut AE ad BE; hoc est *b* ut peripheria ED ad peripheriam EN, sive FCKB; æquales enim sunt, cùm eundem habeant radium BE. Sed superficies clausi annuli est ad superficiem sphæræ genitæ à circulo FCKB ut *c* circumferentia circuli FCKB ad suam diametrum CB. Igitur ex æquo patentis annuli superficies est ad superficiem sphæræ à circulo genitore FCKB productæ, ut peripheria media est ad BC latitudinem annuli. Quod erat demonstrandum.

a 13.l.4. huius.
b Pap. l.5. p.41.
c Præced.

Conferatur cum 43. lib. 3. & notetur superficiei, ac corporis analogia.

Corollarium.

Qui dederit in rectis lineis rationem annularis superficiei ad sphæricam, dabit quadraturam. Et potest in rectis lineis procul dubio ea proportio exhiberi, cùm superficies annularis & sphærica sint homogeneæ quantitates, ab eâdem quippe circumferentiâ circulariter utrobique motâ ambæ producuntur.

PROPOSITIO XLIV.

Schematismus 16. Fig. 115. 114. vel 111. 113.

Datus sit annulus clausus, quacumque genitus plana figura BKCF, axem habente KEF revolutionis diametro AE perpendicularem. Super figura genitrice rectus erigatur Cylindrus CH, & per FK, & punctum G abscindatur portio FCGK.

Dico: superficies annuli est ad curvam superficiem rotundi solidi, quod fit à genitrice figura circa KF in orbem ducta, ut superficies curva solidi CH est ad curvam abscissæ portionis FCGK superficiem.

SUperficies annuli est ad curvam superficiem Cylindri CH, ut *a* peripheria media ED est ad altitudinem CG. Superficies quoque rotundi solidi, quod fit à figurâ FCKB circa FK in orbem ductâ, est ad superficiem portionis FCGK, ut *b* peripheria radij EC, sive EA est ad CG; hoc est ut peripheria media ED est ad CG. Annuli igitur superficies est ad superficiem Cylindri CH, ut superficies rotundi solidi est ad superficiem portionis FCGB. Igitur permutando, annuli superficies est ad superficiem rotundi solidi, quod nempè fit à genitrice figurâ circa KF in orbem ductâ, ut curva Cylindri CH superficies est ad superficiem curvam portionis FCGK. Quod erat demonstrandum.

a 7.l.4. huius.
b 14. vel 15.l.2. huius.

Observa analogiam cum Corollario p.47.lib.3.

Scholium.

Ex hac & ex Corol. p.47. lib. 3. patet quod in Cylindro cujusvis figuræ recto ductu genito, est portio per latus, & basis axem abscissa, hoc in annulo clauso ab eadem figurâ producto, esse genitricis figuræ rotundum solidum ipsi annulo inscriptum. Quod ipsum ex tota parte 3. hujus libri, & ex parte tertia lib. 3. perspicuum est.

PROPOSITIO XLV.

Schematismus 17. Fig. 121.

Datus sit planus annulus CBD contentus peripheriis CL, BQ, centro A descriptis; & ducatur recta CBAN. Circa CB centro E describatur circulus, CKBF.

Dico: planus annulus CBD est ad inscriptum sibi circulum CKBF, ut quadrupla ipsius NC est ad CB.

ANnulus planus CBD est ad circulum CKBF, ut *a* rectangulum NCB est ad quadratum radij EC, hoc est ut rectanguli NCB quadruplum ad qua-

a 43.l.1. huius.

b 1. *Elem.* 6

quadratum CB; hoc est *b* ut quadrupla rectæ NC est ad rectam CB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Schematismus 17. Fig. 120. 121.

Omnis circularis annuli superficies ad suam maximam *c* sectionem per polum eam rationem habet, quam circumferentia circuli ad diametrum.

c Defin. 12 & 13. l. 3. hujus. Fig. 120.

DEtur primùm annulus clausus, genitus à circulo AKCF: polus sit A; sectio per polum maxima, circulus ACL. Annuli hujus superficies est ad superficiem sphæræ genitoris circuli *d* ut peripheria circuli ad diametrum. Sed maxima clausi annuli sectio ACL, superficiei sphæræ genitoris circuli æqualis est; nam, & maxima sectio ACL, & superficies *e* sphærica quadruplæ sunt genitoris circuli. Ergo superficies clausi annuli est ad sectionem maximam ACL, ut peripheria circuli ad diametrum.

d 42. l. 4. hujus. e Archim. l. 1. sph. p. 30.

Fig. 121.

Detur deinde patens annulus, genitus à circulo CKBF, polo A. Hujus maxima per polum sectio erit planus annulus CBD, annuli maximâ CL, & minimâ BQ peripheriâ comprehensus; revolutionis diameter sit AE, quæ producatur in N, P, C; peripheria media sit ED. Superficies dati patentis annuli est ad superficiem sphæræ genitoris circuli CKBF, ut *f* peripheria media ED est ad BC. Superficies autem sphæræ genitoris circuli CKBF est ad planum annulum CBD, ut CB ad CN (cùm enim circulus CKBF sit ad annulum planum ut *g* CB ad quadruplum ipsius CN, erit superficies sphæræ à circulo CKBF genitæ, quæ circuli ipsius quadrupla est, ad planum annulum, ut CB ad CN.) Ergo ex æquo superficies patentis annuli est ad planum annulum CBD maximam sectionem suam, ut peripheria media ED est ad CN; hoc est ad suam diametrum EP. Quod erat demonstrandum.

f 43. l. 4. hujus. g Præced.

Corollarium.

Tam homogeneæ quantitates sunt annuli superficies & maxima annuli sectio; quàm sphærica superficies, & sphæræ sectio maxima. Quando igitur superficici sphæricæ ad sectionem maximam sphæræ proportio ab Archimede reperta est: fieri utique poterit, ut proportio superficiei annularis ad maximam annuli sectionem exhibeatur in lineis rectis, quod sufficit ad quadraturam. Non requiri siquidem, ut ea proportio rationalis sit. manifestius est quàm ut monere lectorem Geometram liceat.

PROPOSITIO XLVII.

Schematismus 17. Fig. 120. 121.

Annuli circularis clausi superficies ad genitorem circulum eam rationem habet, quam circumferentia circuli ad quartam diametri partem: superficies autem circularis annuli patentis ad genitorem circulum eam habet rationem, quam peripheria annuli media ad quartam partem latitudinis annuli (CB.)

Fig. 120. a 42. l. 4. hujus.

CLausi annuli superficies ad superficiem sphæræ genitoris circuli AKCF *a* ut circumferentia circuli ad diametrum. Quare cùm superficies hujus sphæræ circuli genitoris quadrupla *b* sit, patet clausi annuli superficiem esse ad circulum genitorem, ut est circumferentia ad quartam diametri partem. Quod erat primum.

Tacquet Cylind. Annular.

b Archim. l. 1 sph & Cyl. p. 30.

Deinde patentis annuli superficies est ad sphæræ à geninore circulo productæ superficiem ut peripheria *a* media ED est ad annuli latitudinem CB. Ergo ad genitorem circulum, quartam nempè partem superficiei sphæricæ est, ut peripheria media ad quartam partem latitudinis CD. Quod erat alterum.

Fig. 121. a 43. l. 4. hujus.

Corollarium.

Non magis homogeneæ quantitates sunt sphæræ superficies & circulus annuli genitor, quàm annuli superficies, & genitor annuli circulus. At illorum proportio datur in rectis lineis. Poterit ergo dari etiam horum.

PROPOSITIO XLVIII.

Schematismus 17. Fig. 120. 122.

Si innotescat proportio quam circularis annuli exterior superficies habet ad interiorem, dabitur circuli quadratura.

GEnitor annuli circulus esto BKCF; axis KF; polus A. Exterior annuli superficies genita à perimetri semisse KCF, ad interiorem genitam à semisse alterâ KBF, sit ut AB ad BC. Ex AB abscindatur FB par ipsi BC (cùm enim superficies annuli exterior major sit quàm interior, patet ex hypothesi AB majorem esse quàm BC) & reliqua AF secetur bifariam in D.

Dico: circuli circumferentia est ad diametrum, ut CA ad DA.

Cùm enim superficies annuli exterior sit ad interiorem, ut AB ad BC, erit componendo tota annuli superficies ad interiorem, ut AC ad BC. Sed tota superficies annuli æquatur *c* superficiei sphæræ genitoris circuli BKCF bis, & interiori superficiei annulari bis. Ergo sphærica superficies BKCF bis cum interiori annulari bis, est ad interiorem annularem, ut AC ad BC. Ergo sphærica BKCF bis, cum interiori bis, est ad interiorem bis ut AC ad CF, duplam BC. Ergo dividendo, & invertendo, interior bis est ad sphæricam bis, ut CF est ad FA. Ergo interior bis, est ad sphæricam semel, ut CF ad FD dimidiam FA. Ergo componendo interior bis cum sphæricâ semel, est ad sphæricam semel, ut CD ad DF. Rursum igitur componendo interior bis cum sphæricâ bis, est ad sphæricam semel: ut CD cum DF ad DF; hoc est, tota *a* superficies annuli est ad superficiem sphæricam dictam, nimirum à genitore perimetro productam, ut CD cum DF ad DF. Atqui clausi circularis annuli superficies est ad sphæricam superficiem factam à genitore perimetro ut *b* circumferentia circuli ad diametrum. Ergo circumferentia circuli est ad diametrum, ut CD cum DF ad DF, hoc est ut CA ad DA. Datur igitur in rectis lineis proportio circumferentiæ ad diametrum. Quod erat propositum.

c Ex 32. & 4. hujus. a Ibidem. b 42. l. 4. hujus.

Confer cum ultima lib. 3. & magnam in annulis observa superficiei, ac corporis analogiam.

Corollarium.

Ecce: rursus proportionem circumferentiæ ad diametrum reduximus ad proportionem quantitatũ, quæ citra controversiam homogeneæ sunt. Nullum igitur de possibilitate quadraturæ dubiũ relinquitur.

FINIS LIBRI QUARTI.

CYLINDRICORUM ET ANNULARIUM

LIBER QUINTUS.

ARGUMENTUM ET DIVISIO LIBRI.

PARS PRIMA.

Demonstratur quamvis planam superficiem, quocumque situ circa axem quovis, aut nullo ab ea distantem intervallo, in orbem ductam, producere rotundum solidum æquale solido recto, quod fit ab eâdem superficie ductâ in altitudinem parem circumferentiæ à centro gravitatis descriptæ.

PARS II.

Demonstratur quamvis perimetrum, quocumque situ circa axem ab ea quomodocumque distantem, in orbem ductam, gignere rotundam superficiem æqualem superficiei rectæ quæ fit ab eâdem perimetro, ducta in altitudinem æqualem circumferentiæ à gravitatis centro descriptæ.

PARS III.

Corporum a *rotundorum à Parabola genitorum affectiones quædam illustriores deducuntur.*

a Vide def. 1.

PARS IV.

Viæ multiplices ac novæ ad circuli quadraturam.

PARS V.

Solido annulari ab Hyperbola genito sphæra exhibetur æqualis. Hinc novæ ad Hyperbolæ quadraturam viæ aperiuntur; & reperitur sphæra æqualis integro annulo, producto à figura, quæ ex segmento circuli, & segmento Hyperbolæ composita est. Deinde Cylindri Hyperbolici partes quædam absolutè cubantur: unde aliæ rursum ad quadraturam Hyperbolæ panduntur viæ.

PARS VI.

Proportio Hyperbolæ ad circulum theorematicè exhibetur.

Regulam universalem centri gravitatis, quam prima & secunda parte demonstrandam suscepi, primus, quod sciam proposuit adhibuitque Paulus Guldinus è Societate Iesu lib. 2. Centrobaricorum cap. 8. pag. 147. his verbis expressam: quantitas rotunda in viam rotationis ducta producit potestatem rotundam uno gradu altiorem. *Quo licet ille egregiam laudem promeritus sit: regulam tamen, quod maximè petitur, non demonstravit.*

DEFINITIONES.

Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Rotunda solida & rotundas superficies voco omnia ea corpora, & eas omnes superficies, quæ circulari motu circa axem aliquem, hoc est lineam immobilem procreantur.

Recta quædam NQ, & figura quæcumque DECB existant in uno plano DECNQ. Tangat autem figuram DECB, vel quomodocumque secet recta EB, occurrens ipsi NQ in A sub angulo quocumque. Deinde planum CEDNQ, in quo existunt figura DECB, & rectæ EBA, NQ, intelligatur perpendiculariter erectum suprà aliud planum, putà hujus paginæ, & immobili permanente rectâ NQ, ducatur in orbem, sic ut semper maneat perpendiculare ad planum, ad quod fuit perpendiculariter erectum, & recta EBA semper in eodem puncto ac sub eodem angulo secet ipsam NQ. Corpus à figurâ DECB sic revolutâ genitum, voco *Rotundum solidum*; superficiem verò genitam à perimetro DSKC, voco *Superficiem rotundam*.

Rectam NQ, quæ immobilis perstitit, *Axem revolutionis* appello, ut distinguam ab eo axe quem figuræ quædam intra se habent, qui nimirum omnes rectas cuidam alteri in figurâ æquidistantes, bifariam & ad angulos rectos secat.

Planum denique ad quod DECNQ planum perpendiculariter erectum fuit, *Revolutionis planum* appellabitur.

Hac definitione annularia corpora omnis generis, & non annularia complector. Cùm enim axis revolutionis NQ extra figuram est, ut in schemate 6, 8, 10, 13, 15, 16, 17, aut figuram in puncto tangit, ut in schemate 9 & 20, corpora producuntur, quæ vel annuli sunt, vel annulorum partes, vel certè annularia, hoc est quæ ad annulos ob aliquam similitudinem reduci possint. Quod si figura, quæ in orbem ducitur, subtensam habeat, eaq; concidat cum axe revolutionis, ut in schemate 7, 11, 14, 18, 19, procreantur sphæra, sphæroides, conoides, mala citria, aliaq; innumerabiles corporum species, quæ nullam cum annulis similitudinem habeant.

Porrò definitio prima lib. 3. Cylindricorum & annulariurn, ad annularia sola pertinet, & quidem ea, quæ fiunt à figurâ axem aliquem intra se habente revolutionis plano perpendicularem. Cujus definitionis quando mentio facta hic est, velim in ea lector paucula suppleat, quæ excidere. Pag. 481. ita habetur; Sic ut recta ABC in uno feratur plano: *adde*, ad EK recto. *Tum hæc subsequuntur*: & figura dum circumducitur sibi maneat parallela. *Adde has litteras*: EK: *Lege ergo*: & figura dum circumducitur, EK sibi ipsi maneat parallela.

Fig. 6. 7. 8. &c.

2. *Via centri gravitatis*, est peripheria circuli, quæ à figuræ (DECB) in orbem actæ, gravitatis centro (Z) describitur.

3. *Solidum rectum* est, quod figura plana quæcumque rectâ latione mota producit: & *Superficies recta*, quæ fit à quavis perimetro rectâ latione motâ.

Perimetrum autem voco cujusvis planæ figuræ circumferentiam, sive totam, sive partem ejus.

4. *Figura plana curvilinea axem habens*, ea dicitur, in quâ omnes lineæ rectæ uni certæ æquidistantes ad angulos rectos bifariam secantur. Rectæ autem, quæ ab axe bisecantur, ad axē ordinatim applicatæ dicuntur.

5. *Figura axem habens & continuè decrescens*, ea dicitur, in quâ ordinatim ad axem (BE) applicatæ continuè versùs unam partem crescunt, versùs alteram verò decrescunt, donec vel in punctum abeant, vel deveniatur ad aliquam minimam.

Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 18. 19.

Tales sunt triangulum isosceles, semisses polygonorum regularium, semicirculus, semiellipsis, vel segmenta eorum, Parabola, Hyperbola, & aliæ innumerabiles.

6. *Figura axem habens & non continuè crescens, seu decrescens*, ea dicitur, in quâ ordinatim ad axem (BE) applicatæ, cùm versùs unam partem aliquousque creverint, deinde rursùm decrescunt; aut contra: sive quæ non continuè versùs unam partem vel coarctantur, vel dilatantur.

Fig. 13.

7. *Figura circa axem non plena*, dicatur ea, quæ remanet, postquam à figurâ totâ axem habente ablata fuerit figura, habens eundem axem cum totâ.

In schemate 15 & 16 figura circa axem non plena est GCRDKH, quæ remanet si à totâ GCDH abstuleris GRKH. Et in schemate 20 figura circa axem BE non plena, est aggregatum Ellipsium, quæ remanent, cùm à toto HEFCDH subduxeris mixtilinea GKH, CKD.

8. *Lineas rectas perimetro axem habenti, ordinatim inscriptas & circumscriptas*, voco, cùm quæ ab axe æqualiter distant, sunt æquales.

Ut in fig. 22, si æquales sint DF, CI & FG, IH, & GE, HE, dicentur perimetro DEC ordinatim inscriptæ. In figurâ autem 23, si æquales similiter sint DF, CI, & FG, IH, & GE, HE, perimetro ordinatim erunt circumscriptæ.

9. *Rectilineum figuræ ordinatim inscriptum* dico, quod lineis rectis figuræ perimetri ordinatim inscriptis continetur.

PARS I.

Demonstratur quamvis planam superficiem, quocumque situ circa axem quovis, aut nullo ab ea distantem intervallo, in orbem ductam, producere rotundum solidum æquale solido recto, quod fit ab eâdem superficie ductâ in altitudinem parem [a] viæ centri gravitatis.

a Def. 1.

Lemma I.

Figuræ planæ (DECB) axem habenti (BE) & continuè decrescenti, possunt tot rectangula ordinatim ad axem posita, & æquales habentia latitudines, inscribi & circumscribi, ut tam inscripta, quàm circumscripta à figurâ differant quantitate quavis datâ minori.

Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Demonstrarunt Archimedes alijque; & per se satis clarum est.

Lemma II.

Iisdem positis, summæ rectangulorum tam inscriptæ quàm conscriptæ centrum gravitatis est in (BE) axe figuræ.

Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Demonstratio. Quoniam ex hyp. rectangula sunt

ad

ad axem BE ordinatim posita, bisecantur omnia ab axe. Singulorum igitur centra *a* gravitatis in axe sunt; ac proinde & commune *b* omnium gravitatis centrum in axe est.

a *Arch.* 9. *l.* 1 *æquip.* b *Arch.* 8. *l.* 1. *æquip.*

Lemma III.

Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Omnis figuræ planæ, axem habentis, centrum gravitatis in axe est.

Demonstratio. Detur primùm figura continuè decrescens. Quotcumque illi rectangula ad axem ordinatim posita inscripseris, centrum gravitatis commune *c* omnium erit in axe. Quoniam igitur rectangula figuram *d* exhauriunt, etiam centrum gravitatis figuræ in axe erit: quod quidem eodem modo demonstrabitur, quo id ipsum Archimedes demonstravit de triangulo *prop.* 13. *lib.* 1. *de æquip.*

c *Per lem.* 2. d *Per lem.* 1.

Fig. 13.

Detur deinde figura axem habens, non continuè decrescens GBLMRETSG. Resolvatur in tot figuras decrescentes continuè, in quot potest, uti hic in quatuor, ductis ad axem BE perpendicularibus LG, MS, RT. Jam ostensum est singularum centra esse in axe. Ergo & commune *k* omnium in axe erit.

k *Arch* 8. *l.* 1. *æquip.*

Lemma IV.

Fig. 15. 16.

Figuræ circa axem non plenæ (GCRKDH) centrum gravitatis in axe est.

Demonstratio. Ex *definitione* 7. figura tota GCDH axem habet, putà BE. Ergo ejus gravitatis *a* centrum est in axe BE. Rursus ex eadem *definitione*, figura ablata GRKH eumdem habet axem BE, ac proinde ejus quoque *b* gravitatis centrum est in axe BE. Cùm ergo centra totius & ablatæ sunt in axe BE; etiam reliquæ, *c* ipsius nempè figuræ GCRKDH, centrum gravitatis in axe erit.

a *Praeced.* b *Præced.* c *Archim.*

Lemma V.

Figuræ decrescenti continuè inscribi vel circumscribi possunt tot rectangula ad axem ordinatim posita, ut commune eorum gravitatis centrum distet à centro gravitatis figuræ, intervallo minori quocumque dato.

Demonstratio. Demonstrarunt hoc in circulo, Ellipsi, Parabolâ. Hyperbolâ, Archimedes, Ioannes della Faille, Paulus Guldinus, Christianus Hugenius, aliique: & res de se satis manifesta est, ut operæ pretium non sit idem in reliquis figuris demonstrare. Nam cùm tot rectangula figuræ inscribi vel circumscribi possint, *i* ut figuræ & aggregati rectangulorum differentia tandem evanescat, hoc est, quâcumque datâ fiat minor; ac proinde rectangulorum illa series in ipsam denique figuram desinat; necesse etiam est, centra gravitatis ad invicem accedere semper propiùs, ac tandem versùs unum punctum intervallo quovis dato minori appropinquare.

i *per lem.* 1.

PROPOSITIO I.

Fig. 1. 2. 3.

Data sint duo solida recta EG, AD, inæqualium altitudinum EF, AC, genita à quibuscumque planis figuris VE, AB. Sit autem alia quæpiam altitudo media LK ejusmodi, ut HF defectus ejus ab altitudine EF sit ad KI excessum ejus suprà altitudinem AC ut reciprocè planum AB ad planum VE. Dico solidum quod fit ex utroque plano AB, VE, in altitudinem LK ducto, æquari utrique solido AD, & EG.

Demonstratio. Fiant ET & LI æquales AC, sitque planum LNXM æquale planis VE, AB; & segmentum MNX, plano VE, segmentum verò MNL ipsi AB ponatur æquale: ducanturque utraque in altitudines LI, LK. Liquet solidum MNXRSQ, æquari *a* solido VT, & solidum MLNSIQ æquari solido AD; habent enim bases & altitudines *b* æqualia. Ob eamdem causam solida TZ, & QRSOYP æqualia erunt; cùm basis QSR basi *a* T, & altitudo YR, seu IK altitudini TH *c* æqualis existat. Deinde quia ex hyp. HF est ad IK ut reciprocè planum AB, hoc est planum MLN, seu QIS, ad planum EV, seu ZH, solida quoque QISOKP, & HG *d* æqualia erunt. Totum igitur solidum LY utrique EG & AD æquale est. Sed solidum LY est id quod fit ex planis VE, & AB, ductis in altitudinem LK, cùm planum LNXM planis VE, & AB sit æquale. Ergo solidum quod fit ex utroque plano AB, EV, ducto in altitudinem LK, æquatur utrique solido AD & EG. Quod erat demonstrandum.

a *Cor.* 11. 12. b *Per constr.* c *Per constr.* d *Ex* 15. 12.

PROPOSITIO II.

Fig. 1. 2. 3.

Sit planum LNXM planis VE, & AB æquale, & solidum LY genitum ex plano LNXM ducto in altitudinem IK, æquale solidis, quæ fiunt ex plano VE ducto in altitudinem EF, & ex plano AB ducto in altitudinem AC. Dico HF, IK trium altitudinum, EF, LK, AC differentias, esse planis VE, & AB, proportionales reciprocè.

Hoc est HF esse ad IK, ut AB ad VE.

Demonstratio. Cùm planum LNXM planis VE, AB ponatur æquale, intelligatur ita divisum rectâ MN, ut MXN ipsi EV, & MLM ipsi AB æqualia sint. Deinde quia HF, IK sunt differentiæ rectarum EF, LK, seu XY, & AC, patet tam EH, & XY, seu LK; quàm XR, seu LI & AC æquales esse. Fiat insuper ET æqualis XR, seu LI. Perspicuum *a* est igitur solidum MNI solido AD, & solidum NNR solido VT, & solidum QSY solido TZ æquari. Cùm igitur totum quoque LY ex hypothesi utrisque EG, AD solidis sit æquale; etiam reliquum solidum QSK reliquo solido HG æquale erit. Igitur altitudo HF est ad altitudinem IK, *b* ut reciprocè basis QIS, seu MLN, hoc est AB, ad basim HZ, seu VE. Quod erat demonstrandum.

a *ex Corol.* 11. 12. b *ex* 15. 12

PROPOSITIO III.

Fig. 4. 5. 13.

Datum sit planum VH, axem habens BE, revolutionis axi NQ perpendicularem. Sit autem planum VH compositum ex quotcumque planis, sive partibus HL, GM, RS, TV, quarum centra gravitatis C, D, F, K, omnia sint in axe BE: centrum autem gravitatis plani totius VH sit Z, quod proinde c etiam erit in axe BE.

c Arch. 8. l. 1. æquip.

Deinde rotunda solida, quæ à dictis planis HL, GM, RS, TV circa axem NQ rotatis, producuntur, singula sint æqualia solidis rectis quæ fiunt ab ijsdem planis, ductis in altitudines pares peripherijs, quas singulorum gravitatis centra C, D, F, K, circa NQ describunt, quarum nempè radij sunt AC, AD, AF, AK.

Dico, etiam rotundum solidum à toto plano VH, circa eumdem axem NQ productum, æquale futurum solido recto, quod fit ab eodem plano toto VH ducto in altitudinem parem peripheriæ descriptæ à totius plani centro gravitatis Z, cujus nempè radius est AZ.

D*emonstratio.* Quia plani HL centrum grav. est C, & plani GM centrum grav. est D, utriusque commune centrum O erit in eadem d rectâ cum C & D, nimirum in axe EBA. Peripheriæ autem à centris C, O, D circa axem NQ descriptæ, sunt radijs suis AC, AO, AD proportionales. Quare etiam trium harum peripheriarum differentiæ (nimirum differentia primæ à secundâ, & differentia secundæ à tertiâ) trium radiorum AC, AO, AD differentijs proportionales erunt. Jam, quia C & D, sunt centra grav. planorum HL, GM; centrum verò commune utriusque est O, CO est ad DO e ut reciprocè planum GM ad planum HL; hoc est trium radiorum differentiæ binæ, ipsæ videlicet CO, DO, sunt planis HL, GM reciprocè proportionales. Ergo etiam differentiæ binæ trium viarum, sive peripheriarum à centris gravitatis C, O, D, circa NQ descriptarum, ac proinde & rectarum ipsis æqualium, ijsdem planis HL, GM reciprocè proportionales sunt. Ergo si constituantur tria solida recta, primum super plano HL, in altitudine quæ sit æqualis viæ centri C, hoc est peripheriæ à centro C descriptæ circa NQ, cujus radius AC: secundum super plano composito HM cujus altitudo sit via centri O: tertium super plano GM altitudinem habens parem viæ centri D; erit f rectum solidum basim habens HM ex utroque plano HL, & GM compositam, altitudinem verò parem viæ centri O, æquale duobus solidis rectis, quorum bases sunt plana singillatim HL & GM, altitudines verò pares vijs centrorum C, & D etiam singillatim. Atqui ex hypothesi rotundum solidum genitum à plano HL rotato circa NQ, æquatur solido recto, cujus basis est planum HL, altitudo verò par viæ centri C; & rotundum solidum genitum à plano GM circa NQ, etiam ex hyp. æquatur solido recto, cujus basis est planum GM, altitudo verò par viæ centri D. Ergo etiam solidum rectum basim habens HM, altitudinem verò parem viæ centri sui O, æquale est duobus rotundis solidis quæ fiunt à planis HL, & GM circa NQ; hoc est rotundo solido quod fit à plano composito HM, circa NQ.

d Arch. 8. 1. æquip.

e 8. 1. æquip.

f per 1. hujus.

Comparetur jam planum HM, cujus centrum grav. O, cùm plano RS, cujus centrum F: centrum autem totius plani k HS sit P. Quia ergo est OP ad FP, ut o reciprocè planum RS ad planum HM, rursum erunt differentiæ binæ radiorum AO, AP, AF, (ipsæ nimirum OP, & FP) ac proinde & peripheriarum istis radijs ab O, P, F centris descriptarum differentiæ binæ planis HM, RS reciprocè proportionales. Quare si super planis HM, HS, RS statuantur tria solida recta, quorum altitudines sint peripheriæ radiorum AO, AP, AF, erit solidum rectum cujus basis est HS, ex utroque HM, & RS plano composita, altitudo autem peripheria radij AP, æquale duobus m rectis solidis, quorum bases sunt plana HM, RS, altitudines verò peripheriæ radiorum AO, AF. Atqui jam in prima parte demonstravi rotundum solidum quod fit à plano HM circa NQ, æquari solido recto cujus basis est planum HM, altitudo autem via centri O, id est peripheria radij AO; & ex hypothesi rotundum solidum factum à plano RS circa NQ, æquatur solido recto cujus basis est RS, altitudo verò par viæ centri F, seu peripheriæ radij AF. Ergo etiam solidum rectum cujus basis est HS, altitudo autem via centri sui P, sive peripheria radij AP, æquatur duobus rotundis solidis quæ fiunt circa NQ à planis HM & RS, hoc est rotundo solido à plano composito HS circa NQ producto.

k Arch. 8. 1. æquip.

o ibid.

m per 1. hujus.

Comparetur denique planum HS cujus centrum P, cum plano TV, cujus centrum K: centrum autem plani totius sit Z. Quia iterum est n PZ ad KZ, ut reciprocè planum TV ad planum HS; rursum erunt differentiæ binæ radiorum AP, AZ, AK (ipsæ nimirum PZ, & KZ) ac proinde & differentiæ binæ viarum, quas centra P, Z, K circa NQ describunt, radijs AP, AZ, AK, planis HS, TV reciprocè proportionales. Quare si super planis AS, HV, TV erigantur tria solida recta, quorum altitudines sint viæ centrorum P, Z, K, erit solidum rectum cujus basis est HV ex utroque plano HS, & TV composita, altitudo autem via centri ejus Z, æquale r duobus solidis rectis, quorum bases sunt plana singula HS, & TV altitudines verò viæ centrorum P, & K. Atqui jam in secundâ parte demonstratum est solidum rotundum quod fit à plano HS circa NQ, æquari solido recto ex basi HS & altitudine pari viæ centri P; solidum verò rotundum factum à plano TV circa NQ, ex hyp. æquale est solido recto ex basi TV, & altitudine pari viæ centri K. Ergo etiam solidum rectum cujus basis est planum HV, altitudo autem via sui centri gravitatis Z, æquatur duobus rotundis solidis, quæ fiunt circa NQ à planis HS, & TV, hoc est uni solido rotundo, quod fit à toto plano HV circa NQ revoluto. Quod erat demonstrandum.

n 8. 1. æquip.

r per 1. hujus.

PRO.

PROPOSITIO IV.

Fig. 15. 16.

Data sit figura quævis plana HCDG, axem habens BE revolutionis axi NQ perpendicularem, centrum verò gravitatis Z. Figuræ partes sint HKERGB, & DKCR quæcumque: partis HKERGB centrum grav. sit P; partis verò DKCR sit O: & sint tria illa centra P, Z, O in axe BE.

Ponantur deinde solida rotunda, quæ fiunt à plano toto HCDG, & à parte ejus HKERGB circa axem NQ totatis, æquari singula solidis rectis, quæ fiunt ab iisdem planis ductis in altitudines pares peripherijs, quas earum gravitatis centra Z, P circa NQ describunt.

Dico: etiam rotundum solidum quod circa eumdem axem NQ fit à parte reliqua DKCR, æquari solido recto quod fit ab eadem ductâ in viam sui centri gravitatis O.

D*emonstratio.* Si negas; erit solidum rectum ex plano DKCR ducto in aliam quampiam altitudinem, quam vocemus M, quæ major minórve sit viâ centri O, æquale rotundo solido genito ab eodem plano DKER circa axem NQ. Est autem ex hyp. etiam solidum rectum genitum ex plano HKERG ducto in viam centri sui P, æquale solido rotundo quod fit ab eodem plano circa NQ; item ex hyp. rectum solidum ex plano toto HCDG ducto in viam sui centri Z, æquatur rotundo solido quod fit circa NQ ab eodem plano HCDG. Quare cùm rotundum solidum totius plani HCDG, æquale sit duobus rotundis solidis suarum partium DKCR, & HKERGB, etiam solidum rectum factum à plano toto HCDG in viam centri sui Z, æquabitur duobus rectis solidis, quæ fiunt à plano DKCR ducto in altitudinem M, & à plano HKERGB, ducto in viam centri sui P. Trium igitur altitudinum binæ differentiæ (nimirum differentia altitudinis M à viâ centri Z, & differentia viæ centri Z à viâ centri P) sunt *a* planis DKCR, & HKERGB reciprocè proportionales. Jam verò cùm viæ centrorum O, Z, P, sint suis radijs AO, AZ, AP proportionales, etiam viarum harum binæ differentiæ erunt radiorum dictorum binis differentijs, quæ sunt OZ, ZP, proportionales. Atqui radiorum differentiæ OZ, ZP, sunt *b* reciprocè proportionales planis DKCR, HKERGB. Ergo etiam trium viarum à centris O, Z, P descriptarum differentiæ planis DKCR, HKERGB reciprocè proportionales sunt. Atqui ostendi suprà etiam differentias binas altitudinis M, viæ centri Z, viæ centri P, esse planis ijsdem DKCR, HKERGB reciprocè proportionales. Ergo priores differentiæ binæ his postremis proportionales sunt; hoc est differentia viæ centri O à viâ centri Z, est ad differentiam viæ centri Z à viâ centri P, ut differentia altitudinis M à viâ centri Z, est ad eandem differentiam viæ centri Z, à viâ centri P. Ergo differentia altitudinis M à viâ centri Z, æqualis est differentiæ viæ centri O ab eadem viâ centri Z. Ergo etiam altitudo M & via centri O æquales sunt. Atqui posueras solidum rectum ex plano DKCR ducto in altitudinem M, æquari rotundo solido ejusdem plani DKCR. Ergo etiam solidum rectum ex plano DKCR ducto in viam centri sui O, æquale est rotundo solido ejusdem plani DKCR. Quod erat demonstrandum.

a per 2. hujus.

b Arch. 8. 8. 1. æquip.

Habes igitur, Lector, ex ipsa conclusionis negatione, conclusionem ipsam positivè ac directè demonstratam. Demonstrationum ejusmodi plura reperies exempla in elementis nostris Geometriæ planæ ac solidæ, prop. 35. l. 5. prop. 4. lib. 11. & lib. 3. *elementorum nostrorum Arithmeticorum,* propos. 36. *Consule etiam, si lubet, appendicem nostram post elementa Geometriæ ad clarissimum virum Danielem Lipstorpium, quâ demonstravi ex falso posse directè deduci verum. Quod quidem neque incredibile neque alienum a veritate videri debet. Nam ex falso supposito tanquam vero directè deduci contradictorium ejus, (quod proinde necessariè verum est,) nihil est aliud, quam falsum a seipso everti ac destrui; quod naturæ falsi maximè consentaneum est.*

Porrò. Ex quatuor hisce primis propositionibus universale theorema, quod in Synopsi hujus libri, in parte prima propositum fuit, demonstraturi deinceps sumus per propositiones quinque sequentes, inter quas præcipua est, quæ proximè sequitur.

PROPOSITIO V.

Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11. a Def. 5.

Detur figura plana quæcumque DECB, continuè *a* decrescens, axem habens EB revolutionis axi NQ perpendicularem: sitque ejus gravitatis centrum Z.

Dico: rotundum solidum, quod fit ab hac figura circa axem NQ in orbem ducta, æquale esse solido recto, quod eadem producit ducta in altitudinem parem peripheriæ à centro suo gravitatis Z, radio AZ descriptæ.

D*emonstratio.* Figuræ DECB inscribe & circumscribe quotcumque rectangula ordinatim ad axem BE constituta, quorum commune gravitatis centrum sit O. Quoniam rectangulum RL ordinatim positum est ad axem BE, ejus latera ab axe secantur bifariam. Quare H punctum medium axis particulæ inter latera interceptæ, est gravitatis centrum *b* rectanguli RL. Deinde rotundum solidum quod fit à rectangulo RL circa axem NQ rotato, æquatur *o* solido recto, quod ab eodem producitur ducto in altitudinem parem peripheriæ à puncto medio H, hoc est (ut jam ostendi) à rectanguli RL gravitatis centro, circa NQ descriptæ. Eodem modo ostendam singula rotunda solida, quæ fiunt à reliquis rectangulis circa axem NQ in orbem ductis, æquari singulis solidis rectis, quæ fiunt ab ijsdem rectangulis ductis in suorum centrorum vias seu peripherias. Ergo rotundum solidum, quod fit ab omnibus rectangulis simul sumptis circa NQ rotatis, æquale *m* est solido recto quod fit ab ijsdem omnibus rectangulis ductis in viam, seu peripheriam à communi omnium gravitatis centro O circa NQ descriptam. Cùm igitur hoc semper contingat; & rectangulorum tam inscriptorum quàm conscriptorum series, si plura semper & plura inscribantur & conscribantur, in ipsam *n* denique DECB figuram desinant, hoc est differre à figu-

b patet ex 10. 2 æqui. Archim.

o Demonstravi p. 2. l. 3 Cylind. & Annul.

m per 3. hujus.

n Per lem. 1.

à figura possint quantitate quacumque datâ minori; centrumque commune rectangulorum tandem abeat in centrum figuræ Z, ut patet ex Lemm. 5; necesse est rotundum solidum, quod figura DECB circa axem NQ rotata producit, æquari etiam solido recto, quod eadem figura gignit ducta in viam sui centri gravitatis Z. Quod erat demonstrandum.

Hæc sufficiunt, ut eos convincant, qui naturam perspexerint earum ratiocinationum, quæ per exhaustionem procedunt. Quod enim figuris cuipiam inscriptis & conscriptis figuram ipsam exhaurientibus semper convenit, id ipsi etiam figuræ convenire, facilè est peritis Geometris per reductionem ad impossibile demonstrare: quam reductionem nihilominus, ne quis forte eam desideret, in proximum scholium conjeci.

Scholium.

Fig. 6. 11.

Suppositâ demonstratione priori usque ad consequentiam postremam, quæ ita incipit, (cùm igitur hoc semper contingat) *ita prosequere.*

Si rotundum solidum quod fit à figura DECB circa NQ in orbem ducta, non est æquale solido recto, quod eadem producit ducta in viam sui gravitatis centri Z, erit vel minus eo, vel majus.

Pars I. Ponatur primò esse minus defectu Y, quem seca in partes S, T. Inscribi possunt figuræ DECB tot rectangula axi BE ordinatim applicata, ut segmenta residua c *fiant quocumque dato plano minora, ac proinde ut ducta in altitudinem parem viam centri Z efficiant solidum rectum minus quàm S. Rursum inscribi possunt figuræ DECB tot rectangula, ut eorum commune gravitatis centrum O distet* d *a centro figuræ Z intervallo minori quocumque dato, ac proinde ut differentia viarum, quas centra utraque O & Z circa NQ describunt fiat datâ quâvis minor, ac proinde ulteriùs ut solidum rectum quod fit ab aggregato rectangulorum in dictam differentiam, fit minus quàm T. Manifestum igitur est, figuræ DECB tot inscribi posse rectangula, ut solidum rectum quod fit a segmentis residuis in viam centri Z, unà cum recto solido, quod fit ab aggregato rectangulorum in differentiam viarum descriptarum a centris O & Z, minus sit quam Y. Iam verò solidum rectum genitum a summa rectangulorum in viam centri sui O, a solido recto genito a figura DECB in viam centri sui Z deficit (ut ostendam infra in lemmate) per duo recta solida, quorum unum fit ex segmentis residuis in viam centri Z, alterum verò ex summa rectangulorum in differentiam viarum à centris O & Z descriptarum: hoc est (ut jam ostendi) defectu minori quam sit Y. Atqui ponebatur rotundum solidum a figura DECB circa NQ productum, à solido recto genito a figura DECB in viam centri sui Z, deficere quantitate Y. Ergo rectum solidum quod fit a summa rectangulorum in viam centri O, à solido recto facto ex figura DECB in viam centri sui Z, deficit minori defectu, quam ab eodem deficiat rotundum solidum figuræ DECB; ac proinde solidum rectum ex summa rectangulorum in viam centri O majus est rotundo solido figuræ DECB. Atqui in demonstratione prima ostensum est rotundum solidum, quod a summa rectangulorum circa NQ producitur, æquari solido recto quod fit ab eadem summa in viam centri sui O. Ergo etiam rotundum solidum quod fit a summa rectangulorum circa axem NQ, majus est rotundo solido quod fit à figura DECB circa axem eundem NQ, pars toto. Quod est absurdum.*

c per lem. 1.

d per lem. 5

Fig. 8.

Cùm O centrum grav. summæ rectangulorum cadit ultra Z centrum figuræ DBCE, ut in Fig. 8. ita ratiocinare. Si tunc adhuc conceditur solidum rectum, quod fit à rectangulorum summâ in viam centri O, esse minus solido recto genito à figura DBCE in viam centri sui Z, reductio ad impossibile procedet, ut prius. Si verò solidum rectum ex rectangulis in viam centri ipsorum O, asseritur jam esse æquale vel majus solido recto ex figura DBCE in viam centri sui Z etiam rotundum solidum genitum ex rectangulis, quod in demonstratione prima dicto solido recto summæ rectangulorum ostensum est æquale, erit æquale vel majus solido recto ex figura DBCE in viam centri Z. Atqui rotundum solidum genitum ex figura DBCE ponebatur minus esse solido recto genito ex figura DBCE in viam centri sui Z. Ergo à fortiori rotundum solidum genitum à rectangulorum summa æquale vel majus erit solido rotundo figuræ DBEC, pars suo toto, Quod est absurdum.

Fig. 7.

Pars II. Ponatur deinde rotundum solidum figuræ DECB esse majus solido recto producto ab eadem in viam centri sui Z, excessu ω; quem seca in partes α & β. Patet rursum, ut supra, figuræ DECB tot circumscribi posse rectangula, ut segmenta m *residua quæ remanent, ablatâ ex conscriptis rectangulis figurâ DECB, fiant dato plano minora, ac proinde ut rectum solidum quod fit ex illis segmentis residuis in viam centri O, fit minus quam α. Patet similiter figuræ DECB tot circumscribi posse* o *rectangula, ut ipsorum commune gravitatis centrum O distet a Z centro figuræ DECB intervallo minori quocumque dato, adeoq; ut via seu peripheria centrorum O, Z, differant longitudine quâvis datâ minori, ac proinde ulteriùs ut solidum rectum quod fit ex figura DECB in dictam viarum differentiam fit minus quàm β. Liquet igitur figuræ DECB tot rectangula posse circumscribi, ut solida duo recta, quæ fiunt ex segmentis residuis in viam centri O & ex figura DECB in differentiam viarum à centris O, Z descriptarum, simul sumpta evadant minora, quàm ω. Iam verò solidum rectum factum ex summa rectangulorum in viam centri sui O, excedit solidum rectum quod fit ex figura DECB in viam centri sui Z duobus solidis rectis, quorum unum fit à segmentis residuis in viam centri O, alterum verò ex figura DECB in differentiam viarum à centris O & Z descriptarum, ut ostendam infrà in 6 Lemmate, hoc est excessu minore quam sit ω, hoc est excessu minore quàm quo ponebatur solidum rotundum figuræ DECB superare idem rectum solidum factum ex figura DECB in viam centri sui Z. Ergo rotundum solidum figuræ DECB majus est solido recto quod fit à summa rectangulorum in viam centri sui O. Atqui ostensum est in demonstratione prima rotundum solidum genitum à summa rectangulorum, æquari solido recto quod ab iisdem rectangulis fit in viam centri sui O. Ergo etiam rotundum solidum figuræ DECB majus erit rotundo solido summæ rectangulorum, pars toto; quod est absurdum.*

m Per lem. 14.

o Per lem. 5.

Fig. 9. 10.

Quando O centrum rectangulorum circumscriptorum cadit inter Z centrum figuræ, & axem revolutionis NQ, ita ratiocinare. Si tunc adhuc conceditur rectum solidum, quod fit ex rectangulorum summa in viam centri sui O, majus esse solido recto ex figura DBCE in viam centri sui Z, reductio ad impossibile procedet, ut prius. Si verò solidum rectum ex summâ rectangulorum in viam centri O asseritur jam esse non majus solido recto ex figura DBCE in viam sui centri Z, etiam solidum rotundum summæ rectangulorum, quod in demonstratione prima dicto solido recto summæ rectangulorum ostensum est æquale, erit non majus solido recto ex figura DECB in viam centri sui Z, ac proinde à fortiori non majus

rotundo solidô figura DECB (cùm id in hac 2. parte positum fuerit majus solido recto figura DECB in viam centri sui Z) : Id vero absurdum est, sic enim totum suâ parte non majus esset.

Quare cum parte I. ostensum sit rotundum solidum figura DECB circa NQ rotata non esse minus solido recto figura ejusdem ducta in viam centri Z, & parte 2. non esse majus, eidem æquale erit. Quod erat demonstrandum.

Lemma VI.

Fig. 12. Si recta AC ducatur in altitudinem AE, & AB recta minor quàm AC ducatur in altitudinem AD minorem quam AE, factum ex majori AC excedet factum à minori AB, rectangulo BG, quod fit ex rectarum differentiâ CB in altitudinem majorem, & rectangulo DF, quod fit ex minori rectâ AB in DE altitudinum differentiam.

Demonstratio patet. Quod verò hîc in ductu linearum asseritur brevitatis causâ, valere eodem modo in ductu superficierum vel leviter elementis tinctus perspiciet.

PROPOSITIO VI.

Fig. 13. **Data sit figura plana quæcumque non continuè decrescens GBLRET, axem habens EB revolutionis axi NQ perpendicularem.**

Dico, rotundum solidum quod fit ab eâ circa axem NQ revolutâ æquale esse solido recto, quod eadem producit in viam sui centri gravitatis ducta.

D*emonstratio*. Quoniam ex hypothesi figura GBLRET axem habet, poterit per rectas ad axem BE perpendiculares LG, MS, RT resolvi in figuras continuè crescentes, vel decrescentes, quarum axes sint segmenta axis totius BE. Centra gravitatis earum sunto C,D,F,K. Atqui per præcedentem rotunda solida quæ fiunt ab his figuris partialibus circa NQ revolutis, æquantur singula singulis rectis solidis quæ ab ijsdem gignuntur figuris ductis in vias suorum gravitatis centrorum C,D,F,K. Ergo etiam *b* rotundum solidum totius figuræ GBLRET circa NQ revolutæ, æquale est solido recto, quod eadem producit ducta in viam centri sui Z. Quod erat demonstrandum.

b *per 3. hujus.*

Corollarium.

Hoc theoremate comprehenditur etiam omne genus annulorum.

PROPOSITIO VII.

Fig. 15. 16. **Data sit figura plana quæcumque DKCR, axem habens EB revolutionis axi NQ perpendicularem, sed circa axem suum EB non *a* plena.**

a *Vide def. 7.*

Dico, rotundum solidum, quod fit ab eâ circa axem NQ revoluta, æquari solido, quod fit ab eadem ducta in viam sui centri gravitatis Z.

D*emonstratio*. Quoniam figura DKCR ex hyp. est circa axem suum non plena, ex *definitione 7* patet figuram HKRG, quæ eam replet, eundem cum eâ habere axem EB. Atqui hujus, nempè HKRG, rotundum solidum per præcedentes duas æquatur solido recto, quod eadem gignit ducta in viam centri sui P, & per easdem præced. rotundum quoque solidum totius figuræ HGCD æquatur solido recto genito ab eadem HGCD in viam centri sui Z. Ergo etiam rotundum solidum plani reliqui DKCR æquatur *b* solido recto, quod fit ab eodem ducto in viam centri sui O : quod erat demonstrandum.

b *per 4. hujus.*

Vt melius appareat infinita theorematis varietas, placet idipsum in figurâ 20 proponere.

Fig. 20. Ellipses binæ similes & æquales & similiter positæ, se mutuò tangant in K, & NQ axem revolutionis in C ac D, ipsas verò Ellipses tangant rectæ GH in G & H, & EKB in K; sitque EKB axi revolutionis NQ perpendicularis. Quoniam Ellipses sunt æquales ac similes, & similiter positæ, patet rectam EKB fore axem totius figuræ HGCDH, & figuræ inter Ellipses mediæ GKCDKH, ac proinde & figuræ residuæ ex Ellipsibus ipsis compositæ, quæ idcirco erit figura circa axem non plena.

Dico rotundum solidum, quod fit à binis Ellipsibus circa NQ in orbem ductis, æquari Cylindris Ellipticis, qui fiunt ab ijsdem ductis in viam communis earum centri gravitatis.

Demonstratio. Figura tota HGCDH axem habens EB revolutionis axi perpendicularem, est ex continuè decrescentibus figuris composita. Ergo ejus rotundum solidum *c* æquatur solido recto genito ab eâdem ductâ in viam sui centri gravitatis Z. Similiter figuræ inter Ellipses mediæ axem eundem habentis BE rotundum solidum, *d* æquatur recto solido quod fit ex eâdem ductâ in viam centri sui P. Ergo etiam plani residui ex Ellipsibus compositi rotundum solidum *e* æquatur solido, quod ab eodem plano fit in viam sui centri gravitatis O. Quod erat demonstrandum.

c *per 6. hujus.*
d *Per cand.*
e *Per 4. hujus.*

PROPOSITIO VIII.

Fig. 17. **Data sit figura MPSHKM, axem habens EPB revolutionis axi NQ perpendicularem, composita ex plano LGHK circa axem pleno, & ex MLPGS non pleno.**

Dico: rotundum solidum, quod fit ex figura MPSHKM circa NQ revoluta, æquari solido recto, quod fit ab eadem ducta in viam sui centri gravitatis Z.

D*emonstratio*. Rotundum solidum plani GLKH *a* æquatur solido recto, quod fit ex plano eodem ducto in viam sui centri C; & per præcedentem rotundum solidum plani MLPGS æquatur recto, quod fit ex eodem ducto in viam centri sui D. Ergo rotundum *b* solidum plani totius æquatur recto, quod fit ex eodem ducto in viam sui centri gravitatis Z.

a *per 5. vel 6. hujus.*
b *per 3. hujus.*

PRO-

PROPOSITIO IX.

Fig. 18. 19. 20.

Data sit figura quæcumque plana BEC, vel CKGa axem non habens, aut certè si axem habeat FR, non habens illum axi revolutionis NQ perpendicularem.

Dico rotundum solidum ab eâ circa NQ revolutâ genitum, æquari solido recto, quod ab eadem in viam sui gravitatis centri ductâ procreatur.

Fig. 20.

Demonstratio. Esto primùm figura curvilinea undique clausa quæcumque CKGa, sive axe omninò carens, sive eum habens ad NQ non perpendicularem. Tangat eam recta EKA ad NQ perpendicularis, addaturque figura ad partem alteram æqualis & similis similiterque posita HKDa. Liquet igitur figuræ ex utrisque compositæ axem fore EKB, ejusque commune gravitatis centrum fore in axe EKB, putà in Z: partium autem GKC, HKD centra sint L & M, quæ jungat recta LM. Quoniam ex hypot. figuræ GKC, HKD sunt æquales & similes & similiter positæ ad axem EB, erunt quoque gravitatum centra L, & M similiter posita respectu axis EB; ac proinde necesse est, ut recta LM, centra jungens sit ad EB perpendicularis, ejusque segmenta LZ, MZ inter se sint æqualia: aliàs figuris sibi mutuò congruentibus centra L, M non congruerent; quod repugnat *postulato 5. Arch. lib. de æquip.* Quoniam igitur partium centra L & M, & commune totius Z sunt in rectâ LZM ad axem EB perpendiculari, qui ex hypot. perpendicularis est axi revolutionis NQ, erit LM parallela ad NQ; ideóque centrorum ab NQ distantiæ LT, ZB, MV sunt æquales; ac proinde etiam peripheriæ, quas in revolutione describunt singula, inter se æquales erunt. Deinde quia figuræ GKC, HKD, ex hyp. sunt æquales & similes, & similiter positæ circa axem communem EB, ac proinde (cùm EB ex hyp. rectus sit axi revolutionis NQ) etiam similiter positæ respectu NQ; patet rotundum solidum ab utrâque genitum, duplum esse rotundi solidi geniti à solâ GKC. Atqui solidum rotundum figuræ utriusque c æquatur recto solido, quod fit ab utrâque figurâ in viam centri communis Z. Ergo rectum solidum figuræ utriusque ductæ in viam centri Z duplum est quoque rotundi solidi figuræ GKC. Ergo rectum solidum ex figurâ solâ totius dimidiâ GKC, in viam centri Z, hoc est, ut superiùs ostendi, in viam centri L, æquatur rotundo solido ejusdem figuræ GKC. Quod erat demonstrandum.

c Per 7. hujus.

Fig. 19. 18.

Sit deinde planum axe carens ECB semihyperbolæ exempli gratiâ, aut semiparabolæ, aut segmenti circuli, vel Ellipsis, subtensam habens EB, revolutionis axi NQ perpendicularem. De hac eodem omninò modo theorema demonstrabitur; ac proinde conoides hyperbolicæ & Parabolicæ æquantur rectis solidis, quæ fiunt à genitrice semiparabolâ aut semihyperbolâ in viam centri gravitatis semiparabolæ aut semihyperbolæ.

Atque ex his duobus casibus facilè in reliquis, si qui sint alii, veritas theorematis fiet manifesta.

Scholium.

Propositionibus 5, 6, 7, 8, 9, mihi videor omne genus rotundorum solidorum complexus esse. Planè igitur demonstravimus, quod prima hujus libri parte *fuerat propositum, videlicet*

Quamvis figuram planam, quocumque situ, circa axem quovis ab ea intervallo distantem, in orbem ductam, producere rotundum solidum, æquale solido recto, quod fit ab eadem superficie ducta in altitudinem parem viæ centri gravitatis.

Corollarium.

Igitur quæcumque de solidis rectis, hoc est Cylindricis, seu Cylindriformibus à Geometris demonstrata sunt, etiam rotundis solidis quibuscumque conveniunt, figurâ genitrice, hoc est eâ, quæ fuit ducta in orbem acceptâ pro basi, & peripheriâ quam descripsit centrum gravitatis, acceptâ pro altitudine. Quare

1. Cùm peripheriæ, seu viæ centrorum gravitatis æquales sunt, rotunda solida eam inter se rationem habent quam figuræ genitrices.

2. Cùm æquales sunt figuræ genitrices, rotunda solida sunt inter se, ut viæ centrorum gravitatis.

3. Rotundorum solidorum ratio composita est ex ratione figurarum genitricum, & ratione viarum à gravitatum centris descriptarum.

4. Si rotunda solida fuerint æqualia, genitrices figuræ sunt viis centrorum gravitatis reciprocè proportionales: & contra.

Et cætera his similia.

PARS II.

Demonstratur quamvis perimetrum, quocumque situ circa axem ab ea quomodocumque distantem in orbem ductam, gignere rotundam superficiem æqualem superficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro, ducta in altitudinem viæ centri gravitatis æqualem.

Lemma VII.

Quæ de planis & solidis demonstravit Archimedes in *lib. de æquip.* etiam lineis non absimili demonstrationum formâ conveniunt.

Lemma VIII.

Perimetro curvilineæ axem habenti EB, & continuè decrescenti inscribi & circumscribi possunt tot rectæ lineæ, ut tam inscriptæ, quàm circumscriptæ à perimetro differant quantitate quâvis datâ minori.

Fig. 22. 23.

Est manifestum & satis ab aliis demonstratum.

Lemma IX.

Iisdem positis summæ rectarum ordinatim, a seu inscriptarum, seu conscriptarum, centrum quantitatis est in axe BE.

Fig. 22. 23.

a Vide defin. 8.

De-

Demonstratio. Æquales ex hypothesi rectas DF, CI bisecet recta Sa. Quoniam centra gravitatis rectarum DF, CI, sunt S & a, eaque connectit Sa, erit commune utriusque b centrum in recta Sa. Igitur si fiat ut DF ad CI, ita aP ad PS, hoc est si recta Sa bisecetur in P, erit commune rectarum DF, CI, centrum in P, hoc est in perimetri axe BE, qui bisecat ipsam Sa. Eodem modo ostendam centrum rectarum FG, IH, esse in axe BE, idemque ostenderetur de centro rectarum GE, HE. Ergo c etiam rectarum omnium centrum gravitatis commune in axe erit.

b *Vide lem. 7 & Arch. 8. 1. æquip.*

c *Vide lem. 7 & Arch. 8. 1. æquip.*

Lemma X.

Omnis perimetri axem habentis centrum gravitatis est in axe. Demonstratur ut Lemma 3, sed ex præcedenti.

Lemma XI.

Fig. 22, 23. Perimetro figuræ curvilineæ axem habentis, & continuè decrescentis tot rectæ inscribi possunt, ut earum commune gravitatis centrum à perimetri centro gravitatis Z, distet intervallo quocumque dato minori. Similiter eidem perimetro circumscribi possunt tot rectæ, ut earum commune gravitatis centrum à centro perimetri etiam distet intervallo minori quocumque dato.

Non absimilis ratio hujus est, quæ lemmatis quinti quod consule.

PROPOSITIO X.

Fig. 1. 2. 3. Datæ sint duæ superficies rectæ EG, AD, quarum altitudines sint EF, AC, bases verò perimetri VE, AB: sit autem & alia quædam altitudo inter priores media LK. Porrò trium altitudinum EF, LK, AC differentiæ sint HF, IK, hoc est HF sit excessus primæ EF suprà secundam LK, & IK excessus secundæ LK, suprà tertiam AC.

Dico: Si sit HF ad IK, ut reciprocè perimeter AB ad perimetrum VE, rectam superficiem, quæ fit ex summa perimetri utriusque VE, AB, ducta in altitudinem LK, æqualem esse duabus superficiebus rectis EG, AD.

Demonstratio. Fiat ET æqualis LI, seu AC, & perimeter quædam LNXM sit æqualis duabus perimetris VE, AB, sic ut linea MLN sit par perimetro AB, & linea MXN sit par perimetro VC. His ita ordinatis, theorema demonstrabitur, ut *prop. 1. hujus*; sed loco elementorum, quæ illic citantur, hic adhibenda sunt *Corollaria prop. 4. lib.* nostri 2. Cylindricorum & Annularium.

PROPOSITIO XI.

Fig. 1. 2. 3. Esto perimeter LNXM, æqualis duabus perimetris VE, AB, & recta superficies LY genita à perimetro LNXM ducta in altitudinem LK, par sit superficiebus rectis, quæ fiunt ex perimetro VE, ducta in EF, & ex perimetro AB ducta in AC.

Dico: trium altitudinum EF, LK, AC, differentias HF, IK, esse perimetris AB, VE, reciprocè proportionales; hoc est, HF esse ad IK, ut perimeter AB ad perimetrum VE.

Demonstratio. Quoniam ponitur perimeter LNXM par perimetris duabus AB, VE, sit linea MLN, par AB perimetro, & linea NXM, par perimetro VE. Hoc posito propositio demonstrabitur, ut 2. *hujus*, sed per *Coroll. p. 4. nostri lib. 2.* Cylindricorum & Annularium.

PROPOSITIO XII.

Fig. 21. Data sit perimeter axem habens BE, revolutionis axi NQ perpendicularem, ex quotcumque rectis lineis composita. Aggregati duarum linearum æqualium PX, KI, centrum gravitatis esto C; duarum verò æqualium XG, IM, centrum sit D; æqualium binarum ME, GE, centrum sit F: tandem commune omnium, sive totius perimetri centrum sit Z. Ex lemmate 9. patet centra C, D, F, Z, fore in axe BE.

Si rotundæ superficies genitæ à lineis PX, KI, circa axem NQ conversis, æquales sint superficiei rectæ, quæ fit ab iisdem lineis ductis in altitudinem, æqualem peripheriæ ab ipsarum gravitatis centro C descriptæ; & rotundæ superficies genitæ à lineis XG, IM, circa NQ circumactis, sint æquales rectæ superficiei genitæ ab iisdem XG, MI, ductis in altitudinem parem peripheriæ centri ipsarum D; & rotundæ superficies rectarum GE, MF, sint pares rectæ superficiei genitæ ab iisdem GE, ME, ductis in viam centri ipsarum F; Dico etiam superficiem rotundam, quæ fit à tota perimetro circa axem NQ in orbem acta, æqualem esse superficiei rectæ, quæ fit ab eadem tota perimetro ducta in altitudinem æqualem peripheriæ à totius perimetri gravitatis centro Z descriptæ.

Demonstratio. Quoniam gravitatis centrum rectarum PX, KI, est C, rectarum verò XG, IM, est D, centrum commune O summæ rectarum PX, XG, KI, IM, ita n secabit rectam CD, ut CO sit ad DO, quemadmodum reciprocè duæ XG, IM, ad duas PX, KI. Deinde quia viæ centrorum C, O, D, sunt radijs suis AC, AO, AD proportionales, etiam viarum binæ differentiæ radiorum binis differentijs CO, OD, proportionales erunt. Quare cùm jam ostenderim CO, OD, aggregato rectarum PX, KI, & aggregato rectarum XG, IM esse proportionales reciprocè, etiam binæ differentiæ trium viarum à centris C, O, D descriptarum aggregatis rectarum PX, KI & XG, IM reciprocè proportionales erunt. Ergo superficies rectæ, quæ fiunt à rectis PX, XG,

n *Vide lem 7 & 8. 1. æquip. Arch.*

KI,

KI, IM ductis in altitudinem parem viæ centri earum communis O simul sumptæ *b*, æquantur superficiebus rectis, quæ fiunt à rectis PX, KI, in altitudinem parem viæ centri ipsarum C, unà cum duabus rectis superficiebus, quas gignunt XG, IM, ductæ in altitudinem parem viæ centri ipsarum D. Atqui per hypothesim superficies rectæ genitæ à rectis PX, KI in viam centri earum C, æquantur superficiebus rotundis earumdem PX, KI, & superficies rectæ, quas gignunt XG, IM viam centri sui D, æquantur similiter per hyp. superficiebus rotundis earumdem XG, IM. Ergo etiam superficies rectæ simul sumptæ, quæ fiunt ab ipsis PX, XG, KI, IM in viam centri earum communis O, æquantur rotundis superficiebus, quas gignunt eædem PX, XG, KI, IM simul sumptæ, circa axem NQ.

b per 10. hujus.

Rursum quoniam rectarum PX, XG, KI, IM centrum gravitatis est O, rectarum verò GE, ME est F; centrum commune omnium Z ita *c* secabit rectam OF, ut OZ sit ad ZF, sicut reciprocè duæ simul GE, ME ad omnes simul PX, XG, KI, IM. Sed differentiæ binæ peripheriarum à centris O, Z, F descriptarum, sunt rectis OZ, ZF, differentijs videlicet radiorum AO, AZ, AF, proportionales. Ergo etiam differentiæ binæ peripheriarum à centris F, Z, O descriptarum sunt duabus GE, ME, & aggregato ipsarum PX, XG, KI, IM reciprocè proportionales. Ergo superficies recta, quæ fit ab omnibus simul rectis, hoc est à totâ perimetro PXGEMIK in viam centri omnium communis Z, æquatur *p* superficiebus rectis, quæ fiunt à duabus simul GE, ME in viam centri earum F, unà cum superficiebus rectis quæ fiunt ab ipsis PX, XG, KI, IM in viam centri ipsarum O. Atqui jam demonstratum est rectas superficies genitas ab ipsis PX, XG, KI, IM, in viam centri O, æquari earundem rectarum superficiebus rotundis, & per hypothesim superficies rectæ, quæ fiunt à rectis GE, ME in viam centri sui F, æquantur superficiebus rotundis earumdem GE, ME. Ergo etiam superficies recta, quæ fit à totâ perimetro in viam centri communis Z, æquatur superficiebus rotundis, quæ fiunt à PX, XG, KI, IM, unà cum rotundis superficiebus ipsarum GE, ME, hoc est, superficiei rotundæ, quæ fit à totâ perimetro PXGEMIK, circa axem NQ. Quod erat demonstrandum.

c Vide lem. 7 & 8. 1. æquip. Arch.

p per 10. hujus.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24.

Data sit perimeter quæcumque BCFD, axem habens FB, revolutionis axi NQ perpendicularem, centrum verò gravitatis E, ejus partes quæcumque sint CBD, CFD, quarum centra gravitatis X, Z.

Si rotundæ superficies, quas producunt perimeter tota BCFD, & pars alterutra, ut CFD, æquentur singulæ superficiebus rectis, quas eædem perimetri gignunt ductæ in altitudines æquales peripherijs, quas describunt earum gravitatis centra E & Z. Dico etiam rotundam superficiem genitam à reliqua perimetri parte CBD, æqualem fore superficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetri parte CBD, ducta in altitudinem parem peripheriæ ab ipsius gravitatis centro X, descriptæ.

Demonstratio eadem erit, quæ *propositionis 4 hujus*; si quando istic occurrit solidum, hic accipiatur superficies: & pro *prop. 2.* isthic citatâ hic citetur *prop. 11.*

PROPOSITIO XIV.

Fig. 22. 23.

Rotunda superficies genita à perimetro quacumque figuræ curvilineæ versus (NQ) axem revolutionis cavæ, quæ axem habeat BE, revolutionis axi (NQ) perpendicularem, & continuè crescat versus revolutionis axem (NQ) æqualis est superficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro ducta in altitudinem parem circumferentiæ à perimetri gravitatis centro (Z) circa axem revolutionis (NQ) descriptæ.

Demonstratio. Perimetro DEC (vide *fig.* 22) inscribe ordinatim rectas quotcumque DF, CI, FG, IH, GE, HE, sic ut binæ & binæ sint æquales juxta *definitionem* 8. Similiter perimetro ordinatim conscribantur rectæ (vide *fig.* 23) & binæ primæ DF, CI, sint axi BE parallelæ. Si jam intelligantur revolvi omnia circa axem NQ, rectæ perimetro DFEIC in *fig.* 22. inscriptæ, producent conicas superficies, & duæ quidem primæ DF, CI, si NQ tangat perimetrum, conicas integras efficient, reliquæ truncatas. In conscriptis verò, si axis NQ tangat perimetrum DMωC, duæ primæ DF, CI describent duos circulos; si non tangat (ut in *fig.* 23.) gignent duos planos annulos circulares.

Dividantur jam bisariam DF, CI, per rectam Sω, occurrentem axi BE, in P. Patet *a* P esse centrum gravitatis binarum DF, CI. Superficies conica rectæ DF, æqualis *b* est triangulo rectangulo sub FD, & peripheriâ radij LF in rectam evolutâ comprehenso, hoc est rectangulo sub FD, & peripheriâ radij BP. Ergo ambæ conicæ superficies rectarum DF, CI æquantur rectangulo sub rectis DF, CI, & peripheria radij BP, quæ peripheriæ LF radij dimidia est, hoc est rectangulo, quod ex FD, CI ductis in altitudinem parem peripheriæ ipsarum centri gravitatis P. Bisecentur deinde GF, HI, per rectam Mω, & GE, HE, par Yθ rectam. Patet R esse centrum gravit. binarum FG, IH, & K binarum GE, HE. Jam conica superficies rectæ GF, æquatur *c* rectangulo sub GF, & semisse peripheriarum radij LF, VG, descriptarum, hoc est rectangulo sub GF, & peripheriâ radij TM, seu BR, comprehenso. Ergo Conicæ superficies rectarum GF, HI, æquantur rectangulo sub GF, HI, & peripheriâ radij BR, hoc est rectangulo, quod fit ex binis GB, HI, ductis in altitudinem parem viæ ipsarum centri gravitatis R. Similiter ostendam conicas superficies rectarum GE, HE, æquales esse rectangulo, quod fit ex ijsdem GE, HE, ductis in altitudinem parem viæ centri ipsarum K: eodemque modo idipsum demonstrabitur de superficiebus (vide *fig.* 23) rectarum perimetro conscriptarum, præterquam in duabus DF, CI; superficies porrò ab ijs descriptæ per *p. 1. l. 3. Cylind. & Annul.* & per *Coroll. ibidem*, æquantur rectangulo, quod fit ex ijsdem DF, CI, du-

Fig. 22. a Vide lem. 7 vel 6.

b Demonstravi p. 2. 12 Cyl. & Annul.

c Demonstravi 12. Cyl. & Annul. in coroll. p. 3.

ctis in altitudinem parem peripheriæ radij DS, sive BP, hoc est peripheriæ ab ipsarum gravitatis centro P descriptæ.

Cùm igitur singuli rectarum tam inscriptarum quàm conscriptarum binarij rotundas producant superficies, æquales superficiebus rectis, quas ijdem rectarum binarij efficiunt singuli si ducantur in altitudines pares peripherijs, quas singulorum gravitatis centra P, R, K describunt, etiam *d* composita rotunda superficies, quam omnes simul rectæ illæ producunt, æqualis erit superficiei rectæ, quam eædem simul omnes gignunt, si ducantur in altitudinem parem peripheriæ à communi ipsarum omnium gravitatis centro O descriptæ. Quare cùm hoc in infinitum ita semper eveniat, & rectarum tam inscriptarum quàm circumscriptarum summæ in ipsam desinant *e* perimetrum, hoc est ab ipsâ differre possint, quantitate minori quacumque datâ, centrumque commune O rectarum tandem *f* abeat in centrum perimetri Z; necesse est, ipsa etiam rotunda superficies, genita à perimetro ipsâ, æqualis fit superficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem parem viæ, ab ipsius centro gravitatis Z descriptæ. Quod erat demonstrandum.

d Per 12. huius. *e per lem. 8* *f per lem. 11.*

Hæc peritis sufficiunt. Ulteriorem probationem si quis desiderat, dabitur illa per deductionem ad impossibile, quæ quidem instituetur eodem prorsus modo, ut prop. 5.

PROPOSITIO XV.

Fig. 24.

Rotunda superficies genita à quacumque (CBD) perimetro figuræ curvilineæ versùs (NQ) axem revolutionis convexæ, quæ axem habeat (BE) axi revolutionis (NQ) perpendicularem, & continuè decrescat versùs axem revolutionis, æqualis est superficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro ductâ in altitudinem parem circumferentiæ, ab ipsius gravitatis centro (X) circa revolutionis axem (NQ) descriptæ.

Demonstratio. Perimetro CBD apponatur æqualis & similis CFD, habens axem FE priori axi BE indirectum, & basim CD communem toti axi BF perpendicularem. Patet igitur punctum medium E esse gravitatis centrum totius perimetri BCFD. Demonstravimus *p. 5. lib. 4. Cylind. & Annul.* rotundam superficiem, quæ fit à perimetro BCFD, circa axem NQ circumactâ, æqualem esse superficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ mediæ, descriptæ nimirum à perimetri puncto medio, & gravitatis centro E. Demonstravimus item *prop. præced.* rotundam superficiem genitam à perimetro CFD, circa NQ revolutâ æqualem esse superficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro CFD, ductâ in altitudinem parem peripheriæ ab ipsius gravitatis centro Z descriptæ. Ergo etiam rotunda *o* superficies genita à perimetro CBD, circa NQ rotatâ, æqualis est superficiei rectæ quæ fit ab eâdem CBD perimetro ducta in altitudinem parem peripheriæ ab ipsius gravitatis centro X, descriptæ. Quod erat demonstrandum.

o per 13.

Inspici etiam hic poterit figura 25. litteris nonnihil ad textum accommodatis.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 27.

Rotunda superficies genita à perimetro quacumque (BGC) figuræ decrescentis continuè, & axem non habentis, aut certè non perpendicularem axi revolutionis (NQ), æquatur superficiei rectæ quæ fit ab eadem perimetro (BGC) ducta in altitudinem parem circumferentiæ, à perimetri gravitatis centro (S) descriptæ.

Demonstratio. Per B, ducatur ABE, perpendicularis ad revolutionis axem NQ. Apponatur alia BIO perimeter æqualis & similis datæ BGC, sic ut tota perimeter CGBIO axem jam habeat BE, & quidem perpendicularem ad NQ. Quoniam igitur perimetri BGC, BIO, sunt æquales & similes, & similiter positæ ad axem BE, patet earum gravitatis centra S, X, esse in rectâ SX ad BE axem perpendiculari, ac proinde parallelâ ad NQ, centrum verò totius perimetri esse punctum Z, ubi SX axem BE secat. Quare tres peripheriæ à tribus centris S, Z, X circa NQ descriptæ, sunt æquales. Jam verò demonstratum *n* est rotundam superficiem genitam à perimetro totâ CGBIO, æqualem esse superficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ ab ipsius centro Z descriptæ. Ergo rotunda superficies genita ab ipsius dimidiâ, hoc est à perimetro datâ BGC, æquatur superficiei rectæ quæ priori dimidia sit, ei nempè, quæ fit ab eâdem BGC perimetro ductâ in altitudinem priori parem, æqualem nempè peripheriæ, ab Z, sive ab S, centro ipsius BGC descriptæ. Quod erat propositum.

n In præc. & in 14.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 28.

Rotunda superficies perimetri curvæ cujuscumque (CTBXD) figuræ curvilineæ continuè decrescentis axem habentis (BE) axi revolutionis (NQ) perpendicularem, & versùs axem suum (BE) convexæ, æqualis est superficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro ducta in altitudinem parem peripheriæ ab ipsius gravitatis centro (Z) descriptæ.

Demonstratio. Quoniam perimeter, CTBXD, *a* continetur rectâ CD, axi BE perpendiculari, erunt lineæ BTC, BXD, æquales ac similes, similiter positæ ad NQ, & BE. Ergo S, V centra gravitatis linearum BTC & BXD, & centrum Z, utriusque commune, sunt in unâ rectâ SV, ad axem BE perpendiculari, ac proinde æquales circa NQ peripherias describunt. Quoniam igitur per præcedentem singulæ rotundæ superficies genitæ à singulis BTC, BXD, æquantur singulis superficiebus rectis, quæ fiunt ab ijsdem BTC, & BXD ductis in altitudines pares peripherijs à singularum centris S, V descriptis, patet rotundam superficiem ab utrisque simul BTC, BXD genitam, æquari superficiei rectæ, quæ ab utrisque fit ductis in peripheriam à centro communi Z descriptam. Quod erat demonstrandum.

a defin. 4.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 13. Rotunda superficies cujuscumque perimetri (BLMRETSGH) axem habentis (BE) revolutionis axi (NQ) perpendicularem, æqualis est superficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro ducta in altitudinem parem peripheriæ, à perimetri gravitatis centro (Z,) circa revolutionis axem (NQ) descriptæ.

Demonstratio. Quoniam ex hypothesi figura axem habet BE, poterit per rectas, putà LG, MS, RT ad axem perpendiculares, resolvi in figuras continuè decrescentes GHBL, GSLM, STMR, TER, quarum perimetrorum centra gravitatis sint C, D, F, K. Jam demonstravimus *b* singularum harum perimetrorum rotundas superficies æquales esse rectis superficiebus, quæ fiunt ab iisdem perimetris singulis ductis in altitudines pares peripherijs, quas singularum gravitatis centra describunt. Ergo etiam rotunda superficies genita à totâ perimetro, æquatur *c* superficiei rectæ, quæ fit ab eâdem totâ perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ à suo gravitatis centro Z descriptæ. Quod erat demonstrandum.

b prop. 14. 15. 17.

c per 12.

Corollarium I.

Hoc Theoremate etiam superficies comprehenduntur annulorum cujusvis generis.

Corollarium II.

Vera est propositio etiam in perimetro subtensam habente revolutionis axi perpendicularem, licet axe careat, aut eum certè non habeat revolutionis axi perpendicularem. Talis est in *fig.* 13, perimeter BLMRE, & in *fig.* 26, BGE.

Apponatur enim in *fig.* 26. perimetro, BGE, alia BIE æqualis & similis similiterque posita ad revolutionis axem NQ, eritque subtensa EB, quæ per hyp. recta est ad NQ, axis perimetri totius BGEIB; estque manifestum totius perimetri ac partium ejus centra grav. Z, S, X esse in rectâ linea ad NQ parallelâ. Quibus positis, ex *prop.* 18. facilè concludetur propositum eodem ferè ratiocinio, quo usi fumus *prop.* 9. *hujus.*

PROPOSITIO XIX.

Fig. 29. Rotunda superficies cujuscumque perimetri, undique clausæ (FEGB) vel axe carentis, vel eum certè non habentis perpendicularem axe revolutionis (NQ) æqualis est superficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro, ductâ in altitudinem parem circumferentiæ ab ipsius gravitatis centro (Z) circa axem revolutionis (NQ) descriptæ.

Demonstratio. Dividatur perimeter data ductâ rectâ GFA, per ipsius gravitatis centrum Z, ad NQ perpendiculari. Centra partium FBG sint O, & K; ex quibus ad GF duc perpendiculares, OQ, KD. Rotunda superficies genita à lineâ FEG, æquatur *a* rectæ superficiei, quæ fit ab eâdem ductâ in viam, à suo centro O seu Q descriptam. Similiter rotunda superficies genita à lineâ FBG, æquatur *b* rectæ, quæ fit ab eâdem FBG ductâ in peripheriam à suo centro K, seu puncto D, descriptam. Ergo etiam rotunda superficies à totâ perimetro FEGB genita æquatur *c* superficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in peripheriam sui centri Z. Quod erat demonstrandum.

a per 18. hujus cor. 2. *b per eand.* *c per corol. p. 12. hujus.*

Scholium.

Ad propositiones 6 proximè præcedentes omnes curvarum linearum species revocari possunt: ex quibus in perimetris rectilineis eadem veritas à fortiori (quod ajunt) patet. Plenè igitur demonstratum est, quod fuerat secundâ hujus libri parte propositum; videlicet,

Quamvis perimetrum, quocumque situ circa axem quomodocumque distantem, in orbem ductam, gignere rotundam superficiem æqualem superficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem viæ centri gravitatis æqualem.

PARS III.

Solidorum rotundorum à Parabola genitorum affectiones contemplatur.

DEFINITIONES.

1. Per *Parabolam* vel *Hyperbolam* semper intelligo superficiem planam lineâ parabolicâ vel hyperbolicâ rectâ ad axem perpendiculari comprehensam.

2. *Basim Parabolæ* vel *Hyperbolæ* non voco nisi eam, quæ ad axem est ordinatim applicata.

3. *Conois obtusa Parabolica* vel *Hyperbolica* est, quæ fit à semiparabolâ (CBA) seu à semihyperbolâ, circa totius parabolæ aut hyperbolæ axem (AB) revolutâ. *Fig. 39.*

4. *Conois acuta* est, quæ fit à semiparabolâ aut semihyperbolâ circa basim AC in orbem actâ.

5. *Clausum annulum* voco cùm axis revolutionis (OP) figuram genitricem (IDEB) tangit. *Patentem* verò *annulum* appello, cùm axis revolutionis extra figuram est. *Fig. 42. Fig. 43. Fig. 51.*

6. *Obtusus annulus Parabolicus*, seu *Hyperbolicus* est, qui fit à parabola vel hyperbola (FDB) sic positâ, ut ejus axis (DC) axi revolutionis (GN) æquidistet: *Acutus* verò cùm duæ semiparabolæ aut semihyperbolæ æquales & similes (CBE, CDE) ita sunt positæ, ut basis earum communis (CE) revolutionis axi (OP) æquidistet; axes verò earum (DC, BC) sint indirectum. *Fig. 42. 43.*

PROPOSITIO XX.

Conois parabolica acuta (BFCD) est ad maximum conum sibi inscriptum, ut 8 ad 5. *Fig. 39.*

Demonstratio. Centrum gravitatis parabolæ totius ACBE sit O, & per O ducatur parallela ad basim CE. In hac erit centrum semiparabolæ ABFC. Esto in Q. Ex Q demittatur perpendicularis QP. Cùm igitur OA sint *a* duæ quintæ axis AB, *a Arch. 2. æquip. p 8.*

AB, erit quoque QP. Sit deinde S centrum gravitatis trianguli CBE, & per S ducatur SK parallela basi CE. Erit in hac centrum gravitatis trianguli CBA, putà in K. Ex K demittatur perpendicularis KN, quæ erit par ipsi AS, ac *b* proinde tertia pars axis AB. Cùm ergo QP sit duæ quintæ sive sex decimæ quintæ axis AB, & KN una tertia, seu quinque decimæquintæ ejusdem axis AB, erit QP, ad KN ut 6 ad 5. Jam verò conois acuta BFCD, æquatur *c* recto solido, cujus basis est semiparabola ABC, altitudo autem par circumferentiæ à gravitatis centro Q circa AC descriptæ, cujus radius QP. Similiter conus BCD æqualis est *d* solido, recto, cujus basis est triangulum CBA, altitudo verò par peripheriæ descriptæ à gravitatis centro K, cujus radius KN. Atqui proportiò horum rectorum solidorum composita est ex ratione basis ad basim, semiparabolæ nimirum ABFC ad triangulum CBA; hoc *n* est ex ratione 4 ad 3; & ex ratione altitudinis ad altitudinem, nimirum peripheriæ, cujus radius QP, ad peripheriam, cujus radius KN; hoc est ex ratione radij QP ad radium KN; hoc est (ut ostendi suprà) ex ratione 6 ad 5. Ergo etiam ratio conoidis acutæ parabolicæ BFCD ad conum BCD composita est ex ratione 4 ad 3, & ex ratione 6 ad 5: sive ex rationibus 8 ad 6, & 6 ad 5. Atqui ratio 8 ad 5 ex rationibus illis composita est. Ergo conois acuta parabolica BFCD est ad conum maximum sibi inscriptum, ut 8 ad 5. Quod erat demonstrandum.

b patet ex Archim. 1. æquip. p. 13

c per 9. hujus.

d per eand.

n Archim. p 24. quad. parab.

Corollarium.

Hinc efficitur Cylindrum BL conoïdi parabolicæ acutæ circumscriptum, esse ad ipsam conoidem ut 15 ad 8.

Rationem conoïdis parabolicæ acutæ ad Cylindrum ambientem, & conum inscriptum non tradidit Archimedes.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 40.

Cylindri parabolici portio (BGEOF) per (GF) basim parabolæ inferioris (GBF) & punctum (E) extremum axis parabolæ superioris abscissa, ad maximam sibi inscriptam pyramidem (GBEF) eam rationem habet, quam 8 ad 5.

Demonstratio. Portio GBEOF est ad conoidem acutam genitam à parabolâ GLBF circa basim GF in orbem actâ, ut EB ad peripheriam radij BA, ut demonstravi *lib. 1. Cyl. & Annul. p. 16*. Similiter pyramis GBEF est ad conum duplicatum sive rhombum conicum, genitum à triangulo GBF, circa GF circumacto, ut EB ad peripheriam radij BA, ut ibidem ostendi *prop. 19*. Ergo portio GBEOF est ad dictam conoidem acutam, ut pyramis GBEF ad rhombum conicum dictum. Igitur permutando, portio GBEOF est ad pyramidem GBEF, ut acuta conois ad rhombum conicum; hoc est per præcedentem ut 8 ad 5. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Ex hoc theoremate facilis atque expedita habetur hujus portionis cubatura. Eandem portionem cubavit, sed aliâ prorsus viâ, clarissimus è nostrâ Societate Geometra Gregorius à S. Vincentio, totâ ferè quintâ parte libri 9. operis sui Geometrici.

Fig. 40.

Est porrò præter hanc alia Cylindri parabolici portio BPKAF, quæ per rectam KA & baseos Parabolicæ axem AB abscinditur. Hanc cubavi l. 1. Cyl. & Annul. prop. 32: *ubi demonstro eam maximæ pyramidis sibi inscriptæ, sesquialteram esse, &* prop. 42. *ita eam esse ad Cylindrum suum Parabolicum æquè altum, ut 3 ad 16.*

Quod verò admirabilius est, similem quoque portionem ab hyperbolico Cylindro abscissam, cubatam reperies ibidem; prop. 33; *ubi demonstravimus eam esse ad pyramidem maximam sibi inscriptam, ut composita ex axe hyperboles & sesquialtera axis transversi, ad compositam ex axe, & transverso axe. Deinceps verò adhuc alias hyperbolici Cylindri partes cubaturi sumus* prop. 49. & 50.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40.

Cylindri Parabolici portio (BGEOF) per basim (GF) Parabolæ inferioris obliquè abscissa, ad portionem (BPKAF) æquè altam ab eodem Cylindro obliquè abscissam per (AB) axem inferioris Parabolæ eam habet rationem, quam 32 ad 15.

Demonstratio. Per præcedentem dimidia portio BEAOF est ad inscriptam sibi pyramidem BEAF, ut 8 ad 5, sive ut 16 ad 10. Et *lib. 1. Cyl.* & Annul. *prop. 32* demonstravi pyramidem BKAF inscriptam portioni BPKFA (quæ priori pyramidi BLAF *a* æqualis est) esse ad portionem BPKFA, ut 2 ad 3, seu ut 10 ad 15. Igitur ex æquo dimidia portio BEAOF est ad portionem BPKFA, ut 16 ad 15. Ergo tota portio GBEOAF est ad portionem BPKFA, ut 32 ad 15. Quod erat demonstrandum.

a per 5 12.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 40.

Cylindrus Parabolicus (HEKBFG) ad portionem æquè altam (GBEOF) per basim (GF) inferioris Parabolæ obliquè abscissam, eam rationem habet, quam 5 ad 2.

Demonstratio. Portio BGEOF est ad *a* portionem BPKFA ut 32 ad 15. Portio autem BPKFA est ad Cylindrum HEKBGF, *b* ut 3 ad 16, sive ut 15 ad 80. Igitur ex æquo portio BGEOF est ad Cylindrum HEKBGF, ut 32 ad 80, hoc est ut 2 ad 5. Quod erat demonstrandum.

a per præc.
b Demonstravi p. 42 l. 1. Cyl. & Annulorum.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 42. 41.

Parabolicus annulus *a* acutus & clausus, acutæ conoideos DEA genitæ ab semiparabolis, quæ annulum genuêre, circa EC rotatis, quintuplus est.

a Vide defin. 5 & 6. partis tertiæ hujus.

Demonstratio. Super tota Parabola EAI constituatur Cylindrus Parabolicus EIAKLH, à quo per basim EI abscindatur portio EKAI. Quoniam duæ semiparabolæ DEC, AEC, æquales *b* sunt toti Parabolæ EAI, si super DEA intelligatur Cylindrus alius etiam in altitudine AK erectus stare, erit hic par priori EIAKLH. Sed annulus genitus à figuris DEA, circa axem OP, est ad Cylindrum super eadem figurâ erectum in altitudine AK, ut *c* peripheria CF, cujus radius

b ex def. 6.

c Demonstravi p. 6. l. 3. Cyl. & Annul.

radius AC, ad AK. Ergo etiam idem annulus erit ad Cylindrum EIAKLH, ut peripheria CF radij AC ad AK. Similiter rotundum solidum quod fit à Parabolâ EAI circa basim EI circumactâ, etiam est ad *n* portionem EKIA, ut peripheria radij AC ad AK. Ergo annulus genitus à figurâ DEA, circa axem OP, est ad Cylindrum EIAKLH, ut rotundum solidum genitum à Parabola EIA circa basim EI, ad portionem EKIA; hoc est ut rotundi solidi semissis, quæ est conois acuta AED, ad semissem portionis. Igitur permutando, annulus est ad acutam conoidem AED, ut Cylindrus est ad semissem portionis. Atqui Cylindrus EIAKLH est *d* ad portionem EKIA ut 5 ad 2, ac proinde ad semissem portionis ut 5 ad 1. Ergo dictus annulus acutæ conoideos dictæ quintuplus est. Quod erat demonstrandum.

n l. t. Cyl. & Annul. p. 16.

d per præc.

Aliter.

Centrum gravitatis Parabolæ EAI esto punctum M: hoc ita secat axem *d* CA, ut CA sit ad CM, sicut 5 ad 2. Centrum verò gravitatis figuræ IDEA ex duabus æqualibus & similibus Parabolis compositæ erit punctum C, quod DA ex utroque axe compositam secat bifariam. Annulus qui producitur à figurâ IDEA rotatâ circa OP, æquatur *e* solido recto, cujus basis est figura IDEA, altitudo autem par peripheriæ, cujus radius AC. Similiter rotundum solidum genitum à Parabolâ EAI revolutâ circa basim suam EI, æquatur *n* solido recto, cujus basis Parabola est EAI, altitudo verò par peripheriæ, cujus radius CM. Atqui horum rectorum solidorum ratio componitur ex ratione basis IDEA ad basim EAI, & ex ratione altitudinis ad altitudinem, peripheriæ nimirùm, cujus radius AC ad peripheriam cujus radius CM, hoc est ex ratione radij AC ad radium CM. Ergo etiam ratio annuli, qui fit à figurâ IDEA circa OP ad rotundum solidum genitum à Parabolâ EAI circa IE, componitur ex ratione figuræ IDEA ad Parabolam EAI, & ratione radij AC ad radium CM. Sed ratio IDEA ad EAI ea est, quæ 2 ad 1, seu 10 ad 5: & ratio AC ad CM ea est, quæ 5 ad 2; quæ binæ rationes nempè 10 ad 5, & 5 ad 2, componunt rationem 10 ad 2, seu 5 ad 1. Igitur annulus supradictus est ad supradictum rotundum solidum, ut 5 ad 1: ac proinde etiam semissis ejus, quæ nimirum fit à DEA circa OP, est ad rotundi solidi semissem nempè ad conoidem acutam factam à semiparabolâ EAC circa basim EC, ut 5 ad 1. Quod erat demonstrandum.

Fig. 42. d Per 8. 2. æquip.

e Per 6. hujus vel per 5 l. 3. Cyl. & Annul. n Per. 5.

Proportionem annuli Parabolici obtusi & clausi ad conoidem obtusam Parabola, qua annulum genuit, eam esse quæ est 16 ad 3 demonstravimus l. 3. Cylind. & Annul. p. 46.

PROPOSITIO XXV.

Parabolicus annulus *a* acutus & patens, ad acutam conoidem genitam à binis semiparabolis, quæ genuêre annulum, circa basim EC rotatis, eam habet rationem, quam radius revolutionis AC ad quintam partem axis CB.

Fig. 43. a Vide defin. 5. & 6. suprà.

Demonstratio. Centrum gravitatis Parabolæ EBI esto M. Erit CM duæ quintæ axis CB per 8. 2. *æquip. Archim.* unde si bisecetur CM in Q, erit CQ quinta pars axis CB. Annulus qui fit à figurâ IDEB circa OP revolutâ, ad rotundum solidum factum à Parabolâ EBI rotatâ circa basim suam EI, rationem *m* habet compositam ex ratione figuræ IDEB ad Parabolam EBI; hoc est per constructionem ex ratione MC ad QC, utraque enim dupla est: & ex ratione peripheriæ descriptæ à centro grav. C ad peripheriam descriptam a centro grav. M circa C, hoc est ratione radij AC ad radium CM. Atqui binæ hæ rationes, nempè AC ad CM, & CM ad QC componunt rationem AC ad QC. Ergo dictus annulus est ad rotundum solidum dictum, ut AC ad QC. Ergo etiam hujus annuli semissis, quæ fit nempè à figurâ DEB rotatâ circa OP, est ad rotundi solidi semissem nempè ad conoidem acutam genitam à Parabolâ EBC circa basim EC revolutâ, ut AC ad QC quintam partem axis CB. Quod erat demonstrandum.

m patet ex 5 hujus & corollario 3 scholij post 9.

Rationem annuli obtusi Parabolici patentis ad conoidem obtusam Parabola annulum gignentis, eam esse, quam habet radius revolutionis ad tres decimas sextas semibaseos Parabolica, demonstravi l. 3. Cyl. & Annul. p. 47.

Cæterùm potuit hæc propositio etiam demonstrari juxta primum modum præcedentis.

PROPOSITIO XXVI.

Parabolici annuli acuti & clausi pars exterior, genita à Parabola IDE circa axem OP revoluta, ad interiorem genitam ab æquali Parabola IBE circa eumdem axem OP, eam habet rationem, quam 7 ad 3.

Fig. 42.

Demonstratio. Parabolarum EDI, EAI, centra gravitatum sint S & M. Igitur CS sunt duæ quintæ axis CD, sive CA, per 8. 2. æquipond. ac proinde SA sunt 7 quintæ axis CA, AM verò est tres quintæ ejusdem axis CA. Ergo SA est ad MA, ut 7 ad 3. Jam verò quia Parabolæ IDE, IAE sunt æquales, erit *n* annuli pars exterior genita à Parabolâ IDE circa OP, ad interiorem genitam à Parabolâ EAI, seu EBI circa OP, ut peripheria genita à centro grav. S, circa OP revoluto, ad peripheriam factam à centro grav. M, etiam rotato circa OP; hoc est ut radius AS ad radium AM, hoc est (ut jam ostensum) sicut 7 ad 3. Quod erat demonstrandum.

n Patet ex 5. hujus & Corol. 2 in schol. post 9.

Annuli Parabolici obtusi & clausi pars exterior est ad interiorem ut 11 ad 5. Quod demonstravimus prop. 48. lib. Cyl. & Annul.

PROPOSITIO XXVII.

Conois *a* obtusa parabolica (CBE) est ad *b* acutam (BCD) eadem semiparabola genitam, ut basis (AC) semiparabolæ genitricis ad sedecim decimasquintas partes axis (AB).

Fig. 39. a defin. 3. b defin. 4.

Demonstratio. Fiat AZ, seu DH æqualis AB: tum ut AC ad AZ, seu AB, ita fiat AZ, seu AB ad X. Cylindrus CR est ad Cylindrum BH, altitudinis AZ paris ipsi AB, ut *c* basis ad basim, circulus nempè radij AC ad circulum radij AB, seu AZ, hoc est *d* ut AC ad tertiam proportionalem X. Cylindrus verò BH est ad Cylindrum BL, ut AZ ad AC, hoc est ut *e* X ad AZ, seu AB. Igitur ex æquo Cylindrus CR est ad Cylindrum BL, ut AC ad AB.

c per 11. 12.

d per 2. 12.

e Per constr.

Cylind.	CR	AC
Cylind.	BH	X
Cylind.	BL	AB.

Hoc ostenso, ita propositum concludemus. Sit AI semissis ipsius AC, & AG octo decimæquintæ axis AB. Conoïs obtusa CBE est ad Cylindrum sibi circumscriptum CR, *f* ut 1 ad 2, hoc est ut AI ad AC: Cylindrus autem CR est ad Cylindrum BL circumscriptum conoidi acutæ BCD, ut AC ad AB; quod jam demonstravimus: Cylindrus verò BL est ad acutam conoidem BCD, *g* ut 15 ad 8; hoc est ut *i* AB ad AG. Igitur ex æquo conoïs obtusa CBE est ad acutam BCD, ut AI ad AG octo decimasquintas axis AB, hoc est ut ipsius AI dupla; nempè AC ad sedecim decimasquintas axis AB. Quod erat demonstrandum.

f per 31. l. 1. Cyl. & Annul.

g per Corol. p. 20. hujus.

i per constr.

Conoïs	CBE	AI
Cylind.	CR	AC
Cylind.	BL	AB
Conoïs	BCD	AG

Scholium.

Erravit ergo Paulus Guldinus lib. 3. *centrobaricorum c.* 6. prop. 28. *quæ ita habet; Conoïs obtusa ad conoidem acuminatam eâdem semiparabolâ genitam eam proportionem habet quam 15 ad 16. Quod quidem nunquam verum est, nisi tum, quando Parabola axis AB basi AC æqualis est. Occasio errori data videtur ex scholio ejus post* 8. prop. l. 2. cap. 7. *ubi cùm vellet numeris exprimere, quam proportionem habeat distantia QO ad distantiam QP, lineâ 12 & 13 dicti scholij tam axem AB, quam semibasim AC statuit 2000, adeoq; hanc illi æqualem; atque inde elicit QO esse ad QP, ut 15 ad 16; uti videre est* num. 3 *ejusdem scholij. Oblitus deinde, ut apparet, eam proportionem provenisse ex suppositâ rectarum AB, & AC æqualitate* lib. 3. cap. 6. prop. 28. *illimitatè assumit distantiam QO esse ad distantiam QP, ut 15 ad 16, indeq; conclusio etiam illimitatè conoidem obtusam esse ad acutam, ut 15 ad 16. Verùm hallucinationes ejusmodi ex incuria & oblivione natas viris alias doctissimis subrepere nihil novum aut mirum. Quare lectores benevoli & prudentes, facilè solent inter multa inventa præstantia scriptori hosce nævos condonare.*

Scimus & hanc veniam petimusq; damusq; vicissim.

PROPOSITIO XXVIII.

Semiparabolam exhibere, quæ conoïdem obtusam, & conoïdem acutam æquales, vel datam habentes rationem producat.

Fig. 39.

AD rectum ponantur angulum duæ rectæ AB, AC, & sit AC partium 16, quarum AB est 15. Circa axem AB per punctum C descripta Parabola producet conoidem acutam æqualem obtusæ.

Nam conoïs obtusa est ad acutam ab eâdem semiparabolâ CBA genitam *a*, ut AC ad 16 decimasquintas axis AB. Cùm ergo per constr. AC sit æqualis 16 decimisquintis axeos AB, etiam conoïs obtusa acutæ æqualis erit.

a per præc.

Quod si AC ad 16 decimasquintas dati axis AB fiat in ratione datâ, per B & C descripta Parabola dabit conoides obtusam & acutam rationem habentes datam: uti patet.

PROPOSITIO XXIX.

Parabola (DEF) ad circulum (ADN) cujus diameter est basis Parabolæ, eam habet rationem, quam Parabolæ axis (AE) ad peripheriam (OP), cujus radius est æqualis distantiæ centri grav. (K) semiparabolæ, ab axe.

Fig. 34.

DEmonstratio. Cylindrus DM conoïdi Parabolicæ circumscriptus duplus *b* est conoidis. Quare si axis AE secetur bifariam in C, erit Cylindrus DL altitudinis AC par conoidi. Atqui eadem conoïs æquatur *c* etiam recto solido, cujus basis est semiparabola DEA, altitudo verò par circumferentiæ OP, cujus radius est AO, hoc est KB distantia centri gravitatis K, ab axe. Ergo Cylindrus DL & rectum illud solidum æqualia sunt. Ergo semiparabola DEA basis recti solidi, est ad circulum ADN basim Cylindri DL, ut reciprocè Cylindri altitudo AC ad altitudinem recti solidi, peripheriam nempè OP. Ergo tota Parabola DEF est ad circulum ADN, ut axis totus AE ad peripheriam OP. Quod erat demonstrandum.

b per 31. l. 1. Cyl. & Annul.

c per 9. hujus.

PARS IV.

Conatus & viæ multiplices ac novæ ad circuli quadraturam.

Totis passim Cylindricorum & Annularium quatuor libris nostris prioribus plurimas reperiet lector theorematicas circuli quadraturas; quas novâ jam accessione hic cumulabimus.

PROPOSITIO XXX.

Dato centro gravitatis semihyperbolæ, semiellipseos, semicirculi, datur omnium quadratura.

Cùm centro gravitatis partium circuli & Ellipsis connexam esse circuli & Ellipsis quadraturam primus demonstravit la Faille è Societate JESU. *Idem deinde præstitit Paulus Guldinus ex eadem Societate, qui ultra progressus eamdem connexionem extendit ad centrum gravitatis partium circumferentiæ circularis; cujus inter cætera hoc extat egregium theorema, centrum gravitatis semicircumferentiæ esse punctum ultimum quadratricis. Novissimè quod adhuc alijs fuerat intactum, etiam hyperbolæ quadraturam ex suo pendere gravitatis centro primi aperuêre Antonio Lalouera è Societate nostra, & Christianus Hugenius, qui uno eodemq; anno mutuorum ignari inventorum, sua de his alijsque egregia theoremata edidêre. Ego præstantibus his Geometris suam singulis quam omni jure merentur laudem lubentissimè concedens, connexionem illam triplicem ex universali theoremate nostro unicâ demonstratione concludam hunc in modum.*

Demonstratio. Semihyperbolæ, semiellipseos, semicirculi NEFB centrum gravitatis esto D, & inscribatur singulis triangulum, cujus centrum gravitatis esto C. Si jam sectiones datæ NEFB, cum inscriptis

Fig. 30. 31. 32.

ſcriptis triangulis circa axem NB in orbem ducantur, ſemihyperbola producet conoidem hyperbolicam cum inſcripto ipſi cono, ſemiellipſis ſphæroidem cum inſcripto ipſi rhombo conico, ſemicirculus ſphæram cum inſcripto item rhombo conico: eſtque ex Archimede *a* nota proportio horum ſingulorum corporum rotundorum ad inſcriptos ſibi conos & rhombos conicos. Atqui rotundum corpus à ſectione NEFB productum æquatur *b* ſolido recto, cujus baſis eſt ipſa ſectio NEFB, altitudo autem par peripheriæ à gravitatis centro D deſcriptæ, cujus radius eſt XD, ſeu AO; & rotundum ſolidum genitum à triangulo NEB, ipſe nempè inſcriptus conus, ſeu rhombus conicus æquatur *c* ſolido recto cujus baſis eſt triangulum ipſum NEB, altitudo verò par circumferentiæ deſcriptæ à centro gravitatis C ipſius trianguli, cujus radius eſt ZC, ſeu AP. Ergo etiam duorum horum rectorum ſolidorum eſt nota proportio, ex. gr. ea, quæ eſt rectæ K ad rectam M. Fiat ut AO ad AP (quæ quidem ratio nota eſt, cùm dentur gravitatum centra O & P) ſic K ad aliam quampiam S. Ratio igitur K ad M, hoc eſt ratio quæ eſt inter duo illa recta ſolida, componitur ex ratione K ad S, & ratione S ad M. Atqui etiam ratio K ad M, ſeu ratio quæ eſt inter illa duo recta ſolida, *o* componitur ex his duabus, nempè ex ratione altitudinum (hoc eſt peripheriæ OL, ad peripheriam PI, hoc eſt *p* radij AO, ad radium AP) & ex ratione baſis NEFB ad baſim NEB. Quare cùm ratio AO ad AP ſit eadem *d* cum ratione K ad S, etiam ratio reliqua baſis NEFB, ad baſim NEB eadem eſt cum ratione reliquâ S ad M. Quare cùm ratio S ad M nota ſit (eſt enim ratio rectæ datæ ad rectam datam) etiam ratio ſemihyperbolæ, ſemiellipſeos, ſemicirculi NEFB, ad triangulum NEB nota erit. Quod erat demonſtrandum.

a lib. de ſphæroid. & conoid.
b per 5. & 9. hujus.
c per eand.
o ex elem.
p Pappus l. 1.
d per conſt.

Atque hæc quidem hyperbolæ, Ellipſi ac circulo quodammodo communia. Verùm alia eſt Ellipſi & circulo propria, multò priori illâ admirabilior atque illuſtrior centri gravitatis cum quadratura connexio, quam tribus ſequentibus theorematis aperiam.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 35. 36.

Semiellipſeos SDE centrum eſto A; gravitatis autem centrum O.

Circuli circumferentia OP, cujus radius eſt AO utriuſque centri intervallum, ad quatuor trientes axis ES, qui ſemiellipſeos SDE baſis eſt, eam habet rationem, quam axis alter DF, ad axem ES.

DEmonſtratio. Sphærois SDEF genita à ſemiellipſi SDE rhombi conici ſibi inſcripti DEFS dupla eſt, ut demonſtravi l. 1. *Cylind. & Annul.* p. 25; ac proindè ſphærois eſt ad rhombum DEFS, ut 2 ad 1. Rhombus autem DEFS eſt ad Cylindrum HM ſphæroidi circumſcriptum, *a* ut 1 ad 3. Igitur ex æquo ſphærois SDEF eſt ad Cylindrum HM, ut 2 ad 3. Sumantur SC duæ tertiæ axis SE. Erit quoque Cylindrus HL, cujus altitudo SC, ad Cylindrum HM *m* ut 2 ad 3, ac proinde æqualis ſphæroidi SDEF. Atqui eadem ſphærois etiam æqualis *n* eſt recto ſolido, cujus baſis eſt ſemiellipſis SDE, altitudo autem par circumferentiæ OP, à gravitatis centro O deſcriptæ, cujus radius AO. Ergo rectum illud ſolidum Cylindro HL æquale eſt. Ergo recti ſolidi altitudo, peripheria nempè OP, eſt ad SC altitudinem Cylindri ut *b* reciprocè baſis Cylindri, nempè circulus DN, ad recti ſolidi baſim, nempè ſemiellipſim SDE. Ergo peripheria OP eſt ad duplam ipſius SC, hoc eſt ad quatuor trientes axis SE, (eſt enim SC duo trientes axis SE) ut circulus DN ad totam Ellipſim SDEF. Sed DN circulus eſt ad Ellipſim SDEF, *f* ut axis DF ad axem SE. Ergo peripheria OP eſt ad quatuor trientes axis SE, ut axis DF ad axem ES. Quod erat demonſtrandum.

a Per 10. l. 11.
m Per 13. l. 12.
n Per 5. hujus.
Tacquet Cylind. Annular.
b Patet ex 15. l. 12.
f Archim.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 37.

Semicirculi SDE centrum eſto A, gravitatis verò centrum O.

Circuli peripheria OP, cujus radius eſt AO, utriuſque centri intervallum, ad diametrum ES eam habet rationem, quam 4 ad 3.

DEmonſtratio. Ex diametro SE ſumatur SC par duobus trientibus diametri. Cylindrus igitur HL altitudinis SC erit ad Cylindrum HM ſphæræ circumſcriptum *a* ut 2 ad 3. Sed etiam ſphæra ASDN eſt ad eundem HM Cylindrum *b* ut 2 ad 3. Ergo Cylindrus HL, & ſphæra æquales ſunt. Atqui eidem ſphæræ æquatur *c* etiam ſolidum rectum, cujus baſis eſt ſemicirculus SDE, altitudo autem par circumferentiæ OP deſcriptæ à gravitatis centro O, cujus radius AO. Ergo rectum illud ſolidum etiam Cylindro HL æquale eſt. Ergo recti ſolidi altitudo peripheria OP, eſt ad Cylindri altitudinem SC, ut *d* reciprocè Cylindri baſis circulus SDN ad baſim recti ſolidi ſemicirculum SDE. Ergo peripheria OP dupla eſt rectæ SC; quæ cùm per conſtr. conficiat duos trientes diametri SE, erit OP circumferentia par quatuor trientibus diametri SE. Quod erat demonſtrandum.

a per 13. l. 12.
b Archim.
c Per 5. hujus.
d Patet ex 15. l. 12.

Poſtquam theoremata proximè præcedentia jam inveniſſem, incidi in Ærarium Bettini, qui tomi 3. parte 2. pag. 66. & 70. proponit ſequens theorema noſtris jam demonſtratis affine. Sed quia nullam ejus adfert demonſtrationem, quæ Geometrica, hoc eſt infallibilis cenſeri poſſit, nos hic eâdem illud methodo, quâ præcedentia, Geometricè demonſtrabimus.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 38.

Circulus eſto ASDN, cujus centrum A, diameter SE, ſemiperipheria SDE, cujus centrum gravitatis O.

Circumferentia OP, cujus radius eſt AO utriuſque centri intervallum dupla eſt diametri SE dati circuli.

DEmonſtratio. Superficiei ſphæræ ASDN genitæ à ſemicircumferentiâ SDE, æqualis eſt *a* Cylindrica ſuperficies, cujus baſis eſt eadem ſemiperipheria SDE, altitudo autem par circumferentiæ OP à gravitatis centro O deſcriptæ, cujus radius AO. Atqui eidem ſuperficiei ſphæricæ *b* æqualis eſt Cylindri HM ſphæræ circumſcripti ſuperficies abſque baſibus. Ergo hæc poſterior Cylindrica ſuperficies illi priori æqualis eſt. Ergo prioris illius altitudo, nimirum peripheria OP, eſt ad poſterioris altitudinem SE, ut reciprocè poſterioris baſis, nempè peripheria tota SDN, ad prioris baſim, nempè ſemiperipheriam SDE. Quare circumferentia OP dupla eſt diametri SE. Quod erat demonſtrandum.

a Per 14. hujus.
b Archim.

Ex tribus proximè præcedentibus propositionibus cernitur, quam non modo necessaria, sed etiam concinna & elegans cum gravitatis centro sit quadraturæ connexio.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 37. Semipheriæ SDE centrum gravitatis esto I; semicirculi autem ASDE gravitatis centrum sit O.

Dico IA distantiam centri gravitatis semipheriæ à diametro SE, sesquialteram esse ipsius OA distantiæ centri gravitatis semicirculi ab eadem diametro.

D*Emonstratio.* Per præcedentem peripheria cujus radius AI, est ad diametrum SE, ut 6 ad 3: & per 32 diameter SE est ad peripheriam OP, cujus radius AO, ut 3 ad 4. Igitur ex æquo peripheria cujus radius AI, est ad peripheriam cujus radius AO, ut 6 ad 4. Quare cùm peripheriæ sint radijs proportionales, etiam AI est ad AO ut 6 ad 4, sive ut 3 ad 2. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 44. *in figurâ aliquæ lineæ redundant.*

Segmenti circularis HCL centrum gravitatis esto O, semisegmenti verò HCP gravitatis item centrum sit I, ejusque à semidiametro AOC distantia IO.

Dico rationem rectæ AO ad rectam IO esse notam.

D*Emonstratio.* Rotundum solidum genitum à segmento circulari HCP, revoluto circa radium NA ipsi CY perpendicularem, est ad rotundum solidum quod fit ab eodem segmento HCP rotato circa radium APC, *a* ut peripheria, cujus radius AO, est ad peripheriam cujus radius OI: hoc est ut *b* radius ipse AO ad radium OI. Atqui ratio duorum horum rotundorum solidorum nota est; primum enim æquari sphæræ cujus HL diameter est, demonstravi *prop.* 44. *l.* 1. *Cylind. & Annul.* Secundum verò est portio sphæræ, cujus ratio ad sphæram nota ex Archimede. Ergo nota etiam est ratio AO ad OI. Quod erat demonstrandum.

a Patet ex 9. hujus & cor. 2. in sch. post p. 9
b Pappus.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 44. Ex his absolutè exhibetur linea recta, in qua existit centrum gravitatis semisegmenti circularis (HCP.)

Iisdem enim positis quæ in præcedenti, quoniam nota est ratio AO ad OI, ea fit quæ est datæ rectæ AP ad PM. Ex A centro per M ducatur recta AZ. In hac est centrum gravitatis semisegmenti HCP.

D*Emonstratio.* Intelligatur enim per O centrum gravitatis segmenti totius HCL ducta OX parallela ad HL, secans AZ in I. Ex constr. est ut AP ad PM, ita AO ad distantiam centri gravitatis semisegmenti HCP à diametro YC, sed etiam est ut AP ad PM, ita AO ad OI. Liquet ergo punctum I in rectâ AZ existens, esse centrum gravitatis semisegmenti HCP. Exhibita est ergo recta &c. Quod petebatur.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. 44. Iisdem positis quæ in propos. 35, qui dederit proportionem intervallorum OP, IO, quibus duo gravitatum centra, O segmenti totius HCL, I semisegmenti HCP, distant à suis basibus HL, CP, dabit circuli quadraturam.

D*Emonstratio* patet ex *propos.* 35. Nam si nota fiat ratio OP ad IO, quoniam per *propositionem* jam citatam nota etiam sit ratio IO ad AO, ex æquo nota quoque fiet ratio OP ad AO. Quare dividendo, etiam nota erit ratio AP rectæ datæ ad PO, ac proinde inventum erit O centrum gravitatis segmenti circularis HCL. Atque inde dabitur circuli quadratura. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 45. Arcus ACL semicircumferentia minoris centrum gravitatis sit O, ejusque semisseos HC, centrum sit G: arcum verò subtendat HL.

Si innotescat proportio distantiarum OP, GO, datur quadratura circuli.

D*Emonstratio.* Ex centro circuli A ducantur rectæ AM, AC, secantes arcus HC, HL bifariam in M & C. Manifestum est centrum gravitatis arcus HC esse in rectâ AM arcum HC bisecante, & centrum gr. arcus HCL esse in rectâ AC bisecante arcum HCL. Deinde per O centrum gravitatis arcus HCL ducatur OX parallela subtensæ HL secans rectam AM in G. Manifestum quoque est centrum gr. arcus HC esse in rectâ OX, ac proinde in ipso concursus puncto G. Quoniam recta AP data est, & AM, AC positione datæ, data quoque est ratio AP ad PN; ac proinde, quia GO est parallela ad HL, data etiam est ratio AO ad OG. Quare si detur ratio OG ad OP, etiam dabitur ex æquo ratio AO ad OP; & dividendo dabitur ratio AP ad PO. Quare cùm recta AP sit data, etiam PO data est, ac proinde inventum est centrum gravitatis arcus HL, atque inde datur quadratura circuli. Quod erat demonstrandum.

Fig. 57. Libro 3. Cyl. & Annul. prop. 49. *demonstravi si innotescat ratio quam annuli circularis aut Elliptici pars exterior, genita nempè à semicirculo aut semiellipsi HOQ rotato circa axem XZ, ad interiorem genitam à semicirculo seu semiellipsi HGQ haberi quadraturam:* & lib. 4. prop. 48. *ostendi similiter datâ proportione, quam habet circularis annuli exterior superficies genita à semicircumf. HOQ circa axem XZ, ad interiorem genitam ab semicircumf. HGQ, dari similiter quadraturam circuli. Sed quia adhuc propior videtur aditus aperiri, si partes interiores cum interioribus, & exteriores cum exterioribus comparentur, collationem hujusmodi per aliquot theoremata instituamus.*

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 57.

Si reperiatur proportio solidorum annularium, quæ fiunt à duobus æqualibus semicirculis HGQ, PMR, vel HOQ, PVR, quorum bases HQ, PR sint parallelæ ad revolutionis axem XZ, datur quadratura circuli.

D*Emonstratio.* Semicirculorum HGQ, PMR centra gravitatum sint C & D. Cùm semicirculi æquales sint, patet centrorum intervalla CF, DN æqualia esse. Additâ igitur communi CN, etiam totæ FN, CD æquales erunt. Atqui FN est recta data. Ergo etiam CD data recta est. Deinde quoniam prædicta annularia solida genita sunt à semicirculis æqualibus, patet ex 5 *hujus*, eam inter se habere rationem, quam peripheriæ à gravitatum centris C, D, circa axem revolutionis XZ descriptæ, quarum radij sunt AC, AD: hoc est eamdem quam ipsi radij AC, AD. Ergo si nota fiat proportio annularium solidorum, nota quoque fiet ratio CA ad DA. Unde dividendo, ratio CD ad DA erit nota? Quare cùm recta CD ostensa sit esse data, seu nota, etiam DA distantia centri gravitatis semicirculi nota erit: adeoque inventum erit D gravitatis centrum in semicirculo, ac proinde & quadratura. Quod erat demonstrandum.

Eadem erit demonstratio si comparentur annularia solida quæ fiunt à semicirculis AOQ, PVR.

PROPOSITIO XL.

Fig. 57.

Si reperiatur proportio superficierum annularium, quæ fiunt à duabus semiperipherijs æqualibus HGQ, PMR, vel à duabus HOQ, PVR, quarum bases sint parallelæ ad revolutionis axem XZ, datur circuli quadratura.

D*Emonstratio.* Annulares superficies genitæ à semiperipherijs HGQ, PMR æqualibus similiterque positis circa revolutionis axem XZ eam inter se rationem habent, quam peripheriæ à gravitatum centris C, D, circa axem XZ descriptæ, quarum radij sunt AC, AD (ut patet 14 & 15 *hujus*) hoc est eamdem quam ipsi radij AC, AD. Quare si nota fiat annularium harum superficierum proportio, nota etiam fiet ratio CA ad AD. Quare dividendo, etiam ratio CD ad DA nota erit. Atqui CD est data, utpotè æqualis datæ rectæ FN. Ergo etiam DA datur. Inventum est ergo D centrum gravitatis semiperipheriæ PMR: ac proinde & quadratura circuli. Quod erat demonstrandum.

Atque hæc quidem proportio, cùm æquales sunt semicirculi, altâ etiamnum nocte latet sepulta. Nihilominus videri fortasse possit hujus inventio non penitùs desperanda. Exhibituri certè illam sumus propositione sequenti in semicirculis inæqualibus.

PROPOSITIO XLI.

Fig. 58.

Duo circuli se interius contingant in A, ibidemque eos tangat recta LH. Sint autem diametri CF, DG ad LH parallelæ.

Proportio solidorum annularium, quæ fiunt à semicirculis tam interioribus CAF, DAG, quàm exterioribus CMF, DNG, circa LH rotatis, est triplicata proportionis diametrorum CF, DG: annularium verò superficierum à semiperipherijs tam interioribus quàm exterioribus circa LH genitarum proportio est proportionis diametrorum duplicata.

D*Emonstratio I. Partis.* Circulorum centra sint E, I, semicirculorum verò CAF, DAG, gravitatum centra sint X, Z: quæ omnia existunt in diametro MA ductâ per contactum A. Duæ tertiæ diametri FC sunt ad FC ut duæ tertiæ diametri DG sunt ad DG. Sed FC est ad semiperipheriam CAF, *a* ut DG ad semiperipheriam DAG. Ergo ex æquo duæ tertiæ diametri FC sunt ad semiperipheriam CAF, ut duæ tertiæ diametri DG ad semiperipheriam DAG. Jam verò EX est ad duas tertias FC, *b* ut duæ tertiæ FC ad semiperipheriam CAF; hoc est (quemadmodum jam ostendi) ut duæ tertiæ DG ad semiperipheriam DAG. Atqui etiam est *b* ut duæ tertiæ GD ad DAG, ita IZ ad duas tertias GD. Ergo ut EX est ad duas tertias FC, ita IZ ad duas tertias DG. Igitur permutando EX est ad IZ, ut duæ tertiæ FC ad duas tertias DG; hoc est ut FC ad DG; hoc est EA ad IA. Cùm ergo sit ut tota EA ad totam IA, ita EX ad IZ, etiam erit reliqua XA ad reliquam ZA, ut tota EA ad totam IA. Cùm igitur ratio semicirculi CAF ad semicirculum DAG sit duplicata rationis EA ad IA, duplicata etiam erit rationis XA ad ZA. Ergo ratio composita ex ratione semicirculi FAC ad semicirculum DAG, & ex ratione XA ad ZA, triplicata erit rationis EA radij ad radium IA. Atqui ratio *p* annularium solidorum quæ fiunt à semicirculis CAF, DAG circa LH rotatis, composita est ex ratione semicirculi FAC ad semicirculum DAG, & ex ratione peripheriarum, quarum radij AX, AZ; hoc est ex ratione radiorum AX, AZ. Ergo ratio annularium solidorum à semicirculis CAF, GAD genitorum, triplicata est rationis radij EA ad radium IA, seu diametri CF ad diametrum DG. Quod erat demonstrandum.

a Pappus.

b La Faille de centro gr.

p Patet ex 5 hujus, & cor. 3 in scho. post p. 9.

Idem eodem modo demonstrabitur de solidis annularibus, quæ fiunt à semicirculis exterioribus CMF, DNG, revolutis circa eundem axem LH.

Demonstratio II. Partis. Ratio annularium superficierum à semiperipherijs CAF, DAG genitarum composita est ex ratione semiperipheriæ CAF ad semiperipheriam DAG, & ex ratione peripheriarum, quarum radij AX, AZ, ut patet ex 15. *hujus*. Sed ratio semiperipheriæ CAF ad semiperipheriam DAG est ratio *n* radij EA ad radium IA; ratio autem peripheriarum quarum radij AX, AZ, est ratio *n* radij AX ad radium AZ; ratio autem AX ad AZ est rursus ratio EA ad IA, ut ostensum in prima parte. Ergo ratio superficierum annularium à semiperipherijs CAF, DAC circa LH genitarum, est duplicata rationis EA ad IA, seu diametri CF ad diametrum DG. Quod erat demonstrandum.

n Pappus.

Idipsum simili discursu demonstrabitur de annularibus superficiebus, quæ fiunt à semiperipherijs exterioribus CMF, DNG.

Verum est theorema tā quoad soliditatem quàm superficiem etiam in partibus tam interioribus quam exteriori-

bus

bus patentium annularium, quando radij revolutionum BE, BV sunt proportionales diametris CF, PQ genitorum circulorum MCAF, QRPK.

Demonstratio similis est precedenti.

PARS V.

Solido annulari ab Hyperbolâ genito sphæra exhibetur æqualis.

Hinc novæ ad Hyperbolæ quadraturam viæ aperiuntur; & reperitur sphæra æqualis annulo integro producto à figurâ, quæ ex segmento circuli & segmento hyperbolæ composita est.

Deinde Cylindri hyperbolici partes quædam absolutè cubantur: unde rursum aliæ ad quadraturam hyperbolæ demonstrantur viæ.

DEFINITIONES.

Fig. 46. Annulus planus est superficies plana (FF) duabus concentricis peripherijs comprehensa.

Itaque si concentricus minor circulus auferatur à majore concentrico, spatium residuum est annulus planus.

Hinc patet si ex rectâ quâpiam AB sumatur pars quælibet BC, & tota rectâ AB, fixo manente puncto A ducatur in orbem, à segmento BC generari planum annulum.

Fig. 48. 2. Cylindrus cavus est solidum duobus planis annulis OO, NN, & duabus superficiebus Cylindricis, circa eundem axem positis, comprehensum.

Itaque si duo Cylindri æquè alti circa eundem axem AC existant, & minor DQ auferatur ex majore BS, corpus residuum est Cylindrus cavus.

Hinc patet si ex rectangulo ABEC sumatur rectangulum DBEF, & figura tota circa AC circumagatur, generari Cylindrum cavum à rectangulo BDEF.

Eadem definivimus in libris prioribus, hic rursum apposui ut sint ad manum.

Lemma XII.

Fig. 49. 47. Annuli plani FF centrum esto A, per quod ducta sit recta GCB.

Annulus planus est ad circulum quemvis DM, ut rectangulum GBC ad quadratum radij DQ.

Demonstratum est *lib.* 1. *Cyl. & Annul. prop.* 43.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 49. **Data sit hyperbola DMX, cujus axis transversus MN, centrum A, basis ad axem recta DX. Per centrum A ponatur in hyperbolæ plano recta OAS ad axem perpendicularis.**

Dico: si axis transversus MN est æqualis lateri recto, annulare solidum genitum ab hyperbolâ DXMD circa rectam OS circumacta, æquari sphæræ, cujus diameter est hyperbolæ basis DX.

Quod si transversus axis non sit par lateri recto, hyperbolicum illud solidum annulare ad sphæram diametri DX eam habebit rationem, quam axis transversus ad latus rectum.

Demonstratio. Sectio opposita sit SNT, & centro B intervallo BD, vel BX (sunt enim BD, BX ex hyp. æquales) describatur circulus DZX. Secetur deinde BD in quotvis æquales partes, & per sectionum puncta ducantur parallelæ ad BN rectæ secantes hyperbolam MD in punctis H, I, L; circulum in punctis, K, C, V; axem revolutionis OS, in 2, 3, 4; hyperbolam SN, in R, 6, 7. Tum perpendicularibus demissis ex H, I, L, item ex K, C, V, inscripta erunt semihyperbolæ rectangula FH, GI; BL, quadranti verò BDZ rectangula FK, GC, BV. His peractis, si quadrans BDZ cum inscriptis sibi rectangulis convertatur circa DB, ipse quidem hemisphærium describet, rectangula verò producent Cylindros sibi mutuo insistentes, & hemisphærio inscriptos. Hac autem Cylindrorum inscriptione hemisphæriū exhauriri, hoc est tot inscribi posse Cylindros rectâ BD in plures semper ac plures partes divisâ, ut aggregatū Cylindrorum ab hemisphærio deficiat quantitate quantumlibet parvâ, patet ex Archimede, *prop.* 21. de conoidibus & sphæroid. Similem in modum semihyperbola DMB cum inscriptis sibi rectangulis si rotetur circa axem OA, ipsa quidem describet solidum annulare, rectangulare verò producent Cylindros cavos *a* annulari solido inscriptos & sibi mutuo gradatim insistentes, quorum bases superiores erunt plani annuli à rectis EH, FI, GL, eâdem revolutione illâ geniti, inferiores autem erunt annuli plani facti à rectis Fω, Gθ, Bλ. Tot porrò annulari solido inscribi posse cavos hujusmodi Cylindros, ut ipsum exhauriant, hoc est ut eorum aggregatum ab annulari solido deficiat quantitate minori datâ quâcumque, demonstravi *prop.* 3. *lib.* 3. *Cylind. & Annul.*

a Patet ex defin. Cylindri cavi.

Jam verò demonstrabimus totum inscriptum hyperbolico annulari solido ad totum inscriptum hemisphærio eam semper tenere rationem, quam transversus axis MN ad latus rectum. Per 22. *lib.* 3. *conic.* Apollonij rectangulum REH est ad rectangulum DEX, ut axis transversus MN ad latus rectum. Sed rectangulum DEX æquatur *b* quadrato EK. Ergo rectangulum REH est ad quadratum EK, ut latus transversum ad rectum. Sed ut rectangulum REH ad quadratum EK, ita *n* planus annulus genitus à recta EH circa AO revoluta est ad circulum genitum à radio EK rotato circa BD; ut verò hic planus annulus ad hunc circulum, ita *c* Cylindrus cavus genitus à rectangulo FH circa OA revoluto, ad Cylindrum integrum factum à rectangulo KF, rotato circa BD, sunt enim æquè alti. Ergo Cylindrus cavus factus à rectangulo FH est ad Cylindrum integrum factum à rectangulo KF, ut latus MN transversum ad rectum. Eodem discursu ostendam Cylindros cavos factos à rectangulis GI, BL, singulos esse ad singulos Cylindros integros genitos à rectangulis CG, VB, ut latus MN transversum ad rectum. Ergo *d* omnes Cylindri cavi simul sumpti sunt ad omnes Cylindros integros simul sumptos, ut latus MN transversum ad rectum. Atque hoc semper eveniet, quotcumque Cylindros cavos hyperbolico annulari solido, & Cylindros integros æquè multos hemisphærio inscripserimus. Quare cùm per inscriptiones illas utrum-

b 35. 3.

n per lem. 12.

c patet ex 11. 12.

d per 12. 5.

utrumque corpus exhauriatur per ea quæ demonstravi ad *prop.* 2. *lib.* 12, vel *prop.* 1. *lib.* 1. *Cylind. & Annul.* etiam hyperbolicum annulare solidum genitum à semihyperbola BMD est ad hemisphærium productum à quadrante BDZ, ut MN axis transversus ad latus rectum. Ergo etiam annulare solidum genitum à tota hyperbola DMX, est ad totam sphæram diametri DX, ut axis transversus ad latus rectum. Quod erat demonstrandum.

Quanti hoc theorema sit momenti, ex sequentibus apparebit.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 49.

Iisdem positis, circa axem MB productum hyperbolæ DMX apponatur alia æqualis & similis D9X.

Si annulari solido quod fit ab hyperbola D9X circa O5 circumacta, etiam sphæra exhibeatur æqualis, ejusve proportio ad aliquam sphæram vel ad solidum annulare hyperbolæ prioris DMX, dabitur hyperbolæ centrum gravitatis, adeoque & quadratura.

Demonstratio. Centra gravitatis hyperbolarum DMX, D9X, sint P, & Q. Quoniam hyperbolæ sunt æquales & similes, similiterque positæ, erit QP bisecta in B. Quoniam solidum annulare genitum ab hyperbola DMX circa O5 rotatâ, præcedenti *prop.* jam reduxi ad sphæram, si etiam annulare solidum genitum ab hyperbola D9X reducatur ad sphæram, nota fiet horum annularium solidorum proportio cùm sphæræ ad sphæram proportio sit, nota per 18. 12. Proportio igitur illa nota sit SZ ad TZ. Si ST bifariam secetur in O, etiam ratio OZ ad TZ nota erit. Per 5 hujus annulare solidum hyperbolæ D9X est æquale solido recto, cujus basis est hyperbola D9X, altitudo verò par peripheriæ radio AQ descriptæ; & solidum annulare hyperbolæ DMX æquatur solido recto, cujus basis est hyperbola DMX, altitudo autem peripheria radij AP. Atqui recta illa solida cùm bases habeant æquales hyperbolas sunt inter se ut altitudines, nimirum o peripheriæ radiorum AQ, AP, hoc est ut ipsi radij AQ, AP. Ergo etiam solida annularia erunt inter se ut radij AQ, AP. Sed ratio annularium solidorum eadem est, quæ ratio nota SZ ad TZ. Ergo etiam AQ est ad AP, ut SZ ad TZ: & dividendo QP ad PA ut ST ad TZ. Ergo cum BP, OT sint semisses rectarum QP, ST, etiam BP est ad PA, ut OT ad TZ: & compon. BA ad PA ut OZ ad TZ. Sed ratio OZ ad TZ nota est. Ergo etiam ratio BA ad PA nota est. Igitur si fiat ut OZ ad TZ, ita recta BA data ad aliam, ea erit distantia centri gravitatis P, ab hyperbolæ centro A, ac proinde ipsum gravitatis centrum exhibetur. Quod erat demonstrandum.

o per corol. 2. sch. p. 9.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 50.

Data sit hyperbola DMX, cujus centrum A, axis BMA. Per quodvis (Z) punctum axis inter A centrum hyperbolæ & M verticem ducatur perpendicularis HN. Si annulare solidum quod fit ab hyperbola DMX circa HN circumacta, reducatur ad sphæram, habetur quadratura hyperbolæ.

Demonstratio. Centrum gravitatis hyperbolæ esto O. Solidum annulare genitum ab hyperbola DMX circa axem FG per centrum A ductum circumactâ, est ad solidum annulare genitum ab eâdem hyperbola rotatâ circa axem HN, ut peripheria radij AO ad peripheriam radij ZO, quod quidem manifestum est ex 5 hujus, *& Coroll. 2. scholij post 9. hujus.* Atqui solidum annulare genitum ab hyperbola revolutâ circa FG reduxi ad sphæram *prop.* 42. Quare si etiam reducatur ad sphæram, annulare genitum ab eadem hyperbola circa HN rotatâ; cùm sphærarum proportio nota sit ex 18. 12, etiam horum annularium solidorum, ac proinde (ut jam ostendi) & peripheriarum radijs AO, ZO descriptarum proportio nota erit. Unde cùm peripheriæ sint inter se ut radij, etiam radiorum AO, ZO proportio erit nota. Ea sit, quæ est rectæ PS, ad rectam TS. Igitur dividendo ut PT ad TS, ita AZ ad ZO. Quare cùm tres primæ PT, TS, AZ sint datæ, etiam datur quarta ZO, distantia videlicet centri gravitatis hyperbolæ à dato puncto Z. Inventum est igitur centrum gravitatis hyperbolæ, ac proinde ejus quadratura datur. Quod erat demonstrandum.

Quidni verò cùm unum jam solidum annulare hyperbolicum prop. præced. *ad sphæram reduxerim sperari possit fortasse repertum iri aliquando viam, quâ ex reliquis etiam illiusmodi solidis vel unum aliquod ad sphæram reducatur?*

PROPOSITIO XLV.

Fig. 50.

Si innotescat proportio quam habet conois hyperbolica obtusa (quæ nimirum fit ab semihyperbola BDM circa axem BM rotata) ad conoidem hyperbolicam acutam, quæ nimirum fit ab eadem semihyperbola BMD rotata circa BD ordinatim axi applicatam, habetur quadratura hyperbolæ.

Demonstratio. Centrum hyperbolæ esto A, centrum verò gravitatis semihyperbolæ sit Q: à quo ducantur perpendiculares QY, QO. Liquet centrum gravitatis hyperbolæ totius esse O. Solidum annulare genitum ex semihyperbolâ BMD conversâ circa FAG, est a ad conoidem factam ab eadem rotatâ circa axem BM, ut peripheria radij RQ, seu AO ad peripheriam radij QO, hoc est ut radius AO ad radium QO. Atqui horum solidorum ratio est nota, utrumque enim reductum est ad sphæram, annulare quidem à me *prop.* 42. conois verò ab Archimede. Ergo etiam ratio AO ad OQ nota est. Ea sit, quæ est rectæ L ac rectam V. Rursum illa conois genita ab semihyperbola BMD rotatâ circa axem BM, est ad conoidem genitam ab eadem semihyperbola circumducta circa BD ordinatim axi applicatam, ut peripheria radij OQ ad peripheriam radij YQ; hoc est c ut ipsa OQ ad YQ. Ratio autem harum conoidum, cùm supponatur esse nota, ea sit quæ est V ad K. Igitur ex æquo ut L ad K, ita annulare solidum quod fit ab semihyperbola BMD rotatâ circa FAG, est ad conoidem genitam ab eadem semihyperbola circa BD

a Patet ex 9. hujus & ex cor. 2. ejusd.

c Patet ex 9. hujus & cor. 2. in schol. post p. 9.

BD rotatâ. Sed annulare solidum istum est ad conoidem dictam, *d* ut peripheria radij AO, ad peripheriam radij YQ, seu BO, hoc est ut ipsa AO ad ipsam BO. Ergo etiam ut L ad K, ita AO ad BO. Ergo ratio AO ad BO nota est. Quare O centrum gravitatis hyperbolæ inventum est, atque inde ejusdem quadratura. Quod erat demonstrandum.

d Patet ex 9 hujus & corol. 2. in schol post 9.

Corollaria.

I.

Proportio rectæ AO, quæ est distantia centri A hyperbolæ totius ab ejusdem centro gravitatis O ad QO distantiam centri grav. semihyperboles ab eodem O nota est, ut ostensum est in discursu demonstrationis jam allatæ.

Quod si independenter ab isto reperiatur ratio quæ est inter BO, & QO, dabitur quadratura hyperbolæ. Ita enim, cùm nota sit ratio AO ad OQ, & nota item ratio QO ad BO; ex æquo nota etiam esset ratio AO ad BO, adeoque & ipsum daretur gravitatis centrum O totius hyperbolæ.

II.

Dato O centro gravitatis hyperbolæ, centrum gravitatis semihyperbolæ invenire.

Quoniam ratio AO ad OQ nota est per *Corol.* 1. fiat in ea ratione ipsa AO data ad aliam, hæc perpendiculariter erecta ex O centro gravitatis hyperbolæ dabit Q centrum gravitatis semihyperbolæ.

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 50.

Lineam rectam absolutè exhibere, in quâ existit centrum gravitatis semihyperbolæ.

Quoniam AO, QO distantiæ centrorum A, O, & Q, O notam inter se habent rationem, fiat in ea ratione AB recta data ad aliam, quæ ponatur in rectâ BD ex B in I.

Dico: centrum gravitatis semihyperbolæ BDM existere in rectâ AI, quæ ab hyperbolæ centro A, ad I, terminum rectæ jam inventæ BI extenditur.

Ducatur enim ex O centro grav. hyperbolæ totius recta OQ parallela BI, secans AI in Q. Manifestum est centrum grav. semihyperbolæ BMD esse in recta OQ, & quia per const. AO distantia centrorum A, O, est ad distantiam centrorum gravitatis hyperbolæ totius O, & semihyperbolæ, ut AB ad BI, liquet centrum grav. semihyperbolæ esse in Q, ubi recta OQ secat ipsam BI, ut patet ex 4.6.

PROPOSITIO XLVII.

Fig. 51.

Data sit hyperbola FDB, cujus axis DC, basis FB ad axem recta. Ita hac producta sumatur quodvis punctum A, per quod existat perpendicularis GN.

Si annulus obtusus, qui fit ab hyperbola FDB circa GN circumacta, vel ejus pars alterutra, genita ab semihyperpola FDC, vel à CDB, reducatur ad sphæram, datur quadratura hyperbolæ.

Hactenus quid ad hyperbolæ quadraturam ex hyperbolico annulo acuto sperari possit executi sumus: Idem juvat hoc theoremate in obtuso tentare.

Demonstratio. Centrum grav. semihyperbolæ esto O, per quod ducantur PQ, IM parallelæ ad CA, CD. Obtusum annulare solidum productum ab semihyperbolâ CDB, revolutâ circum GN, est ad conoidem genitam ab eâdem semihyperbola circa axem CD rotatâ, ut peripheria radij QO, seu AM, ad peripheriam radij PO, seu CM, ut patet ex 9. *hujus & Corol.* 2. Atqui ratio horum solidorum est nota; nam conois reducta est ad sphæram ab Archimede, & annulare solidum jam supponitur ad sphæram reductum esse. Ergo etiam ratio harum peripheriarum, & quæ huic est eadem ratio radij AM ad radium CM, nota est. Secetur ergo secundùm notam hanc rationem recta data AC in M, & per M ducatur MI parallela axi CD. Manifestum est in rectâ MI fore centrum grav. semihyperbolæ CDB. Sit jam hyperbolæ centrum X. *prop. præcedenti* exhibetur alia recta linea ex X centro ad basim CB ducta, in quâ etiam sit centrum grav. semihyperbolæ CDB. Ea porrò intersecabit necessariò rectam MI. Quare cùm semihyperbolæ grav. centrum sit in utrâque rectâ, erit hoc intersectionis ipsum punctum O. Inventum est igitur grav. centrum in semihyperbola: ac *a* proinde & quadratura ejusdem. Quod erat demonstrandum.

a per 30. hujus.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 52.

Suprà semihyperbolam ABF cujus axis AB, basis AF axi recta, existat Cylindrus rectus hyperbolicus BETKFA, Libro primo Cylindricorum & Annulariorum prop. 33. portionem BPKFA, quæ per punctum K, & axem AB ab hyperbolico Cylindro abscinditur, reduxi ad corpus rectilineum: demonstravi enim hanc portionem ad pyramidem, cujus basis sit triangulum ABF, altitudo autem eadem quæ Cylindri, eam habere rationem, quam recta composita ex sesquialtera lateris transversi hyperboles SBF & axe, ad compositam ex latere transverso & axe.

Dico: si etiam portio ABEOF ab eodem Cylindro per punctum E, & basim hyperboles AF abscissa, reducatur ad rectilineum solidum, haberi quadraturam hyperbolæ.

Demonstratio. Sint pares AB, AF. Portio BPKFA est ad conoidem obtusam genitam à semihyperbolâ ABF, circa axem AB revolutâ, ut *a* KF altitudo Cylindri ad peripheriam cujus radius est ordinatim applicata AF; hoc est (quoniam ex hyp. tam AF, ipsi AB, quàm KF ipsi EB æqualis est) ut EB ad peripheriam cujus radius est axis AB. Atqui etiam portio ABEOF est ad conoidem acutam genitam ab eadem semihyperbola ABF revolutâ circa ordinatim applicatam AF, ut EB ad peripheriam, *b* cujus radius est axis AB. Ergo portio BPKFA est ad portionem ABEOF, ut conois obtusa ad conoidem acutam. Sed ratio portionis BPKFA ad portionem ABEOF nota est, primæ enim de facto exhibui solidum rectilineum æquale, de altera verò idem hic supponitur. Ergo enim nota erit ratio conoidis obtusæ hyperbolicæ ad acutam. Ergo per 45. datur hyperbolæ quadratura. Quod erat demonstrandum.

a per 17. 1 Cylindri & Annul.
b per 16. ibid.

PRO-

PROPOSITIO XLIX.

Fig. 53. Fig. 54.

Data sit hyperbola BCAD, cuius axis AB, axis transversus AM, centrum X, basis CD ad AB axem recta. Suprà hyperbolam erectus sit Cylindrus indefinitæ altitudinis, sectus plano per AB, ad basim CAD recto, producente in Cylindri superficie rectas BI, AF. Sumpto deinde in recta BI quovis puncto K, perque illud ducta EN ad CD parallela, fiat ut XB ad XA, sic BK ad AG.

Dico: si axis transversus AM est par lateri recto hyperbolæ, frustum Cylindrico-hyperbolicum GNECAD abscissum plano EGN, æquale esse pyramidi, cuius basis est semissis quadrati CD; altitudo autem quarta proportionalis rectarum XB, BD, BK. Quod si axis transversus non est par lateri recto, dictum frustum erit ad dictam pyramidem, ut axis transversus ad latus rectum.

Demonstratio. Circa basim hyperbolæ CD describatur circulus QCPD, & ex centro B ducatur BP perpendicularis ad CD. Tum fiat ut XB ad BD, sic BK ad PR, quæ ex P erigatur perpendiculariter circulo QCPD, & suprà circulum Cylindrus rectus in altitudine PR, à quo abscindatur plano CRD portio PDRSC. Deinde per X centrum hyperbolæ ponatur ZV perpendicularis ad BM. Peripheria radij XB est ad peripheriam radij BD, ut XB ad BD; hoc est per constr. ut BK ad PR. Igitur permutando, peripheria radij XB est BK, ut peripheria radij BD, id est ut peripheria QC, PD, ad PR. Atqui solidum annulare hyperbolicum, quod fit ab hyperbolâ CAD circa ZV revolutâ, est ad frustum Cylindrico-hyperbolicum GNECAD, ut peripheria radij XB est ad BK, ut demonstravi *lib. 3. Cyl. & Annul. prop.* 30 & 29; sphæra autem genita à circulo QCPD est ad portionem PDRSC, ut peripheria QCPD ad PR, quemadmodum ostendi *lib. 1. Cyl. & Annul. prop.* 13. Ergo solidum hyperbolicum annulare supradictum est ad frustum GNECAD, ut sphæra circuli QCPD est ad portionem PDRSC. Igitur permutando, solidum annulare dictum est ad sphæram circuli QCPD, sive diametri CD, ut frustum GNECAD est ad portionem PDRSC. Sed dictum annulare solidum productum ab hyperbolâ CAD rotatâ circum ZV, est ad sphæram diametri CD, ut *d* axis transversus AM ad latus rectum. Ergo etiam frustum GNECAD est ad portionem PDRSC, ut axis transversus AM ad latus rectum. Atqui portio PDRSC dupla est pyramidis, cuius basis est triangulum APD, altitudo verò PR, ut demonstravi *lib. 1. Cyl. & Annul. prop.* 20; ac proinde æqualis est pyramidi, cuius basis est dupla trianguli CPD, seu par quadrato CP, quod est semissis quadrati CD; altitudo verò eadem PR. Ergo frustum hyperbolico-Cylindricum etiam est ad pyramidem, cuius basis est semissis quadrati CD, altitudo autem PR (quæ per constr. est rectis XB, BD, BK quarta proportionalis) ut axis transversus AM ad latus rectum: ac proinde, quando latus transversum est æquale lateri recto, etiam frustum hyperbolico-cylindricum dictæ pyramidi æquale erit: quæ fuerant demonstranda.

d per 24. huius.

† *Ex hoc theoremate habetur cubatio portionis GNECAD ab hyperbolico Cylindro FNECAD abscissæ: quam aliâ viâ per libram etiam dedit Antonius Lalovera è Societate Jesu, in doctissimis suis Elementis tetragonismicis* lib. 4. p. 24. *Neque aliud restat ad totius Cylindri cubaturam, quam ut cubetur portio GNEF, qua est ea ipsa, de qua egi* prop. præc.

Corollarium I.

Planum EGN quo abscinditur frustum GNECAD transit per X centrum hyperboles CAD. Patet ex 4. 6. Nam ex hyp. ut XB est ad XA, ita BK est ad AG. Ergo recta KG, adeoque & planum EGN, producta transeunt per X.

Corollarium II.

Fig. 55.

Iisdem positis, in recta BI præter punctum K sumatur aliud insuper punctum quodvis L, perque illud ductâ HT ad CD parallela, fiat rursum ut XB ad XA, ita BL ad AO.

Dico etiam haberi cubaturam frusti hyperbolico-cylindrici planis EGN, HOT intercepti.

Demonstratio. Per præcedentem habetur cubatura frusti GNECAD, & per eamdem habetur cubatura frusti OTHCAD. Ergo etiam habetur cubatura differentiæ eorumdem, quæ est ipsum frustum planis EGN, HOT interceptum. Quod erat demonstrandum.

Transeunt porrò ambo plana EGN, HOT per X centrum hyperbolæ, ut patet ex corollario præcedenti.

PROPOSITIO L.

Fig. 55.

Iisdem positis, à Cylindro hyperbolico abscissum sit segmentum GNECAD plano EGN, sic ut BK sit ad AG, quemadmodùm XB ad XA. Cubatum jam igitur est hoc segmentum prop. præcedenti.

Si cubetur etiam frustum YNECAD per eandem EN, & punctum aliquod Y rectæ AF, suprà vel infrà G, habetur quadratura hyperbolæ.

Demonstratio. Quia enim tunc utrique frusto tam GNEACD, quàm YNECAD haberentur solida rectilinea æqualia, daretur etiam eorumdem differentiæ, segmento ENYG rectilineum æquale. Jam verò per 18. *lib. 1. Cyl. & Annul.* portio EGFN est ad portionem EYFN, ut GF ad YF. Ergo dividendo segmentum ENYG est ad portionem EYFN, ut GY ad YF. Cùm igitur cubatum jam ostenderim segmentum ENYG, si fiat ut GY ad YF, ita rectilineum solidum segmento ENYG æquale, ad aliud solidum rectilineum; illud æquale erit portioni EYFN. Ergo per 48. habebitur quadratura hyperbolæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LI.

Fig. 56.

Hyperbola sit DMX, cuius axis BM, basis DX ad axem recta, centrum A, axis autem transversus sit æqualis lateri recto. Tum ex hyperbolæ centro A per X & D describatur circuli arcus DNX.

Dico: annulum productum à figura XMDNX, quæ ex segmento hyperbolico & segmento circulari componitur, circa AF circumacta, esse duplum sphæræ, cujus diameter est XD.

DEmonstratio. Annulare solidum productum ab hyperbolâ BDMX conversâ circum FG est æquale sphæræ, cujus diameter DX, ut demonstratum est *prop. 42. hujus.* Et solidum rotundum genitum à segmento circulari BXND revoluto circa eamdem FG, æquatur eidem sphæræ, cujus diameter DX, ut demonstravi *prop. 44. lib. 1. Cylind. & Annul.* Ergo totus annulus genitus à figura tota XNDM circa FG circumacta, duplus est sphæræ cujus DX diameter est. Quod erat demonstrandum.

PARS VI.

Proportio Hyperbolæ ad circulum theorematicè exhibetur.

PROPOSITIO LII.

Fig. 34. **Hyperbola sit DEF, cujus axis AE; basis ad axem recta DF, axis transversus ER, cui adjuncta sit ejus semissis RS. Sit autem semihyperbolæ DEA centrum gravitatis K.**

Fiat ut tripla AR ad duplam AS, ita AE axis hyperbolæ ad AQ.

Dico: hyperbolam DEF esse ad circulum ADN, cujus diameter est DF basis hyperbolæ, ut recta AQ est ad circumferentiam OP, cujus semidiameter est OA, seu KB distantia centri grav. semihyperbolæ ab axe AE.

DEmonstratio. Sumatur AC dimidia ipsius AQ. Quoniam ex hyp. est ut tripla AR ad duplam AS, ita AE ad AQ; erit quoque ut tripla AR ad simplam AS, ita AE ad AC dimidiam ipsius AQ. Inscribatur deinde semihyperbolæ DEA triangulum DEA, eidemque circumscribatur rectangulum DE. Omnibus circa axem AE in orbem actis producetur conois hyperbolica DOEF, cum cono DEF, & Cylindro DM, quorum hic conoidi circumscriptus erit, ille inscriptus. Jam quia Cylindrus DM est ad conum DEF, ut *a* tripla AR ad AR; conus verò DEF est ad DOEF conoidem, *b* ut AR ad AS; ex æquo erit Cylindrus DM ad conoidem, ut tripla AR ad AS; hoc est (ut ostendi suprà) ut AE ad AC. Sed etiam est ut AE ad AC, ita *c* Cylindrus idem DM ad Cylindrum DL. Ergo conois DOEF & Cylindrus DL æquales sunt. Atqui eidem conoidi etiam æquale est *d* solidum rectum, cujus basis est semihyperbola DEA, altitudo autem par circumferentiæ OP, cujus radius est OA, seu KB, centri gravitatis K semihyperbolæ distantia ab axe AE. Ergo solidum illud rectum etiam Cylindro DL æquale est. Ergo ut *e* recti solidi basis nempè semihyperbola DEA est ad basim Cylindri circulum nempè ADN; ita reciprocè AC altitudo Cylindri est ad peripheriam OP altitudinem solidi recti supradicti. Ergo tota hyperbola DEF est ad circulum ADN, ut AQ, ipsius AC dupla est ad peripheriam OP. Quod erat demonstrandum.

a per 10. l. 12.
b Archim. de conoid.
c per 14. l. 12.
d per 9. hujus.
e patet ex 15. l. 12.

PROPOSITIO LIII.

Fig. 34. **Sit portio hyperbolæ DEF, cujus axis AE sit æqualis transverso axi ER, basis autem DF ad AE recta.**

Dico: hyperbolam esse ad circulum ADN, cujus diameter est basis DF, ut quinque sextantes axis AE ad circumferentiam OP, cujus semidiameter est OA, sive KB, centri gravitatis semihyperbolæ distantia ab axe AE.

DEmonstratio. Axi transverso AR, adjiciatur semissis ejus RS. Quoniam igitur ex hyp. AE, ER æquales sunt, erit AR quadrupla ipsius RS; ac proinde tripla AR erit duodecupla RS: ipsa verò AS erit quintupla RS, adeoque dupla AS, erit decupla RS. Quare tripla AR erit ad duplam AS, ut 12 ad 10. Itaque si fiat ut tripla AR ad duplam AS, ita AE ad AQ, erit AE ad AQ, ut 12 ad 10, sive ut 6 ad 5; ac proinde AQ erit quinque sextantes axis AE. Atqui demonstratum est universim in præcedenti, hyperbolam DEF esse ad circulum ADN, ut AQ est ad circumferentiam OP. Ergo hyperbola cujus axis AE transverso axi æqualis est, ad circulum ADN eam habet rationem, quam quinque sextantes axis AE ad circumferentiam OP. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIV.

Fig. 49. **Data sit hyperbola DMX habens axem transversum MN lateri recto æqualem. Sit autem hyperbolæ centrum A axis BM, basis DX ad BM recta, circa quam descriptus sit semicirculus DZX. Porrò centrum gravitatis hyperbolæ esto P, semicirculi verò Y.**

Hyperbola DMX est ad semicirculum DZX, ut BY est ad AP.

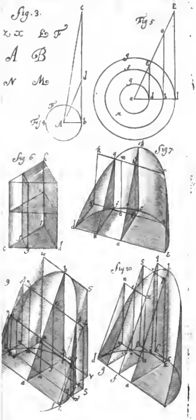
DEmonstratio. Demonstravi suprà *a* solidum annulare genitum ab hyperbola DMX rotatâ circa axem OA per A centrum transeuntem, æquari sphæræ à semicirculo DZX circa diametrum suam DX revoluto. Atqui istud annulare solidum est æquale *b* solido recto, cujus basis est hyperbola DMX, altitudo verò par circumferentiæ à gravitatis centro P descriptæ, cujus radius est AP; & sphæra dicta, æqualis est *c* recto solido, seu Cylindro, cujus basis est semicirculus DZX, altitudo autem par circumferentiæ à gravitatis centro Y, cujus radius est BY. Ergo etiam duo illa recta solida sunt æqualia. Ergo basis primi nempè hyperbola DMX, est ad basim secundi, nempè ad semicirculum DZX, ut *d* reciprocè altitudo secundi, peripheria nempè radij BY, ad altitudinem primi, peripheriam nempè radij AB, hoc est ut ipsa BY ad ipsam AP. Quod erat demonstrandum.

a per 42. hujus.
b per 5. hujus.
c per eand.
d patet ex cor. 4 p. 9.

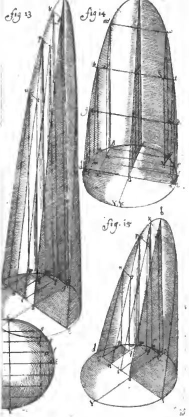
FINIS LIBRI QVINTI.

AN-

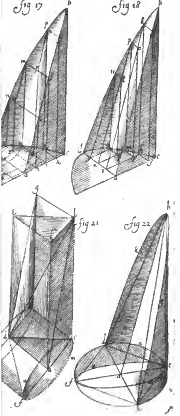
MATISMUS 1



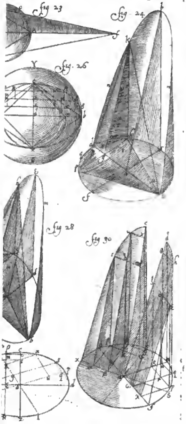
MATISMUS II



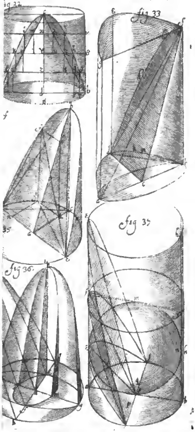
ATISMUS III



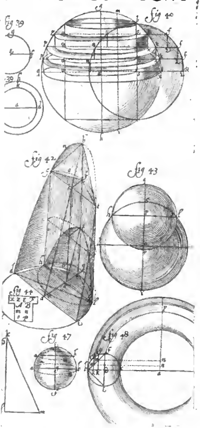
MATISMUS IV.



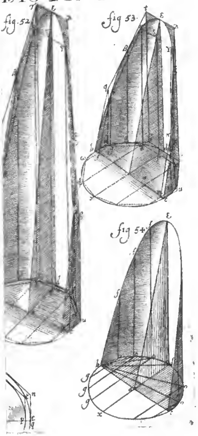
SCHEMATISMUS V



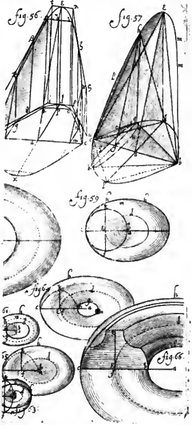
MATISMUS VI



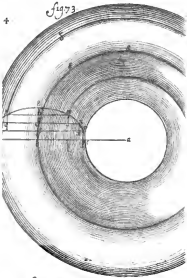
IATISMUS VII

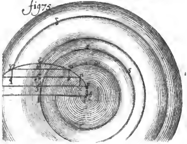


ATISMUS VIII

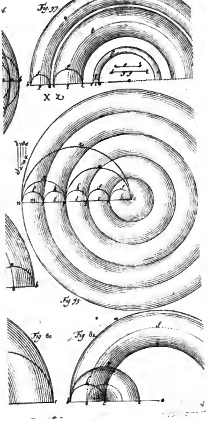


ΜΑΤΙSΜΟS X

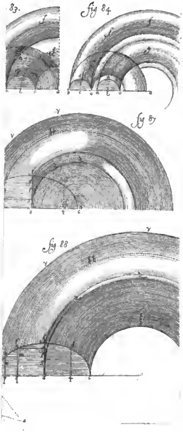




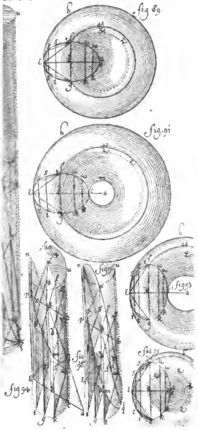
ATISMUS XI.



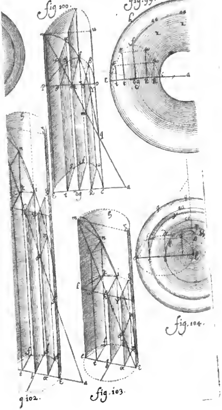
IATISMUS XII



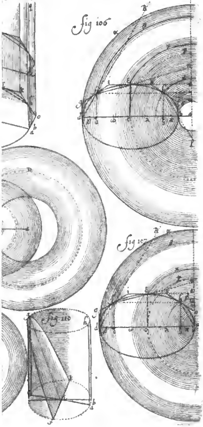
IATISMUS XIII



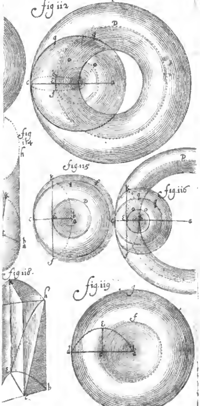
MATISMUS XIV



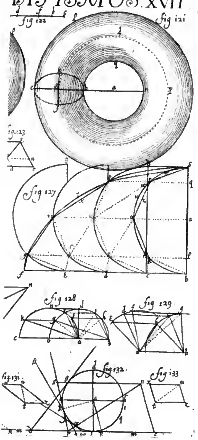
MATISMUS XV



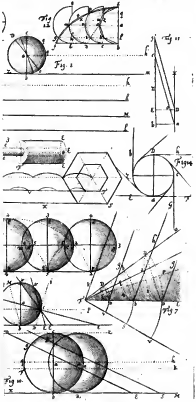
MATISMUS. XVI



IATISMUS. XVII



MATISMUS XVIII



ANDREÆ TACQUET
E SOCIETATE JESU
DISSERTATIO
PHYSICO-MATHEMATICA
DE CIRCULORUM
VOLUTIONIBUS.

AD LECTOREM.

Volutio circuli per planum tam multa, & magna continet paradoxa, ut inter arcana naturæ, præcipua meritò censeri debeat. Iam olim Aristoteles de concentricis pariter convolutis quæstionem movit, sed neque ipse, neque alius (quod sciam) post ipsum quispiam nodum dissolvit. Cum verò etiam mihi ea res semper admirabilis visa esset, conatus & ipse non semel fui, hoc in labyrintho reperire exitum, ac negotio difficillimo, si quid possem lucis, affundere. Quod cùm frustra aliquoties tentarem, in novas difficultates incidi, à nemine observatas, quas in scholio primi theorematis expressas lector reperiat. Tandem cùm nihil unquam daretur vel audire vel legere, ex quo vel minimum hærenti ac cæcutienti lucis suboriretur, attentiùs rem omnem cœpi expendere, atque ita in eas aliquando cogitationes incidi, quas hoc tractatu expressas habes. Aliquantò post, cùm ita res ferret, de hoc argumento theses quasdam, ab illustrissimo Domino Comite de Hornes & de Herlies publicè propugnatas, in lucem edidi. Quem conatum quod viri docti complures jam probaverint, speravi lectori meo non ingratum futurum, si quinque Cylindrorum & Annularium libris, hunc de circulorum volutionibus tractatum adjungerem. Expedivi illum forma thesium, qua priùs astringebatur, & uberiùs deduxi quædam, sub finem maximè, quæ in editione prima nolens thesium excedere modum, brevissimè perstrinxeram. Porrò tum in prima, tùm in hac postrema editione propositum mihi fuit, non solùm difficultatibus satisfacere, quas in scholio theorematis primi deduxi, verùm & reliqua volutionum symptomata prosequi, quæ mirabilem earum naturam amplius declararent. Vale.

DEFINITIONES.

Motus æqualis sive uniformis est, dum quibuscumque temporibus æqualibus æqualia spatia percurruntur.

2. *Motus difformis*, seu *inæqualis* est, quando temporibus inæqualibus inæqualia spatia absolvuntur.

3. *Sphæra* aut *circulus per planum volvi* dicitur, quando ita per planum progreditur, ut simul interea circa suum centrum assiduè convertatur. Volutio igitur ex duobus motibus, numquam interruptis, componitur, circuli nempè, & progressivo, sive lativo; quem etiam *Motum centri parallelum* sæpè vocabimus, quòd, dum circulus volvitur, illius centrum describat lineam plano parallelam, curvam aut rectam pro impulsus ratione.

Dixi: *numquam interruptis*: nam si alteruter aut lativus aut circularis interrumpatur altero continuato, jam non erit volutio, sed rasio. Uti infrà demonstrabitur.

4. *Rasio* autem tunc fit, cùm circumferentiæ punctum aliquod transit per plura plani puncta, quàm per unum, hoc est per aliquam plani partem; vel cùm plura circumferentiæ puncta, aliqua inquam circumferentiæ pars, transit per unum punctum plani.

5. *Una volutio peracta* est, quando circumferentiæ punctum quod prius erat in plano, in illud denuò descendit.

6. *Planum materiale commune* voco, quod non caret omni inæqualitate ac scabritie, cujusmodi nostra sunt omnia.

7. *Planum materiale perfectum* est, quod omninò æquabile est.

8. *Planum Geometricum* intelligo, quod quidem perfectum est, sed abstractum a materia.

9. Dum *Sphæræ circumferentiam* dico brevitatis causa, intellige circumferentiam circuli maximi ejusdem sphæræ.

10. Cùm *Infinitum* dicimus intellige indefinitum, sive quantumvis magnum, aut multum; sic enim loquuntur Geometræ.

Cætera, ubi res feret, suis locis definientur.

AXIOMATA.

1. Æquales velocitates, sive motus æquè celeres, æqualibus temporibus æqualia spatia conficiunt.

2. Ut velocitas ad velocitatem, ita inter se spatia sunt, quæ eodem tempore percurruntur demonstrat Galilæus 2. theor. de motu æquabili; & per se patet.

THEOREMA I.

Schematismus. 18. Fig. 2.

Dum circulus (AQ,) per planum commune materiale volvitur, omnes concentrici possibiles (AP,) quantumvis illo sive minores sint, sive majores, si junctim moveantur, una volutione percurrunt spatium æquale circumferentiæ Q.

Ducatur enim ex A centro radius ACB secans concentricos in punctis B & C, per quæ ducantur tangentes BM, CL: sitque BM in plano materiali communi, CL verò in Geometrico.

Quoniam ex hypothesi circulus AQ volvitur per BM, perpetuò tanget rectam BM; adeoque toto volutionis tempore rectæ à centro A ad omnes contactus ductæ erunt a ipsi BM perpendiculares; ac proinde radius circuli AQ semper erit distantia centri A à recta BM, unde toto volutionis tempore, centrum A æqualiter distat à BM. Quare cùm CL sit b parallela BM, (sunt enim anguli ACL, ABM a recti, adeoque æquales) centrum A semper etiam distabit æqualiter à CL, intervallo nempè radij AC sive AO. Cùm igitur ex hypoth. circuli AP, in principio tetigerint rectas CL, etiam ipsi toto tempore, quo circulus AQ volvitur, & tangit rectam BM, tangent rectas CL; Quia autem puncta C, sunt ad eandem rectam, ad quam est punctum B; quando B volutione peractà denuò descendet in BM, etiam puncta C pariter redibunt ad tangentes suas CL. Omnes igitur concentrici AP, unà volutione percurrunt rectas æquales ei, quàm percurrit circulus AQ. Ipse autem AQ percurrit rectam suæ circumferentiæ æqualem, ut experientia constat, cujus infrà dabimus rationem.

a 18. 3. b 28. 1.

Neque evadet Ageometra fortè quispiam dicendo circulos concentricos AP, partim volvi, partim radendo ferri; & concentricorum quidem ipso AQ minorem unumquodque punctum per aliquam tangentis CL partem trahi; concentricorum verò circulo AQ majorum plura puncta transire per unum idemque punctum tangentis. Id enim fieri omninò non posse sic demonstro.

Sumatur in concentrico, sive majori, sive minori quàm AQ, punctum quodvis O, per quod ex centro A ducatur recta occurrens deferenti circulo AQ in K. Quoniam circuli junctim volvuntur, suntque puncta O & K in eadem recta, manifestum est puncta O & K simul in sua plana CL, BM, dimittis simul attolli & abire. Cùm enim punctum K descendet in BM, fietque punctum contactus, erit AK perpendicularis a ad BM tangentem; ac proindè, quod BM, CL æquidistent, perpendicularis b quoque erit ad tangentem CL. Quare si puncto K posito in BM, punctum O, suprà esset infràve rectam CL, non semper distaret centrum A à tangente CL, intervallo radij AO, contra quàm superius demonstratum est. Pariter igitur puncta OK tangentes suas attingunt ac deserunt. Quare cùm punctum K & instantaneè & absque rasione ullà planum BM contingat (circulus enim AQ ex hypothesi per materiale planum BM volutione verà superius c definità, defertur;) punctum quoque O, instantaneè, & absque ullà rasione suum planum Geometricum CL continget. Id ipsum de alijs quibuslibet circumferentiarum PP concentricorum punctis demonstrabitur.

a 18. 3. b 28. 1. c Def. 3.

Ita quidem Geometricè propositum conficitur. Sed vim totius demonstrationis ad captum philosophorum accommodatiùs sic colligo: Impossibile est ut concentricus APN, qui percurrit lineam se majorem, secundum idem sui aliquamdiu tangat planum, sive ut tangat plura plani puncta, quin motus, quo circa centrum vertitur, tantisper interquiescat. Pari modo erit impossibile, ut circulus ARP, qui percurrit lineam se minorem, aliquamdiu tangat planum in eodem plani puncto, hoc est, ut plura puncta circumferentiæ transeant per unum punctum plani quin tantisper interrumpatur motus lationis. Sed ex hypothesi neuter motus unquam interrumpitur. Ergo &c. ut vis hujus ratiocinationis clarius percipiatur,

tur, cogitemus primò concentricum minorem ANP cieri per planum solo motu lationis absque ullà circà centrum conversione. Manifestum est idem circumferentiæ punctum, tangendo jam pertransire plura puncta plani. Quod si deinde intelligatur ad motum lationis accedere aliqua circuli conversio circa centrũ, quantumcumq; tarda ea fuerit, evidenter liquet, illud circumferentiæ punctum, secundùm quod planum tangitur, non nisi instantaneè in plano subsistere; cùm enim contactus ille indivisibilis sit, conversio quantumvis exigua illum variat, circumferentiæ punctum, quod tangebat planum, è plano mox sursum evehendo. Deinde cogitemus majorem concentricum ARP primò quidem agitari solo motu conversionis circa centrum A. Tum verò perspicuum erit plura circumferentiæ puncta, tangendo pertransire idem punctum plani. Quod si postmodò ad motum conversionis circa centrum, intelligatur accedere motus plani versùs L quantumvis parvus, liquidò rursus constat illud plani punctum, quod tangebatur, non nisi instantaneè conjungi cum circulo suum locum non mutante, quia enim contactus indivisibilis est, quantumlibet exigua plani CL promotio versùs L contactum necessariò variat, punctum plani, quod circulo conjungebatur, versùs L subducendo. Atque perinde se res habet sive planum CL, moveatur versùs L, circulo locum non mutante, sive plano manente immoto circulus deferatur versùs L. Ergo etiam quantumvis parvo accedente lationis motu ad circularem, jam nequit illud plani punctum, secundùm quod fiebat contactus, conjungi cum circulo nisi instantaneè, ac proinde nequeunt per illud plura circuli puncta transire. Quare neque cùm minor circulus percurrit lineam se majorem, neque cùm major se minorem, unquam rasio ulla committitur.

Itaque theorematis sanè admirandi plena demonstratio data est. Atque ita quidem data, ut etiam causa totius mysterij aperta sit, cùm demonstratio utraque fuerit ostensiva & directa.

Unum fortasse restat, quod explicatum velit nonnemo: Qui fieri nimirum possit, ut aliqua circumferentia, tantum semel convoluta tangendo percurrat lineam se majorem vel minorem? sic enim videtur circumferentia commensurari seu coextendi quantitati se majori vel minori, ac proinde minor majori, & major minori exæquari; quæ manifestè impossibilia sunt. Verùm respondeo: quamvis tota successivè circumferentia totam successivè in plano lineam se majorem minorémve tetigerit, non tamen ei commensurata seu coextensa fuit; quod ad commensurationem successivam totius cum toto requiratur, ut partes partibus successivè applicentur & congruant. Hic autem nulla circumferentiæ pars ulli parti lineæ, in plano peragratæ, applicata fuit, sed continuus fuit contactus indivisibilis, sive non quantus. Quod si polygonum aliquod exempli grat. hexagonum, per planum circumagatur, hujus perimeter lineæ in plano confectæ commensurabitur, quia perimetri partes (nimirum latera) sic fuerunt applicatæ, ut congruerent. In circulorum autem volutione longè aliter se res habet, quandoquidem successiva circumferentiæ cum lineâ in plano emensa conjunctio semper indivisibilis, hoc est non quanti extiterit.

Scholium.

Difficultates, & arcana in circulorum volutione.

Graves eæ sunt & multæ, quarum pleræque à nullo, quod sciam, hactenus vel explicatæ, vel saltem indicatæ.

Schematismus 18. Fig. 2.

1. Et prima quidem superiori theoremate soluta est, ac in sequentibus etiam plenius explicabitur: qui fieri nimirum possit, ut major minori, & majori minor, imò ut omnes inæquales circumferentiæ possibiles eidem rectæ lineæ quodammodo commensurentur? & quidem illa, quod rei admirabilitatem non parum auget, quælibet esse potest; si enim quilibet alius concentricus diversus à circulo AQ, per materiale planum volvatur, unâ volutione percurret rectam suæ circumferentiæ æqualem & ipse & omnes reliqui.

2. Sed longè adhuc major exoritur quæstio, quare is, qui per materiale planum volvitur, solus percurrat spatium suæ circumferentiæ æquale; reliqui verò omnes concentrici lineas suis peripherijs majores, minorémve absolvant. Frivolum erit dicere eum, qui planum materiale tangit, percurrere lineam sibi æqualem, quia is movetur per se, & independenter ab alijs: id enim quæritur, quid hic sit moveri per se, & cur is potius, quàm reliqui per se moveatur.

3. Quid fiet, si concentricorum junctim volutorum nullus per planum materiale decurrat? Quod quidem omnes unâ volutione emetientur æquale spatium, superius a demonstratum est. Sed quantum illud erit? cujus concentrici peripheriæ id æquabitur? An tum vocari deferens ullus poterit? Frigida responsio est, ab eo reliquos deferri, qui primariò & per se movetur; cùm enim ex hypothesi omnes concentrici juncti ac colligati sint, ut quodlibet uno moto, omnes moveantur; declarandum erat, quid requiratur, ut concentricorum aliquis per se moveatur ac deferat reliquos: quo exposito, oportebit adhuc ostendere, eum qui movetur per se, conficere spatium suæ circumferentiæ æquale.

a *Theor. 1.*

Schematismus 18. Fig. 3.

4. Quod si ille circulus, qui materiale planum tangit, unâ volutione decurrat spatium æquale suæ circumferentiæ; quod quidem ita fieri nemo hucusque aliter, quàm experientiâ probavit; quid tum eveniet, cùm duo Cylindri EF, CG positi circa eundem axem AB, ambo materialia plana parallela in lateribus FE, CG contingent? nunquid utrique circuli E, & C, unâ volutione percurrent spatia suis circumferentijs æqualia? Atqui hoc impossibile est. Cùm ex suprà theoremate primo demonstratis liquidò pateat, circulos E & C, volutiones suas pariter incipere & finire, ac proinde ambos semel convolutos, æqualia spatia conficere. Num igitur hoc casu dicemus volutionem esse impossibilem? At nulla impossibilitatis causa apparet. Et possibilem esse infra demonstrabimus. Cui igitur peripheria spatio unius volutionis, æquabitur E, an C, an neutra? Si alterutra: cur hæc potius, quàm illa? Cùm materiale planum utraque contingat. Si neutra: cùm aliquam esse determinatam longitudinem necesse sit, quam utrique C & E circuli decurrant, ea erit exhibenda, ut satisfiat quæstioni.

5. Difficultates præcedenti numero propositæ, quodammodo augentur in cono infinito, secundum

 latus

latus FE commune materiale planum tangente, perque illud volutione rectâ delato. Hic enim infiniti circuli concentrici, extra se invicem politi, planum commune materiale contingunt.

Schematismus 18. Fig. 7.

Hæc, pluraque alia, quæ postmodò attingemus, satis declarant mirificum quoddam naturæ in circulorum volutione inesse mysterium; quod quidem quò minùs hactenus explicaretur, inde mihi factum videtur, quod oculos non conjecerint in proportionem motuum lativi & circularis, volutiones componentium, quæ alia atque alia esse, & infinities variari potest. Ex mutuâ quippe utriusque motus proportione rectè perpensâ, omnes difficultates propositæ dissolventur, ut ex sequentibus theorematis planum fiet. Porrò ex hujus observationis defectu orta quoque est ea communis hallucinatio; videlicet cum circulum, qui planum materiale tangit, unâ volutione peractâ, percurrere necessariò lineam in plano æqualem suæ circumferentiæ: neque fieri aliter posse. Quòd falsum esse infrà ostendetur.

Aristoteles & Galilæus nihil explicant.

Schematismus 18. Fig. 2.

De circulorum concentricorum per planum volutione agit Aristoteles in Mechanicis qu. 24. cujus discursus omnis huc revocatur.

Si quis minorem circulum AP impulerit, majorem AQ huic annexum non moveri ex se, sed quantum movetur à minore: ac proindè æqualem cum eo viam conficere. Similiter, cùm majorem AQ impuleris, tunc minor non suo, sed majoris motu defertur: unde rursus æqualem cum eo viam conficiat, necesse est. Deinde cuidam objectioni respondens, ait: quamvis unum sit amborum centrum: esse tamen unius centrum per se in motione; alterius verò per accidens: illum enim circulum, qui movet alterum, obtinere illud centrum per se; alium verò qui movetur, habere illud centrum per accidens, quia non utitur illo tanquam centro.

Hæc Aristotelicæ ratiocinationis summa est: quàm parùm aut potiùs nihil ad propositum lucis afferre, perspicuè lector intelliget, qui hunc Aristotelis discursum cum difficultatibus præcedenti sectione propositis componet,

Inter reliquos, qui nodum hunc gordium dissolvere conati sunt, postremus tempore, sed ob complura in Mathematicis præclarè subtiliter inventa primus claritudine nominis est Galilæus Linceus. Is in libro quem inscribit. *Discorsi è demonstrationi Mathematiche &c.* Dialogo primo, hoc unum conatur explicare, quod à nobis primo loco propositum est theoremate præcedenti; qui fieri possit ut minor circumferentia lineam se majorem, & major minorem unâ convolutione emetiatur. Sic autem ratiocinatur.

Schematismus 19. Fig. 4.

Sint duo polygona similia, similiterque posita circa commune centrum G, ita sibi mutuò conjuncta, ut unum sine altero moveri nequeat. Producantur latera AB, HI. Et super puncto B fixo circumagatur polygonum majus, donec latus BC congruat rectæ AS, & punctum C incidat in Q. Hoc motu peracto BC est in BQ; & BG est in BC. Punctum verò I, extremum lateris KI, minoris polygoni descripsit arcum IO; ipsum verò latus KI, incidit in rectam OP, transmisso per saltum spatio IO. Quod si ad hunc modum majus polygonum secundùm omnia latera circumagatur per rectam AS, ipsum quidem emetietur lineam AS suo perimetro æqualem, compositam nimirum ex omnibus polygoni lateribus juxta invicem in directum collocatis: polygonum verò minus emensum fuerit lineam HT paulò minorem compositam nempè ex sex lateribus polygoni minoris, & quinque spatijs OI, saltu transmissis, totidem scilicet, uno minus, quot sunt polygoni latera. Hujus autem lineæ HT defectus ab AS priori, quam emetitur polygonum majus, uti & spatia singula saltu transmissa, æquantur differentiæ laterum AB, HI; quæ eò fit minor, quò plura fuerint polygonorum latera; ac tandem evanescit, fitque æqualitas inter rectas AS, HT.

Quoniam igitur polygonorum progressio desinit in circulum, is erit polygonum infinita habens latera non quanta, hoc est punctualia: & quemadmodùm polygonum majus absque saltu ullo emetitur lineam AS, suo perimetro æqualem, constantem videlicet ex omnibus lateribus suis in directum & continuè absque ullâ vacuorum spatiorum intercapedine dispositis; similiter quemadmodum minus polygonum tot spatia saltu transmittit, quot habet latera uno minus; ac proinde lineam emetitur HT ferè æqualem AS lineæ polygoni majoris, constantem nempè ex lateribus suis, & spatijs saltu transmissis: ita concentricus minor delatus ab altero, tot facit saltus non quantos, quot habet latera non quanta, hoc est infinitos; adeoque linea, quam percurrit, constat ex infinitis circuli lateribus punctualibus, interpositis infinitis punctualibus spatijs vacuis, sive saltu transmissis. Atque inde fit, quòd circulus minor percurrat lineam æqualem ei, quam major. Quemadmodum enim partes quantæ pedalis lineæ, si spatia vacua quanta interponas, ad quamvis longitudinem extendi possunt: ita lineæ pedalis partes non quantæ, id est puncta infinita, interpositis vacuis infinitis non quantis, hoc est punctualibus, in quamcunique longitudinem possunt distendi.

Ita, quoad rem Galilæus, addens, sic optimè rarefactionem explicari. Non magnoperè contendendum mihi arbitror, ut hoc discursu nihil effici ostendam. Supponit enim continuum ex punctis inextensis infinitis componi: quæ opinio in scholis passim exploditur. Inanis certè progressio est à polygonis ad circulos; & circulum esse infinitorum laterum polygonum, sed non quantorum seu punctualium, verba ac voces sunt. Nullum enim latus habet circulus, & latera non quanta, non sunt latera. Pari modo saltus instantanei ac punctuales non sunt saltus; & punctualis saltus idem est ac nullus. Adhæc theoremate primo demonstratum est, totam cujusvis concentrici peripheriam, totam rectam, per quam volvitur, absque ullâ interpolatione successive tangere. Nullus igitur saltus committitur.

Multis deinde ac longis discursibus interjectis progreditur ad explicandum, quomodo major circumferentia semel convoluta percurrat lineam se majorem. Summa hæc est.

Polygonum minus circumagatur super puncto I, donec latus IK cadat in IO: tum verò B punctum extremum lateris polygoni majoris retrotrahetur descripto arcu BZ, cadetque latus BC in ZR, sic ut ejus pars superponatur parti lateris AB. Quod si omnia polygoni minoris latera hunc in modum circumagantur suprà rectam HT, ipsum quidem metietur lineam HV, æqualem suo perimetro, constantem nempè, omnibus lateribus suis in directum & continuè dispositis: at minus polygonum describet lineam

AK,

AX, ferè æqualem lineæ HV polygoni minoris, constantem ex lateribus majoris polygoni in directum quidem collocatis, sed aliqua sui parte cadentibus suprà invicem; eruntque tot partiales suprapositiones, quot sunt latera, unâ minus. Porrò excessus hujus lineæ à polygono majori mensuratæ, suprà eam, quam metitur minus, itemque suprapositionum quantitas BZ, est ipsa laterum AB, HI, differentia; Quæ, quo plura fuerint polygonorum latera, eò semper evadit minor: ac tandem evanescit, fitque æqualitas inter ipsas HV, AX. Hæc jam circulis applicat ut prius. Circulus minor (inquit) AQ per se motus (vide *fig.* 2.) sua latera infinita, non quanta explicat, suprà rectam BM, sic ut omnia sint posita extra invicem: Circulus verò major AR à minori delatus, sua quoque infinita latera disponit per rectam CL, non planè extra invicem, sed cum infinitis suprapositionibus, seu replicationibus, seu retractionibus non quantis, hoc est punctualibus, absque ullâ tamen partium quantarum suprapositione seu penetratione. Atque inde fieri putat, quod major AR semel convolutus absolvat lineam se minorem, & æqualem ei, quàm minor. Quemadmodum enim, ait, partes quantæ pedalis lineæ suprà invicem positæ, hoc est per suprapositiones quantas, conficere possunt magnitudinem datâ minorem: sic vicissim pedalis lineæ partes non quantæ, hoc est infinita puncta, per infinitas suprapositiones non quantas, absque ullâ partium quantarum penetratione, ita constipari possunt ut magnitudinem datâ minorem conficiant. Demùm addit ita facilè condensationem explicari.

Schematismus 18. *Fig.* 2.

Hunc discursum, quamvis ejus subtilitatem interlocutor Sagredus exclamans, ut solet, mirificè deprædicet, si priori adhuc inaniorem esse dixero, nihil magnoperè vereor, ne me temeritatis eruditus lector condemnet. Tametsi enim polygonorum concentricorum volutiones aptè & eleganter explicet, applicatio tamen ad circulos facta, ac cætera quæ subjungit de infinitis punctorum suprapositionibus non quantis, pluraque alia, ejusmodi sunt, quæ philosopho cuicumque in promptu atque obvium sit refellere. Hoc solum breviter dico: retractio & suprapositio non quanta, instantanea, punctualis, est retractio & suprapositio nulla: & nequit fieri punctorum suprapositio, quin plura puncta circumferentiæ idem plani punctum successivè contingant. Quod fieri in casu non posse theoremate primo demonstratum est.

Et hæc quidem omnia Galilæus de ea difficultate solum, quam primo loco proposuimus. Cæterarum quippe, quas nos ipsi nobis objecimus, nec ipse, nec alius, quod sciam, quispiam meminit.

Reliquum jam est, ut siquid ipsi ad difficultates propositas afferre lucis possimus, ordine ac breviter expediamus. Quod priusquam facio non alienum à proposito erit si referam, quâ primum viâ hoc mihi in labyrintho suboriri lux cœperit. Videbam, quod quidem nemo est qui non viderit, sphæram digito impulsam sic moveri per planum, ut & latione rectâ progrederetur, & simul interim circa centrum suum verteretur, notabamque proinde duos motus effici impulsu uno, sive quod idem est, motum unum ex duobus specie diversis compositum. Tum verò cogitare cœpi, si binos hosce diversos motus, non unus motor ut prius, sed bini motores efficiant, quid eveniet? quid enim si hujus sphæram trahat motu recto per planum, atque interim eandem alter circa suum centrum rotet? tum certè ad eundem planè modum sphæra movebitur, ac si ab uno aliquo impulsa liberè volveretur. Ita deinde ratiocinabar: cùm hi motores diversi sint, ab invicem non dependent. Dabit igitur motui quisque suo eam celeritatem, quam volet. Quid igitur, si is, qui sphæram trahit, trahat velocissimè, altero interim tardissimè eandem circumagente? Tum enimverò necesse erit, ut priusquam una volutio peracta sit, longissimum in plano spatium multoque sua circumferentia majus sphæra percurrerit. Quod si jam trahente illo tardissime, alter sphæram celerrime circumageret, perspexi continuò necessario consequi, ut minimo illo tempore, quo hic sphæram semel circumagit, eandem ille per spatium multò ejusdem circumferentiâ minus trahendo promoverit. Atque ita tandem intellexi, fieri posse ut etiam in materiali plano unius volutionis semita, sit quantumcunque major vel minor circumferentia sphæræ; ac proinde negotium hoc omne non ex alterutrius horum motuum celeritate aut tarditate sigillatim spectata, sed ex utriusque inter se comparatu, atque ex mutua eorumdem ad invicem proportione pendere.

His præmissis, aggredior propositum, & in primis quidem theorematis volutiones considerabimus in planis Geometricis factas. Quæ deinde volutionum ratio in plano materiali communi sit, quæ in materiali perfecto disquiremus. Tandem ipsam illam curvam lineam, quam singula voluti circuli puncta describunt, aliaque nonnulla volutionum symptomata contemplabimur.

THEOREMA II.

Si motus plano parallelus, quò circuli centrum, adeoque ipse circulus defertur, & motus circularis, quo super suo centro circulus circumagitur, sint æquè celeres; linea, quam unâ per planum volutione circulus percurrit, circumferentiæ æqualis erit.

Si motus parallelus lationis fuerit velocior circulari; unâ volutione percurret lineam sua circumferentia majorem; minorem verò, si parallelus motus circulari sit tardior.

QUoniam, per hypothesim, lationis motus & circularis sint æquè celeres, quæ eodem tempore percurrent spatia, per axioma I æqualia erunt. Atqui spatium, quod unius volutionis tempore lationis motu à centro percurritur, est æquale illi lineæ, quam in plano circulus unâ volutione continenter tangendo percurrit; spatium verò, quod eodem unius volutionis tempore motu circulari conficitur, est ipsa circumferentia, ut patet ex definit. quinta. Ergo linea recta, quam in plano circulus unâ volutione continenter tangendo peragrat, circumferentiæ æqualis est. Quod erat demonstrandum.

Secundæ partis demonstratio ex sequenti theoremate universali, deducetur.

Corollarium.

Si recta, quæ unâ volutione percurritur, æqualis sit circumferentiæ, motus parallelus centri, & circularis æquè celeres erunt.

THEO-

THEOREMA III.

Univerſim ut velocitas motus parallelt, quo centrum fertur, ad velocitatem motus circularis; ita linea, quam una per planum volutione circulus percurrit, erit ad ejuſdem circuli circumferentiam.

SPatium, quod tempore unius volutionis motu parallelo centri percurritur, eſt æquale ei lineæ, quam in plano circulus unâ volutione tangendo percurrit: ſpatium autem, quod eodem volutionis unius tempore circulari motu conficitur, eſt ipſa circumferentia; hæc enim per *definit.* 5. unâ volutione ſemel integrè circumagitur. Atqui per axioma 2. demonſtratum à Galilæo Theor. 2. de motu æquabili, ut velocitas eſt ad velocitatem, ita ſunt ſpatia eodem tempore abſoluta; proindeque etiam in caſu dato, ut celeritas motus lativi ad celeritatem motus circularis, ita ſpatium quod unius volutionis tempore abſolvitur lativo motu, eſt ad ſpatium, quod eodem volutionis unius tempore circulari motu conficitur. Ergo ut velocitas motus lativi ſeu paralleli eſt ad velocitatem motus circularis, ita eſt recta linea quam in plano circulus unâ volutione tangendo percurrit, ad ipſam circuli circumferentiam. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA IV.

Schematiſmus 18. *Fig.* 2.

Ex his jam facilè licebit deducere, data quacumque concentricorum circulorum infinitorum per plana Geometrica volutione, quiſnam ille ſit, qui unus ex omnibus una volutione abſolvat lineam ſuæ circumferentiæ æqualem.

IS ſanè, qui eâdem velocitate ſuper communi centro circumagitur, quâ idem centrum motu ad planum parallelo defertur. Atque hic non incommodè primarius ſive deferens vocabitur.

Quod autem datâ volutione quacumque ſemper aliquis, & unus tantùm reperiatur, qui eâdem velocitate ſuper centro circumagitur, quâ centrum motu parallelo defertur, ſic demonſtro. Quoniam omnes concentricos unâ volutione æquales rectas lineas, ſive eamdem percurrere demonſtratum eſt theor. 1. (vide fig.2.) ea ſit BM. Poſſibile eſt circa centrum A deſcribere peripheriam æqualem rectæ BM. Ea ſit, Q. Quia igitur omnes concentrici percurrunt unâ volutione lineas æquales ipſi BM, etiam concentricus AQ. unâ volutione percurret BM, ſuæ circumferentiæ æqualem. Ergo per Coroll. Theor. 2. concentricus AQ. eâdem celeritate ſuper centro A vertitur, quâ centrum A motu ad planum parallelo defertur; atque inde etiam patet ejuſmodi circulum non niſi unicum exiſtere.

THEOREMA V.

Schematiſmus 18. *Fig.* 2.

Quare concentrici primario minores, percurrant unâ volutione lineas maiores ſuis circumferentiis; concentrici verò maiores primario, rectas abſolvant ſuis circumferentiis minores.

PRimarius, qui nimirùm percurrit lineam ſuæ circumferentiæ æqualem, ſit AQ., & aſſumatur quivis illo minor concentricus AN. Quoniam ſimul omnes circa commune centrum A rotantur, manifeſtum eſt minorem AN tardius circumagi quàm maiorem AQ. Atqui, cùm ex hyp. AQ percurrat lineam ſuæ circumferentiæ æqualem, rotatio ſive circulatio motus circuli AQ eſt æquè velox per Theorem.2. ac motus progreſſivus centri communis A. Ergo motus circularis circuli AN tardior eſt motu progreſſivo centri. Ergo per Theor.3. circulus AN unâ volutione percurrit lineam ſuâ circumferentiâ majorem.

Aſſumatur deinde quicumque concentricus AR, major quàm AQ. Liquet majorem AR circumagi celeriùs, quàm minorem AQ. Quare, cùm ipſius AQ circumactio ſit æquè celer, ac motus parallelus centri communis A, erit circumactio ipſius AR velocior parallelo motu centri communis A. Igitur per Theor. 3. circulus AR unâ volutione percurret ſpatium ſuâ circumferentiâ minus. Data igitur eſt cauſa cur, &c.

THEOREMA VI.

Schematiſmus 18. *Fig.* 2.

Unde fiat, quod infiniti inæquales concentrici, una volutione æqualem lineam percurrant?

COncentricus lineam BM percurrens ſuæ circumferentiæ æqualem, ſit AQ.: & aſſumatur quicunque alius illo minor, majórve AP. Quoniam ex hypotheſi omnes concentrici eodem tempore integràn circa commune centrum A rotationem abſolvunt, erit per axioma 2. ut circumferentia Q, ad circumferentiam P, ita velocitas quâ circumagitur Q ad velocitatem quâ circumagitur P. Atqui recta BM, ex hypotheſi æquatur circumferentiæ Q, & velocitas paralleli motus, quo in volutione centrum commune A defertur, æquatur per coroll. Th.2. velocitati, quâ circumferentia Q circa centrum A circumagitur, cùm ex hypotheſi recta BM, quæ unâ volutione à circulo AQ percurritur, ſit æqualis circumferentiæ Q. Ergo ut recta BM eſt ad circumferentiam P, ita velocitas motus paralleli, quo centrum commune A defertur, eſt ad velocitatem, quâ circumagitur circumferentia P. Ergo per Theor. 3 recta BM, ea eſt, quam concentricus quicumque AP unâ volutione percurrit. Data igitur eſt cauſa, cur infiniti concentrici unâ volutione eamdem lineam percurrant.

THEOREMA VII.

Unde fiat, quod linea, quam infiniti concentrici, ſimul moti unâ volutione omnes percurrunt, modò major eſſe poſſit, modò minor, imò data quæcumque.

AD hoc certè nihil conferet, quod celeriùs tardiùſve, aut centrum commune deferatur, aut circuli circa centrum commune circumagantur. Verùm res tota pendet ex mutuâ horum motuum proportione.

Schematiſmus 18. *Fig.* 2.

Dati igitur ſint circuli quotcumque circa centrum commune A. Data item ſit quæcumque linea BM. Poſſibile eſt circa centrum A deſcribere peripheriam datæ

Schematismus 18. Fig. 2.

datæ rectæ BM æqualem. Hæc esto . Q. Rursum possibile est ita volvi concentricos, ut motus circularis, quo circulus AQ super communi centro A circumagitur, sit æquè velox, atque parallelus motus quo commune omnibus centrum A defertur. Tum verò concentricus AQ. Per Theor. 2 unâ volutione percurret rectam æqualem suæ peripheriæ Q; hoc est, ex constructione, lineam BM. At omnes concentrici æquales lineas percurrunt, ut demonstratum est Theoremate 1. & 6. Ergo omnes concentrici unâ volutione percurrunt lineas ipsi BM datæ æquales. Data igitur causa est unde fiat &c.

Corollarium.

Ex omnibus hucusque demonstratis manifestum est, quantitatem lineæ, quæ à circulis unâ volutione percurritur, pendere ex solâ duorum motuum, lationis nempè ac circularis, ex quibus volutio omnis componitur, proportione.

Nunc quando satis consideravimus volutiones generaliter, nimirum factas in planis Geometricis, hoc est ab omni materia abstractis, reliquum est, ut ad plana materialia transeamus.

THEOREMA VIII.

Unde fiat, quod sphæra, sive circulus, dum per commune planum materiale liberè volvitur, lineam percurrat suæ circumferentiæ æqualem.

Hoc ita evenire, qui aliter, quàm ab experientia, probet, & cur ita eveniat, causam qui aperiat, non invenio. Quemcumq. circulum, cum per planum Geometricum volvitur, unâ volutione absolvere spatium posse quantumlibet majus minùsve sua circumferentia, ex jam demonstratis perspicuum est. Qui verò plani materialis contactus efficiat, ut illa perpetuu inter circumferentiam circuli, & spatium unâ volutione emensum oriatur æqualitas? pro hujus rei disquisitione esto principium:

Natura, cùm nihil agit frustra, quemadmodum brevissimâ agit viâ, ita modo etiam facillimo.

Schematismus 18. Fig. 1.

Datus jam sit circulus AQ, sustentatus à plano communi BM, qui impellatus versùs M. Igitur per principium jam constitutum, circulus modo facillimo per planum progredietur versùs M. Itaque non procedet per planum solo motu recto; sic enim plani BM, quod ex hypothesi est commune (hoc est per definitionem 6. asperum & scabrum) minutas inæqualitates impinget offensabitque. Facillimus igitur modus procedendi versùs M, is erit, quo fiet, ut quàm minimè circulus in plani asperitatem impingat. Atqui impinget quàm minimè, si eadem celeritate se circa centrum suum A circumagat, qua progreditur versùs M: quod sic ostendo. Statuamus circulum versùs M progredi, hoc est ejus centrum latione parallela moveri versùs M, celeritate, ut 6; atque interim circumagi circa centrum celeritate, ut 2. Quoniam igitur circulus se circumagit, ac proinde una parte, quæ MH spectat, descendendo suam circumferentiam spontè demittit in planum, altera verò parte ascendendo eamdem suam circumferentiam è plano subducit; manifestum est offensare jam minùs atque impingere in exstantes plani particulas. Quia tamen latio versùs MH, quæ dum omnis adhuc aberat circularis motus, adæquata fuit impingendi causa, adhuc velocior est, quàm circumactio, hoc est quàm summissio atque subductio spontanea circumferentiæ; tantùm adhuc impedimenti relinquitur, quantùm velocitas lationis versùs MH excedit velocitatem circumactionis. Quare si circumactio circuli circa centrum eadem omninò velocitate fiat, qua fit latio versùs MH; jam omne sublatum erit progressionis impedimentum. Nam eadem velocitate circulum circumagi, qua progreditur, sive defertur versùs M, est prorsus, circumferentiæ partes successivè omnes in planum spontè summitti, iterumque subduci eadem celeritate, qua fit progressio versùs M. Tum verò nulla jam pars circumferentiæ in planum potest impingere; cùm enim æquè celeres sint circumactio & progressio, partes circumferentiæ eodem instanti subducuntur è plano, quo deberent impingere.

Quod si circumactio velocior fiat motu lationis versùs MH, rursus impingere circulum sic demonstro. Intelligatur circulus communi plano insistens circa centrum A circumagi secundùm ordinem litterarum CQBD, absque ullo motu lationis versùs MH. Manifestum est circulum jam continenter impingere in minutas plani asperitates, circa contactum positas; quemadmodum impingebat prius, cùm deferebatur versùs MH, absque ulla circa A centrum conversione. Quod si deinde ad circularem motum accedat aliquis motus lationis versùs MH, quamvis nondum æquè velox sit ac circularis, efficiet ille nihilominus, ut circulus tendendo versùs MH, subducatur nonnihil, ac proinde jam impingat minus, quàm dum eodem hærens loco tantum circa centrum A rotabatur. Impinget nihilominus adhuc etiam tum, quòd motus circumactionis, qui, dum aberat omnis motus lationis versùs MH, adæquata erat impingendi causa, adhuc celerior sit motu lationis versùs MH: quo fit ut circuli partes velocius in plani asperitates descendant, quàm inde per motum lationis subducantur. Quod si motus lationis, sive progressio centri versùs MH fiat æquè velox, ac motus circumactionis, evidenter patet, qua celeritate circumferentia per circularem motum descendit in plani asperitates, eadem prorsus per motum lationis inde subduci. Quare jam omnis rursum cessat impactio. Non tantum igitur circularis motus tardior motu lationis, sed etiam illo velocior causa impingendi erit; utrisque verò inter sese adæquatis cessabit omnis.

Itaque modus omnium facillimus est, cùm circuli circumactio & progressio, centri eadem velocitate fiunt. Igitur per principium suprà positum, circulus eo modo decurrit per planum versùs M. Atqui per 2. Theorem. dum circumactio, sive motus circularis & centri progressio eadem celeritate fiunt, circulus unâ volutione lineam percurrit æqualem suæ circumferentiæ. Circulus igitur, cùm per materiale planum commune liberè volvitur, unâ volutione absolvit lineam æqualem circumferentiæ. Quod igitur erat propositum, & quòd fiat, & cur fiat demonstravimus.

THEOREMA IX.

Quamvis sphæra, sive circulus per materiale planum commune liberè volutus, absolvat semper una volutione lineam suæ circumferentiæ æqualem: fieri tamen potest ut tantùm semel circumactus, successivè tangendo absolvat in eodem plano materiali lineam, sua circumferentia quantumcumque majorem vel minorem.

Schematismus. 18. *Fig.* 2.

PLanum materiale BM tangat circulus aut sphæra AQ, in puncto B. Unus circumagat sphæram circa centrum A: alius interim sphæram trahat latione ad planum parallelâ, sic ut centrum non excedat parallelam AH. Tum verò sic per planum BM sphæra movebitur ac si volveretur: Et per 3. Theorema, ut erit velocitas tractionis ad velocitatem rotationis, ita erit linea post unam sphæræ rotationem peractam in plano decursa ad circumferentiam. Quare cùm is, qui sphæram trahit, eam possit in quâcumque proportione trahere celeriùs tardiùsve, quàm alter circumagat; poterit linea, quæ decursa erit post unam sphæræ rotationem, quacumque proportione esse major vel minor, quàm circumferentia. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA X.

Expenditur coni volutio recta per planum Geometricum.

Schematismus 18. *Fig.* 7.

PLanum Geometricum tangat conus infinitus (hoc est indefinitus) in latere FE. Secetur deinde conus infinitis planis quæ in cono producant circulos infinitos, D, B &c. in plano autem, quod tangit conus, rectas DG, BH. Volvatur deinde conus per planum volutione rectâ, sic nimirum, ut circulus, D, non exceedat rectam DG; quo posito, omnes reliqui suas quoque tangentes BH &c. non excedere, his positis Dico

1. Omnes circuli volutiones suas pariter & incipiunt, & finiunt: omnes enim tangunt planum in punctis ejusdem lateris EF.

2. Ex infinitis circulis tantùm unus percurrit unâ volutione, longitudine suæ circumferentiæ æqualem, is nimirum, qui eadem celeritate circa communem axem FP circumagitur, quâ axis ipse motu recto progreditur.

3. Reliqui circuli infiniti percurrunt lineas huic æquales.

4. Communis illa longitudo, quam omnes circuli unâ volutione percurrunt, potest esse quælibet.

Horum omnium demonstrationes & causæ ex 7 primis Theorematibus deducuntur.

THEOREMA XI.

Possibilis est recta coni volutio in plano materiali communi.

POnatur eadem quæ Theoremate præcedenti; sed pro Geometrico plano ponatur materiale planum commune.

Quæritur, an conus commune planum materiale tangens in latere moveri possit volutione recta? cùm enim omnes circuli in cono possibiles, materiale planum commune contingant, deberent singuli juxta Theorema 8, una volutione lineas suis circumferentijs æquales percurrere. Quod fieri non potest, cùm per Theor. præd. eandem omnes longitudinem absolvant.

Schematismus 18. *Fig.* 7.

Nihilominus demonstrabitur possibilis coni per materiale planum commune volutio recta, eodem ferè discursu, quo usi sumus Theor. 9. unus conum circa axem rotet, alter trahat latione rectâ, sic ut nunquam desinat tangere, & circuli D, B, D per suas ferantur rectas parallelas DG, BH, DG. Tum verò sic per planum conus movebitur, atque si volveretur. Quòd si velocitas tractionis par sit velocitati, qua circa axem FP rotatur, exempli grat. circulus B, is decurret una volutione rectam suæ æqualem circumferentiæ. Infiniti autem reliqui rectas huic æquales absolvent.

THEOREMA XII.

Unde fiat quod conus difficulter, ac violentè volutione recta per materiale planum commune moveatur.

Schematismus 18. *Fig.* 7.

RAtionem sic aperio. Assumatur quivis in cono circulus B. Hic si volveretur solus per lineam BH, eadem se velocitate circa centrum, sive axem FP circumageret, qua progreditur versùs H: hunc enim modum esse facillimum, quo versùs H promoveri circulus potest, ex demonstratis Theoremate 8 manifestum est. Nunc verò quoniam B circulus circumagi nequit, quia ex hypothesi reliqui omnes pariter circumaguntur; si B circuli circumactio sit æquè velox, atque motus rectus, quo ejus centrum defertur, circumactio reliquorum omnium erit velocior tardiòrve, motu recto, quo defertur centrum circuli B; & ea quidem proportione velocior aut tardior, qua reliquorum circulorum peripheriæ, ipsius B peripheriam excedunt, vel ab eadem exceduntur, ut patet ex 2. axiomate. Omnes igitur circuli, (hoc est tota coni superficies,) præter unum B, ut minutas communis plani inæqualitates impingent, ut in discursu demonstrationis, 8. Theorematis demonstravimus. Data igitur est causa unde fiat &c.

Corollarium.

Schematismus 18. *Fig.* 3.

Hactenus dicta de cono facilè erit Cylindris circa eundem axem positis, & diversam habentibus latitudinem, suo modo applicare.

THEOREMA XIII.

Unde fiat, quod circa verticem conus in orbem facillimè & sua sponte per commune planum volvatur.

Fig. 7.

CAusa hæc est. Cùm per principium Theoremate 8. assumptum natura semper agat modo facillimo, impetus cono ab impellente impressus, eum deferet ea ratione, qua quàm facillimè communis plani asperitatem superet. Atqui in demonstratione Theorematis 8. ostensum est, tum à circulo facillimè superari plani communis asperitatem, cùm circulus

eadem

eadem celeritate circumagitur, qua centrum progreditur motu ad planum parallelo. Igitur & conus, qui est quasi quædam infinitorum circulorum decrescentium congeries, tum facillimè asperitatem planorum communium superabit, cùm omnes in eo dabiles circuli eadem celeritate pariter circumagentur, qua omnium centra motu ad planum parallelo deferuntur. Eo igitur & solo motionis genere impressus impetus ciebit conum, quâ fiet, ut circulares motus omnium parallelis centrorum motibus velocitate æquentur. Hanc autem & solam esse volutionem orbicularem sic demonstro;

Schematismus 18. Fig. 7.

Manente vertice F, volvatur in orbem conus, sic ut latus, FO, quod prius erat in sublimi, jam in plano existat in FVS. Unus autem circulorum coni, exem. gra. B; ponatur æquali celeritate circumagi, qua centrum ipsius fertur motu ad planum parallelo. Igitur per Theor. 2. arcus B4Q parti circumferentiæ BS, æqualis erit. Atqui arcus B4Q est ad arcum DIO, ut tota peripheria B ad peripheriam totam D; hoc est ut diameter BB ad diametrum DD; hoc est ut FB ad FD; & similiter arcus BS est ad arcum DV, ut FB ad FD. Ergo arcus B4Q est ad arcum DIO, ut arcus BS est ad arcum DV. Quare cùm arcus B4Q, BS æquales sint, etiam DIO, DV æquales erunt. Ergo centrum circuli D parallelo motu percurrit lineam, arcui DV æqualem eo tempore, quo circumferentiæ pars DIO fuit circumacta. Ergo per Corollar. Theor. 2. motus, parallelus quo circuli D centrum progreditur, & circularis ejusdem D circuli motus, quo circa centrum vertitur, æquè veloces sunt. Idipsum de reliquis omnibus pari discursu demonstrabitur. Quare, si in orbem conus volvatur, omnes possibilium in cono circulorum motus circulares, parallelis centrorum motibus velocitate æquantur. Quod verò id sola orbiculari circa verticem volutione obtineri possit, ex jam demonstratis facilè colligitur.

Data igitur causa est, cur conus à motore impulsus, dum sibi relinquitur, semper fixo vèrtice in orbem volvatur; pateteque unà unde fiat, quod singulis ejusmodi orbicularibus volutionibus, singulorum in cono circulorum circumferentiæ percurrant in plano communi arcus sibi æquales, totaque coni superficies sibi in plano sectorem emetiatur æqualem.

Sphæra per commune planum materiale voluta naturaliter, percurrit lineam maximi circuli circumferentiæ æqualem, ut ostensum Theor. 8. At longè aliter res eveniet, cùm per materiale planum perfectum volvetur, pro cujus rei disquisitione, sequentia quinque Theoremata, subjungemus. In quibus siquid occurrat in quo eruditus lector à nobis dissentiat, is intelligat non eâdem illa certitudine a me proponi, quâ præcedentia, neque semper me demonstrationes sed cogitationes etiam Physico-Mathematicas, magnorum exemplo virorum conscribere voluisse.

Nota: *in sequentibus, per planum materiale perfectum me intelligere partem superficiei sphæricæ perfectâ, habentis idem centrum cum centro terræ.*

Tacquet de Circul. Volut.

THEOREMA XIV.

Si sphæra à materiali plano perfecto sustentata, secundùm lineam plano parallelam impellatur, solo motu lationis absque ulla circa centrum rotatione defertur.

Impellat motor secundùm FO rectam, plano XM parallelam, sive ea transeat per centrum A, sive non. Quoniam sphæra à plano omninò sustentatur, & impulsus secundùm parallelam FO factus perfectam illam sustentationem prorsus illibatam relinquit, patet sphæram tali impulsui nullo modo resistere: sed neque planum resistit impulsui, cum ex hypothesi, & planum ipsum omni inæqualitate careat, & impulsio, utpote parallela, plano non opponatur. Igitur punctum O, in quod impulsio primariò dirigitur, secundùm ipsam impulsionis parallelam defertur. Ex quo liquet propositum. *Fig. 10.*

THEOREMA XV.

Si circulus sive sphæra à materiali plano perfecto in B sustentata, obliquè deorsum impellatur secundùm rectam aliquam DOE occurrentem plano in E, volvetur sphæra: & spatium una volutione confectum ad sphæræ circumferentiam eam habebit rationem, quam linea BE ad arcum BO.

Prob. I. Pars: quoniam impulsio deorsum fit secundùm rectam DOE: impetus eò fertur ut punctum O dirigat in E. Sed ob plani soliditatem nequit, O punctum dirigi ac descendere versùs E, nisi sphæra circumagatur circa centrum A, atque unà progrediatur versùs M; neque circumactionem sphæræ circa centrum, aut ejus lationem versùs M, quidquam impedit, cùm & planum careat omni asperitate, & gravitatio sphæræ per sustentationem plani perfectam elidatur. Impetus igitur ab impellente impressus, ut dirigat punctum O in E, sphæram circa centrum A circumagendo promovet versùs MH, hoc est sphæra volvitur. Quod erat primum. *Schematismus 18. Fig. 10.*

Prob. II. Pars. Ducantur per O, recta FOK parallela plano XM. Quoniam igitur circulus (ut jam ostendi) volvitur, secabunt se mutuò circumferentiâ & FK parallela. In punctis alijs, atque alijs, eruntque semper arcus à parallela, ad contactum intercepti (exemp. grat. LR) æquales arcui BO. Et quoniam eadem semper, quæ à principio fuit, perseverat impetus directio; toto volutionis tempore semper impetus impellet circulum secundùm rectas exem. gra. PLS, primæ DOE parallelas, transeuntes per puncta, in quibus parallelas FK & peripheria se intersecant, & abscindentes in plano usque ad contactum rectas, exemp. gr. SR, pares priori EB. Impetus igitur toto volutionis tempore, omnia successivè puncta circumferentiæ, ubi attigerint parallelam FK, hoc est, cum distant à contactu, qui tum est, arcu æquali ipsi OB, dirigit in alia atque alia plani puncta (ex. gr. in S) distantia semper ab contactu, qui tum est, intervallo æquali ipsi EB. Ejusmodi autem perpetua & nunquam interrupta directio postulat, ut punctum O, deferatur in E, & L in S; & sic de omnibus. *Fig. 10.*

Quamvis

Quamvis enim punctum O, tantum instantaneè dirigatur immediatè ab impetu in punctum E; mediatè tamen dirigitur continenter. Sumatur enim quodvis instans volutionis, istud exem. gr. cum circulus ex B pervenit in R, secans jam FK parallelam secundùm aliud circumferentiæ suæ punctum L. Jam igitur impetus, ut ostensum suprà, agit secundùm rectam PLS, priori DOE parallelam; ideoque punctum L, dirigit in S; ac proinde, cùm aliter nequeat punctum L deferre in S; & tali volutioni, nec gravitas sphæræ à plano sustentatæ, nec ipsius plani inæqualitas ulla officiat, sic intendit volvere circulum, ut arcus RL circumactus, qui ipsi BO æqualis est, percurrat RS æqualem ipsi BE. Atque ita toto volutionis tempore eò tendit impetus, ut arcus ipsi BO æquales, percurrant spatia ipsi BE æqualia. Quod, quia fieri nequit, nisi etiam arcus ipse BO percurrat rectam BE (semper enim in volutione uniformi ut unus arcus ad spatium à se percursum, ita est alter arcus ad spatium à se percursum) manifestum est punctum O, etiam postquam descendit infrà parallelam FK, mediantibus aliis, atque aliis peripheriæ punctis in parallelam descendentibus, continenter ab impetu dirigi in E. Quare cùm nihil sit, quod delationem puncti O in E, impediat; non plani soliditas, huic enim occurrit circuli circa centrum conversio; non plani asperitas, est enim perfectum ex hyp. non circuli aut sphæræ gravitas, perfectè enim à plano sustentatur; impetus punctum O deferet in E, ac proinde arcus BO circumactus percurret rectam BE. Sed ut arcus BO ad rectam à se semel circumacto percursam, ita tota circumferentia est ad rectam à se semel circumacta percursam. Ergo circumferentia semel circumacta, est ad rectam, quam percurrit, ut arcus BO ad rectam BE. Quod erat propositum.

Corollarium.

Sphæræ igitur ac circulo tam naturale est, per materiale planum perfectum, à quo sustentatur, volvendo ferri, quàm non volvendo; &, si volvitur, lineam una volutione percurrere sua circumferentia majorem minorémve, quàm æqualem.

Pendet quippe horum omnium determinatio ex impulsus directione: ut in Theoremate ostensum est.

THEOREMA XVI.

Circulus plano materiali perfecto ipsum sustentanti insistens in puncto B, certa directione impulsus, una volutione naturaliter percurret spatium quantumcumque majus sua circumferentia.

Schematismus 18. Fig. 8.

Sumatur in circumferentia punctum quodvis C, per quod ponatur OP parallela plano BE. Ducatur per idem punctum alia recta NCE, occurrens plano in E. Potest EB in quacumque proportione esse major arcu BC. Quod si impellatur circulus secundùm rectam NCE, erit per *Theor. 15.* ut BE est ad arcum BC, ita spatium à circulo semel circumacto confectum, ad circuli circumferentiam. Ergo & spatium, à circulo semel circumacto confectum, potest esse in quacunque proportione majus circumferentia. Quod erat propositum.

THEOREMA XVII.

Et sic impelli sphæra poterit, ut una volutione absolvat in plano minus spatium sua circumferentia. Nunquam tamen impulsu recto ita impelles, ut spatium percurrat duplo, vel ampliùs, circumferentia minus.

Schematismus 18. Fig. 8.

Impellatur circulus secundùm quamvis rectam occurrentem circulo in N & C, plano autem in E. Tangat deinde circulum in C recta IC; & occurret plano in D. Tangentes BD, CD æquales, & simul sumptæ semper majores erunt arcu BC, quamvis excessus fiat dato minor, si contactus semper propiùs ad se invicem accedant. Ergo & BD semper est major semisse arcus BC. Ergo BE semper etiam erit major arcus BC semisse. Sed per *Theor. 15.* ut BE ad arcum BC, sic spatium confectum à circulo semel circumacto ad circumferentiam. Ergo etiam spatium à circulo semel circumacto confectum semper erit majus semisse circumferentiæ.

THEOREMA XVIII.

Sit sphæra à plano materiali perfecto sustentata in B: candem tangat superius aliud planum DZ non materiale, sed geometricum.

Schematismus 18. Fig. 10.

Si sphæra obliquè sursum impellatur secundùm rectam aliquam EGD occurrentem superiori plano in D, sed ea vi, quæ non sufficiat ut sphæram attollat; sic volvetur sphæra, ut circumactio fiat ex C in O, & latio ex B versùs X, D. Spatium verò una volutione percursum, erit ad circumferentiam, ut recta CD ad arcum CG.

Probatur *Pars I.* Quoniam impulsio fit sursum secundùm rectam EGD, impetus a motore impressus, punctum G dirigit in punctum D. Sed, quoniam impetus, ex hypothesi, nequit sphæram attollere, non potest punctum G dirigere in D, nisi sphæra circumagatur ex C in O, & simul progrediatur versùs X, D. Quare, cùm neque dictam sphæræ circa centrum conversionem, ex C versùs O, neque delationem sphæræ versùs D, X, quidquam impediat, (ex hypothesi enim & planum, cui insistit sphæta, est perfectum, & gravitatio sphæræ per sustentationem plani omninò elliditur.) Impetus ut dirigat G, in D, circumagendo sphæram ex C in O, eam promovet versùs X, D. Quod erat primum.

Pars II. Simili discursu declarabitur, quo probavimus partem 2 Theorematis 15. Jam enim lubet hic manum tollere de tabula. Quare & Theoremata 16. 17. impulsioni rursum directæ lectori applicanda relinquo.

Ipsas deinceps curvas lineas à singulis veluti circuli punctis descriptas, spatiaq; ijs comprehensa, aliaq; nonnulla volutionum symptomata expendimus.

THEOREMA XIX.

Schematismus 18. Fig. 6.

Dum circulus per planum volvitur, punctum contactus curvam lineam describit, quam cycloidem dicimus. Reliqua circumferentiæ puncta huic æquales ac similes cycloides, sed diverso partium ordine, describunt.

COnsideretur circulus in primo situ, 2. 3. 4. 5. & volvi incipiat. Quando circulus pervenerit in E, jam punctum contactus 2 est in O: cum verò volutio pervenerit usque in K, 2 erit in L. Atque ita tandem 2 per T descendet in P. Liquet igitur punctum contactus Z describere curvam lineam cycloidem.

Deinde punctum 5 in Z, in prima nimirùm circuli positione, eundem habet situm, quem punctum contactus 2, positum in O. Ergo qualem punctum 2 positum in O, interim dùm circulus volvitur ex E in P, describit lineam, nempè OLTP, talem describet punctum 5, dum circulus ex A volvitur in Q, lineam nimirùm ZFNQ. Tunc autem punctum 5, erit in Q. Sed 5 in Q eodem se habet modo, sicut 2 in A. Ergo 5 positum in Q, dum circulus pergit volvi ex Q in P, talem describit curvam QX lineam, qualem punctum 2, dum fit volutio circuli ex A in E, lineam nempè AO. Sed OLTP cum AO conficiunt totam cycloidem AOLTP. Ergo etiam ZFNQ, cum QX æqualem ac similem ipsi AOLTP cycloidem conficient. Eodem discursu idem de reliquis punctis circumferentiæ probabitur.

Licebit autem singulorum punctorum vias in apposita figura designare. 5 fertur ex Z per F, N, in Q, & ex Q in X. 4 ex D fertur per G in K, tum ex K per R in α. 3 fertur ex C in E, tum ex E per M & S, in β.

Cæterùm, cùm linea, quæ à circulo una volutione percurritur & cycloidis ipsius basis est, possit esse non solum æqualis circumferentiæ, sed etiam quantumcumque eadem major & minor; inde nimirùm fit, ut infinitæ cycloidum species existant. Primaria non incommodè ea dicetur, quæ basim genitoris circuli circumferentiæ æqualem habet, reliquæ secundariæ.

Spatij cycloidalis primarij dimensionem tradit Torricellius in appendice post quadraturam parabolæ. Deinde asserit demonstratione prætermissâ, reliquorum cycloidalium spatiorum, quorum bases vel majores sunt vel minores sui genitoris circuli peripheria, eam esse rationem ad suos genitores circulos, quam habet dupla baseos cum peripheria sui genitoris circuli, ad eandem peripheriam. Nos utrumque una demonstratione infrà complectemur. Idem deinde auctor strictim atque aliò quasi properans, modum insinuat tangentes ducendi ad datum cujuslibet cycloidis punctum. Verùm subobscurè & sine demonstratione.

Uberiùs hoc problema absolvit Cartesius; cujus constructionem ac demonstrationem doctissimis suis in ejusdem Cartesij Geometriam commentarijs Franciscus à Schooten inseruit, Pag. 223. Et sequentibus.

Nunc, quod paulo ante promisimus exequamur; & Nobilissimi Theorematis novam atque universalem demonstrationem à nobis excogitatam subjungamus.

Schematismus 17. Fig. 127.

Lemmata.

1. Si æquales circulos EGϑ, BVS tangat recta EB, & eosdem secet GK, æquales auferens arcus EG, BK; erit secans GK tangenti EB parallela.

Tacquet de Circul. Volut.

Demonstrabitur ex 27. & 32. l. 3. & ex 28. l. 1.

2. Si æquales circulos tangat CB, atque huic parallela sit IK inter circulorum peripherias interjecta IK tangenti CB æqualis erit.

Demonstratur ex 27. l. 3. & ex 28. 34. l. 1.

3. In progressione Arithmetica numerorum imparium, secundùm seriem naturalem incipiendo ab unitate 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. Extremi sive æqualiter distantes, conficiunt bis numerum terminorum, 1. & 11. faciunt 12. hoc est bis 6. qui est numerus terminorum. Similiter 3. & 9. faciunt 12. Et sic deinceps. Ratio est quia in aggregato quolibet tot sunt binarij, quot termini progressionis.

THEOREMA XX.

Fig. 127.

Data sit quæcumque cyclois dimidia FTS, ejusque basis dimidia FB; altitudo autem sit BS, circa quam ponatur genitoris circuli semissis BOVS.

Dico spatium mixtilineum cycloide primaria STF, basi FB, & circumferentia BOVS comprehensum, duplum esse semicirculi genitoris BVSA.

In reliquis autem cycloidibus eam habet rationem mixtilineum dictum ad genitorem semicirculum, quam duplum baseos FB ad semiperipheriam BOVS.

INscribantur semicirculi circumferentiæ quotcumque numero pari (exem. grat. quatuor) æqualia latera BK, KO, OR, RS; inque totidem æquales BC, CD, DE, EF seca FB.

Describantur deinde semicirculi æquales genitori BVS, qui tangant basim in punctis C, D, E, & cycloidem secent in punctis P, M, G.

Per genesim cycloidis EF, percursa ab arcu EG, est ad arcum EG, ut FB percursa à semiperipheria, EGϑ sive BVS est ad semiperipheriam EGϑ, sive BVS. Ergo permutando EF est ad FB, ut arcus EG est ad semiperipheriam BGϑ, seu BVS. Sed per constructionem, etiam EF est ad FB, ut arcus BK est ad semiperipheriam BVS. Arcus igitur EG, BK æquales sunt. Pari modo ostendam arcus DM, BO, item arcus CP, BR æquales esse. Ergo si ducantur rectæ GKL, MO, PRQ, erunt ad FB tangentem a parallelæ; ac proinde singulæ interceptæ KI, IH, HG, & ON, NM, & RP, æquales a erunt tangentibus BC, CD, DE, sive earum uni BC.

a Lem. 1. a Lem. 2.

Inscribantur deinde cycloidi latera FG, GM, MP, PS: & ducantur rectæ FG, DH, CI; EH, DI, CK: item HM, IN, HN, IO: item rectæ NP, NR.

His peractis constructum erit rectilineum, FGMXPSRZOKB, lateribus circulo ac cycloidi inscriptis, & basi FB comprehensum, atque divisum in quatuor triangulorum series; in tot nempè, quot sunt latera peripheria BVS inscripta. Suprema in serie unum tantùm est triangulum PSR: in secunda MPRO, sunt tria: in tertia GMOK quinque: in quarta & infima FHKB, septem; sic ut progressio constituatur numerorum imparium 1. 3. 5. 7. Et quidem triangula serierum æqualiter à parallela media AOM distantium conficiunt bis numerum laterum peripheriæ BVS inscriptorum. In summa enim &

im-

ima sunt 8 triangula, & in duabus reliquis PROM, GMOK etiam 8. Atque hæc semper evenient, quotcumque lateribus cycloidi ac circulo inscriptis rectilineum fuerit comprehensum: cùm enim semper triangularum series procedant secundùm numeros impares 1.3.5.7. &c. per lemma 3 semper triangula serierum æqualiter à media distantium, conficient bis numerum serierum, hoc est bis uumerum laterum peripheriæ BVS inscriptorum, sive bis numerum partium, in quas secta fuit basis FC.

Jam verò bases horum omnium triangulorum, in quæ resolvitur rectilineum, sunt lineæ BC, CD, EF; KI, IH, HG; ON, NM, RP; quas eidem omnes BC æquales esse suprà ostendimus. Communis autem altitudo 8 triangulorum seriei summæ PSR ac infimæ FGKB est BL; æquantur enim SQ, BL. Triangulorum verò 8 serierum mediarum, altitudo communis est LA, rursum enim QA, LA æquales sunt. Quoniam igitur omnium triangulorum bases rectæ BC æquantur, erunt 8 triangula seriei summæ ac infimæ æqualia triangulo habenti basim rectæ BC octuplam, altitudinem verò BL, 8 autem triangula serierum PROM, GMOK æqualia erunt triangulo habenti basim octuplam rectæ BC, altitudinem verò LA. Ergo simul omnia, hoc est totum rectilineum, æquantur triangulo basim habenti octuplam rectæ BC, altitudinem verò radium BA; hoc est triangulo habenti basim duplam ipsius FB, altitudinem verò parem radio BA. Sed tale triangulum, si cyclois data sit primaria, basim nimirùm BF æqualem habens semiperipheriæ BVS, duplum [a] est semicirculi BVSA; aut certè si data cyclois primaria non sit, basim nempè habens peripheriâ BVS majorem vel minorem, tale triangulum erit ad semicirculum, ut [b] dupla FB est ad peripheriam BVS. Ergo rectilineum in cycloide primariâ, duplum est semicirculi BVSA; in reliquis verò cycloidibus; ad semicirculum eam habet rationem, quam dupla BF ad peripheriam BVS. Atque hoc ipsum de alijs omnibus ejusmodi rectilineis, quantumcumque multis lateribus circulo ac cycloidi inscriptis modò ea binarius metiatur, fuerint comprehensa, eôdem prorsus discursu demonstrabimus. Quæ sanè mirifica & singularis cycloidium proprietas est.

a Ex Archim. p. 1. dim circ.
b 2. l. 1. Cylindricorum & Annularium.

Quare cùm latera circulo ac cycloïdi inscripta tandem in BVS peripheriam, & cycloidem FTS evanescant; ac proinde rectilineum tandem transeat in mixtilineum; ipsum quoque mixtilineum in cycloide primariâ semicirculi duplum erit: in reliquis autem, ad semicirculum eam habebit rationem, quam dupla BF ad semiperipheriam BVS. Quod erat demonstrandum.

Omitto deductionem ad impossibile, quæ cuivis vel mediocri Geometræ in promptu erit.

Manifestum.

Spatium igitur cycloidale primarium genitoris circuli triplum est, Cycloidalia verò spatia secundaria ad suos genitores circulos eam habent rationem, quam dupla baseos cum peripheria genitoris circuli ad eandem peripheriam.

Scholium.

Schematismus 18. Fig. 127.

A Primâ editione hujus dissertationis fuit nonnemo, qui clausulam hujus demonstrationis erroris argueret, diceretq; me in eundem paralogismum incidisse, quem in scholio primi theorematis in Galilæo damnaveram. At longè aliter se res habet. Cùm enim dixi latera circulo ac cycloidi inscripta, tandem in peripheriam BVS & cycloidem FTS evanescere, ac proinde rectilineum tandem transire in mixtilineum, non aliud insinuavi, quam spatia FG, GM, MP, PS, item BK, KO, OR, RS, fieri tandem dato spatio minora: hincq; adeo, demonstratione priore suppositâ, in promptu esse deductionem ad impossibile, quam lectoribus Geometris brevitatis studio reliqueram. Nihilominus, ut omnibus satisfiat, hanc ipsam deductionem ad impossibile hic subjicio hunc in modum.

Si negas mixtilineum FTSVB esse ad semicirculum BVSA, ut dupla FB ad semiperipheriam BVS, erit vel in majori ratione, vel in minori. Sit primò in majori. Ergo alia quapiam quantitas ω minor quàm mixtilineum, exempli gr. defectu δ, erit ad semicirculum BVSA, ut dupla FB ad peripheriam BVS. Inscribantur semicirculo tot æqualia latera, ac totidem ijs respondentia cycloidi juxta constructionis modum in demonstratione usurpatum, ut spatia FG, GM, MP, PS, fiant minora quam δ, quod fieri posse infrà ostendam. Erit ergo spatium peripheria BVS, basi FB, ac lateribus SP, PM, MG GF contentum majus quàm ω. Vnde rectilineum lateribus SR, RO, OK, KB, basi FB, & lateribus SP, PM, MG, GF contentum, multò majus erit quam ω. Sed ω ad semicirculum BVSA volebas esse, ut dupla FB est ad peripheriam BVS. Ergo rectilineum ad semicirculum est in majori, quàm dupla BF ad BVS: quod supra demonstratis repugnat.

Sit jam, si fieri potest mixtilineum FTSVB ad semicirculum BVSA in minori, quam dupla BF ad BVS. Ergo inversim semicirculus est ad mixtilineum in majori, quam BVS ad duplum FB. Igitur semicirculus ad quantitatem aliquam λ majorem quam mixtilineum, exem. gr. excessu ζ, erit ut BVS ad duplam FB. Inscribantur semicirculo tot æqualia latera, ut spatia BK, KO, OR, RS fiant minora quàm ζ (quod factum ab Euclide 2. 12.) & perficiatur rectilineum ut supra. Erit spatium lateribus SR, RO, OK, KB, basi BF, ac cycloide FTS contentum minus, quàm λ. Quoniam igitur semicirculum volebas esse ad λ, ut BVS ad duplam FB, erit semicirculus ad spatium lateribus SR, RO, OK, KB basi FB, & cycloide contentum in majori, quam BVS ad duplam FB. Ergo semicirculus ad rectilineum lateribus SR, RO, OK, KB, basi FB, ac lateribus GF, FM, MP, PS contentum est in multo majori quam BVS ad duplam BF. Quod iterum repugnat ijs quæ supra demonstravimus.

Quod autem segmenta FG, GM, MT, PX, PS, fiant tandem dato spatio minora, sic ostendo. Dividatur FB in tot partes æquales, donec rectangulum CBS fiat dato spatio minus, & totidem lateribus tum circulo tum cycloidi inscriptis, rectilineum, ut supra, perficiatur: ducaturq; Cδ diameter semicirculi CNδ, secans BVS in α, & β; & junge Sδ. Si ab æqualibus semicirculis SOB, δNC aufers commune αβO, & residuis addas mixta spatia Saδ, BβC, erit spatium SδNCBOVS æquale rectangulo CBNδ, ac proinde etiam dato minus. Deinde segmentulum πS minus est segmento SR, hoc est segmento PN. Ex quo patet totum spatium SδNCBVS rectis Sδ, BC, & peripherijs BVS, CNδ comprehensum, majus esse segmento cycloidico PπSP. Quare cùm ostensum sit spatium SδNCBVS esse dato minus, etiam PπSP dato minus erit. Simili discursu ostendam singula segmenta reliqua PM, MG, GF fieri tandem dato minora. Manifestum est igitur omnia simul sumpta fore tandem dato minora.

Lem-

Lemma.

Ad sequens Theorema.

Fig. 9.

Circulum BLHD interius tangat circulus BFAQ, transiens per majoris centrum A. Sic ex centro A ducatur recta AQR; hæc abscindet arcus BQ, BR æquales.

Ex minoris centro Z ducatur ZQ, cui parallela sit Aa. Patet arcus aB, QB fore similes; cùm æquales a angulos centri BAa, BZQ subtendant. Quare cùm b totæ peripheræ BLHD, BFAQ sint in ratione duplâ, etiam arcus Ba ipsius QB duplus erit. Deinde quoniam c angulus centri BZQ sit duplus anguli BAQ, etiam BAa par ipsi BZQ, anguli BAQ, sive BAR duplus erit. Ergo d arcus aB duplus quoque est arcus BR. Arcus igitur QB, BR æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

a 29.1. b Pappus l.5.p.41. c 20.3. d 33.6.

Idem demonstrabitur ductâ tangente AD, & rectâ OQ. Et rursum aliter, si ducatur ex puncto H, parallela ad AC.

Sed & nullâ lineâ ductâ ex ipsis in lemmate datis. Quoniam angulus ad centrum duplus est ejus, qui ad circumferentiam eidem aut simili arcui insistens: idem angulus BAC ad circumferentiam circuli minoris BFAC & ad centrum majoris BLHD abscindet arcum BR, similem dimidio ipsius BQ. Sed quilibet arcus circuli majoris BLHD est alterius in circulo minori similis duplus, sunt enim similes, ut circumferentiæ. Ergo arcus BR dimidij ipsius BQ duplus est. Igitur toti BQ æqualis.

THEOREMA XXI.

Schematismus 18. Fig. 9.

Datus esto circulus BLHD, quem interiùs tangat circulus minor BFAC transiens per majoris centrum A.

Eo tempore, quo circulus minor semel volvitur versùs D, per circumferentiam cavam majoris, singula minoris circumferentiæ puncta describunt diametros, quæ per ipsa transeunt.

Punctum contactus B percurrit diametrum BH.

Punctum quod in A centro est, percurrit radium AD bis, eundo ex A in D, & ex D redeundo in A.

Punctum F, (& eodem modo puncta reliqua semiperipheriæ BFA) primum ascendit per diametri partem FG: deinde descendendo redit ad spatium GX ipsi FS æquale.

Punctum Q (& eodem modo quodlibet aliud in semicircumferentia BQA) primùm descendit per diametri partem QR. Tum ascendendo regreditur per diametrum usque in V, relinquens partem VK æqualem QR.

Centrum Z describit peripheriam, cujus radius AZ.

SUme in peripheria minoris punctum quodvis C, & ex A centro per C, sive Q rectam duc occurrentem peripheriæ majori in R. Per lemma jam demonstratum, erunt arcus OQ, OR æquales. Quare si circulus AQBF volvatur ex O in R; punctum C descendens ex Q incidet in R; circulus verò AQBF tum secabit, AB in P: eruntque rursum per lemma, arcus RP, RO æquales; Necesse igitur est ut punctum B, quod priùs erat in O, jam sit in P, quando volutio ex O pervenit in R. Pari modo ostendam, quacumque volutionis parte in quadrante BD peractâ, semper punctum B esse in aliquo puncto radij OA.

Jam verò eodem tempore, quo punctum B ex O veniens percurrit semidiametrum OA, punctum quod est in centro A, percurrit radium AD, quod sic ostendo. Quoniam HO diameter dupla est radij AO, etiam circumferentia HDBL dupla est circumferentiæ ACBF. Ergo BD quadrans majoris æquatur dimidiæ minoris circumferentiæ ACO. Atqui per lemma arcus OQ, OR sunt æquales. Ergo & reliqui QA, RD æquantur. Sed per lemma RD, est æqualis RN. Ergo QA, RN æquantur. Est autem per lemma & arcus OQ æqualis arcui OR, hoc est per lemma arcui RP. Ergo si æqualibus QA, RN addas æquales OQ, RP, erunt toti OQA, PRN æquales. Dum igitur volutio pervenit usque in R, punctumque B ex O venit in P; punctum, quod in A centro erat, ex A motum est in punctum N, quod existit in radio AD. Eodem modo ostendam punctum illud semper manere in radio AD; & quando B attinget centrum A, alterum futurum in D.

Porrò uti jam ostensum est, dum circulus volvitur per quadrantem OD, punctum, quod in centro est, percurrere radium AD; eodem modo puncto B posito in A, & eo, quod in A fuit posito in D, ostendetur punctum B percurrere radium AH, interim dum circulus volvitur per quadrantem DH; punctum verò quod in centro fuerat, remetiri semidiametrum ex D in A. Atque ita unâ volutione peractâ, percurret contactus punctum B totum diametrum OAH; punctum verò, quod est in centro, semidiametrum AD bis.

Ex his jam facilè reliquæ assertionis partes demonstrabuntur.

Theorema intellige de ea tantùm minoris circuli per cavam majoris peripheriam volutione, qua spatium percurritur circumferentia minoris æquale. Potest enim, quemadmodum in plano suprà demonstravimus, ita & hic minor circulus sic per majorem volvi, ut una volutione spatium suâ circumferentiâ jam majus, jam minus percurrat.

THEOREMA XXII.

Quamvis omnium corporum regularissima sit sphæra; tamen, quando ipsa per planum uniformi celeritate volvitur, singulæ eius partes necessariò difformi celeritate moventur.

Schematismus 18. Fig. 6.

SIt maximus sphæræ circulus in 4. sectus quadrantes in punctis 2.3.4.5, longitudo autem, quam una volutione sphæra percurrit, sit AP, ejus circumferentiæ æqualis. Hæc si dividatur in quatuor æquales partes in punctis E, K, Q, singulæ ejus partes singulis circumferentiæ quadrantibus æquales erunt. Quoniam igitur quadrans AC par est rectæ AE; quo tempore volvitur sphæra ex A in E, eodem 3 ex C fertur in E, & 2. ex A in O; ac proinde A percurrit cur-

curvam lineam AO. Rursum quia EK æqualis est quadranti EG, quo tempore sphæra volvitur ex E in K, eodem 4 ex G, fertur in K, ac proinde 2. diametraliter ipsi 4 oppositum, ex O fertur in L, percurrendo curvam lineam OL. Sed sphæra ex hypothesi uniformiter, hoc est per definitionem primam temporibus æqualibus volvitur, per æqualia spatia, AE, EK. Ergo etiam punctum 2. æqualibus temporibus percurrit lineas curvas AO, & OL. Sed OL multò & major quàm AO. Ergo juxta defin. 2. punctum 2 difformi celeritate motum est ex A in L.

Verùm altiùs hujus phænomeni causa indaganda est. Dum sphæra volvitur per planum, contactus punctum 2 sive A, fertur per cycloidem ALP motu quodam mixto, qui nimirùm ex duobus componitur motibus, quorum unus rectus est tendens ex A in P alter circularis per peripheriam AZDC ex A versùs Z. Itaque dum sphæra volvitur ex A in P secum devehens punctum A, illud interim percurrit circumferentiam AZDC, qui motus priorem inæqualiter afficit.

Per semicirculum enim AZD ascendendo, primum quidem adversatur aliquousque, sed minùs semper ac minùs: per reliquam deinde ejusdem semicirculi partem continuè favet magis magisque. Per semicirculum verò DCA descendendo, fiunt eadem; sed inversè.

Schematismus 18. *Fig.* 14. Motus enim per semicircumferentiam AZD. ascendens, fit sursum secundùm infinitas inclinationum differentias, quas habent infinitæ tangentes, quæ ad singula semicircumferentiæ puncta duci possunt: quæ quò in altiori puncto tangunt, eò motus per ipsas sursum factus, vel minùs opponitur motui recto ex A versùs F, vel magis eidem favet. In fine quadrantis AZ fertur secundùm tangentem ZB, quæ si producatur, ad EF recta erit. In fine autem quadrantis secundi fertur secundùm tangentem DH; quæ cùm ad EF, sit parallela, liquet in D motum circularem prorsus favere motui recto ex A in F. In reliquis quadrantibus eadem, sed ordine inverso contingent. Motus enim per DCA descendens, deorsum fertur secundùm inclinationes infinitarum tangentium: quæ quò in punctis demissioribus tangunt, eò motus per ipsas deorsum factus, motui recto ex A versùs F, vel minus favet, vel magis adversatur.

Schematismus 18. *Fig.* 6. Atque hinc perspicuum fit celeritatem puncti 2. per totam cycloidis semissem AOL perpetuò crescere, quòd motui recto ex A in K semper minùs ac minùs opponatur circularis motus, qui per semicirculum AZD eodem tempore peragitur: per alteram verò semissem LIP celeritatem perpetuò eadem proportione minui, quâ antè creverat, quòd motus circularis per semicirculum DCA motui recto ex A in P semper magis magisque opponatur.

Quæ autem de puncto contactus demonstravimus, eodem discursu de quibuslibet alijs datis in sphærâ punctis demonstrabimus.

Sed erit fortasse, qui quærat; in quo peripheriæ puncto, motus circularis favere recto incipiat & desinat adversari. Hujus quæstionis resolutio neque aliena erit à proposito, neque indigna, quæ institutam de volutione circuli dissertationem concludat. Sit igitur.

Lemma.

Schematismus 17. *Fig.* 123. Datum sit parallelogrammum FC. Si latus BF feratur motu æquabili per BC donec congruat lateri CE, sic ut in motu semper maneat ipsi CE parallelum: eodem autem tempore punctum B æquabili motu percurrat latus BE; Dico punctum B describere diametrum BE.

Est Aristotelis in quæstionibus mechanicis. Ego sic demonstro.

Ponatur latus BF pervenisse in AM secans diametrum in O: & per O. ducatur GN parallela ad BC. Quoniam ex hyp. motus sunt æquabiles, qualis est proportio velocitatum utriusque motus, talis erit & spatiorum, quæ æqualibus temporibus utroque motu absolvuntur. Ergo ut BC, totum nempè spatium, quod latus BF percurrit toto tempore, est ad BF, sive CE, spatium totum, quod eodem toto tempore percurrit punctum B, ita BA, quam latus BF percurrit parte temporis, est ad longitudinem, quam eadem temporis parte percurrit punctum B. Sed ea est BG, sive AO, est enim ut BC ad BF, id est CE sic BA ad AO. Ergo quando latus BF pervenit in MA, punctum B est in O, quod est punctum in diametro BE. Eodem modo ostendam quolibet alio ejusdem motus instanti punctum B fore in diametro. Liquet ergo propositum.

DEFINITIO.

Vnus motus alteri adversari dicitur, cùm motus ex utroque compositus minus spatium percurrit, quam eodem tempore alteruter percurreret solus: favere, cum majus.

THEOREMA XXIII.

Esto circulus EGDQ tangens planum in E, qui dum fertur versùs M, eodem tempore punctum E ascendat per circumferentiam EGD; ac dein descendat per DQ in E. Sint autem motus rectus, & circularis æquè celeres, & æquabiles. Deinde abscindantur utrimque à contactu sursum EG, EQ sextæ totius circumferentiæ partes. *Schematismus* 17. *Fig.* 124.

Dico: circularem motum, in punctis G & Q motui recto nec favere nec adversari.

Schematismus 17. *Fig.* 124. IN G tangat recta BS, sumptisque utcumque æqualibus BF, BC, comple rhombum FBCN. Ex A circuli centro duc AB, item ad contactus G, E; rectas AG, AE. Quoniam tangentes GB, EB, itemque AG, AE, æquales sunt, & AB communis, patet angulum GBE bisecari à rectâ BA. Quare BA producta transit per N, estque diameter rhombi. Quadrilateri autem GAEB quatuor anguli simul, 4 rectis æquales sunt. Quare a cùm duo AGB, AEB duo sint recti, etiam reliqui GAE, GBE duos conficient rectos. Sed GAE est 2 sextæ duorum rectorum, cùm arcus EG sit sexta pars circumferentiæ. Ergo GBE est 4 sextæ duorum rectorum. Ergo, quia BA bisecat GBE, singuli GBN. NBC sunt 2 sextæ duorum rectorum. Sed, quia NC, BF æquidistant CNB æquatur GBN. Ergo & CNB est duæ sextæ duorum rectorum. Quare cùm etiam ostenderim NBC esse 2 sextas, patet & reliquum BCN esse 2 sextas. Æquantur igitur CNB, BCN, ideoque & BN diameter rhombi BC lateri æqualis b erit.

a 18. Elem. 3. b 6. 1.

Jam verò quando punctum E ascendens per peripheriam pervenerit in G, fertur secundùm inclinationem tangentis BGF; & quidem ex hypothesi eadem

eadem celeritate, qua interim progreditur motu recto versùs M. Sed motus, qui fit secundùm inclinationem tangentis BGF, motui recto æquè veloci per tangentem BC nec favet nec adversatur: quod sic ostendo.

Quoniam motus quo punctum B ambulat per BF, & is quo defertur secundùm BC, sunt æquè veloces; quo tempore punctum B absolveret BF, eodem tempore delatio puncti B absolvet BC æqualem BF. Punctum autem B gemino *c* eo motu describit BN diametrum rhombi FC. Quare cùm BN ostensa superiùs sit æqualis esse BC, motus compositus ex motu lationis versùs M, & ex motu æquè celeri facto secundùm inclinationem tangentis BF, longitudinem absolvit BN æqualem ei (nempè ipsi BC) quæ percurritur motu solo lationis per BC. Itaque motus secundùm inclinationem tangentis BGF, motui versùs M æquè celeri nec *a* favet, nec adversatur.

c Lem.

a Defin.

Quare cùm punctum E per circumferentiam EGD ascendens, in fine arcus EG feratur secundùm tangentem BGF; liquet in G motum circularem nec favere motui recto ex E versùs C. Hinc jam idem quoque patet de puncto Q. Liquet ergo propositum.

THEOREMA XXIV.

Schematismus 17. Fig. 124. 125. 126.

Iisdem positis; Dico: circularem motum adversari motui recto ab E usque ad G, per sextam nempè partem circumferentiæ: favere deinde per quatuor circumferentiæ sextas GDQ: ac demùm rursus adversari per reliquam circumferentiæ sextam QE.

Fig. 125.

IN arcu EG sume quodvis punctum K, in quo circulum tangat BKS. Abscissis utrimque æqualibus BF, BC compleatur rhombus FNCB, & duc ex centro A rectam AB; ad contactus item K, E, rectas junge AK, AE. Jam ostensum in præcedenti est rectam AB bisecare angulum KBE, ac proinde transire per angulum rhombi N; item angulos KBE & KAE conficere duos rectos. Quoniam arcus EK est minor sextà parte circumferentiæ, erit angulus KAE minor sextà parte 4 rectorum, hoc est 2 sextis duorum rectorum. Ergo KBE major est 4 sextis duorum rectorum: ac proinde singuli NBK, NBC majores 2 sextis duorum rectorum. Sed, ob NC, BF parallelas, BNC par est NBK. Ergo etiam BNC major est duabus sextis 2 rectorum. Quare cùm etiam NBC sit major duabus sextis, reliquus BCN duabus sextis minor erit; ac proinde minor quàm BNC. Ergo BC major est quàm BN rhombi diameter.

Jam autem ubi punctum E circulariter ascendens pervenerit in K, fertur secundùm inclinationem tangentis BKF, & quia interim eâdem celeritate tendit versùs M; quo tempore motus per BKF absolveret rectam BF, eodem motu per BM æquè velox percurret BC parem ipsi BF. Motus autem ex utroque compositi *a* semita est BN, quam jam ostendi minorem esse rectâ BC, quæ motu recto solo fuisset percursa. Igitur motus secundùm inclinationem tangentis BKF, hoc est motus ipse circularis in puncto K adversatur *b* motui versùs M: ac proinde circularis motus per totum arcum EG delationi versùs M adversatur. Quod erat primum. Ex quo id ipsum quoque patet de arcu QE.

a Lemma.
b Defin. ante theor. 23.

Fig. 126.

Sumatur deinde ultra sextam circumferentiæ partem EG, inter G & apicem D, punctum quodvis K. Ductaque tangente BKS, sumantur utrimque æquales BF, BC, & rhombus compleatur BFNC. Ducantur deinde ex A centro ut prius, rectæ AK, AB, AE. Quoniam jam arcus EK major est sextà parte circumferentiæ, angulus EAK erit major sextà parte 4 rectorum, adeoque major 2 sextis 2 rectorum. Unde KBE minor erit 4 sextis duorum rectorum, ac proinde singuli æqualium ABK, ABE minores 2 sextis 2 rectorum. Sed ob CN, BF parallelas, BNC par est ABK. Ergo & BNC minor est 2 sextis. Quare cùm etiam ABC duabus sextis minor sit, reliquus BCN, duabus sextis major erit, ac proinde major quàm BNC. Unde BC minor est quàm BN rhombi diameter. Atqui BN semita *c* est motus compositi ex motu secundùm inclinationem tangentis BKF, & ex motu æquè celeri lationis versùs M: BC verò est semita percursa à motu lationis versùs M solo, quæ omnia patent ex primæ partis discursu. Ergo motus secundùm inclinationem tangentis BKF, hoc est motus ipse circularis, in puncto K, motui versùs M *d* favet. Quare cùm punctum K assumptum fuerit quodlibet in arcu GD, liquet circularem motum per arcum totum GD favere motui recto versùs M. Unde jam idipsum quoque manifestum erit de arcu DQ.

c Lemma.
d Defin.

Lemma I.

Schematismus 17. Fig. 128.

Parallelogrammum construere, quod diametrum (AH) habet æqualem basi (AB,) latus verò (AF) ad basim (AB) in ratione datâ (Q ad S.)

Describantur duo æquales circuli per mutua transeuntes centra A, & O, & sese intersecantes in E: per centra ducatur recta COAB. Si jam ratio data Q ad S fuerit æqualitatis, duc AE, & EI parallelam AB, ac junge AI; factumque erit quod petitur. Quia enim IE parallela est ad BC transeunti per centra A, O, ac proinde etiam parallela est ipsi DN utrumque circulum tangenti; ergo tam IE quàm BA sunt *a* æquales DN, ac proinde & inter se; Quare etiam AE, BI, quæ æquales ac parallelas IE, BA nectunt, sunt parallelæ. Ergo AEIB est parallelogrammum, in quo latus AE, basis AB, diameter AI æquales sunt.

a Lem. 2. Theor. 20.

Quod si ratio data Q ad S fuerit minoris inæqualitatis, fiat ut Q ad S, ita quæpiam recta ad AB, quæ extremitatem habens in A circulo ANC inscribatur & sit AF; ductaque FH parallelâ AB, junge rectas AH, BH. Ostendam, ut suprà, AFHB esse parallelogrammum; in quo FA ad AB habet datam rationem minoris inæqualitatis, & diameter AH est æqualis basi AB.

Tandem si ratio data Q ad S, sit inæqualitatis majoris, oportebit illam esse minorem duplâ. Fiat igitur ut Q ad S, ita recta quæpiam ad AB. Erit hæc juxta determinationem jam positam, minor quàm CA dupla AB; ac proinde circulo ANC inscribi poterit, ut AK. Duc KG parallelam AB, & junge BG, AG. Ostendam rursus, ut suprà, AKGB esse parallelogrammum, in quo latus AK sit majus basi AB in ratione datâ: diameter autem AG & basis AB æquales sint; Demonstratio determinationis patet.

Lemma II.

Schematismus 17. Fig. 138.

Parallelogrammum, exem. gr. AFHB, habens diametrum AH basi AB æqualem, latus verò AF minus basi, minorem habet angulum FAB angulo EAB rhumbi AEIB, in quo basis AB, diameter AI, & latus

tus AE æqualia sint. Et quo latus AF minus fuerit, eò angulus FAB minus excedet rectum DAB, fietque excessus ille tandem dato acuto minor.

Quod si parallelogrammum, exem. gr. AKGB, diametrum habens AG æqualem basi AB, latus habeat AK basi majus; tunc angulus KAB major est quam EAB angulus rhombi AEIB. Et quo latus AK propius accesserit ad magnitudinem ipsius AC duplæ AB, eò angulus KAB propiùs accedet ad quantitatem duorum rectorum; eritque defectus tandem dato acuto minor.

Quæ omnia patent consideranti.

Lemma III.

Schematismus 17. Fig. 129.

Datum sit parallelogrammum ADCB habens diametrum AC parem basi AB. Parallelogrammum habens eandem laterum rationem, quam DA, AB, si angulum majorem habuerit angulo DAB, habebit diametrum basi minorem; si angulum habeat ipso DAB minorem, habebit diametrum basi majorem.

Centris A & B per D & C describe circulos, & fac parallelogramma, quorum anguli E, H, F, G ad peripherias existant. Erunt horum latera ipsis DA, BA, proportionalia; imò æqualia. & AH diameter ejus, quod angulum habet EAB majorem angulo DAB, minor est rectâ AC, hoc est basi AB. Diameter autem AG, alterius habentis angulum FAB minorem angulo DAB, major est basi AB. Qualis autem est ratio diametrorum ad bases in parallelogrammis AEHB, AFGB, talis est in omnibus alijs quæ his similia sunt. Liquet ergo propositum.

THOREMA XXV.

Schematismus 17. Fig. 132. 133.

Ponantur eadem quæ theoremate 23: sed circularis motus EGDQE sit jam tardior motu recto versùs M.

a Per lem. 2. Præced.

Fiat, parallelogrammum XZ habens diametrum TV æqualem basi TZ; latus verò XT ea proportione minus basi TZ, quà motus circularis est tardior recto. Tum ex centro A duc AR, quæ cum tangente PEC faciat angulum ARC parem angulo XTZ. Ad AR duc perpendicularem AK occurrentem circulo in K: & arcui EK abscinde æqualem IE.

Dico: motum circulatem tardiorem recto in ratione XT ad TZ adversari recto per arcum totum EK: favere autem per KDI: ac rursum per IE adversari.

Ducatur enim tangens SKP. Quoniam angulus AKP rectus est 18, 3, & KAR rectus ex constructione; erunt SKP, & AR parallelæ. Angulus igitur EPS par est angulo CRA hoc est angulo XTZ. Quare si PS, PC abscindantur lateribus XT, TZ proportionales, & compleatur PSNC parallelogrammum erit hoc simile ipsi XZ; in quo, quia diameter TV par est basi TZ, etiam in illo diameter PN basi PC æqualis erit. Si jam duo motus fiant alter per rectam PS, alter per PC, sic ut is qui per PS, sit ea ratione tardior eo qui per PC, qua SP minor est quàm PC; eodem tempore hic PS percurret quo ille PC. Ac proinde *a* motus ex utroque compositi semita

a Lemm. theor. 23.

eodem tempore confecta erit diameter PN, diameter parallelogrammi. Quæ quia par est *b* basi PC, quæ motu, qui fertur versùs C, conficitur, liquet motum secundùm inclinationem tangentis PS non adversari motui lationis per PC. Quare cum circularis motus EKD in puncto K feratur secundùm inclinationem tangentis PKS, is lationi rectæ versùs C nec adversatur, *c* nec favet. Unde id ipsum etiam patet de puncto I.

b Per construc.

c Defin. ante theor.

Sumpto deinde puncto quovis *a* in arcu EK in eo tangat recta *aa*: si in angulo *aa* C fiat parallelogrammum, latera habens ipsis SP, PC proportionalia, hujus diameter basi erit *d* minor, diameter autem illa est *e* semita, quam percurrit motus compositus ex motu secundùm inclinationem tangentis *aa*, & ex motu tempore eodem percurrente basim, ac tendente versùs C. Liquet ergo motum secundum inclinationem tangentis *aa*, hoc est motum circularem in puncto *a*, adversari *f* lationi versùs C. Quia ergo punctum *a* assumptum fuit quodlibet, motus circularis per totum arcum EK adversatur lationi rectæ versùs C. Unde & id ipsum patet de arcu IE.

23.

d Lemma 3. præced.

e probatur ut supra.

f defin. ante theor. 23.

Sumatur deinde punctum quodvis *b* inter K, & punctum summum D, in quo tangat *bb*; & in angulo *bb* E fac parallelogrammum habens latera ipsis SP, PC proportionalia, hujus diameter *h* major basi erit. Ex quo applicando discursus hactenus factos, facilè constat motum circularem in puncto *b*, ac proinde & per totum arcum KD favere *g* motui recto versùs C. Unde id ipsum quoque patet de arcu DI.

h Lem. 3. præc.

g defin. ante theor. 23

THEOREMA XXVI.

Schematismus 17. Fig. 132. 133.

Ijsdem positis:

Si motus circularis fuerit recto tardior, circularis adversabitur utrimque recto per arcus majores circumferentiæ sextantibus EG, QE. Et quo tardior fuerit circularis motus, eò per majores utrimque arcus recto adversabitur: semper tamen per minores quadrantibus, EO, HE, quantacunque fuerit tarditas motus circularis.

Construantur eadem quæ in præcedenti, in qua ostendimus, posito quod circularis motus superetur à recto, ut XT, ab TZ, hoc est *a* ut SP ab PC, circularem adversari recto per arcum EK, & ab altera parte descendendo per arcum IE ipsi EK æqualem. Ex demonstratis autem *Theor.* 23. manifestum est, si à rectâ Bβ, quæ tangit in G termino sextantis EG, & à tangente BM abscindantur æquales, & compleatur rhombus, hujus diametrum fore basi æqualem. Parallelogrammi igitur PSNC habentis diametrum PN, basi PC parem, latus verò SP basi minus, angulus SPC *b* minor erit angulo rhombi GBC. Ergo punctum K in quo latus SP tangit, altius necessariò est quàm G, in quo tangit rhombi latus, ac proinde arcus EK major est sextante EG. Quod erat primum.

a Per constr. præc.

b Lemma 2. theor. 25.

Deinde quo motus circularis plus deficiet à recto, eò etiam (ut patet ex const. præcedenti) SP plus deficere debet ab PC. Ergo etiam angulus SPC eò fiet *c* minor rhombi angulo GBC, ac proinde contactus K eò fiet altior, arcusque EK eò erit major. Quod erat alterum.

c Ibidem.

Dein-

d *Ibidem.*

Denique quia angulus parallelogrammi habentis diametrum basi æqualem semper *d* manet major recto; manifestum est latus SP, quod contactu suo determinat quantitatem arcus, per quem circularis motus impedit rectum, non posse tangere in O, sine quadrantis EO, aut supra O. Ex quo patet tertium.

THEOREMA XXVII.

Schematismus 17. Fig. 130. 131.

Ponantur eadem quæ suprà; sed motus circularis sit jam velocior motu lationis recto; minus tamen quàm duplo.

a *Lemm.* 1. *Theor.* 25.

Fiat parallelogrammum *a* XZ habens diametrum TV æqualem basi TZ; latus autem XT eâ proportione majus basi TZ, quâ circularis motus ponitur velocior motu recto. Ducatur deinde ex centro circuli AR, cum tangente EM faciens angulum ARM parem angulo XTZ. Tum ad AR duc perpendicularem AK occurrentem circulo in K: & arcui EK abscinde æqualem EI.

Dico circularem motum qui eâ proportione recto velocior est, qua XT superat TZ, adversari recto per arcum EK: favere autem per KDI, tum descendendo adversari rursum per IE.

Demonstratio eadem, quæ theorematis vigesimi quinti.

THEOREMA XXVIII.

Schematismus 17. Fig. 130. 131.

Iisdem positis:

Si motus circularis fuerit recto velocior, sed minus quàm duplo adversabitur utrimque recto per arcus minores sextantibus circumferentiæ EG, QE, & quo propius accesserit ad velocitatem duplam, eò per minores utrimque arcus adversabitur, qui tandem fient data quantitate qualibet minores.

Construantur eadem quæ in præcedenti, & circulum in K tangat SKP. Tum abscindantur PS; PC proportionales ipsi TX, TZ, & compleantur parallelogrammum PSNC. Erit hujus latus SP ad basim PC, ut *a* motus circularis ad rectum, & diameter PN erit par basi PC. Erit enim SC simile ipsi XZ, in quo TV par est TZ. Jam verò demonstratum suprà *b* est, posito quod ita circularis motus superet rectum, ut SP superat PC, circularem adversari recto per arcum EK ascendendo, descendendo autem per arcum huic æqualem IE. Deinde ex demonstratis *Theor.* 23, manifestum est, si à recta Bβ (quæ circulum tangit in G extremitate sextantis EG) & à tangente BM abscindantur æquales, rhombusque compleatur, hujus diametrum suæ basi fore æqualem. Parallelogrammi igitur PSNC diametrum PN habentis PC basi æqualem, latus autem PS basi majus, angulus SBC major *c* erit rhombi angulo GBC. Ergo punctum K, in quo latus PS tangit, est infra punctum G in quo tangit rhombi laus Bβ, ac proinde arcus EK minor est sextante BK. Quod erat primum.

a *Constr. præced.*

b *Theor.* 27.

c *Lemm.* 3. *Theor.* 25.

Deinde quò motus circularis propius accedit ad velocitatem duplam, eò etiam vi constructionis latus SP accedet propius ad duplum baseos suæ PC. Ergo etiam *d* angulus SPC eò fiet major & accedet propius ad quantitatem duorum rectorum; ac proinde contactus K eò fiet demissior, arcusque EK eò fiet minor, ac tandem minor dato: angulus enim SPC deficiet *e* tandem à duobus rectis angulo, qui sit dato minor, unde etiam arcum EK fieri tandem necesse est dato minorem. Quod erat alterum.

d *Ibidem.*

e *Ibidem.*

THEOREMA XXIX.

Iisdem positis:

Si motus circularis EGDQE sit velocior duplo vel ampliùs motu lationis recto versùs C, per nullam circumferentiæ partem ipsi adversabitur, sed favebit totaliter.

Demonstratio satis patet ex secunda parte Theorematis præcedentis: Nihilominùs, si ita placet, sic demonstro,

Præmisso hoc postulato: duos circulares motus, diversæ velocitatis, non posse eidem recto motui per æquales circumferentiæ partes adversari. Adversetur, si fieri potest, motus circularis duplo aut amplius velocior recto, per arcum aliquem EK. Ducatur tangens SKP, & in angulo SPE fiat parallelogrammum PSNC, habens diametrum PN basi PC æqualem. Manifestum est ex demonstratis *Theor.* 27. motum circularem cujus velocitas est ad velocitatem motus recti, ut SP est ad PC, adversari motui recto, per arcum EK. Atqui latus SP necessariò est minus quàm duplum baseos PC, ut patet ex determinatione *lemmatis* 1. *Theor.* 25: ac proinde & motus circularis, qui recto adversatur, per arcum EK, est minus quàm duplo velocior motu recto. Ergo duo inæquales motus circulares, unus duplo velocior recto, alter minus quàm duplo velocior, eidem recto motui per eundem arcum EK, adversantur quod postulato repugnat.

Corollarium.

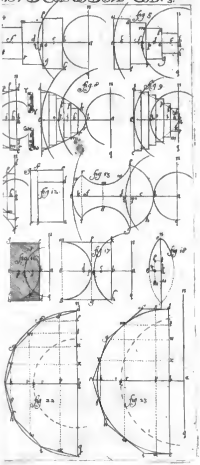
Ex iis quæ septem postremis Theorematis demonstravimus intelligitur, dum sphæra per planum volvitur, quantum circularis motus cujuslibet in sphæra puncti per cycloidem suam progredientis motum impediat vel juvet. Si enim circularis motus sit æquè velox ac rectus (quod semper ad sensum fit, dum sphæra volvitur liberè per planum materiale) impediet puncti per cycloidem suam progressionem tertia parte temporis, quo una volutio integra absolvitur: juvabit autem per duas tertias partes temporis ejusdem. Patet ex *Theor.* 24.

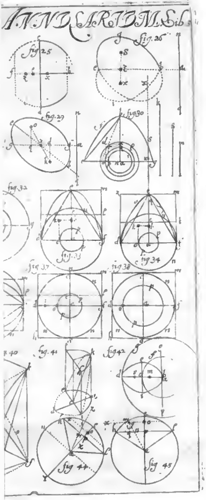
Quod si circularis motus sit recto tardior impediet progressionem puncti per suam cycloidem plus, quàm per tertiam partem temporis integræ unius volutionis; juvat autem minus quàm per duas tertias temporis. Et quò circularis motus plus superabitur à recto, eò diutiùs impediet; semper tamen minus quàm per temporis semissem. Patet ex *Theor.* 26.

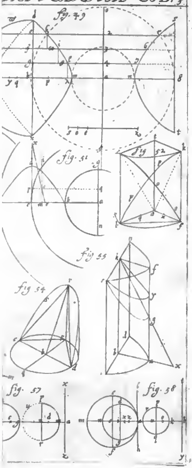
Quod si motus circularis sit recto (minus tamen quàm duplo) velocior, impediet minus quàm per temporis partem tertiam patet ex *Theor.* 28.

Denique si duplo aut amplius velocior existat, non jam amplius impediet, sed toto tempore juvabit puncti per suam cycloïdalem orbitam progressionem. Liquet ex 29. Theoremate.

FINIS.




fig. 25
fig. 26
fig. 29
fig. 30
fig. 32
fig. 33
fig. 34
fig. 37
fig. 38
fig. 41
fig. 42
fig. 44
fig. 45


fig. 49
fig. 51
fig. 52
fig. 54
fig. 55
fig. 57
fig. 58